Mètodes de Càlcul Numèric
Tema : Aplicació a l'Àlgebra Lineal

1. Sigui el sistema lineal

$$\begin{aligned} 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 3, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

(a) Resoldre el sistema per Gauss.

(b) Si A és la matriu del sistema trobar la seva descomposició LU.

2. Resoleu pel mètode de Gauss el sistema lineal $Ax = b$ on

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 4 \\ 2 & 0 & 2 & | & 4 \\ 0 & 3 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Considereu les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

i els vectors

$$a = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 49 \\ 32 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 25 \\ 35 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Mitjançant la descomposició LU resoldre els sistemes lineals $Ax = a$, $Ax = b$, $Bx = c$ i $Bx = d$.

4. Càlcul de A^{-1}. Si diem $X = A^{-1} = (x_1, ..., x_n)$ on x_j és la columna j–ésima de la matriu X, tenim $AX = I$ és equivalent $Ax_j = e_j, j = 1, ..., n$. Llavors calcular A^{-1} equival a resoldre n sistemes lineals. Utilitzant la descomposició LU cal fer una unica descomposició i llavors $Ax_j = LUx_j = e_j, j = 1, ..., n$. Utilitzant la descomposició LU amb pivotatge calculeu el determinant i la inversa X de la matriu $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. Calcular una solució aproximada del sistema

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 12, \end{cases}$$

emprant els mètodes de Jacobi i de Gauss–Seidel. Feu els càlculs amb dos decimals fins que $||x^{r+1} - x^r||_1 < 0.01$ per a cadascuna de les variables, prendre com a vector inicial el $x^0 = (0, 0, 0)$.

6. Calcular una solució aproximada del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

emprant els mètodes de Jacobi i de Gauss-Seidel. Feu els càlculs amb dos decimals fins que $||x^{r+1} - x^r||_1 < 0.05$ per a cadascuna de les variables.

7. Calcular una solució aproximada del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -51 \\ 4x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 61 \\ 12x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

emprant els mètodes de Jacobi i de Gauss–Seidel. Feu els càlculs amb 4 decimals fins que $||x^{r+1} - x^r||_1 < 0.05$ per a cadascuna de les variables.

8. Calcular la descomposició QR de les matrius del problemes 1 i 4.

9. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

(a) Trobeu un disc que contingui tots els valors propis de la matriu utilitzant el Teorema de Gerschgorin.

(b) Calcula amb un error més petit que una centèsima el valor propi dominant i el vector propi corresponent pel mètode de la potència prenent el vector inicial $(1, 1, 1, 1)$.

(c) Saben que els 4 valors propis son reals i positius trobar el valor propi més petit.

(d) Determineu, aplicant el mètode de deflació, el segon valor propi amb mòdul més gran.

10. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ \frac{8}{3} & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Trobeu un disc que contingui tots els valors propis de la matriu utilitzant el Teorema de Gerschgorin.

(b) Calculeu el valor propi amb mòdul més gran.

(c) Determineu el valor propi amb mòdul més petit.

(d) Trobeu el valor propi que és proper a -1, sabent que els altres valors propis de la matriu son reals i positius.

(e) Determineu, aplicant el mètode de deflació, el segon valor propi amb mòdul més gran.

11. La matriu següent

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 6 & 9 \\ 7 & 9 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 9 & 7 \\ 9 & 6 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

té un valor prop de 4. Trobeu–lo amb 6 xifres decimals correctes.