

La topología de las hojas de ciertas foliaciones singulares

David Marín

4 de abril de 2005

1 Una breve introducción histórica

El estudio de la topología de las singularidades de variedades analíticas complejas ha sido ampliamente tratado. Entre muchos autores podemos citar a D. Mumford, a cuyo trabajo [12] sobre las singularidades de superficies nos referiremos en breve, y a J. Milnor (cf. [11]) quien introdujo la célebre fibración que lleva su nombre para estudiar singularidades de hipersuperficies en dimensión cualquiera.

En dimensión dos, un problema más general y difícil análisis es el estudio topológico de gérmenes de foliaciones singulares. En este campo, los trabajos de C. Camacho, A. Lins Neto y P. Sad [1, 2] supusieron un avance considerable en dicha dirección. En efecto, en el primero de ellos se demuestra la célebre fórmula del índice, a partir de la cual se obtiene como corolario la existencia de separatrices. En el segundo se obtiene la invariancia topológica del número de Milnor y la equidesingularización de curvas generalizadas (singularidades de la foliación en las que en su reducción no aparecen sillan-nodo).

Un poco más tarde, D. Cerveau y P. Sad en [3] abordaron el problema de la determinación de los espacios de módulos analíticos de una singularidad genérica dentro de una clase topológica dada. Con ese fin, primero necesitaron considerar la clasificación topológica de dos de tales singularidades, la cual obtuvieron bajo la hipótesis de que ambas singularidades estaban sumergidas en una deformación topológicamente trivial. El resultado clave que les permitió abordar el problema, y por el cual es preciso introducir esa hipótesis restrictiva, es la invariancia topológica de la holonomía proyectiva. Como extrapolación natural, en ese mismo artículo los autores conjeturaron que dicha propiedad debería seguir siendo cierta sin la hipótesis de deformación, e incluso sin las restricciones genéricas impuestas a la singularidad.

Recientemente, en [9] se demostró la conjetura de D. Cerveau y P. Sad en el caso topológicamente quasi-homogéneo (genérico), el cual recordaremos en la siguiente sección. Se obtuvo así como consecuencia, la clasificación topológica en dicho contexto.

Es natural intentar demostrar dicha conjetura con la mayor generalidad posible. Para ello es necesario comprender bien la topología de las hojas de una foliación singular, lo cual es precisamente el objetivo del presente trabajo.

2 El caso topológicamente quasi-homogéneo

En esta sección exponemos las ideas claves de la prueba de la conjetura de Cerveau y Sad para foliaciones topológicamente quasi-homogéneas en el caso genérico, así como su clasificación topológica. Para las demostraciones completas referimos al lector directamente al artículo [9].

A partir de ahora U denotará una bola abierta centrada en el origen de \mathbb{C}^2 y todos los objetos que consideraremos estarán germificados en $0 \in U$. En particular, un germen de curva analítica \mathcal{S} vendrá determinado por el conjunto de ceros de una función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$.

Definición 1. *Decimos que un germen de curva analítica \mathcal{S} es quasi-homogéneo si admite una ecuación f que es quasi-homogénea, es decir, si f pertenece a su ideal jacobiano $J(f) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$. Decimos que \mathcal{S} es topológicamente quasi-homogéneo (abreviado TQH) si es topológicamente conjugado a un germen quasi-homogéneo. Finalmente decimos que un germen de foliación curva generalizada es TQH si el conjunto de sus separatrices aisladas es TQH.*

Observemos que si \mathcal{S} es quasi-homogéneo entonces sus componentes irreducibles son fibras de la función meromorfa analíticamente equivalente a $\frac{x^\beta}{y^\alpha}$. En efecto, una caracterización alternativa de la quasi-homogeneidad de una ecuación reducida f de \mathcal{S} es que existan coordenadas (x, y) de manera que f se escriba en esas coordenadas como un polinomio quasi-homogéneo con ciertos pesos α, β :

$$f(x, y) = \sum_{\alpha i + \beta j = d} a_{ij} x^i y^j.$$

Haciendo la ramificación $(x, y) = (x_1^\alpha, y_1^\beta)$ obtenemos que $f(x, y)$ es un polinomio homogéneo de grado d en las variables (x_1, y_1) cuya descomposición en factores lineales nos proporciona constantes $c_1, \dots, c_d \in \overline{\mathbb{C}}$ tales que

$$\mathcal{S} = f^{-1}(0) = \bigcup_{k=1}^d \left\{ (x, y) : \frac{x^\beta}{y^\alpha} = \left(\frac{x_1}{y_1} \right)^{\alpha\beta} = c_k \right\}.$$

En particular la reducción de singularidades $\pi : \tilde{U} \rightarrow U$ de una foliación \mathcal{F} TQH (de pesos α, β) siempre viene dado por la desingularización de la foliación $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ definida por la función meromorfa $\frac{x^\beta}{y^\alpha}$. Notemos que la restricción de $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ a $\partial U = \mathbb{S}^3$ es una fibración en círculos que es de Seifert con dos fibras excepcionales, las intersecciones de $\{x = 0\}$ y $\{y = 0\}$ con ∂U . Además, genéricamente las componentes irreducibles de \mathcal{S} (el conjunto de separatrices de \mathcal{F}) son cuspidales, i.e. $c_k \notin \{0, \infty\}$. El divisor excepcional $\pi^{-1}(0)$ contiene una única componente irreducible D con un número (que llamaremos valencia de D) de singularidades de $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^* \mathcal{F}$ mayor o igual a tres. El transformado estricto de \mathcal{S} por π corta a $\pi^{-1}(0)$ únicamente en d puntos de D que son singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ y que se identifican con las constantes c_k (ver Figura 1).

Sea $p : U \setminus \{0\} \rightarrow D$ una fibración C^∞ , en discos punteados, que sea topológicamente conjugada a la foliación $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ y de manera que \mathcal{S} sea una unión

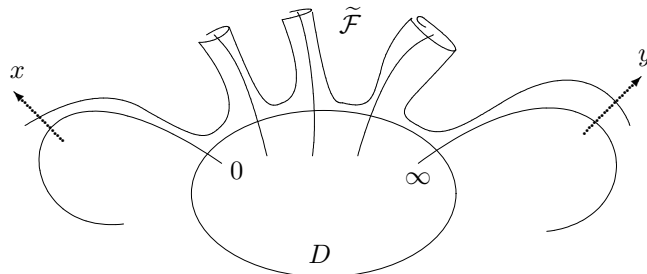


Figura 1: La reducción de singularidades de una foliación topológicamente quasi-homogénea con pesos $\alpha = 2$, $\beta = 3$ y $d = 3$ separatrices irreducibles.

finita de fibras de p . Sea $D^* = D \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$ y Σ una fibra holomorfa de p sobre $b \in D^*$. Consideremos la representación de holonomía proyectiva asociada al divisor D ,

$$H : \pi_1(D^*, b) \rightarrow \text{Diff}(\Sigma, b)$$

y el subgrupo normal N de $\pi_1(D^*, b) = \langle a_0, a_1, \dots, a_d, a_\infty \mid \prod_i a_i = 1 \rangle$ generado por a_0^α y a_∞^β . Es fácil ver que $H(a_0)$ y $H(a_\infty)$ son periódicas de periodos α y β respectivamente. Por tanto la representación de holonomía H factoriza por medio de $\bar{H} : \pi_1^{\text{orb}}(D^*) := \pi_1(D^*)/N \rightarrow \text{Diff}(\Sigma, b)$. Por otro lado, un cálculo sencillo (cf. sección 3.3) muestra que el grupo fundamental de $U^* = U \setminus \mathcal{S}$ puede presentarse como

$$\langle \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_d, \gamma_\infty, c \mid \gamma_0 \cdot \gamma_1 \cdots \gamma_d \cdot \gamma_\infty = c, \gamma_0^\alpha = c^{q_0}, \gamma_\infty^\beta = c^{q_\infty}, [c, \gamma_i] = 1 \rangle,$$

para ciertos enteros no nulos q_0, q_∞ . En particular, el centro de $\pi_1(U^*)$ es isomorfo a \mathbb{Z} con generador c , y su cociente $\pi_1(U^*)/\langle c \rangle$ es isomorfo a $\pi_1^{\text{orb}}(D^*)$.

Consideremos ahora un homeomorfismo $\Phi : U \rightarrow U'$ conjugando dos foliaciones TQH \mathcal{F} y \mathcal{F}' genéricas con separatrices \mathcal{S} y \mathcal{S}' . Como $\Phi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}'$, Φ induce un isomorfismo $\Phi_* : \pi_1(U^*) \rightarrow \pi_1(U'^*)$ que desciende al cociente por $\langle c \rangle$ dado lugar a un isomorfismo $\bar{\varphi} : \pi_1^{\text{orb}}(D^*) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(D'^*)$. Se puede comprobar que $\bar{\varphi}$ se eleva a su vez a un isomorfismo geométrico $\varphi : \pi_1(D^*) \rightarrow \pi_1(D'^*)$, es decir, de manera que existe un homeomorfismo $\phi : D^* \rightarrow D'^*$ tal que $\phi_* = \varphi$.

Por otro lado, $c = [\partial \bar{\Sigma}]$ es enviado por Φ_* sobre $c' = [\partial \bar{\Sigma}']$ donde Σ' es una fibra holomorfa de una fibración Seifert $p' : U' \setminus \{0\} \rightarrow D'$ asociada a \mathcal{F}' . Es posible modificar tangencialmente el homeomorfismo Φ para que envíe una corona compacta C que sea un retracto por deformación de $\Sigma \setminus \{b\}$ sobre una corona $C' \subset \Sigma' \setminus \{b'\}$ de las mismas características. Finalmente, usando la genericidad de

\mathcal{F} y \mathcal{F}' obtenemos elementos contractantes dentro del grupo de holonomía G de \mathcal{F} que permiten extender $\Phi|_C$ a un homeomorfismo $\psi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$.

Es bien conocido, ver por ejemplo [3], que si los residuos de las singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ son suficientemente genéricos (generan un subgrupo aditivo denso de \mathbb{C}) y G no es abeliano entonces éste es rígido, lo que implica que ψ es conforme.

La *naturalidad* de la construcción esbozada implica que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(D^*, b) & \xrightarrow{\phi_*} & \pi_1(D'^*, b') \\ H \downarrow & & \downarrow H' \\ \text{Diff}(\Sigma, b) & \xrightarrow{\psi_*} & \text{Diff}(\Sigma', b') \end{array} \quad (1)$$

es conmutativo, mostrando de esta manera la invariancia topológica de la holonomía proyectiva en el caso TQH genérico.

Concluimos esta sección con la clasificación topológica de los gérmenes de foliaciones TQH genéricos que se obtiene a partir del resultado anterior. Siguiendo la terminología de [3] introducimos la siguiente definición:

Definición 2. *Decimos que un germen de foliación TQH es N.A.G. si sus separatrices son todas cuspidales, el grupo de holonomía proyectiva de D no es abeliano y los índices de Camacho-Sad de las singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre $D \setminus \{0, \infty\}$ están en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, son diferentes, y generan un subgrupo (aditivo) denso de \mathbb{C} .*

Teorema 3. *Sean \mathcal{F} y \mathcal{F}' dos gérmenes de foliaciones topológicamente quasi-homogéneas N.A.G. Entonces \mathcal{F} y \mathcal{F}' son topológicamente conjugadas si y sólo si sus holonomías son topológicamente conjugadas (mediante el diagrama (1)) y los índices de Camacho-Sad de $\tilde{\mathcal{F}}$ y $\tilde{\mathcal{F}'}$ en las singularidades correspondientes coinciden.*

3 Útiles puramente topológicos

3.1 La descomposición de Jaco-Shalen-Johannson

Comencemos recordando algunas nociones previas sobre variedades de dimensión tres que necesitaremos a continuación.

La primera idea para estudiar variedades de dimensión tres es esencialmente copiar la estrategia utilizada en el caso de superficies: la descomposición mediante suma conexa. Ello nos lleva a la noción de 3-variedad irreducible M como aquella que no admite una descomposición no trivial. Dicho de otro modo, en la que toda esfera es el borde de una bola, es decir, $\pi_2(M) = 0$.

Como esta primera descomposición no es completamente satisfactoria (sólo hay que recordar la conjetura de Poincaré), debemos refinar la estrategia. Para ello se introduce la noción de superficie incompresible de M como aquella superficie $F \subset M$ que *soporta* topología de M . Para una definición precisa, ver [16]. Una caracterización algebraica de la incompresibilidad es que la inclusión de F en M

induzca un monomorfismo $\pi_1(F) \hookrightarrow \pi_1(M)$ si $F \not\cong \mathbb{S}^2$ o que la clase de homotopía de $F \hookrightarrow M$ en $\pi_2(M)$ sea no nula si $F \cong \mathbb{S}^2$.

La existencia de superficies incompresibles es un problema delicado y difícil. Es natural restringir nuestra atención a las llamadas variedades *suficientemente grandes* (Haken) que por definición son aquellas que admiten alguna superficie incompresible. Una vez hecha esta hipótesis de trabajo, la idea es descomponer la 3-variedad en trozos cortando por superficies incompresibles.

La razón para elegir superficies incompresibles es bastante natural. Pensemos por ejemplo en una bola de dimensión tres dentro de la cual consideramos un toro sólido. Podemos descomponer la bola en dos pedazos disjuntos separados por el borde del toro sólido. Sin embargo esta descomposición no nos ayuda a entender la topología de la variedad inicial (una bola) sino que la complica más. Esto ha sucedido en este caso porque el borde del toro sólido no es incompresible en el mismo. De esta manera llegamos a la definición de 3-variedad ∂ -irreducible M como aquella en la que su borde (si no es vacío) es incompresible en M .

La descomposición de una 3-variedad demostrada por W. Jaco y P. Shalen [5] y K. Johannson [6] independientemente, usando toros incompresibles en lugar de esferas, puede ser enunciada como sigue:

Teorema 4. *Sea M una 3-variedad irreducible, ∂ -irreducible suficientemente grande. Entonces existe un sistema minimal de toros incompresibles \mathcal{T} tal que $M \setminus \mathcal{T}$ es una unión disjunta de 3-variedades M_j que son fibradas Seifert o bien atoroidales (i.e. no admiten toros incompresibles no paralelos al borde). Además, \mathcal{T} es único módulo isotopía.*

Observación 5. *Para todo toro $T \subset \mathcal{T}$ y toda pieza M_j adyacente a T se tiene que las inclusiones canónicas inducen monomorfismos*

$$\pi_1(T) \hookrightarrow \pi_1(M_j \cup T) \cong \pi_1(M_j) \hookrightarrow \pi_1(M).$$

Cuando la 3-variedad M tiene una estructura de grafo, esta descomposición coincide con la que introdujo F. Waldhausen en [15].

3.2 Variedades de grafo

En esta sección vamos a describir de forma intuitiva un tipo de construcción de ciertas superficies complejas abiertas que ya aparecen en [7]. Para ello comenzamos considerando un grafo conexo Δ y el conjunto V de sus vértices dotado de dos ponderaciones

$$e : V \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad g : V \rightarrow \mathbb{Z}^+.$$

Para cada $v \in V$ sea $\pi_v : U_v \rightarrow D_v$ un fibrado en discos de clase de Chern $e_v \in \mathbb{Z} \cong H^2(D_v, \mathbb{Z})$ sobre una superficie de Riemann compacta D_v de género $g_v \geq 0$. Para cada arista de Δ uniendo dos vértices v y v' consideramos sendas trivializaciones locales $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \hookrightarrow D_w$ de π_w para $w \in \{v, v'\}$. A continuación pegamos los abiertos U_v y $U_{v'}$ utilizando estas trivializaciones mediante la identificación $(x, y) \mapsto (y, x)$ (comparar con [8]). El resultado es una superficie compleja

$W(\Delta)$ dotada de un divisor $D = \sum_{v \in V} D_v$. Hay que hacer notar que sólo la clase topológica de la superficie compleja $W(\Delta)$ está unívocamente determinada por la construcción descrita. En general, la libertad en la elección de las trivializaciones locales utilizadas en el pegado hace que se puedan construir de esta manera muchas superficies complejas analíticamente diferentes.

Sea $A(\Delta)$ la matriz de intersección de las componentes del divisor D . Podemos ver que

$$A(\Delta)_{vv'} = \begin{cases} e_v & \text{si } v = v' \\ 1 & \text{si } v \text{ y } v' \text{ son adyacentes en } \Delta \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observación 6. *Un célebre resultado de H. Grauert (cf. [4]) implica que si $A(\Delta)$ es definida negativa entonces $W(\Delta)$ tiene una única estructura compleja. De manera más precisa, existe una variedad analítica F de dimensión dos con una singularidad aislada $P \in F$ y un morfismo $\pi : (W(\Delta), D) \rightarrow (F, P)$ tal que su restricción a $W(\Delta) \setminus D$ es un biholomorfismo sobre $F \setminus \{P\}$. Además P es una singularidad normal de F , cf. [12]. Si además se cumple que $|\det(A(\Delta))| = 1$ entonces F es un entorno abierto U_0 del origen en \mathbb{C}^2 y una composición de explosiones $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que la superficie $(W(\Delta), D)$ es biholomorfa a $(\pi^{-1}(U_0), \pi^{-1}(0))$.*

Observemos también que $W = W(\Delta)$ admite una compactificación natural como variedad topológica de dimensión 4 con borde ∂W no vacío. Como la inclusión natural $D \hookrightarrow W$ induce un retracts por deformación, es posible definir una aplicación natural de $M(\Delta) := \partial W(\Delta)$ en $W^*(\Delta) := W(\Delta) \setminus D$ que también es una equivalencia homotópica. Como $M(\Delta)$ es una 3-variedad compacta, se tiene que $\mathbb{Z} \cong H_0(W^*) \cong H_3(W^*)$, $H_1(W^*) \cong H_2(W^*)$ y el resto de grupos de homología de W^* son nulos.

Por otro lado, como D es un retracts de W se tiene que $H_1(W) \cong \mathbb{Z}^{p+2 \sum_v g_v}$, donde $p = \dim H^1(\Delta)$. Además, podemos considerar la sucesión exacta larga de homología del par $(W, \partial W)$:

$$\cdots \rightarrow H_2(W) \rightarrow H_2(W, \partial W) \rightarrow H_1(\partial W) \rightarrow H_1(W) \rightarrow H_1(W, \partial W) \rightarrow \cdots \quad (2)$$

La dualidad de Poincaré para variedades con borde implica que $H_1(W, \partial W) \cong H^3(W) = 0$, pues W tiene el tipo de homotopía del divisor D que es un CW-complejo de dimensión dos. Así pues, de (2) deducimos que el morfismo $H_1(\partial W) \rightarrow H_1(W)$ es exhaustivo. Por otro lado, si el morfismo $H_2(W) \rightarrow H_2(W, \partial W)$ es exhaustivo entonces $H_1(\partial W) \rightarrow H_1(W)$ es un isomorfismo.

A partir de ahora sólo consideraremos grafos ponderados de manera que $p = 0$ (i.e. Δ es un árbol) y $g \equiv 0$ (i.e. $D_v \cong \mathbb{P}^1$ para todo $v \in V$). Estas condiciones son equivalentes al hecho que el divisor D es simplemente conexo, cf. [12]. En particular, $H_1(W) = 0$ y $H_2(W, \partial W) \cong H^2(W) \cong H^2(D) \cong \mathbb{Z}^V \cong H_2(D) \cong H_2(W)$. Sin embargo, ello no implica que $M = \partial W$ sea una esfera de homología. De hecho, como se deduce de los resultados de la siguiente sección, se tiene que $H_1(M(\Delta)) \cong \text{coker}(A(\Delta))$ interpretando $A(\Delta)$ como un endomorfismo de \mathbb{Z}^V .

En particular, $H_1(M(\Delta)) = 0$ si y sólo si $|\det(A(\Delta))| = 1$. Así pues, podemos concluir que en general el grupo fundamental de $M(\Delta)$ no es trivial. Una presentación de dicho grupo, bajo las hipótesis expuestas, puede encontrarse en [12]. A continuación, procederemos a calcular el grupo fundamental de una cierta subvariedad abierta $W^*(\overline{\Delta})$ de $W^*(\Delta)$.

3.3 La topología de un divisor

Siguiendo con las notaciones anteriores, consideremos un árbol $\overline{\Delta}$ conteniendo a Δ . Pedimos que su conjunto de vértices \overline{V} sea tal que para todo $v' \in V' := \overline{V} \setminus V$ existe un único $v \in V$ adyacente a v' en $\overline{\Delta}$. A cada $v' \in V'$ le asociamos una fibra distinta $D_{v'}$ de la fibración en discos $\pi_v : U_v \rightarrow D_v$ y consideramos el divisor $\overline{D} = \sum_{\overline{v} \in \overline{V}} D_{\overline{v}}$

de $W(\Delta)$. Sea $W^*(\overline{\Delta}) = W(\Delta) \setminus \overline{D}$ (notemos que el caso $V' = \emptyset$ no está excluido). Para todo par $v'_1, v'_2 \in V'$ se tiene que la matriz de intersección $A(\overline{\Delta})$ del divisor \overline{D} verifica $A(\overline{\Delta})_{v'_1 v'_2} = D_{v'_1} \cdot D_{v'_2} = 0$.

Nuestro próximo objetivo es dar una presentación explícita del grupo fundamental de $W^*(\overline{\Delta})$. Para ello comenzaremos definiendo una serie de lazos que constituirán un sistema de generadores de dicho grupo.

Para cada $\overline{v} \in \overline{V}$ consideremos un lazo $\delta_{\overline{v}}$ que sea el borde positivamente orientado de un pequeño disco conforme transverso a $D_{\overline{v}}$ centrado en un punto regular de \overline{D} . Fijemos un punto p de $W^*(\overline{\Delta})$ y caminos $\beta_{\overline{v}}$ uniendo p y $\delta_{\overline{v}}$ en $W^*(\overline{\Delta})$ tales que $\beta_{\overline{v}} \cap \beta_{\overline{w}} = \{p\}$. Consideremos el sistema de lazos con punto base p dado por:

$$\mathcal{G} : \quad \gamma_{\overline{v}} = \beta_{\overline{v}} \cdot \delta_{\overline{v}} \cdot \beta_{\overline{v}}^{-1}, \quad \overline{v} \in \overline{V}. \quad (3)$$

Proposición 7. *El grupo fundamental de $W^*(\overline{\Delta})$ admite la presentación $\langle \mathcal{G} | \mathcal{R} \rangle$, donde \mathcal{G} es el sistema de lazos introducidos en (3) y \mathcal{R} es el conjunto de relaciones siguientes:*

$$\mathcal{R} : \quad \begin{cases} \prod_{\overline{v} \in \overline{V}} \gamma_{\overline{v}}^{A_{v\overline{v}}} = 1, & \forall v \in V, \\ [\gamma_v, \gamma_w]^{a_{vw}} = 1, & \forall v, w \in \overline{V}. \end{cases}$$

La prueba de esta propiedad se obtiene inductivamente, aplicando el Teorema de Seifert-Van Kampen a los abiertos fibrados $U_v^* = U_v \setminus \overline{D}$ de $W^*(\overline{\Delta})$ de manera análoga a como se procede en [12]. El caso $\overline{\Delta} = \Delta = \bullet_e$ que corresponde al inicio de la inducción no está explícitamente tratado allí. Se trata del espacio total de un fibrado $\pi : U \rightarrow D$ en discos sobre $D = \mathbb{P}^1$ de clase de Chern e . En particular $M(\Delta)$ es un \mathbb{S}^1 -fibrado sobre \mathbb{S}^2 y la sucesión exacta larga de homotopía contiene el tramo

$$\underbrace{\pi_2(\mathbb{S}^2)}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{\pi_1(\mathbb{S}^1)}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \pi_1(M(\Delta)) \rightarrow 0.$$

Se puede comprobar que el primer morfismo (de conexión) se corresponde con la multiplicación por $e : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ de forma que $\pi_1(M(\Delta)) \cong \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$, tal y como se afirma en la Proposición 7.

Corolario 8. *El grupo $H_1(W^*(\overline{\Delta}))$ es isomorfo al conúcleo de la aplicación lineal $\mathbb{Z}^{\overline{V}} \rightarrow \mathbb{Z}^V$ obtenida eliminando las filas de la matriz $A(\overline{\Delta})$ correspondientes a los vértices de V' .*

En efecto, de la proposición anterior se desprende que $H_1(W^*(\overline{\Delta}))$ es el grupo abeliano generado por 1-cadenas $c_{\overline{v}}$ correspondientes a los lazos $\gamma_{\overline{v}}$, $\overline{v} \in \overline{V}$ módulo las relaciones

$$\sum_{\overline{v} \in \overline{V}} A(\overline{\Delta})_{v\overline{v}} c_{\overline{v}} = 0, \quad \text{para todo } v \in V.$$

En lo que sigue, nos interesará estudiar la 3-variedad con frontera

$$M(\overline{\Delta}) := M(\Delta) \setminus V(D')$$

obtenida a partir de $M(\Delta)$ eliminando un entorno tubular de $D' \cap M(\Delta)$, donde D' es el divisor $\sum_{v' \in V'} D_{v'}$ de $W(\Delta)$.

Ejemplo 9. *Consideremos el caso de $\mathcal{S} = \{Y^2 = X^3\}$. Es bien conocido que $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{S}) = \langle x, y \mid y^2 = x^3 \rangle$. El morfismo de desingularización $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ de \mathcal{S} tiene como grafo dual ponderado $\overline{\Delta}$ el descrito en la Figura 2, de manera que $W(\overline{\Delta})$ se identifica con la preimagen por π de un entorno del origen de \mathbb{C}^2 y el divisor \overline{D} con el transformado total por π de \mathcal{S} . La matriz de intersección de \overline{D} es*

$$A(\overline{\Delta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de manera que en este caso la presentación de $\pi_1(W^*(\overline{\Delta}))$ dada por la Proposición 7 es la siguiente:

$$\langle \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \mid \gamma_1^{-3} \gamma_3 = \gamma_2^{-2} \gamma_3 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3^{-1} = [\gamma_i, \gamma_3] = 1 \rangle.$$

Es inmediato comprobar que $x = \gamma_1$, $y = \gamma_2$ son generadores y que la única relación no trivial entre ellos es $y^2 = x^3$. Por otro lado, del Corolario 8 deducimos que $H_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{S}) = (\mathbb{Z}c_0 \oplus \mathbb{Z}c_1 \oplus \mathbb{Z}c_2 \oplus \mathbb{Z}c_3) / \langle -3c_1 + c_3, -2c_2 + c_3, c_0 + c_1 + c_2 - c_3 \rangle = \mathbb{Z}c_0$.

3.4 Interpretación cohomológica de foliaciones logarítmicas

Del Corolario 8 se deduce que $H^1(W^*(\overline{\Delta}), \mathbb{C}) = \text{Hom}(H_1(W^*(\overline{\Delta})), \mathbb{C})$ es isomorfo a

$$\{(\mu_{\overline{v}}) \in \mathbb{C}^{\overline{V}} : \sum_{\overline{v} \in \overline{V}} A(\overline{\Delta})_{v\overline{v}} \mu_{\overline{v}} = 0, \forall v \in V\}, \quad \text{mediante } \mu \mapsto (\mu(c_{\overline{v}}))_{\overline{v} \in \overline{V}}.$$

A partir de ahora supondremos que $|\det(A(\Delta))| = 1$. Por la Observación 6, existe una composición de explosiones $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $W(\Delta)$ es biholomorfo

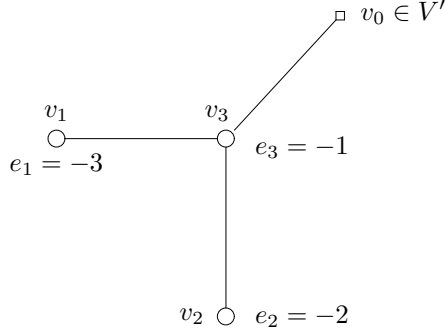


Figura 2: El grafo dual ponderado de la reducción de singularidades de la cúspide ordinaria $\{Y^2 = X^3\}$.

la preimagen de un entorno abierto U del origen de \mathbb{C}^2 . Para cada componente irreducible $\pi(D_{v'})$, $v' \in V'$ de $\mathcal{S} = \pi(D') \subset U$ consideramos una ecuación reducida $f_{v'}$ en U . Existe un isomorfismo natural entre $H^1(W^*(\bar{\Delta}), \mathbb{C})$ y $H_{DR}^1(U \setminus \mathcal{S})$ dado explícitamente por

$$\mu \mapsto \omega_\mu = \sum_{v' \in V'} \mu_{v'} \frac{df_{v'}}{f_{v'}}.$$

Definición 10. Para cada $v' \in V'$ y $\bar{v} \in \bar{V}$ consideremos el orden de anulación $m_{\bar{v}v'} \in \mathbb{Z}^+$ de $\pi^* f_{v'}$ a lo largo de $D_{\bar{v}}$:

$$m_{\bar{v}v'} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\pi(c_{\bar{v}})} \frac{df_{v'}}{f_{v'}}.$$

Lema 11. Para todo $v \in V$ se tiene la igualdad $c_v = \sum_{v' \in V'} m_{vv'} c_{v'}$ en $H_1(W^*(\bar{\Delta}))$.

Antes de efectuar la demostración de este cálculo podemos ilustrarlo con ayuda del Ejemplo 9. Con las notaciones introducidas allí se tiene que $c_1 = 2c_0$, $c_2 = 3c_0$ y $c_3 = 6c_0$.

Demostración. Como $|\det(A(\Delta))| = 1$ resulta que $\text{coker}(A(\Delta)) = 0$ y por tanto $H_1(W^*(\bar{\Delta})) = \bigoplus_{v' \in V'} \mathbb{Z}c_{v'}$. Por consiguiente, existen enteros $n_{vv'}$ de manera que

$c_v = \sum_{v' \in V'} n_{vv'} c_{v'}$. Sólo hemos de observar que $n_{vv'} = m_{vv'}$. En efecto,

$$m_{vv'} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\pi(c_v)} \frac{df_{v'}}{f_{v'}} = \sum_{v'' \in V'} n_{vv''} \frac{1}{2i\pi} \int_{\pi(c_{v''})} \frac{df_{v'}}{f_{v'}} = \sum_{v'' \in V'} n_{vv''} \delta_{v'v''} = n_{vv'},$$

donde $\delta_{v'v''}$ es la delta de Kronecker. □

Observemos que si $\mu \in H^1(W^*(\bar{\Delta}), \mathbb{C})$ no es nulo entonces ω_μ define una foliación logarítmica \mathcal{F}_μ sobre U cuyas separatrices contienen a \mathcal{S} . Una propiedad interesante de esta formulación es que con ella es posible caracterizar las foliaciones logarítmicas dicríticas, es decir, aquellas que admiten una infinidad de separatrices.

Proposición 12. *La foliación logarítmica \mathcal{F}_μ es no dicrítica si y solo si para todo $v \in V$ se tiene que $\mu_v \neq 0$ y el cociente $I_{vw} = -\frac{\mu_w}{\mu_v} \notin \mathbb{Q}^+$ siempre que $v, w \in V$ son adyacentes en Δ . En tal caso, el divisor D es invariante por la foliación $\tilde{\mathcal{F}}_\mu = \pi^* \mathcal{F}_\mu$ y sus índices de Camacho-Sad verifican que $CS(\tilde{\mathcal{F}}_\mu, D_v, D_w \cap D_v) = I_{vw}$.*

Demostración. Consideremos la integral primera multiforme de \mathcal{F}_μ dada por $F_\mu = \prod_{v' \in V'} f_{v'}^{\mu_{v'}}$. Si $v, w \in \bar{V}$ son adyacentes en $\bar{\Delta}$ entonces existen coordenadas locales (x, y) en un entorno U_{vw} de $D_v \cap D_w$ en $W(\Delta)$ de manera que $D_v \cap U_{vw} = \{x = 0\}$ y $D_w \cap U_{vw} = \{y = 0\}$. La derivada logarítmica de $\pi^* F_\mu$ se escribe en estas coordenadas como

$$\underbrace{\left(\sum_{v' \in V'} \mu_{v'} m_{vv'} \right)}_{\mu_v} \frac{dx}{x} + \underbrace{\left(\sum_{v' \in V'} \mu_{v'} m_{wv'} \right)}_{\mu_w} \frac{dy}{y} + d(\text{función holomorfa}).$$

Si $\mu_v, \mu_w \neq 0$ entonces D_v y D_w son $\tilde{\mathcal{F}}_\mu$ -invariantes y obtenemos la fórmula anunciada para los índices de Camacho-Sad de $\tilde{\mathcal{F}}_\mu$. Si $\mu_v = 0$ y $\mu_w \neq 0$ entonces D_v es transverso a $\tilde{\mathcal{F}}_\mu$ que por tanto es dicrítica si $w \in V$. Finalmente, si $\mu_v = \mu_w = 0$, deben existir (pues $\mu \neq 0$) dos nuevos divisores adyacentes D_u y $D_{w'}$ con $u \in V$ tales que $\mu_u = 0$ y $\mu_{w'} \neq 0$, en cuyo caso también concluimos que \mathcal{F}_μ es dicrítica. \square

3.5 La topología de las separatrices

Sea \mathcal{F} el germen de una curva generalizada y consideremos el conjunto \mathcal{S} de separatrices aisladas de \mathcal{F} , que no es vacío [1]. Siguiendo a [12], consideremos la variedad de dimensión tres $M(\mathcal{S}) = \mathbb{S}_\epsilon^3 \setminus V(\mathcal{S})$ obtenida eliminando de una pequeña esfera \mathbb{S}_ϵ^3 , centrada en el origen, un entorno tubular $V(\mathcal{S})$ de $\mathcal{S} \cap \mathbb{S}_\epsilon^3$. Observemos que con las notaciones introducidas, $M(\mathcal{S})$ no es más que la 3-variedad con frontera $M(\bar{\Delta})$ asociada al grafo dual ponderado $\bar{\Delta}$ de la desingularización de \mathcal{S} .

Observación 13. *La variedad $M = M(\mathcal{S})$ satisface las hipótesis del Teorema 4. En efecto:*

- Es bien conocido, ver por ejemplo [16], que si $\partial M \neq \emptyset$ y $M \not\cong \mathbb{B}^3$ entonces M es suficientemente grande (Haken).
- La sucesión exacta larga de homotopía de la fibración de Milnor $f/|f| : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ (donde F es la fibra de Milnor)

$$0 \rightarrow \underbrace{\pi_2(F)}_0 \rightarrow \pi_2(M) \rightarrow \underbrace{\pi_2(\mathbb{S}^1)}_0 \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow 0 \quad (4)$$

implica que $\pi_2(M) = 0$ por lo cual M es irreducible.

- El cálculo de $\pi_1(M)$ obtenido en la sección anterior muestra que $\pi_1(\partial M) \hookrightarrow \pi_1(M)$, es decir, que M es ∂ -irreducible.

De los trabajos de F. Waldhausen y W. Neumann [16, 13] se desprende la siguiente propiedad, también expuesta con claridad en el capítulo 4 de la tesis doctoral de P. Popescu-Pampu, cf. [14, Théorème 4.11.2.]

Proposición 14. *La descomposición de JSJ de $M(\mathcal{S})$ viene determinada por el grafo dual $\overline{\Delta}(\mathcal{S})$ de la desingularización de \mathcal{S} de la manera siguiente: las piezas de $M(\mathcal{S}) \setminus V(\mathcal{T})$ son todas de tipo Seifert y están en correspondencia biyectiva con los vértices de valencia mayor o igual a tres (llamados vértices de ruptura) de $\overline{\Delta}(\mathcal{S})$.*

Observación 15. *Las piezas Seifert de la descomposición de JSJ de M corresponden a las piezas topológicamente quasi-homogéneas (TQH) de $U^* = U \setminus \mathcal{S}$, cf. sección 2.*

La unicidad de la descomposición de JSJ de $M = M(\mathcal{S})$ implica que si Φ es un homeomorfismo conjugando dos foliaciones singulares \mathcal{F} y \mathcal{F}' entonces $\Phi_* : \pi_1(U^*) \rightarrow \pi_1(U'^*)$ es un isomorfismo que envía el grupo fundamental de una pieza Seifert M_j de M sobre el grupo fundamental de una pieza Seifert M'_j de $M' = M(\mathcal{S}')$:

$$\pi_1(M_j) \subset \pi_1(M) \cong \pi_1(U^*), \quad \Phi_*(\pi_1(M_j)) = \pi_1(M'_j) \subset \pi_1(U'^*).$$

¿Qué relación existe entre dicha descomposición topológica de U^* en piezas TQH y la dinámica de la foliación \mathcal{F} ? A fin de responder a esta pregunta introducimos a continuación la noción de *1-conexidad foliada*.

4 La noción de 1-conexidad foliada

Definición 16. *Sea \mathcal{F} una foliación en U y $V \subset U$. Decimos que V es 1-conexo en U respecto a la foliación \mathcal{F} (y notaremos $V \looparrowright_{\mathcal{F}} U$) si para todo camino γ en una hoja \mathcal{L} de \mathcal{F} que sea homótopo (a extremidades fijas) a un camino β contenido en V existe un camino α contenido en $\mathcal{L} \cap V$ homótopo (a extremidades fijas) a β en V y a γ en \mathcal{L} :*

$$\begin{array}{ccc} \alpha \subset \mathcal{L} \cap V & \longrightarrow & V \supset \beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \gamma \subset \mathcal{L} & \longrightarrow & U \supset \beta \sim \gamma \end{array}$$

Observación 17. *Las siguientes propiedades son inmediatas:*

- reflexiva: $U \looparrowright_{\mathcal{F}} U$;
- transitiva: $W \looparrowright_{\mathcal{F}} V, V \looparrowright_{\mathcal{F}} U \implies W \looparrowright_{\mathcal{F}} U$;
- caracterización de la incompresibilidad de las hojas:

$$\{p\} \looparrowright_{\mathcal{F}} U \iff \pi_1(\mathcal{L}_p) \hookrightarrow \pi_1(U).$$

Sea \mathcal{F} una foliación singular definida en un entorno U_0 del origen de \mathbb{C}^2 y sea \mathcal{S} el conjunto de sus separatrices aisladas. Es natural tomar como U_0 un abierto topológicamente equivalente a una bola centrada en el origen. Una pregunta natural que podemos plantearnos es: ¿bajo qué circunstancias se tiene la incompresibilidad de las hojas de \mathcal{F} restringida a $U_0^* = U_0 \setminus \mathcal{S}$? Esta cuestión claramente depende de la elección de U_0 ya que es fácil construir artificialmente abiertos de manera que las hojas de $\mathcal{F}|_{U_0^*}$ contengan ciclos no triviales pero homótopos a constante en U_0^* , cf. Figura 3.

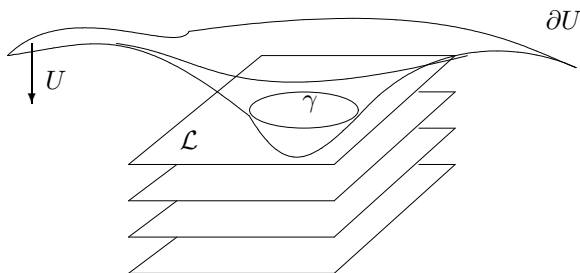


Figura 3: Ejemplo de un abierto U en el que no se tiene la 1-conexidad foliada de un punto, pues el lazo $\gamma \subset \mathcal{L}$ es homótopo a constante en U pero no en la hoja \mathcal{L} .

Para matizar este problema, podemos considerar una situación cuya dinámica es muy sencilla: el caso hamiltoniano, i.e. una foliación \mathcal{F} cuyas hojas vienen dadas por las curvas de nivel de una función holomorfa $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ de manera que $\mathcal{S} = f^{-1}(0)$. Es la situación que tratada en [11], donde se muestra que si $\varepsilon, \eta > 0$ son suficientemente pequeños entonces el *tubo de Milnor* $U = U_{\varepsilon, \eta} = f^{-1}(\mathbb{D}_\eta) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ verifica que f restringida a $U^* = U \setminus \mathcal{S}$ define una fibración localmente trivial sobre \mathbb{D}_η^* . La sucesión exacta larga de homotopía correspondiente acaba en

$$1 = \pi_2(\mathbb{D}_\eta^*) \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(U^*) \rightarrow \pi_1(\mathbb{D}_\eta^*) \rightarrow 1,$$

donde F es la fibra de Milnor, i.e. una hoja cualquiera de \mathcal{F} restringida a U^* .

Así pues, podemos concretar la cuestión anterior preguntándonos sobre la existencia de un sistema fundamental de entornos en los que sea válida la incompresibilidad de las hojas (en el complementario de \mathcal{S}). Observemos que, en la construcción de Milnor, los abiertos $U_{\varepsilon, \eta}$ son saturados por \mathcal{F} . En general, no es posible encontrar abiertos saturados por una foliación singular. A fin de superar esta dificultad consideremos el morfismo $\pi : \tilde{U}_0 \rightarrow U_0$ de reducción de singularidades de \mathcal{F} y sean $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^* \mathcal{F}$ y $\tilde{\mathcal{S}}$ el transformado estricto de \mathcal{S} . Diremos que una singularidad de $\tilde{\mathcal{F}}$ es *interior* si no está sobre $\tilde{\mathcal{S}}$ ni sobre ninguna *rama muerta* del divisor excepcional $\pi^{-1}(0)$ de \tilde{U}_0 , es decir, sobre una unión maximal de divisores de valencia menor o igual a dos conteniendo un único divisor de valencia uno.

El siguiente resultado proviene de un trabajo conjunto con J.-F. Mattei, cf. [10]:

Teorema 18. *Con las notaciones anteriores, supongamos que todas las singularidades interiores de \mathcal{F} son linealizables. Entonces existe un sistema de entornos \mathcal{U} del origen tal que para todo U de \mathcal{U} las hojas de \mathcal{F} restringida a $U^* = U \setminus \mathcal{S}$ son incompresibles en U^* . Además, para todo par $U, U' \in \mathcal{U}$ tal que $U \subset U'$ se tiene que la inclusión natural induce un isomorfismo entre $\pi_1(U^*)$ y $\pi_1(U'^*)$.*

De hecho, el resultado obtenido en [10] es más preciso: allí demostramos la 1-conexidad foliada de uniones arbitrarias de bloques topológicamente quasi-homogéneos de U^* .

Referencias

- [1] César Camacho and Paulo Sad. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Ann. of Math. (2)*, 115(3):579–595, 1982.
- [2] César Camacho, Alcides Lins Neto, and Paulo Sad. Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields. *J. Differential Geom.*, 20(1):143–174, 1984.
- [3] Dominique Cerveau and Paulo Sad. Problèmes de modules pour les formes différentielles singulières dans le plan complexe. *Comment. Math. Helv.*, 61(2):222–253, 1986.
- [4] Hans Grauert. Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. *Math. Ann.*, 146:331–368, 1962.
- [5] William H. Jaco and Peter B. Shalen. Seifert fibered spaces in 3-manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 21(220):viii+192, 1979.
- [6] Klaus Johannson. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, volume 761 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.
- [7] Henry B. Laufer. Taut two-dimensional singularities. *Math. Ann.*, 205:131–164, 1973.
- [8] Alcides Lins Neto. Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two. *J. Differential Geom.*, 26(1):1–31, 1987.
- [9] David Marín. Moduli spaces of germs of holomorphic foliations in the plane. *Comm. Math. Helv.*, 78:518–539, 2003.
- [10] David Marín and Jean-François Mattei. The topology of the leaves of some singular foliations. (En preparación).
- [11] John Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968.
- [12] David Mumford. The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (9):5–22, 1961.

- [13] Walter D. Neumann. A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 268(2):299–344, 1981.
- [14] Patrick Popescu-Pampu. *Arbres de contact des singularités quasi-ordinaires et graphes d'adjacence pour les 3-variétés réelles*. PhD thesis, Université Paris 7, 2001.
- [15] Friedhelm Waldhausen. Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I, II. *Invent. Math.* 3 (1967), 308–333; *ibid.*, 4:87–117, 1967.
- [16] Friedhelm Waldhausen. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *Ann. of Math. (2)*, 87:56–88, 1968.

David Marín
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona. Edifici C.
08193 Bellaterra (Barcelona)
davidmp@mat.uab.es