

GEOMETRIA DIFERENCIAL
Llicenciatura de Matemàtiques
Curs 2006-2007

Estudi d'una font d'aigua giratòria

Alumne: Denis Martínez Redondo

Facultat de Ciències

Índex

1	INTRODUCCIÓ	1
2	DESCRIPCIÓ DEL VIDEO	1
3	DESCRIPCIÓ DEL PROBLEMA A RESOLDRE:	1
4	PARAMETRITZACIÓ DEL MOVIMENT D'UNA GOTA D'AIGUA	2
5	PARAMETRITZACIÓ DE LA SUPERFÍCIE QUE CONTÉ TOTES LES GOTES	4
6	PARAMETRITZACIÓ DE LES TRAJECTÒRIES VISUALS DELS RAIGS D'AIGUA	5
7	CÀLCULS SOBRE LA CORBA ANTERIOR	6

1 INTRODUCCIÓ

El següent treball tracta sobre l'estudi del moviment d'unes gotes d'una font d'aigua. Aquesta font és la donada per un video que descriurem en el següent apartat. Es presenten quatre objectius. Trobar una parametrització de la corba descrita per una gota d'aigua considerada individualment. Donar una parametrització de la superfície que conté totes les gotes d'aigua que surten de la font. També trobarem les trajectòries visuals dels raigs d'aigua, és a dir, la descripció de l'objecte que es crea per l'efecte de les gotes d'aigua degut al ràpid moviment de la font. L'última part estarà dedicada a calcular les curvatures geodèsica i normal i la torsió geodèsica de les trajectòries esmentades, relacionant-les amb la curvatura i torsió com a corbes de $\mathbb{R}^3$.

2 DESCRIPCIÓ DEL VIDEO

En el video apareix una font d'aigua que té com a centre un ocell. Aquest ocell està a una certa altura del terra. De les potes d'aquest ocell surten disparades unes gotes d'aigua amb una certa direcció que comentarem més endavant. Observem les següents instantànies per fer-nos una idea més directa.



3 DESCRIPCIÓ DEL PROBLEMA A RESOLDRE:

Abans de tot detallarem la orientació de la font en un sistema de referència cartesià tridimensional: la font (evidentment posada de peu) apuntarà en la direcció del eix Y. La circumferència que generaria les potes de l'ocell està orientat amb vector normal $(0, 1, 0)$ amb centre l'altura de la font respecte el terra, on el terra està localitzat al pla $y = 0$.

Cal destacar que estem en un sistema de referència inercial (això és obvi visualitzant el video, ja que el nostre sistema de referència es mou a velocitat zero, és a dir, està parat) per tal de poder aplicar les Lleis de Newton, les quals en algun moment les necessitarem.

A continuació descriurem quin problema modelitzat resoldrem. Nosaltres suposarem que les gotes d'aigua surten a una altura h respecte el terra. Aquestes gotes surten evidentment tangents a la circumferència imaginària (imaginària no vol dir res relacionat amb nombres complexos, simplement és un nom) generada per les potes de l'ocell i per tant tenen una velocitat tangent inicial prefixada. Així doncs, fixarem la velocitat angular $\vec{\omega}$ constant i el radi $\vec{R}$ i per tant obtindrem automàticament la velocitat tangent a cada punt de la circumferència imaginària. L'única força que suposarem que actua és la deguda al camp gravitatori. Un altre simplificació a considerar serà aproximar el camp gravitatori dient que és constant en un entorn que conté la font prou gran perquè les trajectòries no surtin d'aquest entorn. Aleshores tenint

en compte això, per resoldre el primer objectiu, serà equivalent a plantejar-se el problema des d'un punt de vista d'un tir parabòlic sense fregament, on la gota és un objecte de massa M (encara que la massa no importarà tractant el moviment com un tir parabòlic sense fregament).



4 PARAMETRITZACIÓ DEL MOVIMENT D'UNA GOTA D'AIGUA

A partir de la Segona Llei de Newton, plantejarem un problema de Cauchy (EDO) , el qual, la seva única solució serà el que nosaltres proposarem com a trajectòria d'una gota arbitrària del video i per tant això serà una parametrització (amb paràmetre el temps). En efecte, suposarem que l'ocell comença a girar i el pararem quan hagi recorregut un angle $\theta = A$ fixat. Serà en aquest moment quan calcularem la parametrització de la trajectòria d'una gota que evidentment serà arbitrària, doncs $\theta = A$ és arbitrari.

La Segona Llei de Newton ens proporciona la següent equació:

$$\Sigma \vec{F} = M \cdot \vec{a}$$

on $\Sigma \vec{F}$ és la suma de forces aplicades a la gota d'aigua , M és la massa de la gota d'aigua i $\vec{a}$ és l'acceleració de la gota d'aigua. Observem que com hem suposat que el camp gravitatori és constant en un entorn de la font, la acceleració és $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$.

Així doncs aquesta equació en un llenguatge matemàtic més formal ens quedarà de la forma:

$$(0, M \cdot g, 0) = M \cdot (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) \iff (0, g, 0) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$$

En efecte, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ serà la nostra candidata a ser trajectòria de una gota. Aquestes gotes tenen unes condicions inicials. Per $t = 0$ la gota comença en el punt $(R\cos(A), h, R\sin(A))$ on R és el radi de la circumferència imaginària, més concretament $R = \|\vec{R}\|$ amb $\vec{R} = (R\cos(A), 0, R\sin(A))$. També per $t = 0$ tenim que la gota surt amb una velocitat inicial $\vec{v}$ que la calcularem a partir de la velocitat angular $\vec{\omega} = (0, \omega, 0)$ i el vector radi $\vec{R}$.

$$\vec{v} = \vec{R} \times \vec{\omega} = (R\cos(A), 0, R\sin(A)) \times (0, \omega, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R\cos(A) & 0 & R\sin(A) \\ 0 & \omega & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} = (-R\omega\sin(A), 0, R\omega\cos(A))$$

En resum tenim el següent problema de Cauchy.

$$\begin{cases} (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = (0, g, 0) \\ (x(0), y(0), z(0)) = (R\cos(A), h, R\sin(A)) \\ (\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)) = (-R\omega\sin(A), 0, R\omega\cos(A)) \end{cases}$$

Solucionem-lo:

Component x:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ x(0) = R\cos(A) \\ \dot{x}(0) = -R\omega\sin(A) \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}(t) = -R\omega\sin(A) \\ x(0) = R\cos(A) \end{cases} \implies x(t) = R\cos(A) - R\omega\sin(A)t$$

Component y:

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = g \\ y(0) = h \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{y}(t) = gt \\ y(0) = h \end{cases} \implies y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Component z:

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = 0 \\ z(0) = R\sin(A) \\ \dot{z}(0) = R\omega\cos(A) \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{z}(t) = R\omega\cos(A) \\ z(0) = R\sin(A) \end{cases} \implies z(t) = R\sin(A) + R\omega\cos(A)t$$

Observem també que la solució a aquest problema de Cauchy està definida on està definida l'equació diferencial, i aquesta última està definida allà on té sentit plantejar-se la igualtat. Per tant només té sentit fins que la gota que surt arriba al terra. En aquest moment tenim la condició $y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 = 0$. Aïllant, obtenim el temps final: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Ara ja tenim perfectament determinada la trajectoria/parametrització d'una gota d'aigua arbitrària:

$$\boxed{\vec{r}_A(t) = (R\cos(A) - R\omega\sin(A)t, h - \frac{1}{2}gt^2, R\sin(A) + R\omega\cos(A)t)}$$

per

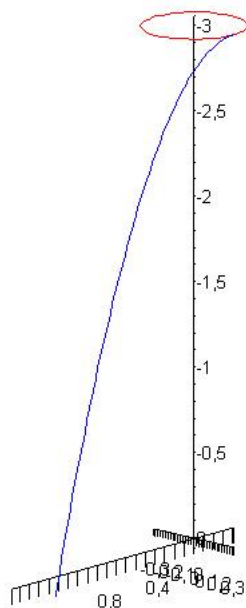
$$t \in [0, \sqrt{\frac{2h}{g}}]$$

Observem que hem posat el subíndex A, això significa que per cada angle A que fixem com a posició de sortida la circumferència imaginària la seva parametrització queda totalment determinada amb l'expressió anterior genèrica.

EXEMPLE

A Continuació farem una representació gràfica amb Maple d'aquesta parametrització, per tal de confirmar els resultats. Per això donarem valors a les constants fixades:

En tot moment $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$. $\omega = 2\pi \frac{rad}{s}$ amb això tenim que triga 1 segon en donar 1 volta. $h = 3m$. $R = 0,3m$, encara que és un radi més gran que el del video, per dibuixar-ho amb Maple i es vegi estètic cal que sigui així. $A = 0 \text{ rad}$.



Observem que si es veuen sobre l'eix Y les coordenades negatives és degut a que per dibuixar-ho amb Maple li hem fet una aplicació gir perquè al ser la nostra altura l'eix Y no ho podeiem rotar de tal manera que es vegés estètic.

5 PARAMETRITZACIÓ DE LA SUPERFÍCIE QUE CONTÉ TOTES LES GOTES

La superfície que conté totes les gotes de la font és aquella que està formada per totes les trajectòries de les gotes d'aigua. Per resoldre això cal un paràmetre que ens arribi a qualsevol trajectòria i després un altre paràmetre que serà el temps sobre la trajectòria, però aquest ja el tenim. En efecte, tenim tantes trajectòries com angles $\theta \in [0, 2\pi]$. Així doncs el paràmetre que agafarem de més serà l'angle del qual comença una trajectòria arbitrària. Per dur a terme això l'únic que s'ha de fer és agafar $\vec{r}_\theta(t)$ i deixar θ lliure. Per tant, ja tenim la parametrització buscada:

$$\sigma(t, \theta) = (R\cos(\theta) - R\omega\sin(\theta)t, h - \frac{1}{2}gt^2, R\sin(\theta) + R\omega\cos(\theta)t)$$

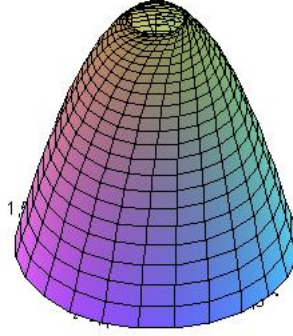
per

$$(t, \theta) \in [0, \sqrt{\frac{2h}{g}}] \times [0, 2\pi]$$

Com podrem observar en el següent exemple, aquesta superfície resultant és un paraboloides on efectivament li falta el casquet superior corresponent a la circumferència d'on surten les gotes.

EXEMPLE

Procedirem a mostrar mitjançant una representació amb Maple de la superfície que en efecte és un paraboloides sense el casquet superior. Els valors fixats seran els mateixos que a l'exemple del apartat anterior.



6 PARAMETRITZACIÓ DE LES TRAJECTÒRIES VISUALS DELS RAIGS D'AIGUA

Ara l'objectiu és trobar una corba dins d'aquesta superfície tal que cada vegada que es mogui el paràmetre de l'angle ens situï en la trajectòria que comença en aquest angle i que ens doni el punt d'aquesta trajectòria al passar un temps donat per l'equivalència: $\theta = A + \omega t \Leftrightarrow t = \frac{\theta - A}{\omega}$. En efecte, per cada angle A que volem que comenci tindrem una trajectòria. Però, de fet hem de canviar de signe l'expressió perquè la primera gota de la trajectòria ha d'estar situada al terra, és a dir, en el pla $y = 0$.

Per tant com la nostra superfície és:

$$\sigma(t, \theta) = (R \cos(\theta) - R \omega \sin(\theta)t, h - \frac{1}{2}gt^2, R \sin(\theta) + R \omega \cos(\theta)t)$$

Aleshores al tenir paràmetritzat temps per la següent manera: $t(\theta) = -\frac{\theta - A}{\omega} = \frac{A - \theta}{\omega}$, només cal que evaluar aquesta expressió dins la superfície.

$$\begin{aligned} \sigma(t(\theta), \theta) &= (R \cos(\theta) - R \omega \sin(\theta)t(\theta), h - \frac{1}{2}g(t(\theta))^2, R \sin(\theta) + R \omega \cos(\theta)t(\theta)) = \\ &= (R \cos(\theta) - R \omega \sin(\theta)\frac{A - \theta}{\omega}, h - \frac{1}{2}g(\frac{A - \theta}{\omega})^2, R \sin(\theta) + R \omega \cos(\theta)\frac{A - \theta}{\omega}) = \\ &= (R \cos(\theta) - R \sin(\theta)(A - \theta), h - \frac{1}{2}g\frac{(A - \theta)^2}{\omega^2}, R \sin(\theta) + R \cos(\theta)(A - \theta)) = \end{aligned}$$

Com abans hem dit, el temps només te sentit fins que la gota arribi el terra, és a dir, $\theta_{final} = A + \omega t_{final} \Rightarrow \theta_{final} = A + \omega \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

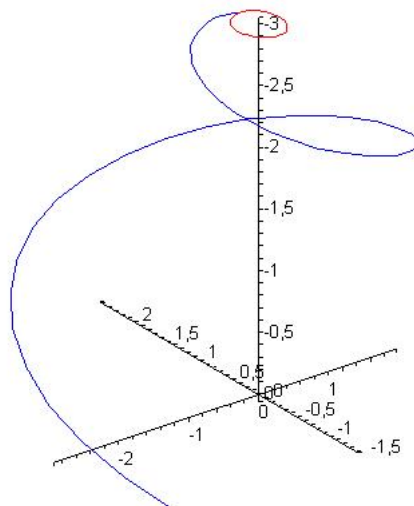
$$\boxed{\gamma_A(\theta) = (R \cos(\theta) - R \sin(\theta)(A - \theta), h - \frac{1}{2}g\frac{(A - \theta)^2}{\omega^2}, R \sin(\theta) + R \cos(\theta)(A - \theta))}$$

per

$$\theta \in [0, A + \omega \sqrt{\frac{2h}{g}}]$$

EXEMPLE

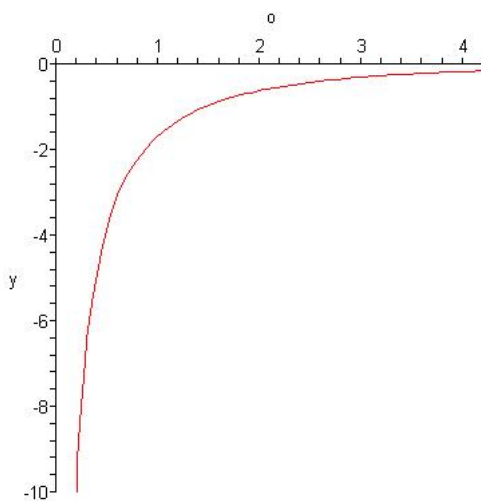
Mirem la següent representació amb Maple de la corba resultant. Com sempre, els valors fixats seran els mateixos que als dels exemples anterior. El motiu de l'eix Y sigui negatiu es per la mateixa raó estètica. Però de fet en aquest apartat doblem la velocitat angular perquè es vegi millor, i.e, $\omega = 4\pi \frac{rad}{s}$.



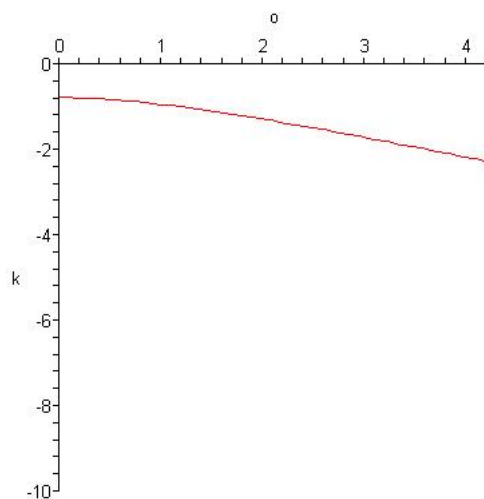
7 CÀLCULS SOBRE LA CORBA ANTERIOR

En aquest apartat donarem les gràfiques de les funcions: curvatura geodèsica, curvatura normal, torsió geodèsica, curvatura de la corba i torsió de la corba ja que les expressions explícites d'aquestes fórmules són massa grans.

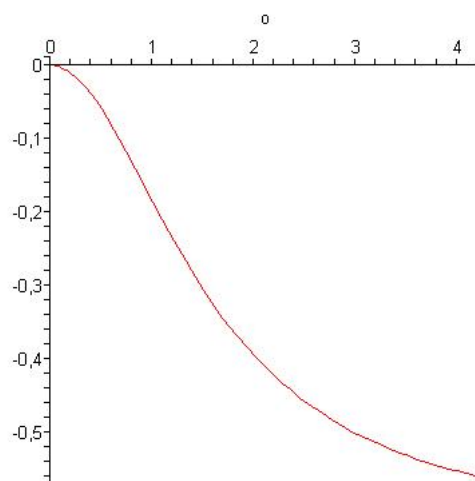
1. Curvatura geodèsica: Dibuix de la funció $k_g(\theta)$



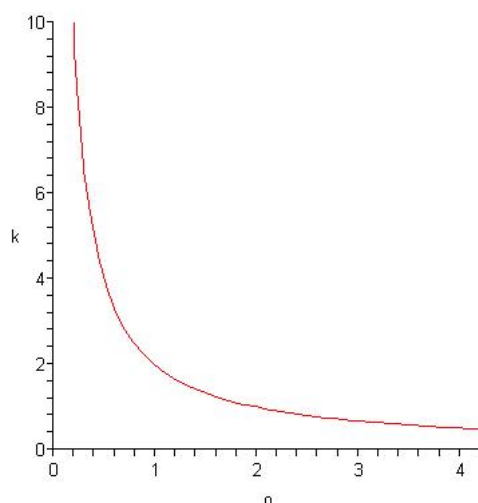
2. Curvatura normal: Dibuix de la funció $k_n(\theta)$



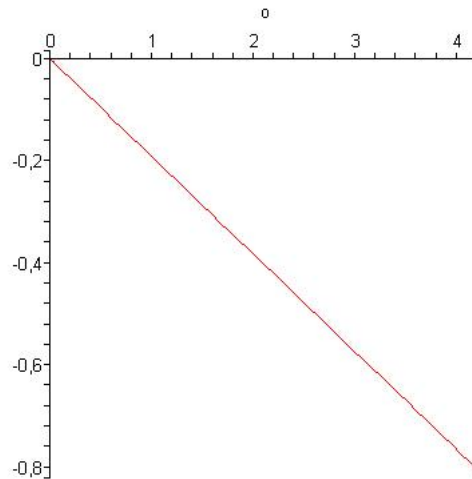
3. Torsió geodèsica: Dibuix de la funció $\tau_g(\theta)$



4. Curvatura com a corba de $\mathbb{R}^3$: Dibuix de la funció $k(\theta)$



5. Torsió com a corba de $\mathbb{R}^3$: Dibuix de la funció $\tau(\theta)$



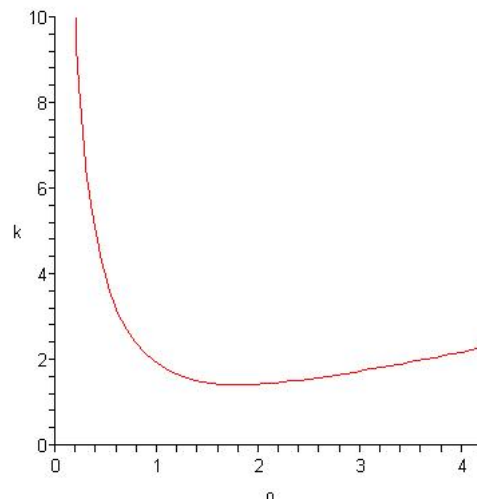
6. Observació

Sabem que la relació entre la curvatura com a corba de $\mathbb{R}^3$ i les curvatures normals i geodèsiques és:

$$k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$$

Per tant dibuixem el gràfic de la funció $f(\theta) = \sqrt{k_n(\theta)^2 + k_g(\theta)^2}$ per veure si s'assembla al gràfic pintat anteriorment. De fet és possible que no s'assembli en alguns aspectes degut als errors que un ordinador produeix alhora de fer aquesta quantitat de càlculs.

En efecte, el dibuix és:



És quasi semblant, aquesta diferència que es veu és deguda al motiu esmentat anteriorment.