

Mètodes de Càlcul Numèric

Tema 4: Derivació i integració numèrica

44. (a) Trobeu una fórmula per al càlcul aproximat de $f'(x_0)$ mitjançant la derivació del polinomi interpolador en els punts $x_0 - h$, x_0 i $x_0 + h$. Doneu una expressió de l'error comés.
- (b) Considereu $f(x) = xe^x$ i $x_0 = 0.8$. Utilitzant la fórmula obtinguda en l'apartat anterior, calculeu aproximacions de $f'(x_0)$ utilitzant respectivament $h = 0.1$, $h = 0.01$, $h = 0.001$ i $h = 0.0001$.
- (c) Compareu els resultats amb el valor $f'(0.8) \simeq 4.005973670$ i feu una taula dels errors.
- (d) Calcular $f'(x_0)$ usant extrapolació.
45. (a) Trobeu una fórmula per al càlcul aproximat de $f'(x_0)$ mitjançant la derivació del polinomi interpolador en els punts $x_0 - 2h$, $x_0 - h$, x_0 , $x_0 + h$, i $x_0 + 2h$. Doneu una expressió de l'error comés.
- (b) Considereu $f(x) = e^x$ i $x_0 = 0.8$. Utilitzant la fórmula obtinguda en l'apartat anterior, calculeu aproximacions de $f'(x_0)$ utilitzant respectivament $h = 0.1$, $h = 0.01$, $h = 0.001$ i $h = 0.0001$.
- (c) Compareu els resultats amb el valor $f'(0.8) \simeq 2.225540928$ i feu una taula dels errors.
- (d) Calcular $f'(x_0)$ usant extrapolació.
46. Sigui F una funció tal que $F(h) = F(0) - 4h^2 + 3h^3 + O(h^4)$. Mostreu com, mitjançant l'extrapolació de Richardson, es pot aproximar $F(0)$ a partir de les dades següents:

F(1)	2.285714286
F(1/2)	2.660714286
F(1/3)	2.952380952
F(1/8)	3.229073661
F(1/9)	3.240446796

47. Calculeu

$$\int_0^\pi \frac{\cos(x) - 1}{x^2} dx,$$

amb un error menor que 10^{-10} , emprant les regles dels trapezidis i de Simpson.

48. Sigui F una funció tal que $F(h) = F(0) - h + 4h^3 + O(h^4)$. Aproximeu $F(0)$ a partir de les dades següents:

F(1)	3.857142857
F(1/2)	1.982142857
F(1/3)	1.708994709
F(1/4)	1.683314732
F(1/16)	1.795689992

49. Determineu els pesos de la fórmula d'integració numèrica

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \simeq a_0 f(\alpha) + a_1 f(\beta) + c_0 f''(\alpha) + c_1 f''(\beta)$$

per tal que sigui exacta per a tots els polinomis de grau més alt possible. Calculeu una fita de l'error.

50. Determineu els pesos de la fórmula d'integració numèrica

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \simeq a_0 f(\alpha) + a_1 f(\beta) + a_2 f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + b_2 f'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right),$$

per tal que sigui exacta per a tots els polinomis de grau més alt possible. Calculeu una fita de l'error.

51. Determinar les abscisses i els coeficients de la fórmula

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx \simeq a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$$

per tal que tingui el màxim ordre d'exactitud. Doneu la fórmula de l'error.

52. Determineu les abscisses i els coeficients de la fórmula

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x} dx \simeq a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$$

per tal que tingui el màxim ordre d'exactitud. Doneu la fórmula de l'error.

53. Volem calcular l'àrea tancada per les funcions $\sin(x)$ i x^2 per a les x positives.

- Determinar el valor de l'àrea emprant el mètode dels trapezis si dividim l'interval en quatre trossos.
- Determinar el valor de h necessari si volem aplicar el mètode de Simpson per calcular-la amb quatre decimals exactes.
- Determinar l'àrea amb el mateix error emprant el mètode de Romberg.

54. Calcular

$$\int_0^{+1} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

utilitzant el tercer polinomi de Chebyshev de primera especie.