Mètodes de Càlcul Numèric

Tema 1: Interpolació

12. (a) Calculeu $f(3)$ per interpolació quadràtica de la taula

x	1	2	4	5
$f(x)$	0	2	12	21

Utilitzeu primer els valors en $x = 1, 2, 4$, i després els valors en $x = 2, 4, 5$.

(b) Calculeu $f(3)$ per interpolació cúbica.

13. Considereu $f(x) = \ln(1 + x)$ i $x_0 = 0$.

(a) Trobeu l'expressió de $f^{(n)}$ i calculeu llavors $P_n(x)$, el polinomi de Taylor de f d'ordre n i punt base x_0.

(b) Calculeu una cota de l'error si aproximem $\ln(1.5)$ respectivament per $P_3(0.5)$, $P_6(0.5)$ i $P_9(0.5)$.

(c) Trobeu $E_n(x) = |f(x) - P_n(x)|$.

(d) Proveu que si per $x \in (0, 1/2)$ aproximem $\ln(1+x)$ per $P_9(x)$ llavors l'error que cometem és més petit que $0.5^{10}/10$.

14. Calculeu $\ln(0.6)$ de les següents maneres:

(a) Desenvolupant $f(x) = \ln(x)$ per Taylor al voltant de 0.5 i truncant després de la tercera derivada.

(b) Utilitzant el polinomi interpolador de diferencies dividides amb les següents dades

x	0.4	0.5	0.7	0.8
$f(x)$	-0.916291	-0.693147	-0.356675	-0.223144

Fiteu l' error comes i, sabent que $\ln(0.6) \simeq -0.5108256238$, compareu-lo amb l'error real.

15. Donada la següent taula de la funció $f(x) = e^x$,

x	0.0	0.2	0.4	0.6
$f(x)$	1.0000	1.2214	1.4918	1.8221

(a) Trobeu valors aproximats de $\sqrt[3]{e}$ per interpolació lineal i cúbica, emprant el métode de differencies dividides.

(b) Doneu les fita de l' error degut a la interpolació lineal i cúbica. Compareu aquestes fites amb l'error exacte, sabent que $\sqrt[3]{e} \simeq 1.395612425$.

16. Volem construir una taula de valors de la funció $f(x) = (x^4 - x)/12$ per $x \in [0, a]$ de tal manera que l'error d'interpolació lineal no superi ε (suposeu que els errors d'arrodoniment són despreciables). Proveu el següent:

(a) Si utilitzem nodes equiespaiats llavors la distància entre dos consecutius ha de ser menor que $2\sqrt{2\varepsilon}/a$.

(b) Si l'interval $[0, a]$ es divideix en dos subintervals $[0, \alpha]$ i $[\alpha, a]$ amb els nodes equiespaiats per h_1 i h_2 respectivament llavors la divisió més eficient es dona triant $\alpha = a/2$, $h_1 = 4\sqrt{2\varepsilon}/a$ i $h_2 = h_1/2$.

17. Volem construir una taula de valors de la funció $f(x) = (x^5 - x)/40$ per $x \in [0, 5]$ de tal manera que l'error d'interpolació utilitzant els tres punts més propers sigui menor que ε (suposeu que els errors d'arrodoniment són despreciables).

(a) Si l'espaiat entre els nodes és sempre el mateix, calculeu quina ha de ser la distància entre dos nodes consecutius.

(b) Dividim l'interval $[0, 5]$ en dos subintervals $[0, \alpha]$ i $[\alpha, 5]$, i prenem nodes equiespaiats amb distància h_1 i h_2 respectivament. Trobeu α, h_1 i h_2 de manera que necessitem el mínim nombre de nodes possible.

18. Utilitzant el mètode d'Hermite, trobeu un polinomi de grau 5 que interpoli els següents valors:

x	0	1	2
$f(x)$	2	-4	44
$f'(x)$	-9	4	1

19. (a) Trobeu el polinomi $p(x)$ que interpola la funció $f(x) = \sin(\pi x)$ en els valors:

x	$1/6$	$1/3$	$1/2$
$f(x)$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$f'(x)$	$\pi\sqrt{3}/2$	$\pi/3$	$-\pi^2$

(b) Calculeu $p(0)$ i una cota de l'error si ho donem com aproximació de $f(0)$.

20. Trobeu els splines cúbics que interpolen la següent taula de valors:

x	-1	1	2	4
$f(x)$	1	4	0	-2

Calculeu llavors $f(2.5)$ i $f'(1.5)$.

21. Determineu els splines cúbics que interpolen la taula de valors següents:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	3	4	3	2

22. Donada la partició $x_0 = 0, x_1 = 0.05, x_2 = 0.1$ del $[0, 0.1]$, i la funció $f(x) = e^{2x}$. Trobeu:

(a) El spline cubic de f a [0, 0.1].

(b) El spline lineal de f a $[0, 0.1]$.

23. Sigui f definida a $[a, b]$, i sigui $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$ nodes donats. Una funció interpolant de spline S quadràtic consisteix en el polinomi quadràtic:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 \qquad \text{a} \quad [x_0, x_1],$$

i el polinomi quadràtic

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 \qquad \text{a} \quad [x_1, x_2],$$

tals que

(a) $S(x_0) = f(x_0), \quad S(x_1) = f(x_1)$ i $S(x_2) = f(x_2)$,

(b) $S \in C^1[x_0, x_2]$.

Sigui $f(x) = e^x$, $x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.6$ i $x_3 = 0.9$. Trobeu el spline quadràtic S per f, i calculeu $S(0.5)$.