Càlcul de funcions de diverses variables

David Marín

13 d'abril de 2009

I. Càlcul Diferencial

1. L'espai euclidià $\mathbb{R}^n$
   - Producte escalar i producte vectorial
   - Rectes i plans
2. Continuitat i diferenciabilitat
   - Dominis i continuïtat
   - Derivada direccional i gradient
3. Regla de la cadena
4. Màxims i mínims
   - Punts crítics i extrems locals
   - Extrems condicionats
   - Extrems absoluts

Producte escalar i producte vectorial

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ són vectors de $\mathbb{R}^n$ definim

- producte escalar $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R}$
- norma $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
- distància $d(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$
- cosinus de l'angle $\cos(\widehat{x, y}) = \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}$
- perpendicularitat $x \perp y \Leftrightarrow x \cdot y = 0$

Si $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ són vectors de $\mathbb{R}^3$ definim el seu producte vectorial mitjançant

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

que té direcció perpendicular a v_1 i v_2, sentit donat per la regla del "tornavis" i $\|v_1 \times v_2\|$ és l'àrea del paral·lelogram que determinen.

Equacions de rectes i plans

- Al pla $\mathbb{R}^2$: La recta passant pel punt (a, b) amb vector director (u, v) té equació paramètrica

$$(x, y) = (a, b) + t\,(u, v), \quad t \in \mathbb{R}$$

i equació cartesiana (implícita)

$$\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v} \iff Ax + By + C = 0.$$

- A l'espai $\mathbb{R}^3$: La recta passant pel punt (a, b, c) amb vector director (u, v, w) té equació paramètrica

$$(x, y, z) = (a, b, c) + t\,(u, v, w), \quad t \in \mathbb{R}$$

i equació cartesiana (implícita)

$$\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v} = \frac{z-c}{w}.$$

Equacions de rectes i plans

- A l'espai $\mathbb{R}^3$: La recta passant pel punt (a, b, c) amb vector director (u, v, w) té equació paramètrica

$$(x, y, z) = (a, b, c) + t\,(u, v, w), \quad t \in \mathbb{R}$$

i equació cartesiana (implícita)

$$\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v} = \frac{z-c}{w}.$$

- A l'espai $\mathbb{R}^3$: El pla passant pel punt (a, b, c) amb vectors directors (u, v, w) i (u', v', w') té equació paramètrica

$$(x, y, z) = (a, b, c) + t\,(u, v, w) + s\,(u', v', w'), \quad t, s \in \mathbb{R}$$

i equació cartesiana (implícita)

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} = Ax + By + Cz + D = 0.$$

Observem que $(A, B, C) = (u, v, w) \times (u', v', w')$.

Continuïtat i diferenciabilitat

Donada una funció $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definim les nocions següents:

- El domini D de f com el subconjunt dels $x \in \mathbb{R}^n$ on la fórmula que defineix $f(x)$ té sentit.
- El gràfic de f com

$$\{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : x = (x_1, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n,\ z = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

- Per cada $c \in \mathbb{R}$ considerem el conjunt de nivell c de f:

$$f^{-1}(c) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in D : f(x_1, \ldots, x_n) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

- La continuïtat de f en un punt $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ ve caracteritzada pel fet que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Les propietats bàsiques de les funcions contínues són:
  - Suma, resta, producte, divisió (fora d'on s'anul·li el denominador) i composició de funcions contínues és contínua.
  - Les funcions elementals d'una variable $e^x, \log x, \sin x, \cos x, \ldots$ són contínues en el seu domini.
  - Les funcions coordenades $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ són contínues.

Continuïtat i diferenciabilitat

Donada una funció $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definim les nocions següents:

- El domini D de f com el subconjunt dels $x \in \mathbb{R}^n$ on la fórmula que defineix $f(x)$ té sentit.
- El gràfic de f com

$$\{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : x = (x_1, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n,\ z = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

- Per cada $c \in \mathbb{R}$ considerem el conjunt de nivell c de f:

$$f^{-1}(c) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in D : f(x_1, \ldots, x_n) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

- La continuïtat de f en un punt $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ ve caracteritzada pel fet que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Teorema: Tota funció contínua definida en un conjunt compacte (tancat : que conté tota la seva vora i acotat)

Continuïtat i diferenciabilitat

Donada una funció $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definim les nocions següents:

- El domini D de f com el subconjunt dels $x \in \mathbb{R}^n$ on la fórmula que defineix $f(x)$ té sentit.
- El gràfic de f com

$$\{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : x = (x_1, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n,\ z = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

- Per cada $c \in \mathbb{R}$ considerem el conjunt de nivell c de f:

$$f^{-1}(c) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in D : f(x_1, \ldots, x_n) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

- La continuïtat de f en un punt $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ ve caracteritzada pel fet que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Teorema: Tota funció contínua definida en un conjunt compacte (tancat i acotat : que està contingut en una bola de radi prou gran)

Continuïtat i diferenciabilitat

Donada una funció $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definim les nocions següents:

- El domini D de f com el subconjunt dels $x \in \mathbb{R}^n$ on la fórmula que defineix $f(x)$ té sentit.
- El gràfic de f com

$$\{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : x = (x_1, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n,\ z = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

- Per cada $c \in \mathbb{R}$ considerem el conjunt de nivell c de f:

$$f^{-1}(c) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in D : f(x_1, \ldots, x_n) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

- La continuïtat de f en un punt $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ ve caracteritzada pel fet que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Teorema: Tota funció contínua definida en un conjunt compacte (tancat i acotat) té màxim i mínim absoluts.

Derivada direccional

Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció, $a \in D$ un punt i $\vec{w}$ un vector unitari ($\|\vec{w}\| = 1$). Si la funció d'una variable $t \mapsto f(a + t\vec{w})$ és derivable respecte de t aleshores definim la derivada direccional de f en el punt a segons la direcció $\vec{w}$ com

$$(D_{\vec{w}} f)(a) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(a + t\vec{w})$$

la pendent de la recta tangent de f en el punt a en la direcció $\vec{w}$.

Definició: Si $\vec{w}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ aleshores $D_{\vec{w}_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ s'anomena derivada parcial de f respecte de x_i i es calcula derivant f respecte de x_i mantenint totes les altres variables constants.

Definició: Una funció f es diu diferenciable en el punt a quan existeixen totes les rectes tangents de f en a en qualsevol direcció i formen un pla, anomenat el pla tangent de f en a, d'equació:

$$z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n).$$

Definició del gradient

Definició: Si f té derivades parcials en un punt a aleshores definim el seu vector gradient en a com

$$(\nabla f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Teorema:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Existeixen totes les}\\ \text{derivades parcials i}\\ \text{són funcions contínues}\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ és diferenciable} \Rightarrow \text{Existeix } \nabla f$$

Regla de la cadena (1):

Si $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to C$ és una parametrització diferenciable d'una corba $C \subset D \subset \mathbb{R}^n$ i $f : D \to \mathbb{R}$ és una funció diferenciable aleshores

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha(t))\, x_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\alpha(t))\, x_n'(t)\\ &= (\nabla f)(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).\end{aligned}$$

Interpretació del gradient

- Proposició: Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una funció diferenciable, $a \in D$ i $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ és un vector unitari ($\|\vec{w}\| = 1$) aleshores

$$(D_{\vec{w}} f)(a) = (\nabla f)(a) \cdot \vec{w} = \|(\nabla f)(a)\| \cos\theta,$$

  on θ és l'angle que forma $\vec{w}$ amb el vector gradient en a.

- Proposició: El vector gradient $(\nabla f)(a)$ determina la direcció de màxima variació de f en a (ja que $\cos\theta$ màxim $\Leftrightarrow \theta = 0$).

- Proposició: El vector gradient $(\nabla f)(a)$ és perpendicular al conjunt de nivell ($c = f(a)$) de f que passa per a.

- Proposició: Les equacions del pla tangent i recta normal del conjunt de nivell de f en el punt a són:
  - pla tangent $(\nabla f)(a) \cdot (x - a) = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\,(x_n - a_n) = 0$$

  - recta normal $x = a + \lambda \nabla f(a)$, variant $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aplicacions diferenciables i regla de la cadena

Definició: Una aplicació

$$\begin{array}{rcl} f : D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \end{array}$$

és diferenciable si cada funció $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ho és.

Regla de la cadena: derivada d'una composició
Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ aleshores $F = f \circ g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es calcula substituint les variables x_i de $f(x_1, \ldots, x_n)$ per les fórmules $x_i = g_i(u_1, \ldots, u_m)$ i la regla de la cadena afirma que

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}(u^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\frac{\partial g_1}{\partial u_i}(u^0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\frac{\partial g_n}{\partial u_i}(u^0),$$

on $u^0 = (u_1^0, \ldots, u_m^0)$ i $x^0 = g(u^0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Exemple d'aplicació de la regla de la cadena.

$$f(x,y) = x^3 y + \sin(xy), \quad g(u,v) = (x(u,v), y(u,v)),$$
$$x(u,v) = ue^{u^2+v^2}, \quad y(u,v) = \cos(v^2)\sin(u+v^2),$$

$$F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)) =$$
$$= u^3 e^{3(u^2+v^2)} \cos(v^2)\sin(u+v^2) + \sin(ue^{u^2+v^2}\cos(v^2)\sin(u+v^2)).$$

$\frac{\partial F}{\partial u}(0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}) = ?$

$$g(0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}) = (0\, e^{(0+\pi/4)}, \cos(\pi/4)\sin(0+\pi/4)) = (0, \frac{1}{2}).$$

Exemple d'aplicació de la regla de la cadena.

$$f(x,y) = x^3 y + \sin(xy), \quad g(u,v) = (x(u,v), y(u,v)),$$
$$x(u,v) = ue^{u^2+v^2}, \quad y(u,v) = \cos(v^2)\sin(u+v^2),$$

$$F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)) =$$
$$= u^3 e^{3(u^2+v^2)} \cos(v^2)\sin(u+v^2) + \sin(ue^{u^2+v^2}\cos(v^2)\sin(u+v^2)).$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0, \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \tfrac{1}{2})\frac{\partial x}{\partial u}(0, \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, \tfrac{1}{2})\frac{\partial y}{\partial u}(0, \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}).$$

$$g(0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}) = (0\, e^{(0+\pi/4)}, \cos(\pi/4)\sin(0+\pi/4)) = (0, \frac{1}{2}).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + \cos(xy)\, y \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0, \tfrac{1}{2}) = 0 + \cos(0)\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + \cos(xy)\, x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, \tfrac{1}{2}) = 0 + \cos(0)\, 0 = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^{u^2+v^2} + ue^{u^2+v^2} 2u \qquad \frac{\partial x}{\partial u}(0, \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}) = e^{\frac{\pi}{4}} + 0 = e^{\frac{\pi}{4}}$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \cos(v^2)\cos(u+v^2) \qquad \frac{\partial y}{\partial u}(0, \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}) = \cos(\tfrac{\pi}{4})\cos(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{2}$$

Exemple d'aplicació de la regla de la cadena.

$$f(x,y) = x^3 y + \sin(xy), \quad g(u,v) = (x(u,v), y(u,v)),$$
$$x(u,v) = ue^{u^2+v^2}, \quad y(u,v) = \cos(v^2)\sin(u+v^2),$$

$$F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)) =$$
$$= u^3 e^{3(u^2+v^2)} \cos(v^2)\sin(u+v^2) + \sin(ue^{u^2+v^2}\cos(v^2)\sin(u+v^2)).$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0, \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \tfrac{1}{2})\,\frac{\partial x}{\partial u}(0, \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, \tfrac{1}{2})\,\frac{\partial y}{\partial u}(0, \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}).$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}} + 0\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + \cos(xy)\,y \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0, \tfrac{1}{2}) = 0 + \cos(0)\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + \cos(xy)\,x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, \tfrac{1}{2}) = 0 + \cos(0)\,0 = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^{u^2+v^2} + ue^{u^2+v^2}\,2u \qquad \frac{\partial x}{\partial u}(0, \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}) = e^{\frac{\pi}{4}} + 0 = e^{\frac{\pi}{4}}$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \cos(v^2)\cos(u+v^2) \qquad \frac{\partial y}{\partial u}(0, \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}) = \cos(\tfrac{\pi}{4})\cos(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{2}$$

Regla de la cadena (formulació matricial)

Definim la matriu diferencial d'una aplicació diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en un punt a com

$$Df(a) = \begin{pmatrix} (\nabla f_1)(a) \\ \vdots \\ (\nabla f_m)(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Regla de la cadena: Si $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ i $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ són aplicacions diferenciables aleshores la composició

$$h := f \circ g : (t_1, \ldots, t_p) \mapsto f(g_1(t_1, \ldots, t_p), \ldots, g_n(t_1, \ldots, t_p))$$

també és diferenciable i la seva matriu diferencial s'obté fent el producte de matrius diferencials $Dh(a) = Df(g(a)) \cdot Dg(a)$:

$$Dh(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(g(a)) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(g(a)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(g(a)) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(g(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial t_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial t_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial t_p}(a) \end{pmatrix}$$

Interpretació de la matriu diferencial

- Recordem que si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció diferenciable aleshores $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ si $\Delta x \approx 0$. Si dx denota un increment infinitesimal de la variable x aleshores és habitual reescriure l'aproximació anterior com una igualtat

$$f(x + dx) = f(x) + df(x), \quad \text{on} \quad df(x) = f'(x)\, dx.$$

- Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una funció diferenciable aleshores

$$f(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + df(x),$$

on $df(x)$ és un increment infinitesimal de f, quantitat escalar calculada a partir del vector d'increments $\vec{dx} = (dx_1, \ldots, dx_n)$ mitjançant $df(x) = (\nabla f)(x) \cdot d\vec{x}$.

- Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és una aplicació diferenciable llavors $f(x + \vec{dx}) = f(x) + df(x)$, on $df(x)$ és l'increment vectorial infinitesimal de f calculat per $df(x) = Df(x) \cdot \vec{dx}$.

Punts crítics i extrems locals

Definició: Un punt crític $a \in D$ d'una funció diferenciable $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és aquell que satisfà el sistema d'equacions

$$(\nabla f)(a) = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & = & 0 \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) & = & 0 \end{cases}$$

Observació: Si a no és un punt crític de f aleshores $(\nabla f)(a)$ ens proporciona la direcció en la qual f augmenta (o disminueix) més en el punt a. En particular, si a no és un punt crític de f llavors no pot ser un màxim o un mínim.

Conseqüència: Els punts crítics de f són els candidats a extrems locals (també anomenats relatius) de f.

Derivades parcials segones

Un punt crític a d'una funció d'una variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és un màxim (resp. mínim) quan $f''(a) < 0$ (resp. $f''(a) > 0$).

Definició: La derivada parcial segona d'una funció $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$ es calcula fent la derivada parcial de f primer respecte de x_j i després respecte x_i.

Teorema:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Existeixen totes les derivades parcials}\\ \text{segones de } f \text{ i són funcions contínues}\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Definició: La matriu hessiana de f en un punt a ve donada per

$$H(f)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

i és simètrica respecte de la diagonal principal.

Fórmula de Taylor d'ordre 2

- El pla tangent d'una funció diferenciable $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un punt a venia donat per l'equació $z = f(a) + Df(a)(x - a)$ que és l'aproximació lineal (ordre 1) de f en el punt a.
- Si a és un punt crític de f aleshores $Df(a) = (\nabla f)(a) = 0$ i l'aproximació d'ordre 1 de f en a és constant.
- L'aproximació d'ordre 2 ve donada per la fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x - a) + \frac{1}{2}D^2(f)(a)(x - a)^2 + \cdots$$

on $D^2(f)(a)(x - a)^2$ és un valor escalar que es calcula fent

$$(x_1 - a_1 \ \cdots \ x_n - a_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}}_{H(f)(a)} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$$

Criteri del hessià

Definició: Una matriu H quadrada $n \times n$ i simètrica es diu definida positiva (respectivament definida negativa) si per tot vector no nul $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \neq \vec{0}$ es verifica la desigualtat

$$(v_1 \ \cdots \ v_n)\, H \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} > 0 \text{ (respectivament } < 0).$$

Teorema: Sigui a un punt crític d'una funció diferenciable f.

- Si $H(f)(a)$ és definida positiva aleshores el punt a és un mínim relatiu de f.
- Si $H(f)(a)$ és definida negativa aleshores el punt a és un màxim relatiu de f.
- Si $H(f)(a)$ no és definida (> 0 ni < 0) i $\det(H(f)(a)) \neq 0$ aleshores a és un punt de sella de f (hi ha direccions passant per a en les quals f augmenta i d'altres en que disminueix).

Teorema de Sylvester

Definició: Donada una matriu quadrada simètrica

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

definim els seus menors principals $m_1 = h_{11}, m_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \ldots$

$$\ldots, m_k = \begin{vmatrix} h_{11} & \cdots & h_{kk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{k1} & \cdots & h_{kk} \end{vmatrix}, \ldots, m_n = \det(H).$$

Teorema: Sigui H una matriu quadrada simètrica.

- H és definida positiva $\Leftrightarrow$ $m_1 > 0, m_2 > 0, \ldots, m_n > 0$.
- H és definida negativa $\Leftrightarrow$ $m_1 < 0, m_2 > 0, m_3 < 0, \ldots$

Extrems condicionats

Situació: Volem optimitzar una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ subjecta a una condició $g(x_1, \ldots, x_n) = c$.

Si a és un punt de la superfície $S = \{g(x_1, \ldots, x_n) = c\}$ podem considerar la projecció ortogonal $\vec{V}_a$ del vector $(\nabla f)(a)$ sobre el pla tangent a S en a. Si $\vec{V}_a \neq 0$ podem moure'ns sobre S seguint la direcció $\vec{V}_a$ (resp. $-\vec{V}_a$) i augmentar (resp. disminuir) el valor de f. Per tant, el punt a només pot ser un candidat a màxim o mínim de f sobre S quan $\vec{V}_a = \vec{0} \Leftrightarrow (\nabla f)(a) \perp S \Leftrightarrow (\nabla f)(a) || (\nabla g)(a)$.

Així els candidats a extrems condicionats satisfan el següent sistema de $n+1$ equacions amb $n+1$ incògnites $a_1, \ldots, a_n, \lambda$:

$$\left\{ \begin{array}{c} (\nabla f)(a) = \lambda(\nabla g)(a) \\ g(a) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(a) & = & 0 \\ \cdots & & \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) & = & 0 \\ g(a_1, \ldots, a_n) & = & 0 \end{array} \right.$$

Multiplicadors de Lagrange

El sistema anterior també s'obté a partir de la funció lagrangiana

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda(g(x_1, \ldots, x_n) - c)$$

buscant els seus punts crítics en la forma (a, λ): $(\nabla L)(a, \lambda) = \vec{0}$.

Per resoldre aquest sistema d'equacions es sol aïllar i substituir λ en funció de $a_1, \ldots, a_n$ obtenint un sistema de n equacions amb n incògnites $(a_1, \ldots, a_n)$, les solucions del qual constitueixen els punts que s'han d'avaluar en f per trobar el valor més gran i més petit de entre totes les solucions possibles.

Interpretació del multiplicador de Lagrange λ: Sigui a_c el punt de $S_c = \{g = c\}$ on f pren el seu valor màxim $M_c = f(a_c)$. Si canviem el valor c de la condició incrementant-lo una quantitat $dc \approx 0$, podem estimar el valor màxim $M_{c+dc} = f(a_c + da)$ de f sobre S_{c+dc} a partir de M_c i el multiplicador de Lagrange λ_c:

$$M_{c+dc} = f(a_c) + (\nabla f)(a_c)da = M_c + \lambda_c(\nabla g)(a_c)da = M_c + \lambda_c\, dc.$$

Extrems absoluts

Teorema: Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una funció contínua i D és un conjunt compacte (tancat i acotat) aleshores f té màxim i mínims absoluts sobre D.

Mètode: Comparar els valors de f sobre els candidats següents:

- Els extrems relatius de f que estan a D
  (sistema d'equacions dels punts crítics + criteri del hessià)
- Els extrems condicionats sobre cada component de la vora
  $\partial D = \{g_1(x) = c_1\} \cup \cdots \cup \{g_k(x) = c_k\}$
  (multiplicadors de Lagrange).
- Els "punts" d'intersecció, si n'hi ha, entre les diferents components de la vora de D.

II. Càlcul Integral

5. Integració a $\mathbb{R}$
   - Definició i interpretació
   - Mètodes de càlcul de primitives
   - Aplicacions
6. Integració a $\mathbb{R}^n$
   - Definició i interpretació
   - Principi de Cavalieri i teorema de Fubini
   - Integració sobre dominis generals
   - Teorema de canvi de variables
7. Aplicacions
   - Àrees i volums
   - Centres de mases i moments d'inèrcia

Integració a $\mathbb{R}$

Sigui $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció d'una variable i considerem una partició $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ de l'interval $[a, b]$.

- Definim la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ com el límit quan $N \to \infty$ (respecte de totes les particions de $[a, b]$) de la suma $\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta(x_i)$ de les àrees dels rectangles d'alçada $f(x_i)$ i base $\Delta(x_i) = x_i - x_{i-1}$.
- Interpretem $\int_a^b f(x)\,dx$ com l'àrea (amb el signe de f) compresa entre $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$ i $x = b$.
- Calculem $\int_a^b f(x)\,dx$ mitjançant la regla de Barrow: si $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$ (i.e. $F'(x) = f(x)$) aleshores $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.
- Idea: Si definim $\tilde{F}(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ tenim que $\tilde{F}(x + h) - F(x) \approx f(x)h$ per $h \approx 0$. Per tant $\tilde{F}'(x) = f(x) = F'(x)$ i $\tilde{F}(x) = F(x) + C$. Així doncs $F(b) - F(a) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = \tilde{F}(b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Mètodes de càlcul de primitives

- Llista de primitives immediates (inversa de la llista de derivades)
- Canvi de variables $x = f(t)$, $dx = f'(t)\,dt$ (inversa de la regla de la cadena)
- Integració per parts $\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$ (inversa de la derivada d'un producte)
- Manipulacions algebraiques: $\int (f+g) = \int f + \int g$, $\int c\,f = c \int f$, descomposició de funcions racionals en fraccions simples,...

Aplicacions

- Càlcul d'àrees entre dues funcions $f_2(x) \geq f_1(x)$:

$$A = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, dx$$

- Càlcul de volums de revolució:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

- Càlcul de longituds de corbes $y = f(x)$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Integració a $\mathbb{R}^n$

Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció definida en un "prisma" $D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ i considerem particions $\{x_i^{(k_i)}\}_{k_i=0}^{N_i}$ de cada interval $[a_i, b_i]$.

- Definim la integral $\int_D f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$ com el límit quan $N_i \to \infty$ (respecte de totes les particions) de la suma $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k_i=1}^{N_i} f(x_1^{(k_1)}, \ldots, x_n^{(k_n)}) \Delta(x_1^{(k_1)}) \cdots \Delta(x_n^{(k_n)})$ dels volums dels paral·lelepípeds d'alçada $f(x_1^{(k_1)}, \ldots, x_n^{(k_n)})$ i bases $\Delta(x_i^{(k_i)}) = x_i^{(k_i)} - x_i^{(k_i-1)}$ per $i = 1, \ldots, n$.
- Interpretem la integral $\int_D f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$ com el volum $(n+1)$-dimensional (amb el signe de f) determinat pel prisma D i la gràfica de la funció $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Principi de Cavalieri i teorema de Fubini

- Principi de Cavalieri: El volum és una integral d'àrees (l'àrea és una integral de longituds,...)
- Més concretament, sigui R una regió compacta de $\mathbb{R}^3$ i denotem per $A(z_0)$ l'àrea de $R \cap \{z = z_0\}$. Llavors el volum de R és igual a $V(R) = \int_a^b A(z)\,dz$ on $z = a$ i $z = b$ són els plans horitzontals entre els quals es troba la regió R.
- Més generalment, aplicant el principi de Cavalieri als plans x_n =constant resulta que

$$\int_{D_n} f(x)\,dx_1 \dots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \underbrace{\left(\int_{D_{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, \overbrace{x_n}^{\text{fixada}})\,dx_1 \dots, dx_{n-1} \right)}_{\text{funció de la variable } x_n} dx_n,$$

on $D_{n-1} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$ i $D_n = D_{n-1} \times [a_n, b_n]$.

Teorema de Fubini

Iterant aquest procés, podem calcular la integral múltiple de f sobre el prisma $D_n = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ mitjançant integrals simples iterades:

$$\int_{D_n} f(x)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x) dx_1 \right) \cdots dx_{n-1} \right) dx_n.$$

Teorema de Fubini:
Si la funció f és prou regular per que tot hi estigui ben definit (per exemple, si f és contínua) aleshores la integral múltiple $\int_{D_n} f(x)\, dx_1 \cdots dx_n$ es pot calcular com una integral iterada amb una ordenació qualsevol de las variables $x_1, \ldots, x_n$.

Integració sobre dominis generals

Qüestió: Què succeeix si el domini d'integració D no és un prisma $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$?

Resposta: La situació és tècnicament més complicada però el principi de Cavalieri i el teorema de Fubini continuen sent vàlids. La única diferència és que els extrems d'integració en les integrals iterades poden dependre de les variables que queden per integrar.

Exemple: Si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ aleshores

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ llavors

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Canvis de variables

Expressar un domini general $D \subset \mathbb{R}^n$ de la forma

$$\begin{gathered} a_1 \leq x_1 \leq b_1, \\ a_2(x_1) \leq x_2 \leq b_2(x_1), \\ \dots \\ a_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq b_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{gathered}$$

pot no ser fàcil (i ni tan sols possible). Per això ens interessarà trobar maneres de "simplificar" l'expressió de D. Un mètode per portar a terme això és fer un canvi de variables, i.e. considerar una aplicació diferenciable

$$\begin{array}{rcl} g : U \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & V \subset \mathbb{R}^n \\ (t_1, \dots, t_n) & \longmapsto & (g_1(t_1, \dots, t_n), \dots, g_n(t_1, \dots, t_n)) \end{array}$$

amb inversa $h = g^{-1}$ diferenciable

$$\begin{array}{rcl} h : V \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & U \subset \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_n(x_1, \dots, x_n)) \end{array}$$

Teorema del canvi de variables per a integrals

Teorema:

Si $g : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ és un canvi de variables i $f : D \subset V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una funció aleshores

$$\int_D f(x)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{g^{-1}(D)} f(g(t))\, |\det(dg(t))|\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Exemples de canvis de variables:

- polars de $\mathbb{R}^2$: $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$,
  $g^{-1}(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x))$ i $|\det(dg(r,\theta))| = r$.
- cilíndriques de $\mathbb{R}^3$: $g(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$,
  $g^{-1}(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x), z)$ i $|\det(dg(r,\theta,z))| = r$.
- esfèriques: $g(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$,
  $g^{-1}(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \arctan(y/x), \arctan(z/\sqrt{x^2+y^2}))$ i
  $|\det(dg(\rho,\theta,\varphi))| = \rho^2\cos\varphi$

Àrees i volums

- Si $D \subset \mathbb{R}^2$ aleshores l'àrea de D es pot calcular mitjançant

$$A(D) = \int_D dA = \int_D dx\, dy.$$

- Si $D \subset \mathbb{R}^3$ aleshores el volum de D es pot calcular mitjançant

$$V(D) = \int_D dV = \int_D dx\, dy\, dz.$$

Centres de mases i moments d'inèrcia

Sigui $\rho(x, y, z)$ la funció de densitat d'un cos continu $D \subset \mathbb{R}^3$ aleshores podem calcular la massa total m de D i el centre de masses (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) mitjançant les integrals triples:

- $m = \int_D dm = \int_D \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$
- $x_{cm} = \frac{1}{m} \int_D x\, dm = \frac{1}{m} \int_D x\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$
- $y_{cm} = \frac{1}{m} \int_D y\, dm = \frac{1}{m} \int_D y\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$
- $z_{cm} = \frac{1}{m} \int_D z\, dm = \frac{1}{m} \int_D z\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

El moment d'inèrcia I de D respecte de l'eix z $(x = y = 0)$ ve donat per la integral triple:

$$I = \int_D (x^2 + y^2)\, dm = \int_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

III. Càlcul Vectorial

8. Integrals sobre corbes
   - Parametritzacions de corbes
   - Integrals de trajectòria
   - Integrals de línia. Circulació d'un camp
9. Integrals sobre superfícies
   - Parametritzacions de superfícies
   - Integrals de funcions
   - Integrals de camps. Flux d'un camp
10. Gradient, divergència i rotacional
11. Teoremes integrals
    - Teorema de Green
    - Teoremes de Stokes i Gauss
    - Camps conservatius
12. Aplicacions a la física
    - Lleis de conservació
    - Equació de la calor
    - Electromagnetisme: equacions de Maxwell

Parametritzacions de corbes de $\mathbb{R}^2$

Sigui $C \subset \mathbb{R}^2$ una corba donada per una equació $f(x, y) = 0$.

Definició: Una parametrització de C és una aplicació diferenciable $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, donada per dues funcions $\alpha : t \mapsto (x(t), y(t))$ tals que $f(x(t), y(t)) \equiv 0$.

Exemple 0: $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ circumferència de radi 1. Parametrització $\alpha : [0, 2\pi] \to C$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ja que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Exemple 1: $C = \{x^2 + y^2 = R^2\}$ circumferència de radi R. Podem reescriure l'equació com $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1$ i parametritzar C per $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$.

Parametritzacions de corbes de $\mathbb{R}^2$

Sigui $C \subset \mathbb{R}^2$ una corba donada per una equació $f(x, y) = 0$.

Definició: Una parametrització de C és una aplicació diferenciable $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, donada per dues funcions $\alpha : t \mapsto (x(t), y(t))$ tals que $f(x(t), y(t)) \equiv 0$.

Exemple 0: $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ circumferència de radi 1. Parametrització $\alpha : [0, 2\pi] \to C$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ja que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Exemple 1 general: $C = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$ el·lipse de semieixos $a, b > 0$. Parametrització $\alpha : t \in [0, 2\pi] \to (a \cos t, b \sin t)$.

Parametritzacions de corbes de $\mathbb{R}^2$

Sigui $C \subset \mathbb{R}^2$ una corba donada per una equació $f(x, y) = 0$.

Definició: Una parametrització de C és una aplicació diferenciable $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, donada per dues funcions $\alpha : t \mapsto (x(t), y(t))$ tals que $f(x(t), y(t)) \equiv 0$.

Exemple 0: $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ circumferència de radi 1. Parametrització $\alpha : [0, 2\pi] \to C$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ja que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Exemple 1 general: $C = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$ el·lipse de semieixos $a, b > 0$. Parametrització $\alpha : t \in [0, 2\pi] \to (a \cos t, b \sin t)$.

Exemple 2: $C = \{x^2 - y^2 = 1\}$ hipèrbola. Parametrització $\alpha : \mathbb{R} \to C$, $t \mapsto (\pm \cosh t, \sinh t) := (\pm \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2})$ ja que

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} - \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{4} = 1.$$

Parametritzacions de corbes de $\mathbb{R}^2$

Sigui $C \subset \mathbb{R}^2$ una corba donada per una equació $f(x, y) = 0$.

Definició: Una parametrització de C és una aplicació diferenciable $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, donada per dues funcions $\alpha : t \mapsto (x(t), y(t))$ tals que $f(x(t), y(t)) \equiv 0$.

Exemple 0: $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ circumferència de radi 1.
Parametrització $\alpha : [0, 2\pi] \to C$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ja que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Exemple 1 general: $C = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$ el·lipse de semieixos $a, b > 0$. Parametrització $\alpha : t \in [0, 2\pi] \to (a \cos t, b \sin t)$.

Exemple 2 general: $C = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$ hipèrbola.
Parametrització $\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto (\pm a \cosh t, b \sinh t)$.

Parametritzacions de corbes de $\mathbb{R}^2$

Sigui $C \subset \mathbb{R}^2$ una corba donada per una equació $f(x, y) = 0$.

Definició: Una parametrització de C és una aplicació diferenciable $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, donada per dues funcions $\alpha : t \mapsto (x(t), y(t))$ tals que $f(x(t), y(t)) \equiv 0$.

Exemple 0: $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ circumferència de radi 1. Parametrització $\alpha : [0, 2\pi] \to C$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ja que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Exemple 1 general: $C = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$ el·lipse de semieixos $a, b > 0$. Parametrització $\alpha : t \in [0, 2\pi] \to (a \cos t, b \sin t)$.

Exemple 2 general: $C = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$ hipèrbola. Parametrització $\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto (\pm a \cosh t, b \sinh t)$.

Exemple 3: $C = \{y = x^2\}$ paràbola. Parametrització $\alpha : \mathbb{R} \to C$, $\alpha(t) = (t, t^2)$.

Parametritzacions de corbes de $\mathbb{R}^2$

Sigui $C \subset \mathbb{R}^2$ una corba donada per una equació $f(x, y) = 0$.

Definició: Una parametrització de C és una aplicació diferenciable $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, donada per dues funcions $\alpha : t \mapsto (x(t), y(t))$ tals que $f(x(t), y(t)) \equiv 0$.

Exemple 0: $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ circumferència de radi 1. Parametrització $\alpha : [0, 2\pi] \to C$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ja que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Exemple 1 general: $C = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$ el·lipse de semieixos $a, b > 0$. Parametrització $\alpha : t \in [0, 2\pi] \to (a \cos t, b \sin t)$.

Exemple 2 general: $C = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$ hipèrbola. Parametrització $\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto (\pm a \cosh t, b \sinh t)$.

Exemple 3 general: $C = \{y = f(x)\}$ gràfica. Parametrització $\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, f(t))$.

Integrals de trajectòria

Si $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to C \subset \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \alpha(t)$, és una parametrització d'una corba $C \subset \mathbb{R}^3$ aleshores interpretem

- t com el temps i dt com a un increment infinitesimal de temps
- $\alpha'(t)$ com el vector velocitat i $\|\alpha'(t)\|$ com la velocitat escalar
- diferencial de longitud $dL = \|\alpha'(t)\|\, dt$ com a un increment infinitesimal de longitud (= velocitat per temps infinitesimal)

Si $\rho : C \to \mathbb{R}$ és una funció (de densitat lineal d'alguna magnitud física) aleshores definim la integral de trajectòria de ρ mitjançant

$$\int_A^B \rho\, dL := \int_a^b \rho(\alpha(t))\, \|\alpha'(t)\|\, dt,$$

on $A = \alpha(a)$ i $B = \alpha(b)$.

- Per exemple, si $\rho = 1$ aleshores $\int_A^B dL$ mesura la longitud de l'arc de corba C entre els punts A i B.

Integrals de línia

Si $t \in [a,b] \mapsto \alpha(t) \in C$ és una parametrització d'una corba $C \subset \mathbb{R}^3$ i $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ és un camp vectorial aleshores definim

- diferencial (vectorial) de desplaçament com $d\vec{L} = \alpha'(t)\,dt$.
- vector tangent unitari $\vec{t} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$.
- la integral de línia de $\vec{F}$ sobre C mitjançant

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{L} := \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt = \int_A^B (\vec{F} \cdot \vec{t})\,dL$$

("suma" de les parts tangents $F_t := \vec{F} \cdot \vec{t}$ de $\vec{F}$ al llarg de C).

Es defineix el treball efectuat per una força $\vec{F}$ sobre C com la diferència d'energia cinètica $T = \frac{1}{2}mv^2$ entre els extrems de C:

$$T(B) - T(A) = \int_a^b \frac{d}{dt} T(\alpha(t))\,dt = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{L},$$

$$\frac{d}{dt} T(\alpha(t)) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)) = m\alpha''(t) \cdot \alpha'(t) = \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).$$

Circulació d'un camp

- Si C és una corba tancada i orientada, l'integral de línia $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L}$ s'anomena la circulació de $\vec{F}$ al llarg de C.
- Un camp de forces $\vec{F}$ es diu conservatiu o potencial quan el treball realitzat sobre un camí qualsevol només depèn dels seus extrems. Equivalentment, C tancada $\Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = 0$.
- Si $\vec{F} = \nabla f$ llavors $\vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \frac{d}{dt} f(\alpha(t))$ i per tant

$$T(B) - T(A) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\alpha(t))\, dt = f(B) - f(A)$$

  i el camp $\vec{F}$ és conservatiu.
- Si $\vec{F} = \nabla f$ llavors la quantitat $E = T - f$ (l'energia total) és constant al llarg de la trajectòria. Definim (l'energia) potencial de $\vec{F}$ com $V = -f$ de manera que $\vec{F} = -\nabla V$.
- Teorema: $\vec{F}$ conservatiu $\Leftrightarrow \vec{F} = -\nabla V \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{F} := \nabla \times \vec{F} = 0$

Parametritzacions de superfícies de $\mathbb{R}^3$

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície donada per una equació $f(x, y, z) = 0$.

Definició: Una parametrització de S és una aplicació diferenciable $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donada per tres funcions de dues variables $x(u, v)$, $y(u, v)$ i $z(u, v)$ tals que $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \equiv 0$.

Exemple 0: $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ esfera de de radi 1. En coordenades cilíndriques (r, θ, z), $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, S té per equació $r^2 + z^2 = 1$ que podem parametritzar per $u \mapsto (r(u), z(u)) = (\cos u, \sin u)$ mentre que $\theta = v$ és l'altre variable que pot variar lliurement. Per tant, obtenim una parametrització $\sigma : [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$ de S donada per $\sigma(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$.

Parametritzacions de superfícies de $\mathbb{R}^3$

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície donada per una equació $f(x, y, z) = 0$.

Definició: Una parametrització de S és una aplicació diferenciable $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donada per tres funcions de dues variables $x(u, v)$, $y(u, v)$ i $z(u, v)$ tals que $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \equiv 0$.

Exemple 0: $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ esfera de de radi 1.
Parametrització $\sigma(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$.

Parametritzacions de superfícies de $\mathbb{R}^3$

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície donada per una equació $f(x, y, z) = 0$.

Definició: Una parametrització de S és una aplicació diferenciable $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donada per tres funcions de dues variables $x(u, v)$, $y(u, v)$ i $z(u, v)$ tals que $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \equiv 0$.

Exemple 0: $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ esfera de de radi 1.
Parametrització $\sigma(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$.

Exemple 1: $S = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\}$ el·lipsoide de semieixos $a, b, c > 0$. Paramet.: $\sigma(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u)$.

Parametritzacions de superfícies de $\mathbb{R}^3$

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície donada per una equació $f(x, y, z) = 0$.

Definició: Una parametrització de S és una aplicació diferenciable $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donada per tres funcions de dues variables $x(u, v)$, $y(u, v)$ i $z(u, v)$ tals que $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \equiv 0$.

Exemple 0: $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ esfera de de radi 1. Parametrització $\sigma(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$.

Exemple 1: $S = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\}$ el·lipsoide de semieixos $a, b, c > 0$. Paramet.: $\sigma(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u)$.

Exemple 2: $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ hiperboloïde d'un full. En coordenades cilíndriques $r^2 - z^2 = 1$ podem parametritzar $u \mapsto (r(u), z(u)) = (\cosh u, \sinh u)$ i $\theta = v$ obtenint la parametrització $\sigma(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)$.

Parametritzacions de superfícies de $\mathbb{R}^3$

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície donada per una equació $f(x, y, z) = 0$.

Definició: Una parametrització de S és una aplicació diferenciable $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donada per tres funcions de dues variables $x(u, v)$, $y(u, v)$ i $z(u, v)$ tals que $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \equiv 0$.

Exemple 0: $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ esfera de de radi 1.
Parametrització $\sigma(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$.

Exemple 1: $S = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\}$ el·lipsoide de semieixos $a, b, c > 0$. Paramet.: $\sigma(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u)$.

Exemple 2: $S = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\}$ hiperboloïde d'un full.
Parametrització: $\sigma(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u)$.

Parametritzacions de superfícies de $\mathbb{R}^3$

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície donada per una equació $f(x, y, z) = 0$.

Definició: Una parametrització de S és una aplicació diferenciable $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donada per tres funcions de dues variables $x(u, v)$, $y(u, v)$ i $z(u, v)$ tals que $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \equiv 0$.

Exemple 0: $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ esfera de de radi 1.
Parametrització $\sigma(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$.

Exemple 1: $S = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\}$ el·lipsoide de semieixos $a, b, c > 0$. Paramet.: $\sigma(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u)$.

Exemple 2: $S = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\}$ hiperboloïde d'un full.
Parametrització: $\sigma(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u)$.

Exemple 3: $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$ hiperboloïde de dos fulls. En coordenades cilíndriques podem parametritzar $-r^2 + z^2 = 1$ per $u \mapsto (r(u), z(u)) = (\sinh u, \pm \cosh u)$ i $\theta = v$ obtenint la parametrització $\sigma(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \pm \cosh u)$.

Parametritzacions de superfícies de $\mathbb{R}^3$

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície donada per una equació $f(x, y, z) = 0$.

Definició: Una parametrització de S és una aplicació diferenciable $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donada per tres funcions de dues variables $x(u, v)$, $y(u, v)$ i $z(u, v)$ tals que $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \equiv 0$.

Exemple 0: $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ esfera de de radi 1.
Parametrització $\sigma(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$.

Exemple 1: $S = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\}$ el·lipsoide de semieixos $a, b, c > 0$. Paramet.: $\sigma(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u)$.

Exemple 2: $S = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\}$ hiperboloïde d'un full.
Parametrització: $\sigma(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u)$.

Exemple 3: $S = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = -1\}$ hiperboloïde dos fulls.
Parametrització $\sigma(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, \pm c \cosh u)$.

Parametritzacions de superfícies de $\mathbb{R}^3$ (continuació)

Exemple 4': $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ con circular. En coordenades cilíndriques $r^2 - z^2 = 0$, podem posar $u \mapsto (r(u), z(u)) = (u, u)$ i $\theta = v$ obtenint la parametrització $\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$.

Exemple 4: $S = \{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0\}$ con el·líptic.
Parametrització $\sigma(u, v) = (a\, u \cos v, b\, u \sin v, cu)$.

Exemple 5: $S = \{z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\}$ paraboloide el·líptic.

Exemple 6: $S = \{z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\}$ paraboloide hiperbòlic.

Els dos últims exemples són casos particulars d'una situació més general:

Exemple 7: $S = \{z = f(x, y)\}$ gràfic d'una funció. Parametrització $\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

Parametritzacions de superfícies

Sigui $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$, $\sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ una parametrització diferenciable d'una superfície S de $\mathbb{R}^3$.

- 2 famílies de corbes en S, $u \mapsto \sigma(u, v_0)$ i $v \mapsto \sigma(u_0, v)$, amb vectors tangents $\sigma_u = \frac{\partial \sigma}{\partial u}$ i $\sigma_v = \frac{\partial \sigma}{\partial v}$ respectivament.
- Diem que la parametrització σ és regular quan els vectors σ_u i σ_v són linealment independents $\Leftrightarrow \sigma_u \times \sigma_v \neq 0$.
- Si σ és regular aleshores σ_u i σ_v generen el pla tangent a S que és perpendicular a $\sigma_u \times \sigma_v$ i podem definir:

- diferencial d'àrea $dS = \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv$ (escalar)
- diferencial de superfície $\vec{dS} = (\sigma_u \times \sigma_v) \, du \, dv$ (vectorial)
- vector normal unitari $\vec{n} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ (orientació de S).

L'àrea d'una regió $R = \sigma(D) \subset S$ es calcula fent la integral doble

$$A(R) = \int_R dS := \int_D \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv.$$

Exemple: càlcul de l'àrea d'una esfera

Parametrització de l'esfera de radi $R > 0$:

$$\begin{array}{rcl} D = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \xrightarrow{\sigma} & S_R^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (R\cos v \cos u, R\cos v \sin u, R \sin v) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sigma_u & = & (-R\cos v \sin u, R\cos v \cos u, 0) \\ \sigma_v & = & (-R\sin v \cos u, -R\sin v \sin u, R\cos v) \\ \sigma_u \times \sigma_v & = & R^2 \cos v\,(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v) \\ dS & = & R^2 \cos v \, du\, dv \\ \vec{n} & = & (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} A(S_R^2) & = & \displaystyle\int_{S_R^2} dS = \int_D R^2 \cos v \, du\, dv = R^2 \int_0^{2\pi} du \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv \\ & = & 4\pi R^2. \end{array}$$

Integrals d'àrea sobre superfícies

Sigui $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ una parametrització regular d'una superfície i $\rho : S \to \mathbb{R}$ una funció (de densitat superficial d'alguna magnitud física). Definim la integral d'àrea de f sobre S com

$$\int_S \rho \, dS := \int_D \rho(\sigma(u,v)) \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv.$$

Exemple: Sigui $S = S^2_R$ una esfera de radi $R > 0$ construïda d'un material homogeni de densitat 1. Calculem el seu centre de masses:

$$\begin{aligned}
m &= \int_{S^2_R} dm = \int_{S^2_R} \rho \, dS = \int_{S^2_R} dS = \cdots = 4\pi R^2 \\
mx_{cm} &= \int_{S^2_R} x \, dm = \int_{S^2_R} x \, dS = \int R \cos u \cos v \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv = \cdots = 0 \\
my_{cm} &= \int_{S^2_R} y \, dm = \int_{S^2_R} y \, dS = \int R \sin u \cos v \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv = \cdots = 0 \\
mz_{cm} &= \int_{S^2_R} z \, dm = \int_{S^2_R} z \, dS = \int R \sin v \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv = \cdots = 0
\end{aligned}$$

Per tant el centre de masses d'una esfera homogènia és el centre geomètric de l'esfera.

Integrals de superfície d'un camp. Flux

Si $\vec{F}$ un camp vectorial definit sobre una superfície orientada S definim la integral de superfície

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} := \int_D \vec{F}(\sigma(u,v)) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v)\, du\, dv = \int_S (\vec{F} \cdot \vec{n})\, dS$$

("suma" de les parts normals $F_n := \vec{F} \cdot \vec{n}$ sobre la superfície S).

Interpretació: Si $\vec{F}$ és el camp de velocitats d'un fluid aleshores F_n és la quantitat de fluid travessa S per unitat d'àrea, "sortint" de S (respecte a l'orientació donada per $\vec{n}$) si $F_n > 0$ i "entrant" a S si $F_n < 0$. Aquesta interpretació té un sentit inequívoc quan S és una superfície tancada orientada pel vector normal exterior $\vec{n}$. En aquest cas $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ s'anomena el flux del camp $\vec{F}$ a través de S.

Exercici: Si $\vec{F}$ és constant i $S = S_R^2$ aleshores $\int_{S_R^2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$ ("tot el que entra surt").

Derivades de funcions i camps vectorials

- Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ és una funció podem pensar el seu gradient $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ com un camp vectorial que en cada punt (x, y, z) li fa correspondre el vector $\nabla f(x, y, z)$.

- Podem pensar $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ com un operador vectorial que actua sobre les funcions $f(x, y, z)$ donant com a resultat el camp vectorial ∇f.

- Quines altres operacions podem efectuar amb ∇?

Derivades de funcions i camps vectorials

Si $\vec{F} = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ és un camp vectorial llavors podem definir dues operacions més:

- El producte escalar de $\vec{\nabla}$ i $\vec{F}$:

$$\operatorname{div} \vec{F} := \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

  que és la funció anomenada divergència de $\vec{F}$.

- El producte vectorial de $\vec{\nabla}$ i $\vec{F}$:

$$\operatorname{rot} \vec{F} := \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

  que és el camp vectorial anomenat rotacional de $\vec{F}$.

Derivades segones de funcions i camps vectorials

Si f és una funció i $\vec{F}$ és un camp vectorial, totes les combinacions que tenen sentit són les següents:

- $\nabla \cdot (\nabla f) = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f$

  que és una funció anomenada Laplaciana de f.
- $\nabla \times (\nabla f) = (\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}) = (0, 0, 0)$,

  és a dir $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$.
- $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0$, és a dir, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$.
- $\nabla(\nabla \cdot \vec{F})$ que és un camp vectorial.
- $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$ que és un camp vectorial.

Teorema de Green

Aquest teorema relaciona una integral de línia al llarg d'una corba tancada simple C del pla $\mathbb{R}^2$ amb una integral doble sobre la regió D que delimita $C = \partial D$.

Teorema de Green (formulació clàssica):
Si $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ és un camp vectorial diferenciable sobre una regió $D \subset \mathbb{R}^2$ aleshores orientant $C = \partial D$ positivament tenim

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

Exemple: Si $\vec{F} = (-y, x)$ aleshores $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$ i per tant

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{L} = 2\,A(D).$$

Teorema de Green

Teorema de Green (formulació clàssica):
Si $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ és un camp vectorial diferenciable sobre una regió $D \subset \mathbb{R}^2$ aleshores orientant $C = \partial D$ positivament tenim

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

Reformulació 1 (en forma vectorial):
Sigui $\vec{F} = (P, Q, 0)$ camp vectorial al pla $S = \{z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ orientat pel vector normal unitari $\vec{n} = (0,0,1)$. Recordem que $d\vec{S} = \vec{n}\,dS$ i en aquest cas $dS = dx\,dy$. Aleshores

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\,dS = \int_D (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

ja que $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$

Teorema de Green

Teorema de Green (formulació clàssica):
Si $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ és un camp vectorial diferenciable sobre una regió $D \subset \mathbb{R}^2$ aleshores orientant $C = \partial D$ positivament tenim

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

Reformulació 2: Siguin $\vec{t} = (a,b)$ i $\vec{n} = (b,-a)$ els vectors tangent i normal exterior a la corba $C = \partial D \subset \mathbb{R}^2$. Aleshores

$$\int_{\partial D} (\vec{F} \cdot \vec{n})\,dL = \int_D \operatorname{div} \vec{F}\,dx\,dy,$$

ja que si definim $\vec{G} = (-Q, P)$ llavors

$$\int_{\partial D} (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dL = \int_{\partial D} (\vec{G}\cdot\vec{t})\,dL = \int_{\partial D} \vec{G}\cdot d\vec{L} = \int_D \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(-Q)}{\partial y} \right)}_{\operatorname{div} \vec{F}} dx\,dy.$$

Teoremes de Stokes y Gauss

Teorema de Stokes:

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície orientada amb frontera ∂S orientada positivament i $\vec{F}$ un camp vectorial diferenciable. Aleshores

$$\int_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L}.$$

Teorema de Gauss (o de la divergència):

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície tancada (sense vora) delimitant una regió $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Si denotem per $dV = dx\, dy\, dz$ i orientem $S = \partial\Omega$ mitjançant el vector normal exterior aleshores

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \vec{F})\, dV = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Teoremes de Stokes y Gauss

Teorema de Stokes:

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície orientada amb frontera ∂S orientada positivament i $\vec{F}$ un camp vectorial diferenciable. Aleshores

$$\int_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L}.$$

Teorema de Gauss (o de la divergència):

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície tancada (sense vora) delimitant una regió $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Si denotem per $dV = dx\,dy\,dz$ i orientem $S = \partial\Omega$ mitjançant el vector normal exterior aleshores

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \vec{F})\, dV = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Observació: Si S_1 i S_2 són superfícies amb la mateixa frontera $\partial S_1 = \partial S_2$ aleshores $S_1 - S_2 = \partial\Omega$ és la vora d'una regió $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ i el teorema de Gauss (d'acord amb el teorema de Stokes) implica

$$0 = \int_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{rot} \vec{F})\, dV = \int_{S_1 - S_2} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S} - \int_{S_2} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

Camps vectorials conservatius

Donat un camp vectorial $\vec{F}$ estem interessats en saber si és de la forma $\vec{F} = \operatorname{grad} f$ o $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{G}$ per alguna funció f o algun camp vectorial $\vec{G}$.

Ja coneixem les relacions $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ i $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{G} = 0$. Per tant, obtenim condicions necessàries per cadascuna d'aquestes situacions: $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ i $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ respectivament.

Teorema 1:
Si $\vec{F}$ és un camp vectorial tal que $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ llavors $\vec{F}$ és conservatiu, és a dir, existeix una funció f tal que $\vec{F} = \nabla f$.
Idea: Pel teorema de Stokes la circulació de $\vec{F}$ al llarg de tota corba tancada és zero i per tant la funció $f(P) := \int_{P_0}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{L}$ no depèn del camí per anar de P_0 a P.

Teorema 2:
Si $\vec{F}$ és un camp vectorial diferenciable a tot $\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ aleshores existeix un camp vectorial $\vec{G}$ tal que $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{G}$.

Lleis de conservació

Sigui $\vec{v}(x, y, z, t)$ un camp vectorial (de velocitats) a $\mathbb{R}^3$ i $\rho(x, y, z, t)$ una funció densitat d'alguna magnitud física que depenen del temps t. La llei de conservació d'aquesta magnitud significa que per a tota regió $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es verifica:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\, dV = -\int_{\partial\Omega} \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS, \qquad \text{on} \quad \vec{J} = \rho\vec{v}.$$

Exemple: Llei de conservació de la massa per a fluids:

Si prenem ρ =densitat de massa i $\vec{v}$ =camp de velocitats, l'equació anterior ens diu que la variació (derivada) de la quantitat de massa que hi ha dins de la regió Ω és igual a la quantitat de massa que flueix cap a l'interior (signe menys) de Ω a través de la seva vora $\partial\Omega$. ($\int_{\partial\Omega} \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS$ és el flux de $\vec{J} = \rho\vec{v}$ =massa en moviment.)

L'equació anterior té un significat físic molt clar però és difícil de manipular matemàticament ja que està expressada com una integral sobre un domini Ω qualsevol.

Lleis de conservació

Sigui $\vec{v}(x, y, z, t)$ un camp vectorial (de velocitats) a $\mathbb{R}^3$ i $\rho(x, y, z, t)$ una funció densitat d'alguna magnitud física que depenen del temps t. La llei de conservació d'aquesta magnitud significa que per a tota regió $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es verifica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

Exemple: Llei de conservació de la massa per a fluids:

Si prenem ρ =densitat de massa i $\vec{v}$ =camp de velocitats, l'equació anterior ens diu que la variació (derivada) de la quantitat de massa que hi ha dins de la regió Ω és igual a la quantitat de massa que flueix cap a l'interior (signe menys) de Ω a través de la seva vora $\partial\Omega$. ($\int_{\partial\Omega} \vec{J} \cdot \vec{n}\, dS$ és el flux de $\vec{J} = \rho\vec{v}$ =massa en moviment.)

Per això, gràcies al teorema de Gauss podem traduir-la a una forma que es pot comprovar punt a punt anomenada equació de continuïtat.

Equació de la calor

Una altra funció física interessant és la temperatura $T(x, y, z, t)$ en cada punt (x, y, z) de l'espai en cada instant de temps t.
El flux de calor és el camp vectorial $\vec{F} = -\nabla T$ (el signe menys indica que la temperatura flueix de més calent a més fred). Sigui ρ la densitat d'energia calorífica per unitat de volum. Aleshores $\rho = c\rho_0 T$, on ρ_0 és la densitat de massa i c és una constant que depèn del cos anomenada calor específic. En aquest cas $\vec{J} = \kappa\vec{F}$ és l'energia calorífica en moviment, on κ és una constant anomenada conductivitat del cos.

La llei de conservació $\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\, dV = -\int_{\partial\Omega} \vec{J}\cdot d\vec{S}$ ens diu que la variació de l'energia calorífica dins de Ω és igual a la quantitat de energia calorífica que entra dins Ω a través de la frontera $\partial\Omega$.

Equació de la calor

Una altra funció física interessant és la temperatura $T(x, y, z, t)$ en cada punt (x, y, z) de l'espai en cada instant de temps t.
El flux de calor és el camp vectorial $\vec{F} = -\nabla T$ (el signe menys indica que la temperatura flueix de més calent a més fred). Sigui ρ la densitat d'energia calorífica per unitat de volum. Aleshores $\rho = c\rho_0 T$, on ρ_0 és la densitat de massa i c és una constant que depèn del cos anomenada calor específic. En aquest cas $\vec{J} = \kappa\vec{F}$ és l'energia calorífica en moviment, on κ és una constant anomenada conductivitat del cos.

En aquest cas l'equació de continuïtat $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0$, s'escriu

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T,$$

on $k = \frac{\kappa}{c\rho_0}$ és una funció anomenada la difussibilitat del cos.

Observació: En un estat estacionari (independent del temps) la temperatura $T(x, y, z)$ verifica l'equació de Laplace $\nabla^2 T = 0$.

Electromagnetisme: equacions de Maxwell

Suposem donades la funció de densitat de càrregues elèctriques $\rho(x, y, z, t)$ i la densitat (vectorial) de corrent $\vec{j}(x, y, z, t)$. Aquestes magnituds determinen els valors dels camps elèctric $\vec{E}(x, y, z, t)$ i magnètic $\vec{B}(x, y, z, t)$ en cada punt de l'espai i cada instant de temps mitjançant les equacions de Maxwell:

- $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ (Llei de Gauss)
  El flux del camp elèctric a través d'una superfície tancada S és igual a la càrrega elèctrica Q que n'hi ha a l'interior de Ω:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_\Omega (\nabla \cdot \vec{E})\, dV = \int_\Omega \rho\, dV = Q.$$

Electromagnetisme: equacions de Maxwell

Suposem donades la funció de densitat de càrregues elèctriques $\rho(x, y, z, t)$ i la densitat (vectorial) de corrent $\vec{j}(x, y, z, t)$. Aquestes magnituds determinen els valors dels camps elèctric $\vec{E}(x, y, z, t)$ i magnètic $\vec{B}(x, y, z, t)$ en cada punt de l'espai i cada instant de temps mitjançant les equacions de Maxwell:

- $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ (Llei de Gauss)
- $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (absència de càrregues magnètiques) El flux del camp magnètic sobre qualsevol superfície tancada és zero

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Electromagnetisme: equacions de Maxwell

Suposem donades la funció de densitat de càrregues elèctriques $\rho(x, y, z, t)$ i la densitat (vectorial) de corrent $\vec{j}(x, y, z, t)$. Aquestes magnituds determinen els valors dels camps elèctric $\vec{E}(x, y, z, t)$ i magnètic $\vec{B}(x, y, z, t)$ en cada punt de l'espai i cada instant de temps mitjançant les equacions de Maxwell:

- $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ (Llei de Gauss)
- $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (absència de càrregues magnètiques)
- $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$ (Llei de Faraday)

  El voltatge (la circulació de $\vec{E}$) al llarg d'una trajectòria tancada simple $C = \partial S$ és igual a la variació del flux magnètic a través de S:

$$\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Electromagnetisme: equacions de Maxwell

Suposem donades la funció de densitat de càrregues elèctriques $\rho(x, y, z, t)$ i la densitat (vectorial) de corrent $\vec{j}(x, y, z, t)$. Aquestes magnituds determinen els valors dels camps elèctric $\vec{E}(x, y, z, t)$ i magnètic $\vec{B}(x, y, z, t)$ en cada punt de l'espai i cada instant de temps mitjançant les equacions de Maxwell:

- $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ (Llei de Gauss)
- $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (absència de càrregues magnètiques)
- $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$ (Llei de Faraday)
- $c^2 \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Llei d'Àmpere modificada per Maxwell)

  La circulació de $\vec{B}$ al llarg d'una corba tancada simple $C = \partial S$ és proporcional a la suma de l'intensitat de corrent que travessa S més la variació en el temps del flux de $\vec{E}$ per S:

$$\int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{L} = \int_S \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \left(\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right).$$

Electromagnetisme: equacions de Maxwell

Suposem donades la funció de densitat de càrregues elèctriques $\rho(x, y, z, t)$ i la densitat (vectorial) de corrent $\vec{j}(x, y, z, t)$. Aquestes magnituds determinen els valors dels camps elèctric $\vec{E}(x, y, z, t)$ i magnètic $\vec{B}(x, y, z, t)$ en cada punt de l'espai i cada instant de temps mitjançant les equacions de Maxwell:

- $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ (Llei de Gauss)
- $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (absència de càrregues magnètiques)
- $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$ (Llei de Faraday)
- $c^2 \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Llei d'Àmpere modificada per Maxwell)

La força que experimenta una partícula de càrrega q i velocitat $\vec{v}$ ve donada per la llei de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

(La llei de Coulomb $F = K\frac{q_1 q_2}{r^2}$ només val per càrregues estàtiques.)

Electromagnetisme: equacions de Maxwell

Suposem donades la funció de densitat de càrregues elèctriques $\rho(x, y, z, t)$ i la densitat (vectorial) de corrent $\vec{j}(x, y, z, t)$. Aquestes magnituds determinen els valors dels camps elèctric $\vec{E}(x, y, z, t)$ i magnètic $\vec{B}(x, y, z, t)$ en cada punt de l'espai i cada instant de temps mitjançant les equacions de Maxwell:

- $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ (Llei de Gauss)
- $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (absència de càrregues magnètiques)
- $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$ (Llei de Faraday)
- $c^2 \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Llei d'Àmpere modificada per Maxwell)

La força que experimenta una partícula de càrrega q i velocitat $\vec{v}$ ve donada per la llei de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Gauss+Maxwell$\Rightarrow$ llei de conservació de la càrrega: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$.

Simplicació de les equacions de Maxwell

Les dades del problema són la funció de densitat de càrregues elèctriques ρ i el camp vectorial de densitat de corrent $\vec{j}$ subjectes a l'equació de continuïtat $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$ expressant la conservació de la càrrega elèctrica. Les incògnites del problema són les 6 funcions (de 4 variables) components dels camps elèctric $\vec{E}$ i magnètic $\vec{B}$.

A partir de l'equació $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ deduïm que existeix un camp vectorial $\vec{A}$ tal que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Observem que si $\vec{A}$ funciona i ψ és una funció arbitrària aleshores $\vec{A'} = \vec{A} + \nabla\psi$ també convé.

De l'equació $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ deduïm que $\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$ i per tant existeix una funció φ tal que $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$, és a dir, $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi = -\frac{\partial \vec{A'}}{\partial t} - \nabla\varphi'$ on $\varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$.

De l'última equació de Maxwell resulta que

$$c^2\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - c^2\nabla^2\vec{A} = \vec{j} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Simplicació de les equacions de Maxwell

Existeix una funció ψ tal que $\nabla \cdot \vec{A}' = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial t}$. Canviant $\vec{A}$ per $\vec{A}'$ i φ per φ' arribem finalment a l'equació d'ona per $\vec{A}$:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{j}}{c^2}$$

A partir de l'equació $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ deduïm que existeix un camp vectorial $\vec{A}$ tal que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Observem que si $\vec{A}$ funciona i ψ és una funció arbitrària aleshores $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$ també convé.

De l'equació $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ deduïm que $\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$ i per tant existeix una funció φ tal que $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$, és a dir, $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \nabla\varphi'$ on $\varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$.

De l'última equació de Maxwell resulta que

$$c^2\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - c^2\nabla^2\vec{A} = \vec{j} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Simplicació de les equacions de Maxwell

Existeix una funció ψ tal que $\nabla \cdot \vec{A}' = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial t}$. Canviant $\vec{A}$ per $\vec{A}'$ i φ per φ' arribem finalment a l'equació d'ona per $\vec{A}$:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{j}}{c^2}$$

i per φ:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho,$$

a partir de les quals recuperem els camps elèctric i magnètic

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}. \end{aligned}$$

Simplicació de les equacions de Maxwell

Existeix una funció ψ tal que $\nabla \cdot \vec{A}' = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial t}$. Canviant $\vec{A}$ per $\vec{A}'$ i φ per φ' arribem finalment a l'equació d'ona per $\vec{A}$:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{j}}{c^2}$$

i per φ:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho,$$

a partir de les quals recuperem els camps elèctric i magnètic

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}. \end{aligned}$$

Observació: En absència de càrregues ($\rho = 0$ i $\vec{j} = \vec{0}$) els camps $\vec{E}$ i $\vec{B}$ es propaguem a la velocitat de la llum c com a ones electromàgnetiques ($f(x - ct)$ és solució de l'equació d'ona).