Mètodes de Càlcul Numèric

Resolució d'equacions no lineals.

34. Donada la funció $f(x) = e^x - 2 - x$, trobeu dos punts a i b de manera que es compleixi $f(a)f(b) < 0$. Usar llavors el mètode de la bissecció per trobar un interval d'amplada menor que 0.1 que contingui una solució de $f(x) = 0$. A partir d'aquest interval, useu el mètode de la secant fent els càlculs amb cinc decimals arrodonits per trobar-ne una solució aproximada.

Feu el mateix amb les funcions $f(x) = \cos x + 1 - x$, $f(x) = ln\, x - 5 + x$ i $f(x) = x^2 - 10x + 23$.

35. Determinar els valors a, b i c de manera que la iteració $x_{k+1} = g(x_k)$, on

$$g(x) = \frac{x^3 + ax}{bx^2 + c},$$

convergeixi cap a $\sqrt{\alpha}$ amb l'ordre més gran possible. Utilitzeu-la per tal d'obtenir $\sqrt{19}$ amb 8 xifres decimals exactes.

36. Sabem que l'equació $x + \ln(x) = 0$ té una solució a prop del 0.5. Es vol utilitzar per a trobar-la un mètode iteratiu, $x_{k+1} = g(x_k)$, amb $g(x)$ una de les següents funcions:

$$(a)\ -\ln(x), \qquad (b)\ e^{-x}, \qquad (c)\ \frac{ax + be^{-x}}{a+b}.$$

Quines es poden usar? Quina és la millor? Doneu una g encara millor.

37. Aplicar el mètode de Regula-Falsi en l'interval $[0, 1]$ per trobar una arrel de l'equació $e^{-x} - x = 0$. Itereu fins que es verifiqui $|x_j - x_{j-1}| < 0.005$.

38. Es vol calcular la solució de l'equació $e^x = 3x$, usant iteració simple amb diferents funcions d'iteració:

$$g_1(x) = \frac{e^x}{3}, \quad g_2(x) = ln(3x), \quad g_3(x) = \frac{e^x - x}{2}, \quad g_4(x) = e^x - 2x.$$

(a) Quines d'aquestes són útils?

(b) Amb quina d'elles calen menys iteracions per tal d'obtenir el resultat amb una precisió donada, partint del mateix valor inicial? Comproveu-ho numèricament, partint del valor aproximat $x_0 = 0.6$.

(c) Trobeu una funció d'iteració significativament millor que les indicades i useu-la per al cas proposat a (b).

39. Calculeu pel mètode de Newton totes les solucions de les equacions

(a) $x = \cos x$, (b) $x^3 = 10 \sin x$, (c) $x^2 = e^{-x}$,

amb 8 xifres decimals i comproveu la convergència quadràtica del mètode en aquests casos.

40. (a) Emprant el mètode de Newton, trobeu els punts fixos de $g(x) = e^x - 2$ amb un error menor que 10^{-6}.

(b) En quins intervals de valors inicials podem assegurar que el mètode convergeix, i cap a quina solució?

41. (a) Demostreu que el mètode de Newton aplicat a la funció $f(x) = \frac{1}{x} - a$ permet calcular $\frac{1}{a}$ sense fer divisions.

(b) Quina relació exacta existeix entre $e_{k+1} = x_{k+1} - \frac{1}{a}$ i $e_k = x_k - \frac{1}{a}$ $(k \geq 0)$?

(c) Si $a = 0.4$ i $e_0 = -0.2$, per a quins valors de k tindrem $|e_k| \leq 10^{-20}$?

(d) Doneu, en funció d'a, els valors de x_0 que fan que el mètode sigui convergent.

42. (a) Demostreu que la funció $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ té els mateixos zeros que f però simples.

(b) Quins avantatges i inconvenients presenta l'aplicació del mètode de Newton a la funció h enfront de la seva aplicació a f?

(c) Apliqueu el mètode de Newton per tal de trobar el zero de la funció $f(x) = (e^x - \pi)^3$ directament i fent servir la funció h corresponent.

43. L'equació $x - 3\ln(x) = 0$ té un zero a l'interval $(1, e)$. Amb un error més petit que 10^{-7} calculeu aquest zero primer aplicant el mètode de Newton i després aplicant el mètode de Txebixev. Compareu els dues mètodes.

44. Trobeu tots els zeros de la funció $f(x) = \sin x - 2 - 0.3\,x$ amb un error més petit que 10^{-8} utilitzant el mètode de Newton.

45. (a) Trobeu el primer punt de tall positiu α entre les corbes $y = \cos x$ i $y = e^{-x}$.

(b) Calculeu l'àrea compresa enmig de les esmentades corbes entre 0 i α.

46. Usant la regla de Descartes, demostreu que el polinomi de tercer grau $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ té un únic zero real positiu. Calculeu-lo.

Nota: La regla de Descartes assegura que, si ν és el nombre de canvis de signe dels coeficients d'un polinomi $p(x)$ i μ és el nombre de zeros positius de $p(x)$, aleshores $\mu \leq \nu$ i $\nu - \mu$ és parell.

47. Aplicar el mètode de Sturm per separar les arrels reals de l'equació

$$2x^3 - 5x^2 + 2x - 5 = 0.$$

48. Calculeu una cota inferior i superior de les arrels de $8x^3 + 12x^2 - 2x - 3 = 0$. Separeu ara pel mètode de Sturm les seves arrels.

49.

$$p(x) = x^{10} - 17x^8 + 110x^6 - 334x^4 + 465x^2 - 225.$$

Trobeu-los llavors amb una precisió de 10^{-4} utilitzant el mètode de Newton.

50. (a) Localitzar amb el mètode de Sturm els zeros reals del polinomi $x^8 - 4x^7 + 4x^6 + 8x^5 - 24x^4 + 16x^3 + 16x^2 - 32x + 16 = 0$. Trobeu-los llavors amb una precisió de 10^{-4} utilitzant el mètode de Newton.

(b) Aplicar el mètode de Bairstrow per calcular els zeros complexes de l'equació anterior.

51. L'equació $x^3 - e^x + 3 = 0$ té dues arrels, una propera a -1.4 i l'altra propera a 4.6. Trobeu-les utilitzant el mètode iteratiu del punt fix que sigui més convenient per cada cas.