Curs pràctic de Maple

Pràctica 9

9 Les eines bàsiques per al càlcul infinitesimal

9.1 Límits

La comanda de Maple que permet calcular el límit d'una expressió qualsevol és `limit`. Per utilitzar aquesta comanda s'ha d'introduir `limit(expr,x=lim)`, on `expr` serà l'expressió de la que volem calcular el límit, `x` la variable respecte de la que es calcula el límit i `lim` el valor de la variable on volem calcular el límit. A continuació podeu veure alguns exemples concrets.

Exemple 9.1

```
> limit((x^2-4)/(x-2),x=2);
> limit(sin(x)/x,x=0);
> limit(sin(x)/x,x=infinity);
> limit((1+1/x)^x,x=infinity);
> limit(ln(1+x)/x,x=0);
```

Normalment la variable respecte la que es calcula el límit serà una variable real i, per tant, quan volem calcular el límit d'una successió (que depèn d'una variable `n` que és un nombre natural) us podeu trobar amb alguna petita sorpresa.

Exemple 9.2 Si `n` és un nombre natural i voleu calcular $\lim_{n\to\infty} \sin(n\pi)$ (que dóna òbviament 0) i feu

```
> limit(sin(n*Pi),n=infinity);
```

veureu que el resultat és un xic estrany.

Aquest petit inconvenient es pot evitar fent que Maple *tingui en compte* que la variable `n` només pren valors naturals. La comanda `assume` permet declarar que una una variable és d'un cert tipus. També és possible fer que, mentre es realitza un càlcul concret, Maple assumeixi alguna condició sobre les variables però que aquestes variables segueixin tenint un tipus general fora d'aquest càlcul. Això es fa amb la comanda `assuming`. Fixeu-vos en la sintaxi que s'utilitza en els exemples següents.

Exemple 9.3 Podeu fer

```
> assume(n, posint);
> limit(sin(n*Pi),n=infinity);
```

però mentre no doneu algun valor concret a `n` o *netejeu* el contingut d'aquesta variable amb `n:='n'` (o amb un `restart`) Maple pensarà que `n` només por ser un nombre enter positiu.

Pot ser convenient fer el mateix càlcul amb

```
> restart;
> limit(sin(n*Pi),n=infinity) assuming n::posint;
```

D'aquesta forma obteniu el mateix resultat però `n` segueix lliure de restriccions.

Ara és un bon moment per a donar un cop d'ull a l'ajuda de Maple per a veure les possibilitats de les comandes `assume` i `assuming` i també per a mirar el tipus de restriccions que es poden donar a una variable.

Per acabar la secció dedicada al límit, un petit exercici:

Exercici 9.1

Utilitzeu `limit` per a conéixer els límits de les successions:

- $x_n = \dfrac{1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{(\alpha+1)}}$ per a diferents valors (positius) del paràmetre α.
- $x_n = \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n)}$.
- $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2\,n}$.
- $x_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{(n\,\ln(n))}$.
- $x_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + 1)^{\sqrt{n}}$.

Calculeu el valor dels x_n per a algun n bastant gran (amb un `evalf` amb molts decimals) comparant els valors obtinguts amb els resultats que heu obtingut abans.

9.2 Derivades

Amb Maple es pot obtenir fàcilment la derivada d'una expressió `expr` qualsevol. Com ja deveu saber la comanda que fa aquesta feina és `diff(expr,var)` on `expr` és l'expressió que es vol derivar i `var` és la variable respecte la que es farà la derivada.

Exemple 9.1 Podem fer la derivada de l'expressió $x^3 - 3x^2 + 5x + 4$ respecte x amb

```
> diff(x^3-3*x^2+5*x+4,x);
```

i si tenim definida una funció $f(x)$ també podrem fer el mateix

```
> f:= x-> x^3-3*x^2+5*x+4;
> diff(f(x),x);
```

Teniu en compte, però, que segons com us poseu a fer els càlculs podeu tenir sorpreses. Podeu preveure quin serà el resultat de l'operació següent després d'haver definit la funció `f`?

```
> diff(f,x);
```

Noteu que Maple necessita conèixer respecte quina variable s'ha de fer la derivada ja que en una expressió hi poden haver diferents paràmetres (o, si ho voleu dir d'una altra forma, l'expressió pot ser una funció de múltiple variables i es poden calcular les derivades parcials respecte cada una d'elles). Per exemple, les expressions

Exemple 9.2

```
> diff(x^2*cos(b)-exp(y^2)*tan(x),x);
> diff(x^2*cos(b)-exp(y^2)*tan(x),y);
> diff(x^2*cos(b)-exp(y^2)*tan(x),b);
```

produeixen, òbviament, tres resultats diferents.

Quan treballem amb la comanda `diff` sovint el que ens interessa és definir una nova funció que és la derivada d'una $f(x)$ que ja tenim definida. Com que `diff` treballa amb expressions i dóna com a resultat expressions, aquest procés no és tan immediat com es podria pensar. Si proveu de fer

```
> f:= x-> (x^3-4)/(x^2+3);
> g:= x-> diff(f(x),x);
> g(x);
> g(1);
```

veureu que els resultats semblen no tenir massa lògica.

Quan tenim una funció `f` que depèn d'una variable podem obtenir una nova funció `g` que és la derivada de la primera amb la comanda `D( )`.

Exemple 9.3 Si definim la funció $f(x) = x^3 - 4x$ i volem tenir la funció $g(x) = f'(x)$ (que òbviament ha de ser $g(x) = 3x^2 - 4$) es pot fer

```
> f:= x-> x^3-4*x;
> g:= D(f);
> g(x);
> g(1);
```

Quan es té definida una funció `f` que depèn de més d'una variable es pot especificar respecte quina de les variables es vol fer la derivada utilitzant `D[i](f)` on `i` és un enter que indica que es vol fer la derivada de `f` respecte la variable que ocupa el lloc `i`.

Exemple 9.4 Si tenim definida la funció $f(x, y, b) = x^2 \cos(b) - \exp(y^2)\tan(x)$ la primera variable és la x, la segona és la y i la tercera és la b. Per tant, fent

```
> f:= (x,y,b)-> x^2*cos(b)-exp(y^2)*tan(x);
> g1:= D[1](f);
> g2:= D[2](f);
> g3:= D[3](f);
```

obtindrem tres funcions `g1, g2, g3` que són les derivades de `f` respecte `x, y, b` respectivament.

Exercici 9.2

Definiu una funció `h` que sigui $h(x, y) = x\dfrac{\exp(xy)\sin(y^2)}{\ln(x^2 + y^2 + 2)}$ i calculeu

- La funció `h1` derivada de `h` respecte `x`.
- La funció `h2` derivada de `h` respecte `y`.
- Els valors de `h1` i `h2` per a `x=1` i `y=Pi/4`.
- La funció `h11` derivada segona de la funció `h` respecte `x`.

És clar que la resposta a l'últim apartat de l'exercici anterior pot ser

```
> h11:= D[1](D[1](h));
```

Com que això no és massa pràctic hi ha dreceres que ens permeten fer el mateix amb més facilitat. Una expressió de la forma `x$n` és equivalent a una successió de `n` còpies de l'expressió `x`. Per exemple

```
> x$4;
```

produeix `x,x,x,x`. D'aquesta forma en les comandes `diff` o `D` podem fer

```
> diff(sin(x)-x*(cos(x))^3,x$4);
> D[1$4](cos)(x);
```

9.3 Integrals

Maple disposa d'algoritmes per a calcular integrals definides i indefinides (primitives). Gairebé qualsevol problema d'integració (que tingui una solució raonable) es pot resoldre simplement amb la comanda `int`. Veieu a continuació alguns exemples de les diferents formes en les que es pot aplicar aquesta funció.

Exemple 9.1

```
> int(x^2/sqrt(1-x^3),x);
> int(1/(x*sqrt(x^2-1)),x);
> int(cos(x),x=0..Pi);
> int(1/(x*sqrt(x^2-1)),x=1..2/sqrt(3));
> int(r*exp(-r^2),r=0..infinity)
```

Noteu que fins i tot es poden determinar integrals que són impròpies.

Fins i tot quan no és possible determinar un valor exacte per a una integral es pot mirar de determinar ne una aproximació amb la comanda `evalf` ja que Maple també disposa del algoritmes d'aproximació numèrica necessaris.

Exemple 9.2

```
> a:=int(sqrt(1+x^6),x=1..3);
> evalf(a);
```

9.4 Polinomis i sèries de Taylor

La comanda per a obtenir l'aproximació de Taylor de grau `n` d'una funció `f` al voltant del punt `c` és `taylor(f(x),x=c,n)` (noteu que la comanda `taylor` s'aplica a una expressió `f(x)` i no a la funció `f`).

Exemple 9.1

```
> taylor(cos(x),x=0,8);
> taylor(ln(x),x=1,10);
```

Noteu que el resultat de `taylor` està format per una component polinòmica i una component de la forma `O((x-c)^n)`. La part polinòmica és el polinomi aproximador pròpiament dit, més endavant veurem com es pot interpretar la part `O((x-c)^n)`. Si es vol extreure el polinomi del resultat d'una comanda `taylor`, s'utilitza `convert(expr, polynom)`.

Exemple 9.2 El polinomi de Taylor de grau 5 al voltant del 0 per a la funció $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ s'obté amb

```
> expr:=taylor(1/(1-x),x=0,5);
> poli:=convert(expr, polynom);
```

Exercici 9.3

Realitzeu un procediment que, donats $f(x)$, c i n, doni com a resultat només el polinomi de Taylor de grau n de la funció $f(x)$ al voltant de c. Modifiqueu el procediment anterior per tal que retorni en una llista els polinomis de grau 1 fins a n.

Exercici 9.4

Considereu la funció $f(x) = e^x$ i el punt $c = 0$. Feu un gràfic en el que es vegin alhora el gràfic de $f(x)$ i el del seu polinomi de Taylor per a $n = 2$. Què observeu?

Repetiu l'exercici per a $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ i per a $f(x) = \arctan(x)$.

Noteu doncs que es pot dir que el polinomi de Taylor de grau 1 ($n = 2$) és la recta tangent al gràfic de $f(x)$ en $x = c$ (això s'expressa sovint dient que *l'ordre de contacte entre els dos gràfics és* 2).

En l'exercici següent podreu veure com el concepte d'ordre de contacte s'estén a graus superiors.

Exercici 9.5

Preneu $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ i $p(x)$ el polinomi de Taylor amb $n = 8$ de $f(x)$ al voltant de 0. Calculeu els valors de $\dfrac{f(x) - p(x)}{x^7}$ per a $x = \pm\dfrac{1}{2^n}$ (amb n des de 1 fins a 20 i amb 25 decimals com a mínim). Quin sembla que serà el límit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - p(x)}{x^7}$?

Com es poden obtenir els coeficients del polinomi de Taylor d'una funció a partir d'aquesta funció? Per a veure quina és aquesta relació recordeu que la comanda que dóna el coeficient d'una expressió polinòmica `expr` respecte una altra expressió `var` és `coeff(expr,var)` i que si es vol buscar el coeficient respecte `var^k` també es pot fer `coeff(expr,var,k)`. Per exemple:

Exemple 9.3

```
> taylor(exp(-x^2),x=0,9);
> coeff(taylor(exp(-x^2),x=0,9),x,4);
> taylor(sin(x),x=Pi/2,8);
> coeff(%,(x-Pi/2),4);
```

Exercici 9.6

Donada $f(x) = \arctan(x)$ determineu les expressions de les derivades successives $f^{(n)}(x)$ i avalue-les en $x = 0$ per a n des de 1 fins a 10. Feu el mateix amb $p(x)$, el polinomi de Taylor de grau 10 de $f(x)$ al voltant de 0.

Exercici 9.7

Compareu els valors que heu obtingut en l'exercici anterior amb els coeficients del polinomi de Taylor $p(x)$. (Feu el quocient entre uns i altres i si no veieu res mireu què passa si $f(x) = e^x$).

Al principi de la pràctica diu que el polinomi de Taylor permet aproximar una funció per un polinomi. L'exercici següent mostra com funciona aquest tipus d'aproximació.

Exercici 9.8

Feu un procediment que faci un dibuix dels gràfics (en diferents colors) d'una funció donada i dels seus polinomis de Taylor, fins a un grau n especificat en els arguments, al voltant d'un punt també donat entre els arguments.

Apliqueu l'anterior a la funció $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^4}$ al voltant del punt $x = 2$ fins al grau 7.

Exercici 9.9

Les coses no van sempre tan bé com en tots els exemples anteriors. Proveu de determinar l'expressió de qualsevol polinomi de Taylor de $f(x) = e^{(-1/x^2)}$ al voltant de 0.

Tot i que `taylor` no aconsegueix fer gaire cosa amb aquest problema, hauríeu de poder determinar quin és el polinomi de Taylor de qualsevol grau per a la funció anterior al voltant de 0. I encara que es tingui el polinomi de Taylor, noteu que el resultat que s'obté no és gaire interessant!