Dinámica Combinatoria

Ll. Alsedà

Universitat Autònoma de Barcelona

`http://mat.uab.es/~alseda`

Los Sistemas Dinámicos:

Una clasificación (demasiado) simplista

- **Dinámica Diferenciable**
- **Dinámica Continua**
  - Dinámica combinatoria
  - Dinámica Topológica
  - Teoría Ergodica — "Dinámica Estadística"

Dinámica Topológica

- Caracterización topológica de los conjuntos límite, minimales, invariantes, caóticos, ...
- Transitividad
- Estudio de los distintos tipos de propiedades de recurrencia
- Dinámica sobre conjuntos “raros” (cantorianos, ... — conjuntos límite, minimales, invariantes, caóticos, ...). Equivalencia con los “shifts”.

Teoría Ergodica — “Dinámica Estadística”

- Entropía (métrica, topológica)
- Relación de la transitividad con la entropía
- Acciones en grupos; dinámica algebraica. Shifts.

Dinámica Combinatoria

- Estudio del conjunto de períodos: implicaciones entre períodos
- Patterns
- Implicaciones entre patterns: relación de forcing y sus consecuencias.

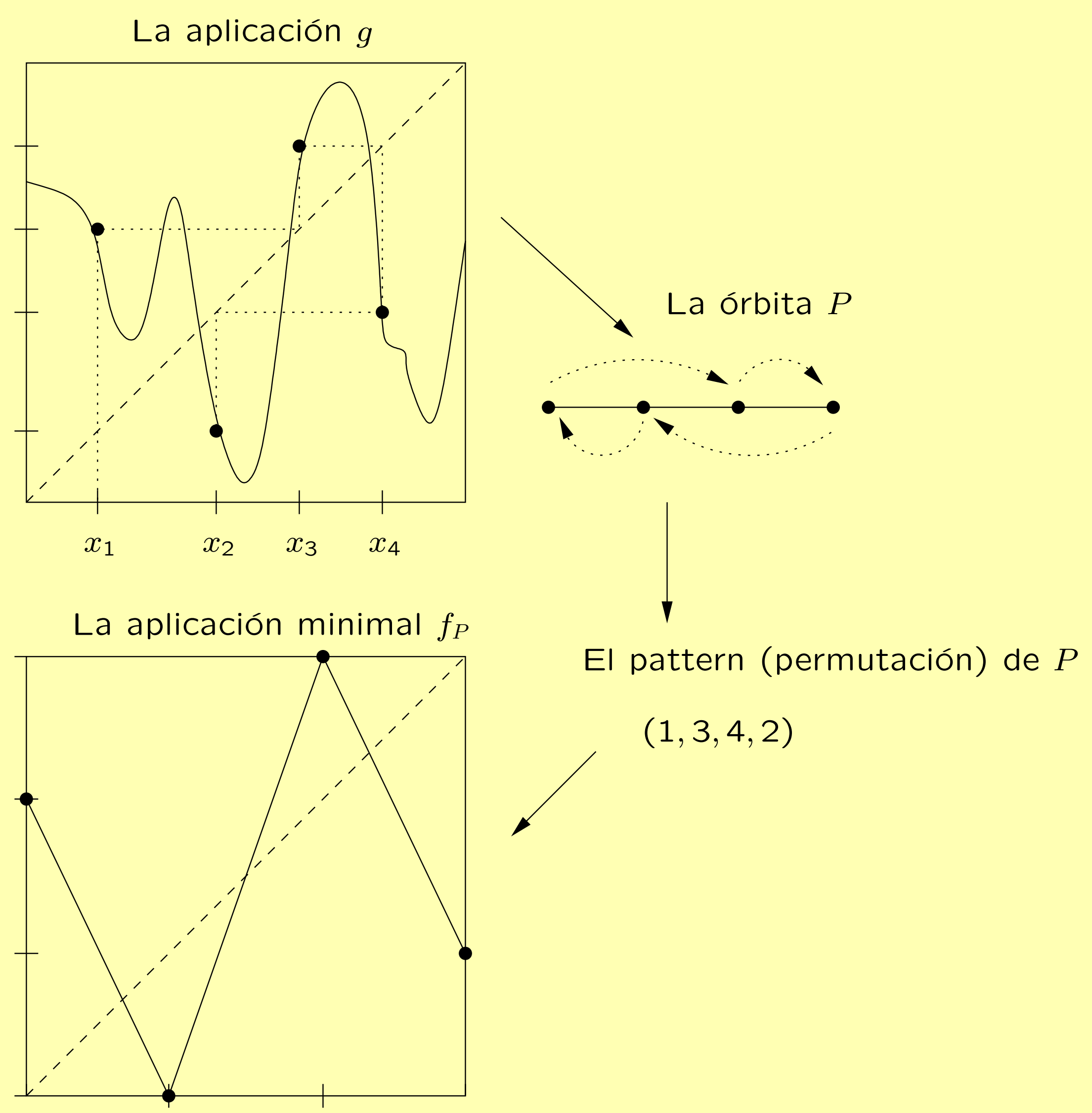
Una idea central en el estudio de la Dinámica Combinatoria:

Formulación 1: Dado un conjunto invariante, estudiar la dinámica que implica.

Formulación 2: Dado el tipo combinatorio (pattern) de un conjunto invariante, estudiar la dinámica que implica.

Formulación 3: Dado el tipo combinatorio (pattern) de un conjunto invariante, obtener un (el?) modelo de dinámica minimal asociado y estudiar su dinámica.

El ejemplo clásico: la función “Connect-the-dots”



- Como veremos, la función “Connect-the-dots” caracteriza el *forcing* en el intervalo.
- Existen otros ejemplos relevantes desgraciadamente no tan simples!!

Three known cases

periodic orbit of	pattern A	canonical representatives
interval map	permutation π induced by map on orbit	'Connect-the-dots' maps f_π
surface homeo.	braid type (isotopy class rel. orbit)	Nielsen-Thurston representatives
tree map	'relative positions' of the points of orbit	canonical models of [AGLMM]

(A) f_π minimizes topological entropy within the class of interval maps admitting a periodic orbit whose pattern is π.

(B) f_π admits a Markov partition which gives a good "coding" to describe the dynamics of the map f_π. The topological entropy of f_π may be calculated from this partition.

(C) f_π is essentially unique.

(D) the pattern of A forces a pattern ρ if and only if f_π has a periodic orbit whose pattern is ρ. We recall the definition that a pattern A *forces* a pattern B if and only if each map exhibiting the pattern A also exhibits the pattern B. In this sense, the dynamics of f_π are minimal within the class of maps admitting a periodic orbit whose pattern is π_A.

Porque estudiar Dinámica en árboles y grafos?

1. El estudio de la dinámica de los homeomorfismos de superficies (pseudoanosov) se reduce al de aplicaciones de grafos (representante Nielsen-Thurston): foliaciones singulares transversales y partición de Markov.

2. El estudio (en principio académico) de la Dinámica en árboles y grafos permite darse cuenta de fenómenos que en el intervalo y la circunferencia pasan desapercibidos por la excesiva simplicidad del espacio, debido a que aparecen con una mayor complicación en espacios más complicados. Dicha complejidad no permite que pasen desapercibidos.

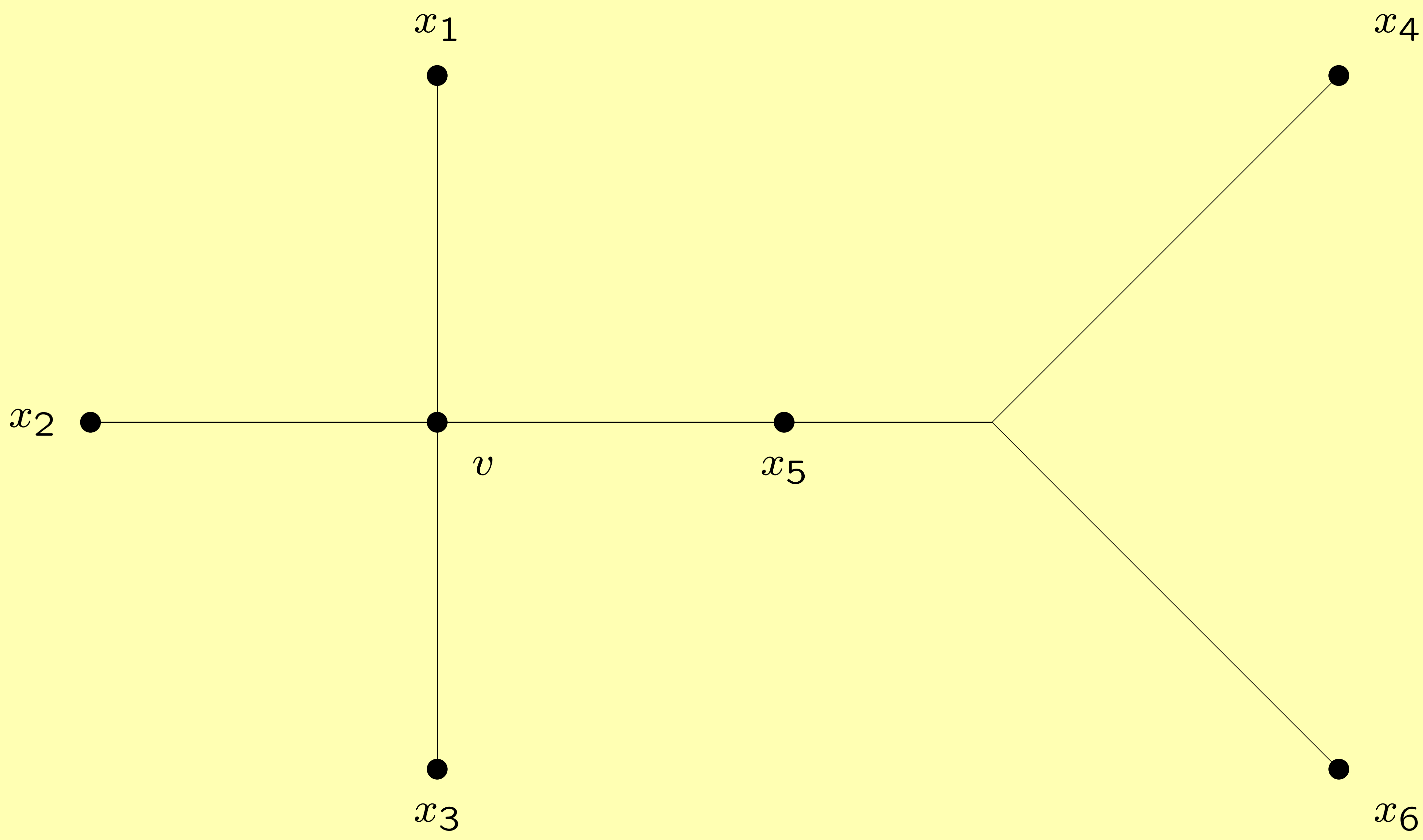
Recordatorio del programa a realizar

Objetivo. *Dado el tipo combinatorio (pattern) de un conjunto invariante, obtener un (el?) modelo de dinámica minimal asociado y estudiar su dinámica.*

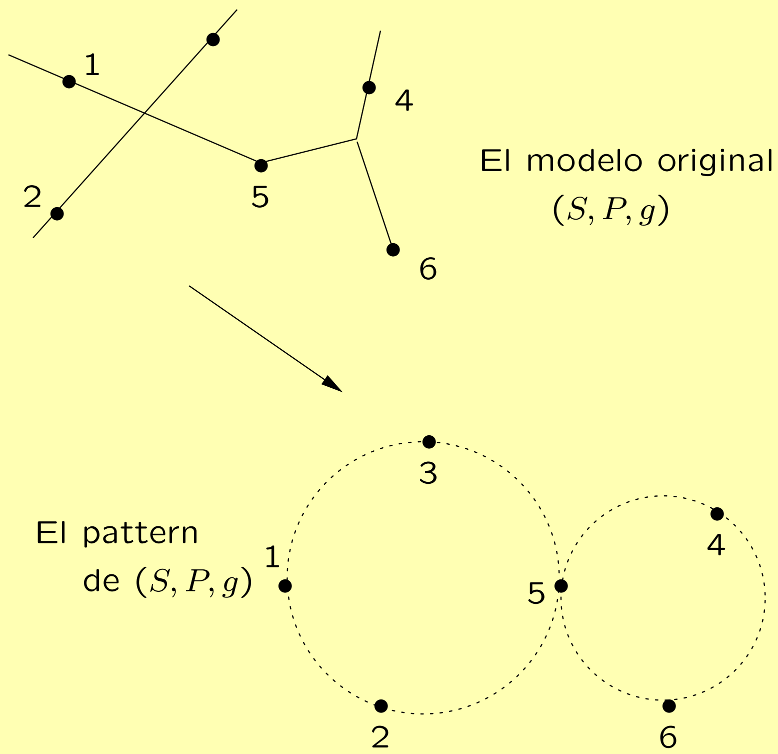
Para ello debemos:

1. Definir la noción de tipo combinatorio (pattern) de un conjunto invariante,
2. Obtener un (el?) modelo de dinámica minimal (canónico) asociado, y
3. estudiar su dinámica.

Primer problema: no tiene porque existir la función "Connect-the-dots" como en el caso del intervalo



Una idea intuitiva de la definición de pattern



La definición de pattern

Un *grafo (topológico)* es un espacio de Hausdorff conexo G, que es la unión finita de subespacios G_i, cada uno de ellos homeomorfo a un intervalo cerrado no degenerado de la recta y $G_i \cap G_j$ es finito para cada $i \neq j$. Claramente un grafo es compacto. Los puntos de un grafo que no tienen ningún entorno homeomorfo a un intervalo se denominan *vértices*. El conjunto de vértices de un grafo G se denota por $\mathsf{V}(G)$ y es claramente finito (o vacío — cuando G es homeomorfo a la circunferencia).

La clausura de cada componente conexa de $G \setminus \mathsf{V}(G)$ es una *arista de G*. Claramente, un grafo tiene un conjunto de aristas finito, y cada una de ellas es homeomorfa a un intervalo o una circunferencia.

Un *árbol* es un grafo únicamente arco-conexo.

Sea G un grafo, sea $z \in G$ y sea U un entorno abierto (en G) de z tal que $\mathrm{Cl}(U)$ es un árbol. El numero de componentes conexas de $U \setminus \{z\}$ se denomina la *valencia de z*

y se denota por $\mathsf{Val}(z)$. Notemos que esta definición es independiente de la elección de U y que $\mathsf{Val}(z) \neq 2$ si y solo si $z \notin \mathsf{V}(G)$. Un vértice de valencia 1 es un *endpoint de G* (punto terminal) y un punto de valencia mayor que 2 se denomina un *branching point de G* (punto de ramificación).

Let T be a tree and let $A \subset T$ be a finite subset of T. The pair (T, A) will be called a *pointed tree*. A set $Q \subset A$ is said to be a *discrete component* of (T, A) if either $|Q| > 1$ and there is a connected component C of $T \setminus A$ such that $Q = \mathsf{Cl}(C) \cap A$, or $|Q| = 1$ and $Q = A$. We say that two pointed trees (T, A) and (T', A') are *equivalent* if there exists a bijection $\phi\colon A \longrightarrow A'$ which preserves discrete components. The equivalence class of a pointed tree (T, A) will be denoted by $[T, A]$.

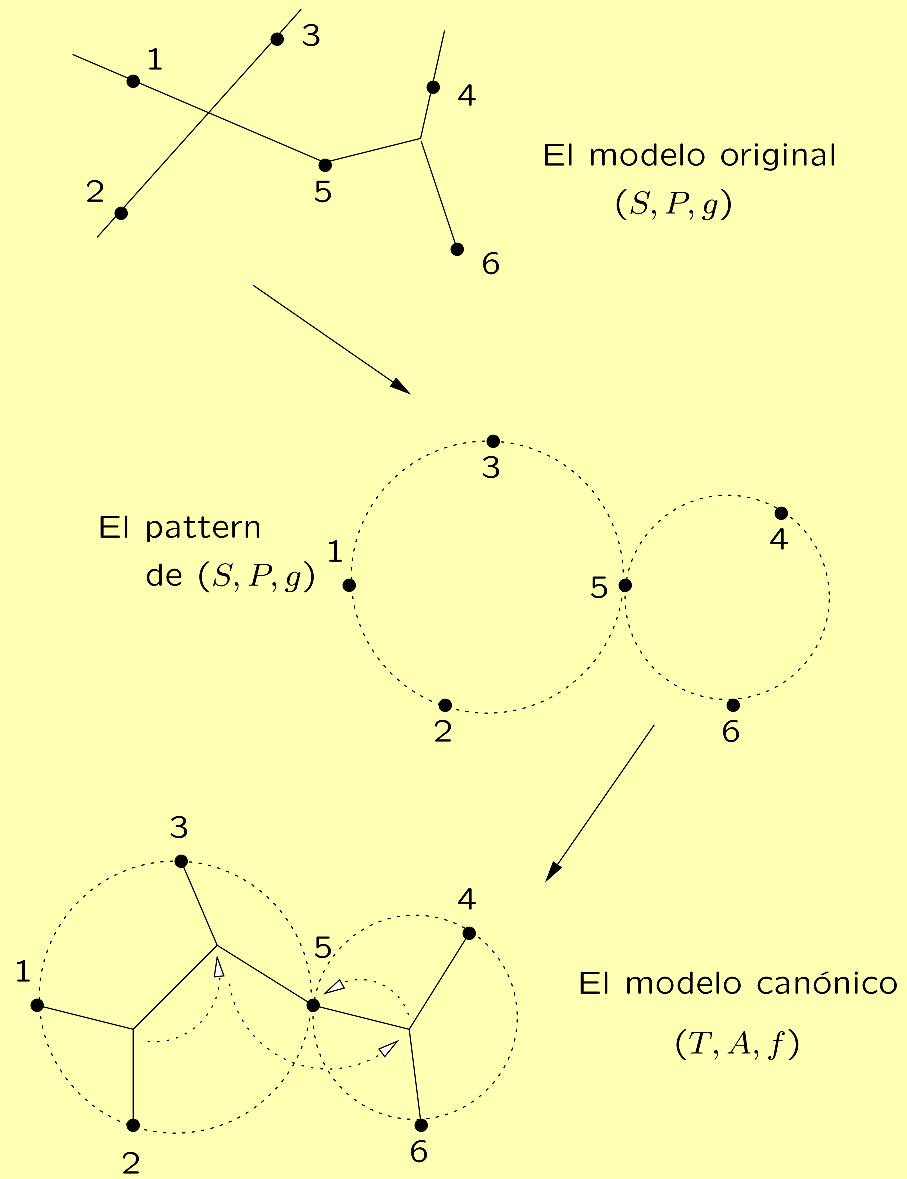
Let (T, A) and (T', A') be equivalent pointed trees, and let $\theta\colon A \longrightarrow A$ and $\theta'\colon A' \longrightarrow A'$ be maps. We will say that θ and θ' are *equivalent* if $\theta' = \varphi \circ \theta \circ \varphi^{-1}$ for a bijection $\varphi\colon A \longrightarrow A'$ which preserves discrete components. The equivalence class of θ by this relation will be denoted by $[\theta]$. If $[T, A]$ is an equivalence class of pointed trees and $[\theta]$ is an equivalence class of maps then the pair $([T, A], [\theta])$ will be called a *pattern*.

La generalización de la función “Connect-the-dots”

1. f es *A-monotona*: si $\{a, b\} \subset A$ y $(a, b) \cap A = \emptyset$, entonces f aplica $[a, b]$ monotonamente “onto” $[f(a), f(b)]$.
2. $f(V(T)) \subset V(T) \cup A$ (consecuencia de (1)). Por tanto $A \cup V(T)$ es f−invariante y $(T, A \cup V(T), f)$ es un modelo *Markov*. Por tanto su entropía es el logaritmo del radio espectral de la matriz de transición del grafo de Markov.
3. En general $T \neq S$!!

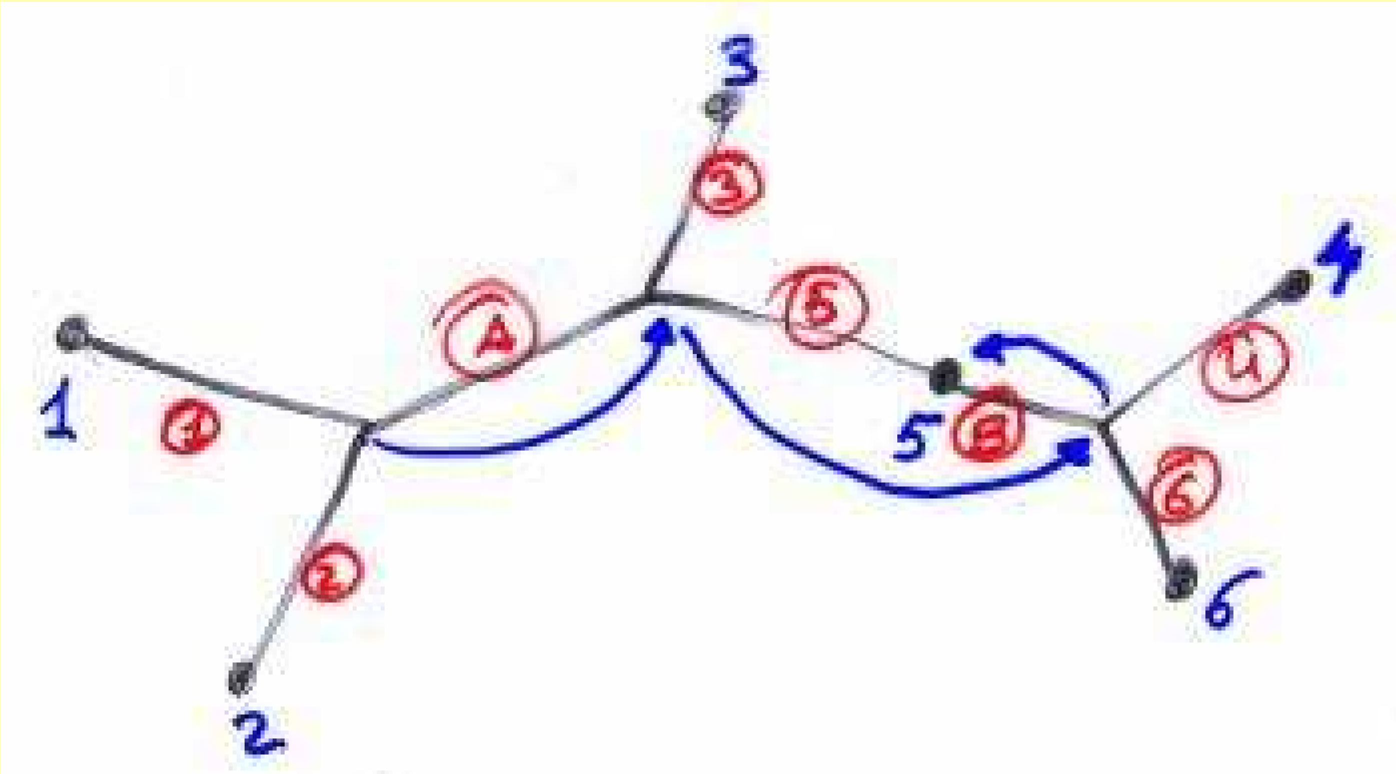
Problema: Existen los modelos A-monótonos?

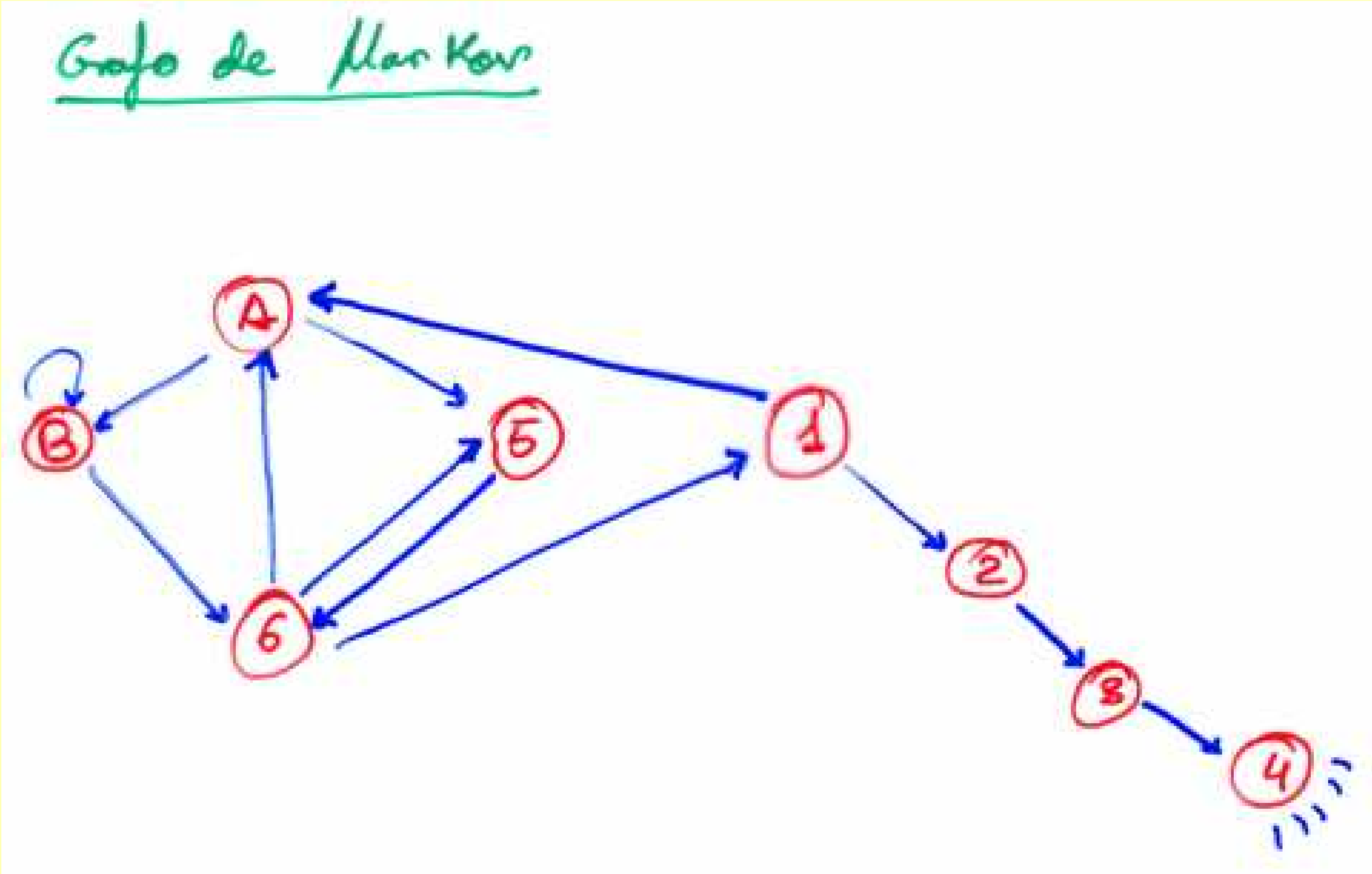
Ejemplo de modelo A-monótono



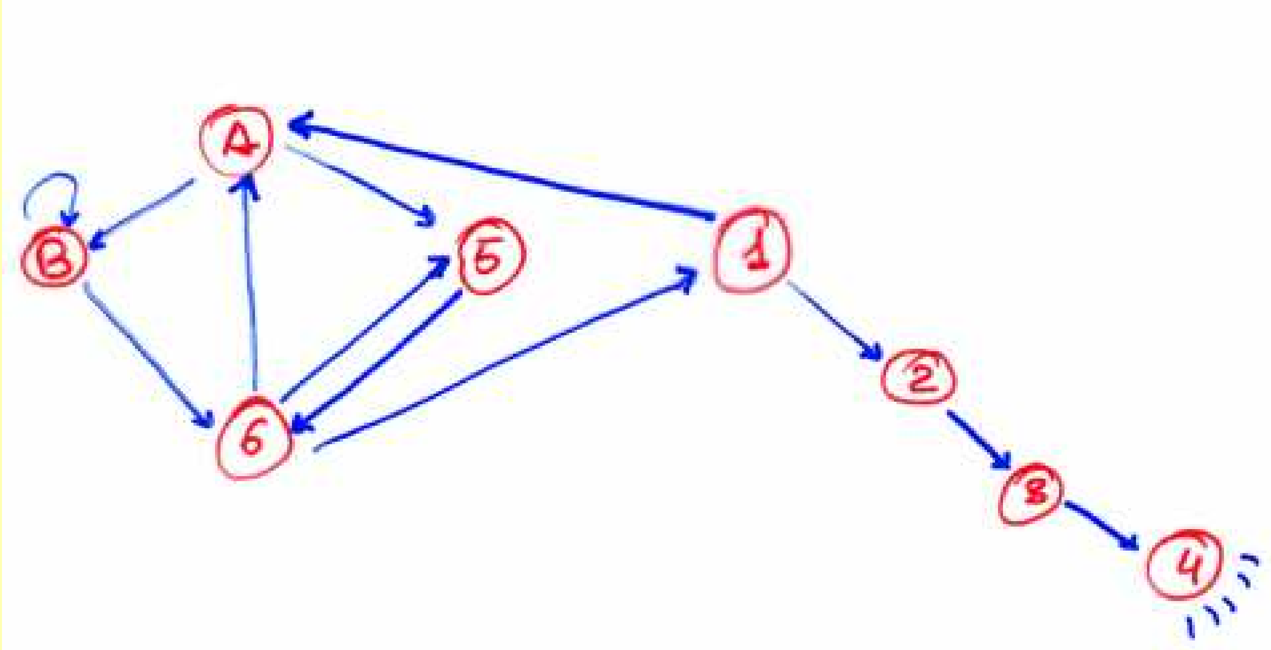
NOTA: La entropía es el logaritmo del radio espectral de la matriz de transición del grafo de Markov.

Dinámica del modelo A-monótono (Grafo de Markov)





Grafo de Markov



Matriz de Transición

$$
T = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} A & B & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|ccc}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
= \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}
$$

$$
T^n = \begin{pmatrix} A_1^n & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad n \geq 3. \quad \Rightarrow \rho(T) = \rho(A_1)
$$

Existence of A-monotone models

The next theorem tells us that each pattern has a minimal model from the point of view of its dynamical complexity (minimization of topological entropy).

Theorem. *Let $(\mathcal{T}, \Theta)$ be a pattern. Then the following statements hold.*

(a) There exists a monotone model exhibiting the pattern $(\mathcal{T}, \Theta)$.

(b) The topological entropy of any monotone model is the minimum within the class of models which exhibit the pattern $(\mathcal{T}, \Theta)$.

Dynamical minimality of A-monotone models: entropy

There exists a certain combinatorial graph, which is uniquely associated to $\mathcal{P}$ as follows: Let (T, A, f) be a model exhibiting a pattern $(\mathcal{T}, \Theta)$. Any (unordered) binary subset of a discrete component will be called a *basic path* of (T, A). The *(T, A, f)-path graph* is the oriented graph whose vertices are the basic paths of (T, A) and there is an arrow from π_i to π_j if and only if $\pi_j \subset \langle f(\pi_i) \rangle$. Observe that if (S, P, g) is another model exhibiting $(\mathcal{T}, \Theta)$ then the (S, P, g)-path graph and the (T, A, f)-path graph are isomorphic. Thus a unique oriented graph can be constructed by using only combinatorial data common to all representatives of $(\mathcal{T}, \Theta)$. This combinatorial graph will be called the *$(\mathcal{T}, \Theta)$-path graph*.

It turns out that the entropy of any A-monotone model is the logarithm of the spectral radius of the transition matrix of the path graph (thus computable by using only combinatorial data common to all representatives of the pattern)!!!

Dynamical minimality of A-monotone models: periodic points

On the other hand, the dynamics of monotone models is also minimal from the point of view of the set of periodic orbits (that is, in a sense different from the one given by the above theorem).

Let $f\colon T \longrightarrow T$ be a tree map, and let $x, y \in T$ be fixed points of f^n for some $n \in \mathbb{N}$. We say that x and y are *f-monotone equivalent* if either $x = y$ or $f^n|_{\langle x,y\rangle}$ is monotone. Observe that, since x and y are fixed points of f^n, the f-monotone relation is an equivalence relation.

Remark. It is easy to see that if x and y are f-monotone equivalent then $f^i(x)$ and $f^i(y)$ are also f-monotone equivalent, for each $i \geq 0$.

Given a model (T, A, f), we say that a periodic point of f is *significant* if it is not f-monotone equivalent to any element of $A \cup V(T)$ and its period is minimal within its f-monotone equivalence class.

Theorem. *Let (T, A, f) be a monotone model exhibiting a pattern $(\mathcal{T}, \Theta)$. Then the following statements hold.*

(a) For each significant periodic point x of f of period n there exists a unique non-repetitive loop β of length n in the $(\mathcal{T}, \Theta)$-path graph such that x and β are associated.

(b) Each non-repetitive loop β of length n in the $(\mathcal{T}, \Theta)$-path graph is associated either to a significant periodic point of f of period n or to a periodic point which is f-monotone equivalent to a point of $A \cup V(T)$ and whose period is a divisor of n. In both cases, the point associated to β is unique up to f-monotone equivalence.

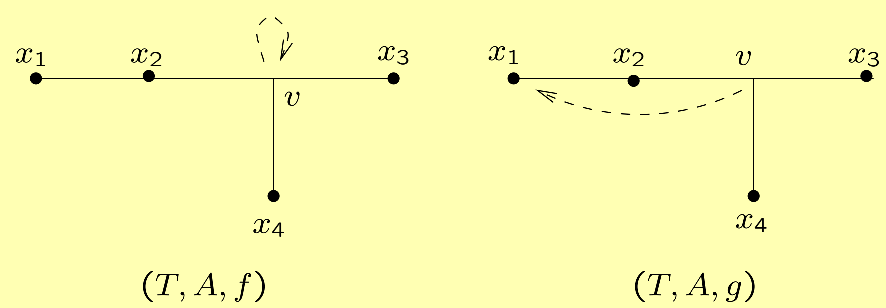
Theorem. *Let (T, A, f) be a model exhibiting a pattern $(\mathcal{T}, \Theta)$ and let β be a non-repetitive loop of length n of the $(\mathcal{T}, \Theta)$-path graph. Then there exists a fixed point x of f^{2n} such that β and x are associated.*

Therefore, the set of periods of a monotone model is *essentially* (up to f-monotone equivalence and period-doubling) contained in the set of periods of each model of the same pattern.

Problem: Minimality should mean that *the set of patterns of any monotone model is contained in the set of patterns of any representative of the pattern (as in the interval).*

An example

Consider the pattern $\mathcal{P}$ and the monotone model (T, A, f) shown in the picture. It is easy to see that $f(v) = v$. Now consider a model (T, A, g) of $\mathcal{P}$ such that $g(v) = x_1$ and g is monotone between consecutive points of $A \cup \{v\}$. Since g maps the interval $[v, x_4]$ onto the point x_1, there are no periodic points of g in $[v, x_4]$. In consequence, each periodic orbit of g (except A) is necessarily contained in $T \setminus (v, x_4] = [x_1, x_3]$. Summarizing, *each periodic orbit of g is contained in an interval*. On the other hand, one can easily check that the monotone model (T, A, f) has some periodic orbits which are not contained in an interval.



Propuestas de investigación futura

- Existe una definición (muy topológica) de pattern para grafo pero no se conoce la existencia de modelos minimales relativos a una órbita periódica dada.
- Estudiar la teoría del “forcing” para árboles y grafos.
  - Bifurcaciones de familias de modelos $A \cup V(T)$–monótonos parametrizadas por las imágenes de los vértices: aparición y eliminación de órbitas periódicas y patterns; así como variación de la entropía (recordemos el último ejemplo).
- Estudiar los comportamientos límite de las órbitas en árboles y grafos: conjuntos límite, minimales, ...
- Extender los resultados al contexto de conjuntos invariantes infinitos (cantorianos, ...).