# TALLER DE GEOMETRIA HIPERBÒLICA

JUDIT ABARDIA

## Índex



## 1. Introducció

L'objectiu d'aquest treball és donar la construcció explícita d'alguns dels objectes de la Geometria Hiperbòlica en un dels seus models, el model del semiplà de Poincaré, amb l'ajuda del programa *The Geometer Sketchpad*. Per tal d'assolir-lo mostrarem alguns dels resultats més importants i característics de la Geometria Hiperbòlica, així com els seus principals models.

La Geometria Hiperbòlica apareix a partir de l'estudi de la Geometria Euclidiana. Ja des de l'època dels babilonis i egipcis s'havia estat estudiant la Geometria Euclidiana i es coneixien algunes de les propietats de les figures. Els grecs van seguir buscant nous resultats, a partir de l'experiència, que els podien ser útils però també van introduir el concepte de *demostració matemàtica*. Van adonar-se que per afirmar la veracitat d'un enunciat, molt millor que provar-lo empíricament, és donar un seguit d'afirmacions, que ja es coneguin certes, de manera que es relacionin entre elles, de manera lògica i sense contradiccions i arribin a afirmar l'enunciat que volíem provar. Amb aquesta idea, cap al segle II a.C., Euclides va donar els fonaments de la Geometria Euclidiana a la seva obra Elements que està distribuïda en 13 llibres. En els Elements es comença demostrant resultats de la geometria plana (llibres I-IV) i s'acaba construint els cinc sòlids regulars: tetraedre, cub, octàedre, dodecàedre i icosàedre (llibre XIII) passant per temes no estrictament geomètrics com la teoria de proporcions i de nombres.

Pels objectius d'aquest treball, ens interessa centrar-nos en el llibre I. L'estructura general consta d'una primera part axiomàtica, amb definicions dels elements bàsics de la geometria com punt, línia, angle,... postulats i

Dirigit per Eduard Gallego.

nocions comunes i una segona part amb proposicions enunciades i demostrades a partir dels axiomes. Les nocions comunes són enunciats certs que fan referència a les magnituds. Per exemple, afirmen que: “les coses iguals a una mateixa cosa són també iguals entre elles”.

Els postulats que va utilitzar Euclides i que també ens basarem en aquest treball són el cinc següents:

(1) *Es pot traçar una única recta que passa per dos punts diferents.*

(2) *Tota recta es pot prolongar indefinidament.*

(3) *Donat un punt qualsevol, que prenem com a centre, i una distància qualsevol, que prenem com a radi, podem traçar una circumferència.*

(4) *Tots els angles rectes són iguals.*

(5) *Si una recta talla dues rectes formant a un mateix costat angles que sumen menys de dos rectes, les rectes es tallen en el costat on aquesta suma és menor de dos rectes.*

Clarament el cinquè postulat té un enunciat molt més complex que els altres quatre. Per això, des de sempre ha plantejat la següent qüestió: és possible demostrar-lo a partir dels altres axiomes?

Aquesta pregunta va sorgir també a partir de dos altres fets. Per una banda, Euclides va poder evitar utilitzar el cinquè postulat en moltes de les demostracions de les proposicions, de fet, no el va utilitzar fins a la demostració de la proposició 29. Per altra banda, a la proposició 17 es prova el recíproc del cinquè postulat, és a dir, que la suma de dos angles d’uns triangle és menor de dos rectes.

Veient aquests fets, es van començar els intents de demostrar el cinquè postulat a partir dels altres però tots aquests, òbviament, van fracassar. En un principi es provava de demostrar directament, és a dir, es buscava una demostració constructiva, fins que Nikolai Lobatxevski (1793-1856) en 1829 va plantejar la demostració provant el contra-recíproc. Va suposar que el cinquè postulat no era cert, concretament, va anunciar la seva negació de la següent manera: existeixen una recta $r$ i un punt $P$ que no pertany a la recta tals que per $P$ passen al menys dues rectes que no tallen $r$; i va començar a donar resultats que s’obtenien a partir del sistema d’axiomes obtingut d’afegir aquesta afirmació (coneguda com axioma de Lobatxevski) als altres quatre postulats. Lobatxevski esperava trobar alguna contradicció en algun dels resultats però no va ser així. Quan anava avançant s’anava convencent de que estava construint una nova teoria, una nova geometria, la Geometria Hiperbòlica. Per tant, el que volia provar ja no era que es trobava alguna contradicció sinó que cap dels resultats que es podia arribar a obtenir entraria en contradicció amb els altres, és a dir, volia demostrar que la geometria que estava construint era consistent. Lobatxevski ho va intentar comprovar reduint la solució de qualsevol problema geomètric a un d’aritmètic. A partir d’aquí va deduir les fórmules de la trigonometria hiperbòlica. De totes maneres posteriorment es va demostrar més rigorosament la consistència de la geometria de Lobatxevski. En 1868, Eugenio Beltrami, va donar un model euclidià de la Geometria Hiperbòlica, és a dir,

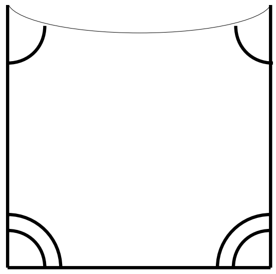

FIGURA 1. Quadrilàter de Saccheri

va donar un model on són certs els cinc postulats. El model de Beltrami és el model projectiu que definirem a la l'apartat 3.3.1.

Janos Bolyai, en 1832, i Carl Friederich Gauss, en 1824, també van arribar als mateixos resultats que Lobatxevski i per procediments semblants però es considera Lobatxevski com a principal autor perquè: Gauss sembla ser que no va voler publicar ni donar la seva opinió per no ser incomprès ja que a l'època no es podia acceptar una geometria diferent a l'euclidiana, que no respongués a l'experimentació de la realitat i; Bolyai, en veure que no es reconeixia el seu treball va desistir.

De totes maneres, però, no podem oblidar els treballs de Saccheri, Lambert i Legendre. Aquests es considera que van ser els primers de treballar amb la Geometria Hiperbòlica, només els va faltar el fet d'acceptar que hi pot haver una geometria que no es correspon amb la intuïció que es té de la realitat. La demostració, per provar que podem ometre el cinquè postulat i posar-lo com a teorema, que feia Saccheri es basava en considerar un quadrilàter amb dos angles rectes. Els altres podien ser aguts, rectes o obtusos. Si provava que no era possible que fossin ni aguts ni obtusos llavors serien rectes i hauria quedat demostrat el cinquè postulat. Però només es pot demostrar, per arguments lògics, que els angles no poden ser obtusos.

Pel cas dels aguts no existeix tal demostració, de fet, si s'accepta aquesta hipòtesis obtenim la Geometria Hiperbòlica. Saccheri va voler demostrar que no és possible que els angles siguin aguts i per fer-ho va haver d'apel·lar a fets com que: "contradiu la naturalesa de la recta". En canvi, Lambert, que també va fer una construcció semblant, en veure que no ho podia demostrar per raonaments lògics va afirmar que potser: "la hipòtesis és vàlida en alguna esfera imaginària".

Legendre, per la seva part, va deixar resultats referents a la relació entre la validesa del cinquè postulat i la suma dels angles interns d'un triangle, com veurem a l'apartat 2.2.2.

Centrant-nos ja en l'estructura d'aquest treball, cal comentar que, per tal d'assolir el nostre objectiu, hem distribuït el treball en tres d'altres seccions. Primer de tot, a la segona secció, s'estudien algunes de les propietats de la Geometria Hiperbòlica. L'objectiu d'aquesta secció és mostrar les diferències més importants entre la Geometria Hiperbòlica i l'Euclidiana, és a dir, les conseqüències que es tenen de no considerar l'axioma de les paral·leles sinó la seva negació. A la tercera secció es descriuen quatre models del pla hiperbòlic: el model del semiplà de Poincaré, del disc de Poincaré, projectiu i de l'hiperboloide. El model del semiplà de Poincaré, per ser el que utilitzarem a la secció 4, es descriu, amb més detall, el seu funcionament: quines corbes de la Geometria Euclidiana fan el paper de rectes hiperbòliques i per què, quines són les aplicacions del pla que es consideren les isometries, com podem pensar les nocions de distància, angle,...

Finalment, a la quarta secció es dóna la construcció que hem fet amb el programa *Sketchpad* dels objectes geomètrics fonamentals de la Geometria Hiperbòlica en el model del semiplà de Poincaré. En aquesta secció també es deixen algunes preguntes com a proposta al lector perquè les pugui estudiar a partir de les eines descrites en aquesta mateixa secció.

Per provar els resultats de les seccions 2 i 3 suposarem que el lector està familiaritzat amb els resultats de la Geometria Absoluta. És a dir, que es coneixen els resultats que es dedueixen dels quatre primers postulats d'Euclides o, si, a diferència del que hem considerat en aquest treball, es pensa amb els axiomes de Hilbert, els resultats que s'obtenen dels axiomes d'incidència, ordre i congruència.

## 2. Geometria Hiperbòlica

En aquesta secció donarem una definició axiomàtica de la Geometria Hiperbòlica plana a partir dels axiomes d'Euclides. Aquests axiomes que definirem seran els que, posteriorment a la secció 3, utilitzarem per comprovar que els models de la Geometria Hiperbòlica que donarem realment defineixen la Geometria Hiperbòlica, és a dir, compleixen els axiomes.

Una vegada fixats els axiomes donarem, a l'apartat 2.2, un seguit de propietats de la Geometria Hiperbòlica que la distingeixen de la Geometria Euclidiana. Totes aquestes propietats les obtindrem a partir de la negació del cinquè postulat, que serà un dels axiomes que postularem per la Geometria Hiperbòlica plana.

2.1. **Definició.** Els axiomes que considerarem en parlar de Geometria Hiperbòlica seran els quatre primers postulats d'Euclides (o els axiomes d'incidència, ordre i congruència) i l'axioma de Lobatxevski, és a dir, considerarem els axiomes que defineixen la Geometria Absoluta i hi afegirem l'axioma de Lobatxevski, el que ens caracteritzarà la Geometria Hiperbòlica ja que ens assegura l'existència d'un punt i una recta pel que hi passen al menys dues rectes que no la tallen.

**Definició 2.1.** *La Geometria Hiperbòlica és l'estudi de les conseqüències que s'obtenen a partir del següent sistema axiomàtic:*

*Axioma (1) Donats dos punts diferents $A$ i $B$, existeix una única recta $r$ tal que $A$ pertany a $r$ i $B$ pertany a $r$.*

*Axioma (2) Tota recta es pot prolongar indefinidament.*

*Axioma (3) Donat un punt qualsevol, que prenem com a centre, i una distància qualsevol, que prenem com a radi, podem traçar una circumferència.*

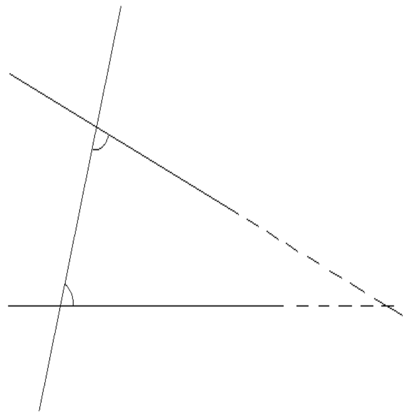

FIGURA 2

*Axioma (4) Tots els angles rectes són iguals.*

*Axioma (5) Existeixen una recta $r$ i un punt $P$ que no pertany a la recta tals que per $P$ passen almenys dues rectes que no tallen $r$.*

Observem que la definició de Geometria Hiperbòlica plana que hem donat és la mateixa que donaríem per definir Geometria Euclidiana plana només canviant l'axioma del paral·lelisme per l'axioma de Lobatxevski que, tal com hem comentat, és una negació del primer. Així doncs, ara estudiarem quines són les conseqüències que es desprenen de la negació del cinquè postulat. Primer de tot, però, cal comentar que també es podria haver negat el cinquè postulat afirmant que podem trobar una recta i un punt exterior a ella pel que no passa cap paral·lela. Si substituïm aquesta afirmació per la negació que va fer Lobatxevski obtenim que el sistema d'axiomes que ens queda no és compatible, de totes maneres, si es canvien lleugerament els primers axiomes llavors sí que obtenim un sistema d'axiomes sense contradiccions que ens dóna lloc a la geometria el·líptica una de les altres geometries no-euclidianes.

Per tant, considerant la negació del cinquè postulat que va fer Lobatxevski podem començar a estudiar quines conseqüències en podem deduir.

2.2. **Conseqüències de la negació del cinquè postulat.** L'enunciat original del cinquè postulat d'Euclides, és a dir, la manera com Euclides va enunciar el seu cinquè postulat és la següent:

**(E)** *Si una recta talla dues rectes formant a un mateix costat angles que sumen menys de dos rectes, les rectes es tallen en el costat on aquesta suma és menor de dos rectes.* (fig. 2)

De totes maneres, tenim diversos enunciats equivalents al cinquè postulat. La negació de cada un d'aquests altres enunciats ens permetrà trobar, de manera més directa, conseqüències de la negació d'aquest cinquè postulat. Direm que un enunciat és equivalent al cinquè postulat si es compleixen els dos fets següents: pot ser demostrat a partir dels axiomes de la Geometria Euclidiana i ens permet demostrar el cinquè postulat a partir dels quatre primers axiomes d'Euclides més l'enunciat equivalent.

2.2.1. *Rectes paral·leles.* La primera conseqüència que tenim és la no unicitat de paral·lela a una recta donada que passa per un punt determinat exterior a la recta.

Una manera equivalent d'enunciar el cinquè postulat d'Euclides és la següent:

**(P)** *Donada una recta i un punt exterior a aquesta, existeix una única recta que passa per aquest punt i és paral·lela a la recta donada.*

Si ja tinguéssim demostrada l'equivalència podríem afirmar que, negant l'afirmació (P) també neguem el cinquè postulat. Però l'afirmació (P) es pot negar de dues maneres diferents. Podem negar-la afirmant que per cada punt exterior a un recta passa més d'una o cap recta paral·lela a la donada. Tenim, però, que en Geometria Absoluta es compleix el següent teorema: *donada una recta i un punt exterior a aquesta existeix almenys una recta paral·lela a la recta donada que passa pel punt donat.*

Com que estem considerant que els axiomes de la Geometria Absoluta es compleixen, el teorema anterior es complirà i, per tant, la negació que podem fer tenint en compte que en Geometria Euclidiana dues rectes són paral·leles si no es tallen és:

*Existeixen una recta $r$ i un punt $P$ exterior a ella tals que per $P$ passen almenys dues rectes que no tallen $r$.*

Observem que aquest enunciat és, de fet, l'axioma de Lobatxevski.

Abans de seguir amb les conseqüències que es desprenen de (P) provem que realment els dos enunciats són equivalents. Aquesta equivalència la provarem a la següent proposició. Per provar-la haurem de veure que donat el sistema axiomàtic de la Geometria Absoluta més el cinquè postulat podem demostrar (P) i que donat el sistema axiomàtic de la Geometria Absoluta més l'enunciat (P) podem demostrar el cinquè postulat, (E).

**Proposició 2.1.** *Els enunciats de (E) i de (P) són equivalents.*

*Demostració.* Provem primer que a partir del cinquè postulat, és a dir, de l'afirmació (E) i els axiomes de la Geometria Absoluta, és certa l'afirmació (P). Sigui $A$ un punt exterior a una recta donada $a$. Sigui $AB$ la recta perpendicular a $a$ i $a'$ la recta perpendicular a $AB$ que passa pel punt $A$. Tenim que les rectes $a$ i $a'$ són perpendiculars a la recta $AB$ per construcció de $AB$ i $a'$. Llavors tenim dues rectes ($a$ i $a'$) perpendiculars a una tercera ($AB$) i en aquesta situació tenim un teorema de Geometria Absoluta que ens afirma que les dues primeres rectes ($a$ i $a'$) són paral·leles entre elles. Així $a$ i $a'$ són paral·leles. Prenem $r$ una recta qualsevol diferent de $a'$ que passi per $A$. Provarem que $r$ no pot ser també paral·lela a $a$ i així haurem provat (P).

Com que $r$ és diferent de $a'$, forma un angle agut amb la recta $AB$ en algun dels dos semiplans que determina $AB$. Ara apliquem el cinquè postulat que estem suposant vàlid. Tenim la recta $AB$ que talla $a$ i $r$ i forma a un mateix costat angles que sumen menys de dos rectes (ja que tenim que $r$ forma un angle agut amb $AB$ en algun dels dos semiplans). Llavors el cinquè postulat afirma que les rectes $a$ i $r$ es tallen en aquest costat.

Ara hem de provar que podem demostrar el cinquè postulat a partir dels axiomes de la Geometria Absoluta i l'enunciat (P). Prenem dues rectes $a$ i $b$ qualssevol i una tercera $c$ que talli les dues primeres formant a un mateix

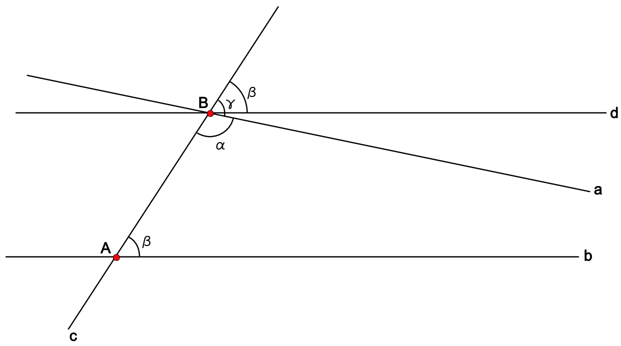


FIGURA 3

costat angles $\alpha$ i $\beta$ que sumin menys de dos rectes. Prenem la recta $d$ que passa pel punt d'intersecció de $a$ i $c$ i forma un angle $\beta$ amb la recta $c$, de manera que puguem aplicar el teorema de Geometria Absoluta que afirma que si una recta en talla dues altres formant angles alterns interns iguals llavors les dues rectes que talla són paral·leles. Aplicant-lo tenim que $d$ i $b$ són paral·leles. Com que estem prenent l'afirmació (P) tenim que $a$ i $b$ no són paral·leles ja que hem de tenir unicitat de paral·leles. Observem que no és possible que la recta $a$ i la recta $d$ siguin la mateixa ja que llavors tindríem que $\gamma = \beta$ (fig. 3) però $\gamma$ i $\alpha$ són angles adjacents per tant la seva suma és de dos recte i si $\gamma = \beta$ llavors $\alpha$ i $\beta$ sumarien dos rectes però hem suposat que sumen menys de dos rectes.

Per tant, $a$ i $b$ s'han de tallar. Falta veure que es tallen en el costat on la suma és menor de dos rectes per tenir el cinquè postulat demostrat.

Considerem el triangle $ABC$ on $A$ és la intersecció de les rectes $b$ i $c$, $B$ de les rectes $a$ i $c$ i $C$ de les rectes $a$ i $b$. Com que la suma dels angles interiors d'un triangle és menor o igual que dos rectes (teorema de la Geometria Absoluta) no pot passar que la suma de dos dels angles del triangle ja sumi més de dos rectes. $\square$

Així doncs, hem provat que les dues afirmacions són equivalents, d'on obtenim que una de les conseqüències de la negació del cinquè postulat és que perdem la unicitat de paral·lela a un recta $r$ que passa per un punt $P$.

A partir d'aquí podem obtenir diverses propietats més o menys directes.

Primer de tot, tenim que hi ha infinites rectes que passen per $P$ i no tallen $r$ (on $P$ i $r$ són el punt i la recta de (P) ) i que, de fet, si (P) es compleix per un punt i una recta es compleix per a tot punt i tota recta que no contingui el punt. Això ho podem enunciar en el següent teorema:

**Teorema 2.1.** *Suposem que es compleix l'axioma de Lobatxevski pel punt $P$ i la recta $r$. Llavors tenim que per aquest punt passen infinites rectes que no tallen $r$. A més, l'axioma de Lobatxevski es compleix per a qualsevol altre punt i recta.*

*Demostració.* Siguin $r_1$ i $r_2$ dues rectes que passen per $P$ i no tallen $r$. Prenem un punt $Q_2$ sobre la recta $r_2$ al costat de $P$ on el segment que uneix

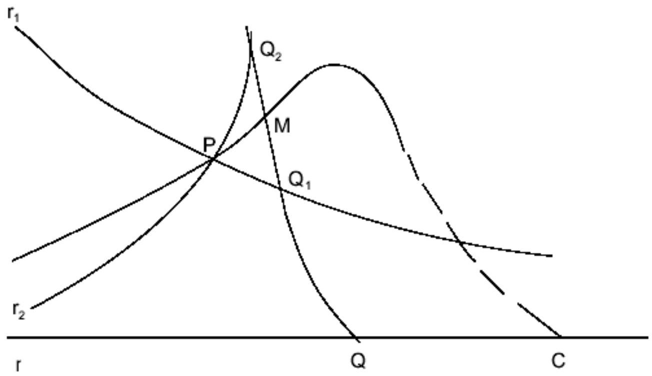


FIGURA 4

$Q_2$ amb qualsevol punt de $r$ talla $r_1$.
Fixem un punt qualsevol, $Q$, de $r$ i considerem el segment $Q_2Q$ que talla $r_1$ en el punt $Q_1$. Prenem $M$ un punt qualsevol interior al segment $Q_2Q_1$ (fig. 4). Provem que la recta $PM$ no talla la recta $r$. Si veiem això ja tindrem demostrada la primera part del teorema ja que les infinites rectes les podem aconseguir a partir de les diverses eleccions que hem fet, $Q_2, Q$ i $M$.

Suposem que la recta $PM$ talla $r$ en el punt $C$ quan la resseguim en la direcció de $P$ cap a $M$. Podem considerar el triangle $QMC$ (fig. 4). El segment $MQ$ és tallat per la recta $r_1$ per construcció en un punt diferent de $M$ i de $Q$. Llavors per l'axioma de Pasch tenim que $r_1$ talla el segment $QC$ o $MC$. Però no pot tallar cap dels dos ja que per una banda, $Q$ i $C$ són punts de la recta $r$ i si tallés $QC$ tallaria $r$ i per altra banda $MC$ són punts de la recta $PM$ que ja es talla amb $r_1$ en el punt $P$ i en Geometria Absoluta dues rectes es tallen, com a màxim en un punt.

Per provar la segona afirmació del teorema suposarem que no és certa i arribarem a provar que llavors es compleix el cinquè postulat d'Euclides. Suposem que pel punt $A$ hi passa una única recta paral·lela a la recta $a$, que designem per $a'$. Tracem la perpendicular per $A$ a $a'$. Designem per $A_1$ el punt d'intersecció de la perpendicular amb $a$ i considerem un punt $A_2$ diferent de $A_1$ a la recta $a$.
Provem que el triangle $AA_1A_2$ compleix que la suma dels angles interns és de dos rectes (fig. 5). Però això sabem que és una manera equivalent d'enunciar el cinquè postulat d'Euclides i, per tant, és cert que per a qualsevol punt exterior a una recta passa una única recta que no talla la primera, fet que està amb contradicció amb la hipòtesi del teorema.

Per provar que la suma dels angles dels triangles $AA_1A_2$ és de dos rectes veurem que els angles alterns interns que forma la recta $AA_2$ amb $a$ i $a'$ són iguals i que $AA_1$ també és perpendicular a $a'$ (fig. 5). En el primer cas, si suposem que els angles que formen són diferents, podem construir una recta $a''$ diferent de $a'$ tals que $AA_2$ sí que formen angles alterns interns iguals amb $a$ i $a'$. $a''$ talla $a$ perquè estem suposant unicitat de paral·lela però, per altra banda tenim que no pot tallar $a$ perquè en Geometria Absoluta es compleix

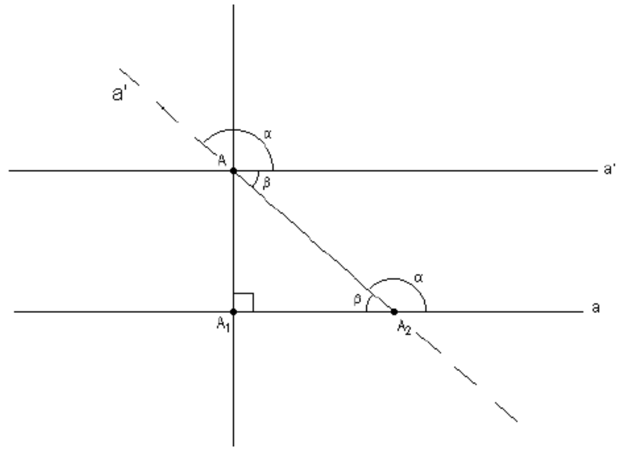


FIGURA 5

que donades tres rectes, si una intersecta amb les altres dues formant angles alterns interns iguals, les dues primeres no es tallen. Per tant, $a'' = a'$. De la mateixa manera provaríem que $AA_1$ forma angles alterns interns iguals amb $a$ i $a'$ però, a més, $AA_1$ és perpendicular a $a'$ llavors $AA_1$ és perpendicular a $a$. Així, tenim que el triangle $AA_1A_2$ té un angle recte i la suma dels altres dos forma un angle recte, ja que l'angle $\angle AA_2A_1$ i l'angle $\angle a', AA_2$ són el mateix angle i la suma dels angles $\angle a', AA_2$ i $\angle A_2AA_1$ és d'un angle recte. □

Observem que fins ara no hem parlat de rectes paral·leles. Això és perquè aquest concepte en Geometria Hiperbòlica és més complex d'enunciar que en Geometria Euclidiana, és a dir, en Geometria Hiperbòlica no és cert que dues rectes són paral·leles si no es tallen en cap punt. Això només és una condició necessària però no suficient ja que de les infinites rectes que no tallen una recta donada i passen per un punt fixat només de dues en direm rectes paral·leles.

Per donar la definició de rectes paral·leles en Geometria Hiperbòlica necessitem alguns conceptes previs.

Prenem una recta $r$ i un punt $P$ que no pertanyi a $r$. Tracem la perpendicular $PQ$ des de $P$ a $r$. La recta $PQ$ separa el pla en dues parts que anomenarem *dreta* i *esquerra*.

Considerem les rectes que passen per $P$ i no tallen $r$. Cada recta tindrà una semirecta a la part dreta i una altra a l'esquerra (fig. 6). Considerem la part dreta i designem per $\beta$ l'angle que determina aquesta semirecta amb $PQ$. Definim $\alpha$ com l'ínfim d'aquests angles. Tenim que, de fet, $\alpha$ és mínim ja que la semirecta, $k$, que forma un angle $\alpha$ amb $PQ$ no talla $r$. Provem aquest fet a la proposició següent.

**Proposició 2.2.** *Sigui $r$ una recta qualsevol i $P$ un punt que no pertany a $r$. Considerem totes les rectes que passen per $P$ i no tallen $r$. Llavors el conjunt format per tots els valors que pot prendre l'angle entre $r$ i una de les rectes que passa per $P$ i no talla $r$ pren un mínim.*

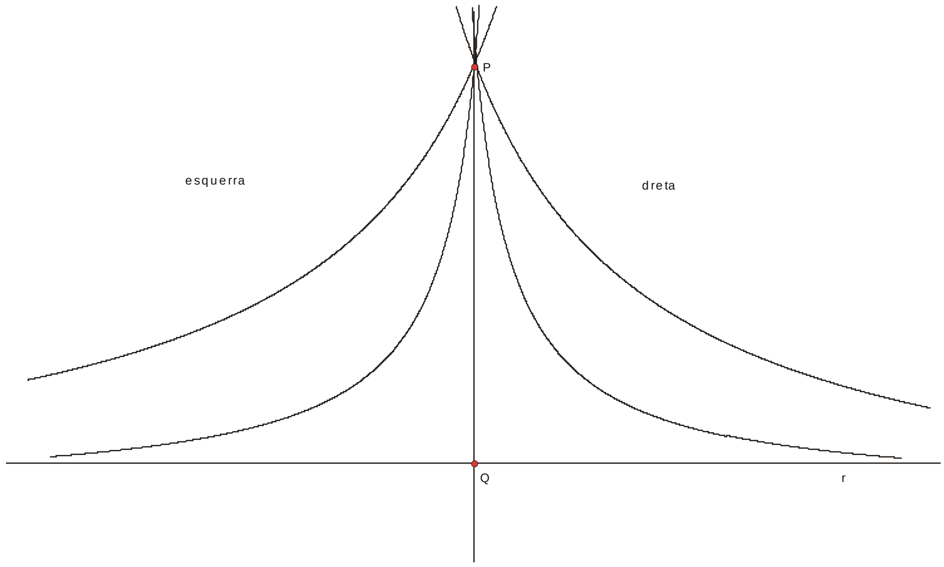


FIGURA 6

*Demostració.* Sigui $\alpha$ el mínim del conjunt de l'enunciat. Suposem que la recta que forma un angle $\alpha$ amb la perpendicular a $r$ que passa per $P$ talla $r$ en el punt $R$ a la part que hem anomenat dreta. Prenem $R'$ un punt qualsevol que estigui a la dreta de $R$ a la recta $r$. Considerem l'angle $QPR'$ i la recta $PR'$ (fig. 7). La recta $PR'$ talla la recta $r$ per construcció i l'angle $QPR' > \alpha$ ja que $R'$ està a la dreta de $R$ però $\alpha$ és l'ínfim de tots els angles que determinen les rectes que no tallen $r$ i ara hem trobat $\angle QPR' > \alpha$ i la recta $PR'$ que determina aquest angle talla $r$, fets que estan en contradicció.

Suposem que es tallen a l'esquerra. Considerem el triangle $PQR$. L'angle $PQR$ és recte per ser $PQ$ perpendicular a $r$ (fig. 8). Considerem l'angle $RPQ$. Aquest angle és adjacent a l'angle $\alpha$ que és agut. Tenim un teorema de la Geometria Absoluta que afirma que l'angle exterior d'un triangle és més gran que cada un dels angles interiors no adjacents. Llavors s'ha de complir que $\alpha > \angle PQR = \frac{\pi}{2}$. Però, per altra banda tenim que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ doncs si considerem la recta $s$ com la recta perpendicular a $PQ$ que passa per $P$ llavors tenim que $r$ i $s$ no es tallen ja que aquest resultat és cert a la Geometria Absoluta i $\angle s, PQ = \frac{\pi}{2}$. Com que hi ha infinites rectes diferents que no tallen $r$ i passen per $P$ tenim $\alpha < \frac{\pi}{2}$; i si considerem un punt $M$ a la recta $r$ a la dreta de $Q$ i l'angle $QPM$ tenim que $\alpha > \angle QPM > 0$.

Per tant, tenim $\alpha > \frac{\pi}{2}$ i $\alpha < \frac{\pi}{2}$ que no és possible. Llavors les rectes $r$ i $k$ tampoc es tallen al semiplà esquerra. $\square$

**Definició 2.2.** *Donada una recta $r$ i un punt $P$ exterior a $r$ definim la recta paral·lela a $r$ per la dreta des de $P$, $k$, com la recta que no talla a $r$ i que compleix que la semirecta que pertany a la part dreta del pla hiperbòlic que*

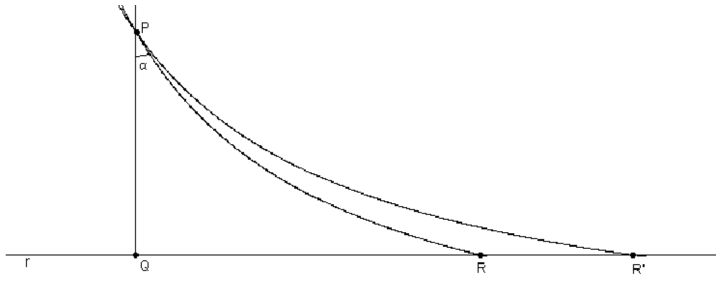


FIGURA 7

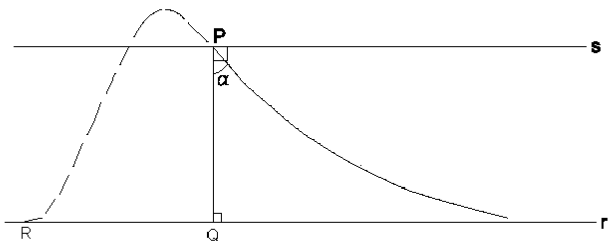


FIGURA 8

*hem fixat a partir de la recta perpendicular a $r$ que passa per $P$ fa mínim l'angle entre ella i aquesta perpendicular.*

*La paral·lela per l'esquerra es defineix de manera anàloga considerant el semiplà de l'esquerra que hem definit.*

*Diem també que la recta $k$ és recta frontera del conjunt de rectes per $P$ que no tallen $r$.*

Notem que si fixem una direcció (dreta o esquerra) llavors tindrem unicitat de recta paral·lela per $P$ a $r$ en la direcció fixada.

Amb aquesta definició de rectes paral·leles en un punt es compleix que la recta simètrica (agafem la noció de la Geometria Absoluta) de $k$, $k'$, és la recta paral·lela per l'esquerra per $P$ si $k$ és la recta paral·lela per la dreta. A més, es compleix que l'angle $\alpha$ que forma la recta paral·lela per la dreta és el mateix que l'angle que forma la recta paral·lela per l'esquerra amb $r$. Això ens porta a la definició següent:

**Definició 2.3.** *Donada una recta $r$, un punt $P$ exterior a $r$ i la recta paral·lela a $r$ per la dreta, o per l'esquerra, des de $P$, $k$, definim l'angle de paral·lelisme com l'angle que formen les rectes $k$ i la perpendicular a $r$ que passa per $P$.*

Ara tenim definit el concepte de recta paral·lela a una altra que passa per un punt donat però volem definir el concepte de recta paral·lela sense que aquest depengui del punt. Això ho podem fer gràcies a:

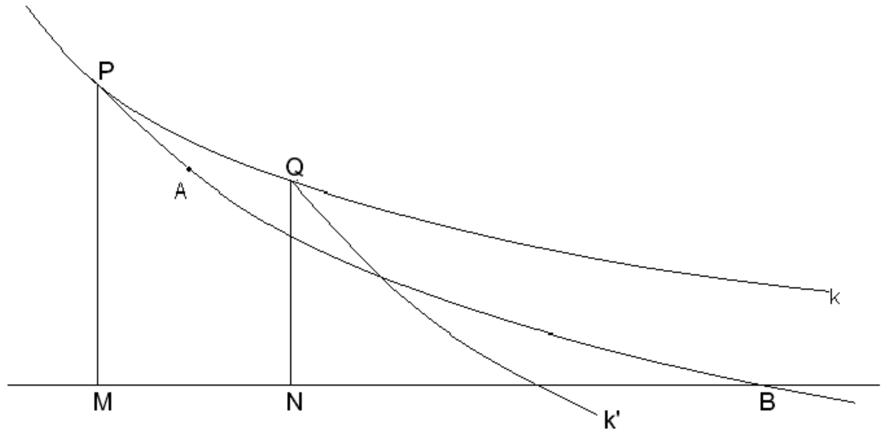


FIGURA 9

**Teorema 2.2.** *Si $k$ és paral·lela a $r$ des de $P$, llavors per a qualsevol punt $Q$ de $k$, la recta és frontera del conjunt de rectes que passen per $Q$ i no tallen $r$. És a dir, si tenim que una recta $k$ és paral·lela a $r$ des del punt $P$ llavors per qualsevol altre punt $Q$ de $k$ també tindrem que la recta $k$ és paral·lela a $r$ des del punt $Q$.*

*Demostració.* Suposem que $k$ és paral·lela per la dreta. Per provar que $k$ també és la recta paral·lela a $r$ per a qualsevol $Q \in k$ hem de provar que qualsevol altra semirecta que passi per $Q$ i estigui entre les rectes $k$ i $r$ talla $r$. Distingirem dos casos segons $Q$ estigui a la dreta o a l'esquerra de $P$.

Construïm la perpendicular a $r$ que passa per $P$, $PM$ i un punt $Q$ qualsevol a la dreta de $P$ a la recta $k$ (fig. 9). Tracem la perpendicular a $r$ que passa per $Q$ i talla $r$ en el punt $N$. Considerem una semirecta $k'$ que passi per $Q$ i estigui al semiplà de la dreta respecte $QN$ a sota de $k$. Prenem $A$ un punt arbitrari d'aquesta semirecta i construïm la semirecta $PA$. Com que $PA$ està a sota de la recta $k$ i $k$ és la paral·lela per $P$, talla $r$ en un punt, que designem per $B$. Llavors podem construir el triangle $PMB$. La recta $k'$ talla el costat $PB$ i per l'axioma de Pasch tenim que també ha de tallar un dels altres dos costats. El costat $PM$ no el pot tallar perquè $PM$ està al semiplà esquerra de $QN$. Llavors talla el costat $MB$ però $M$ i $B$ estan sobre la recta $r$ que és la que volem provar que talla.

Si el punt $Q$ està a l'esquerra de $P$ fem la mateixa construcció (fig. 10). Amb la notació de la figura 10 hem de provar que la semirecta $k''$ talla $r$. Prenem un punt $A$ del complement de la semirecta $k''$ i tracem la recta $PA$. La recta $PA$ tallarà $r$ en algun punt, $B$, al semiplà de la dreta determinat per $PM$. La recta $k''$ passa pel vèrtex $Q$ del triangle $QNP$ i és interior a l'angle $NQP$. En aquesta situació sabem de la Geometria Absoluta que la recta $k''$ talla qualsevol segment que uneix dos punts que estan a les semirectes que formen l'angle, un a cada una. En particular talla el segment $PN$. Si ara considerem el triangle $NPB$ tenim que la recta $k''$ talla el segment $PN$ però per l'axioma de Pasch també tallarà un dels altres dos segments del triangle.

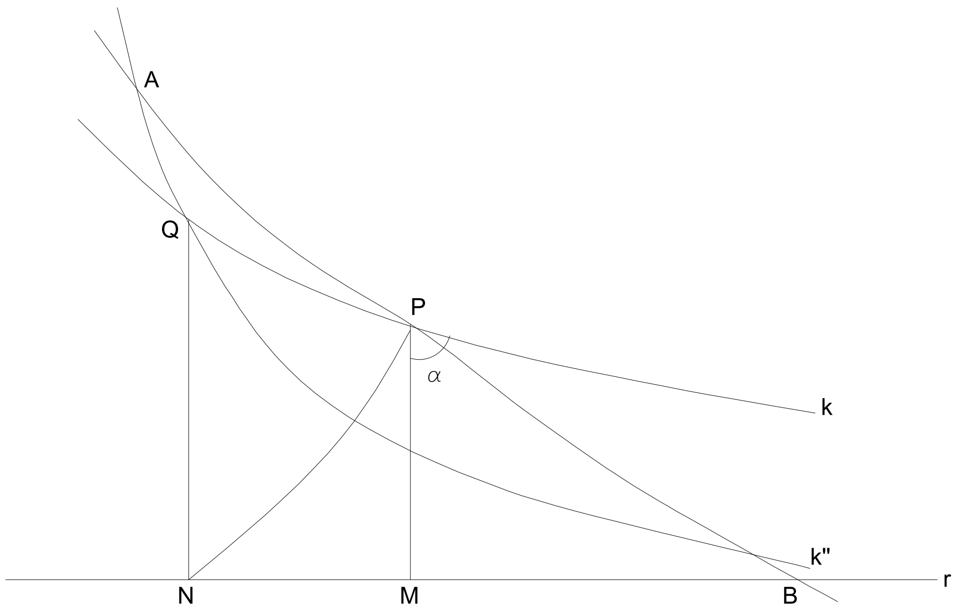


FIGURA 10

El segment $PB$ no el pot tallar perquè les rectes $k''$ i $AP$ es tallen en el punt P (i les rectes $AP$ i $PB$ són la mateixa). Llavors $k''$ talla el segment $NB$ que està sobre la recta $r$.

Anàlogament, podríem veure que també es compleix si $k$ és la paral·lela per l'esquerra. □

**Definició 2.4.** *Dues rectes $r$ i $k$ es diuen paral·leles si $k$ és frontera del conjunt de rectes que passen per un punt de $k$ i no tallen $r$.*

Amb aquesta definició de paral·leles que hem donat també es compleixen, si quan parlem de rectes paral·leles explicitem si ho són per la dreta o per l'esquerra (i en aquest cas direm que fixem la direcció de paral·lelisme), resultats de les paral·leles de la Geometria Euclidiana. Així es pot provar, per exemple:

**Teorema 2.3** (Propietat simètrica del paral·lelisme)**.** *Si tenim dues rectes $r$ i $s$ tals que $r$ és paral·lela a $s$ en una direcció determinada llavors $s$ és paral·lela a $r$ en la mateixa direcció.*

**Teorema 2.4.** *Dues rectes paral·leles a una tercera recta en una mateixa direcció són paral·leles entre elles en la mateixa direcció.*

Una característica molt important de les rectes paral·leles en Geometria Hiperbòlica és l'angle de paral·lelisme i concretament el següent resultat:

**Teorema 2.5.** *L'angle de paral·lelisme queda totalment determinat per la distància del punt $P$ a la recta $r$.*

*Demostració.* Hem de demostrar que si tenim dos segments congruents, que cada un dóna la distància entre una recta i un punt exterior a aquesta llavors l'angle de paral·lelisme és el mateix en cada cas. És a dir, sigui $r$ una recta i $P$ un punt exterior a $r$; tracem la perpendicular $PQ$ des del punt $P$ a la recta $r$ i una paral·lela $k$ a la recta $r$ pel punt $P$. Definim $\alpha$ com l'angle que determinen $PQ$ i $k$ (fig. 11). Fem ara una construcció anàloga. Sigui $r'$ una recta i $P'$ un punt exterior a $r'$. Tracem la perpendicular $P'Q'$ des del punt $P'$ a la recta $r'$ i una paral·lela $k'$ a la recta $r'$ pel punt $P'$. Definim $\alpha'$ com l'angle que determinen $PQ$ i $k$. Suposem que el segments $PQ$ i $P'Q'$ són congruents.

Cal provar $\alpha = \alpha'$. Suposem $\alpha < \alpha'$ per arribar a una contradicció. Que el cas $\alpha > \alpha'$ tampoc és possible es provaria anàlogament. Considerem la semirecta $h'$ amb origen $P'$ que forma un angle $\alpha$ amb $P'Q'$ i està al mateix semiplà que la direcció de paral·lelisme. Com que estem suposant que $\alpha'$ és l'angle de paral·lelisme de la recta $r'$ i $P$ i $\alpha < \alpha'$, $h'$ ha de tallar $r'$. Sigui $R'$ el punt de tall. (fig. 12)Sabem que podem transportar un segment de manera única sobre una recta i amb un origen determinat, per tant podem transportar el segment $Q'R'$ sobre la recta $r$ de manera que $Q'$ coincideixi amb $Q$ i $QR$ sigui congruent amb $Q'R'$.

Els triangles $\Delta PQR$ i $\Delta P'Q'R'$ són congruents ja que tenen dos angles i el costat que està entre aquests dos angles congruents. Llavors obtenim que l'angle $QPR \equiv Q'P'R' = \alpha$ però $\alpha$ també és l'angle que formen les rectes $PQ$ i $k$. D'aquí obtenim que la recta $PR$ coincideix amb la recta $k$ cosa que ens diu que les rectes $r$ i $k$ es tallen en el punt $R$, fet que està en contradicció amb que $r$ i $k$ siguin paral·leles. □

A partir d'aquest teorema es defineix la funció de Lobatxevski

$$\alpha = \Pi(x)$$

on $x$ és la longitud hiperbòlica del segment $PQ$ i seguim amb la notació anterior. Aquesta funció relaciona longituds amb angles i a més, ens permet definir una unitat de mesura de longituds a partir dels axiomes, cosa que no podem fer ni a la Geometria Absoluta ni a la Geometria Euclidiana, on s'ha de triar la unitat de longitud a partir d'un segment arbitrari, que no té cap propietat que el distingeixi dels altres. El cas dels angles és diferent ja que en qualsevol geometria podem distingir l'angle recte per una propietat que podem definir a partir dels axiomes, és a dir, l'angle que és congruent amb el seu adjacent. Ara bé, com que en la Geometria Hiperbòlica tenim la funció de Lobatxevski que relaciona angles amb longituds i que està definida també a partir dels axiomes podrem determinar els segments a partir d'aquesta funció i l'angle recte i així definir un segment a partir dels axiomes.

Més endavant, trobarem una expressió explícita de la funció de Lobatxevski pel cas del model del semiplà. Podem avançar, però, algunes de les seves propietats que resumim en el següent teorema:

**Teorema 2.6.** *La funció $\Pi(x)$ està definida per a tot $x$ positiu, és monòtona decreixent i contínua. A més,* $\lim_{x\to 0} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ *i* $\lim_{x\to\infty} \Pi(x) = 0$

La funció de Lobatxevski també ens permet afirmar que, en Geometria Hiperbòlica, no existeixen figures semblants. Per exemple, si tenim un triangle i volem construir-ne un de semblant n'hem de construir un que tingui

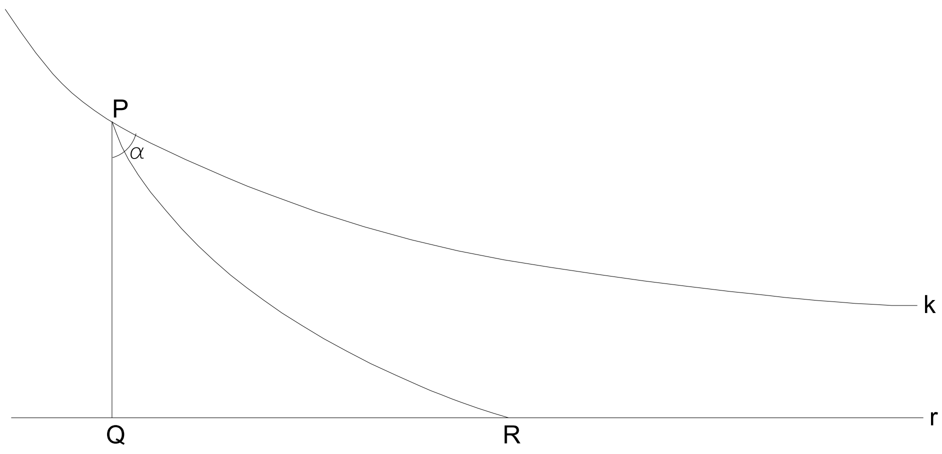


FIGURA 11

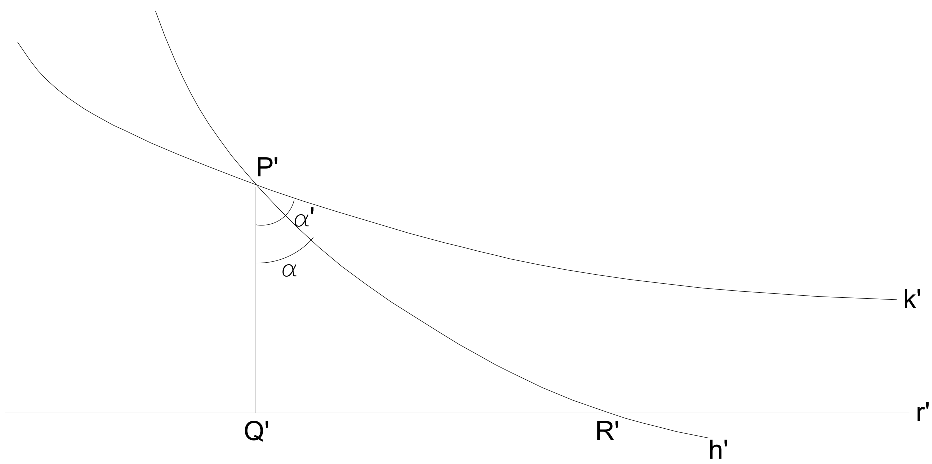


FIGURA 12

els mateixos angles, però un vegada fixats els angles quden fixades les longituds. Més endavant, establirem les relacions de la trigonometria hiperbòlica que explicitaran aquesta relació pel cas del model del semiplà de Poincaré.

Una altra manera equivalent d'enunciar el cinquè postulat d'Euclides és: *Donades dues rectes paral·leles, les distàncies dels punts d'una d'elles a la segona estan acotades.*

La negació d'aquest enunciat ens porta a afirmar que la distància entre dues rectes paral·leles es fa arbitràriament gran. Això es pot enunciar en el següent teorema:

**Teorema 2.7.** *Siguin $r$ i $s$ dues rectes paral·leles i $P$ un punt qualsevol de $r$. Si desplacem $P$ en la direcció del paral·lelisme la distància de $P$ a la recta $s$ tendeix a 0 i si desplacem $P$ en la direcció contrària a la del paral·lelisme la distància de $P$ a $s$ creix indefinidament.*

És a dir, es compleix que les rectes paral·leles se separen indefinidament en una direcció i s'aproximen asimptòticament en l'altra.

D'aquest teorema tenim, també, que si neguem el cinquè postulat ja no és cert que rectes paral·leles són equidistants, tal com passa en la Geometria Euclidiana.

A partir de la construcció que hem fet per definir rectes paral·leles hem vist que una de les altres conseqüències de la negació del cinquè postulat és que ja no podem afirmar que si tenim dues rectes paral·leles al intersectar amb una tercera formen angles alterns interns iguals ja que hem construït la recta $PQ$ perpendicular a $r$ i que talla a les paral·leles a $r$ que passen per $P$ que no forma un angle recte amb les paral·leles ja que forma un angle adjacent a $\alpha$, $\pi-\alpha$, i $\alpha$ és agut. El recíproc d'aquest fet sí que s'ha de seguir complint ja que és un resultat de la Geometria Absoluta. Aquesta afirmació serà enunciada al teorema 2.9.

Si ara introduïm el concepte de rectes divergents podrem reformular alguns resultats de rectes que no es tallen de Geometria Absoluta.

**Definició 2.5.** *Diem que dues rectes són divergents si no es tallen ni són paral·leles.*

**Nota:** Les rectes divergents també s'anomenen *ultraparal·leles.*

**Teorema 2.8.** *Dues rectes perpendiculars a una tercera no es tallen, de fet, són divergents.*

**Teorema 2.9.** *Dues rectes que al tallar-se amb una tercera formen angles alterns interns iguals no es tallen, de fet, són divergents.*

A més, es compleix que dues rectes divergents qualssevol tenen una única perpendicular comú i que aquestes se separen indefinidament a cada costat de la perpendicular.

2.2.2. *Triangles.* En Geometria Euclidiana és ben conegut que la suma dels angles interns d'un triangle és igual a dos rectes. Aquesta afirmació proporciona una manera equivalent d'afirmar el cinquè postulat.

Així doncs, una altra de les conseqüències de la negació d'aquest postulat és que la suma dels angles interns d'un triangle no és de dos rectes, sinó un valor menor. En principi podria ser major però això no pot passar perquè el següent teorema és cert en Geometria Absoluta.

**Teorema 2.10.** *La suma dels angles interns d'un triangle és menor o igual de dos rectes.*

Tal com hem comentat, va ser Legendre qui va voler demostrar el cinquè postulat a partir de demostrar per reducció a l'absurd l'afirmació equivalent

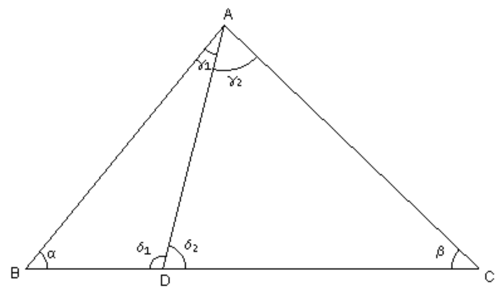


FIGURA 13

anterior però, per raonaments lògics a partir dels altres postulats només es pot demostrar que no és possible que la suma sigui major de dos rectes.
**Notació:** Denotarem la suma dels angles interns d'un triangle per $S(\Delta)$.
El teorema 2.10 ens porta a la definició d'una mesura de com se separa la suma dels angles de dos rectes.

**Definició 2.6.** *Definim el defecte $D(\Delta)$ d'un triangle $\Delta$ com:*

$$D(\Delta) = \pi - S(\Delta).$$

Pel teorema 2.10 tenim que $D(\Delta) \geq 0$ per a tot triangle. En Geometria Hiperbòlica es compleix que tot triangle té $D(\Delta) > 0$. Això és conseqüència dels següents resultats:

**Lema 2.1.** *Sigui $\Delta ABC$ triangle. Sigui $D$ un punt interior del segment $BC$. Llavors $D(\Delta ABC) = D(\Delta ABD) + D(\Delta ACD)$*

*Demostració.* Considerem el triangle $\Delta ABC$ i un punt $D$ interior al segment $BC$.

Amb la notació de la figura 13 tenim:

$$D(\Delta ABD) = \pi - \alpha - \gamma_1 - \delta_1$$

i

$$D(\Delta ACD) = \pi - \beta - \gamma_2 - \delta_2.$$

Sumant les dues desigualtats i utilitzant que $\delta_1$ i $\delta_2$ són angles adjacents obtenim:

$$D(\Delta ABD) + D(\Delta ACD) = 2\pi - (\alpha + \gamma_1 + \delta_1 + \beta + \gamma_2 + \delta_2) =$$

$$= 2\pi - (\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 + (\delta_1 + \delta_2) + \beta) = \pi - (\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 + \beta) =$$

$$= \pi - (\alpha + \gamma + \beta) = D(\Delta ABC).$$

□

**Lema 2.2.** *Si la suma del angles interns d'un triangle rectangle és de dos rectes llavors $D(\Delta) = 0$ per a tot triangle rectangle.*

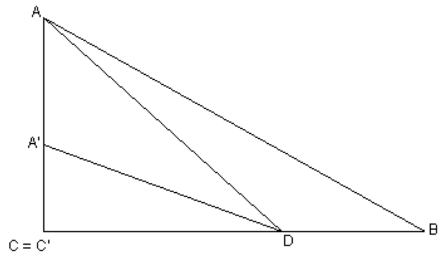


FIGURA 14

*Demostració.* Sigui $\Delta ABC$ el triangle rectangle de la hipòtesi que compleix que $D(\Delta ABC) = 0$ i sigui $\Delta A'B'C'$ un triangle rectangle qualsevol. Per provar el teorema distingirem dos casos segons els catets del primer triangle siguin més grans que els del primer o no.

Els catets $AC$ i $BC$ del primer triangle són més grans que els catets $A'C'$ i $B'C'$ del segon triangle, respectivament.

Com que els dos triangle són rectangles podem traslladar el segon sobre el primer de manera que el vèrtex $C'$ coincideixi amb el vèrtex $C$ i el segment $A'C'$ estigui sobre el segment $AC$ (fig. 14). Llavors podem descomposar el triangle en tres i aplicar el lema anterior. Els tres triangles que obtenim en la descomposició són $\Delta A'B'C$, $\Delta A'B'A$ i $\Delta B'AB$ de manera que aplicant el lema anterior tenim que

$$D(\Delta ABC) = D(\Delta A'B'C) + D(\Delta A'B'A) + D(\Delta B'AB).$$

Però $\Delta A'B'C = \Delta A'B'C'$ per construcció d'on obtenim que $D(\Delta A'B'C') \leq D(\Delta ABC)$ ja que el defecte sempre ha de ser un número positiu. Per hipòtesi tenim que $D(\Delta ABC) = 0$ i tornant a aplicar que el defecte d'un triangle sempre és positiu arribem a que el defecte del segon triangle és zero, tal com volíem veure.

Per provar el cas en que els catets $AC$ i $BC$ del primer triangle són més grans que els catets $A'C'$ i $B'C'$ del segon triangle, respectivament, provarem que podem construir un triangle rectangle amb defecte zero de costats arbitràriament grans.

Construïm un triangle congruent amb el triangle $ABC$ donat de manera que aquest nou triangle comparteixi la hipotenusa amb el triangle $ABC$. Ens quedarà un quadrilàter que té els quatre angles rectes ja que ha estat format a partir de dos triangles que la suma dels seus angles és de dos rectes. Ara podem construir altres quadrilàters congruents amb aquest de manera que comparteixin costats congruents i construïm així un rectangle, que pot tenir els costats arbitràriament grans i té els quatre angles rectes. Si tracem una diagonal el rectangle queda dividit en dos triangle que cada un compleix que la suma dels angles és de dos rectes. Ara tenim construït un, de fet dos, triangles rectangles que la suma dels seus angles és de dos rectes i amb els

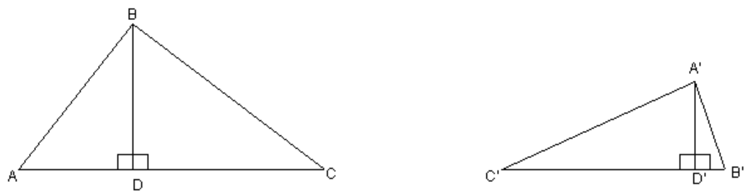


FIGURA 15

costats arbitràriament grans, en particular, més grans que els del triangle $A'B'C'$. (Ho podem assegurar pel postulat d'Arquímedes que afirma que donades dues longituds, una més petita que l'altra podem aconseguir que la més petita sigui més gran si repetim aquesta longitud suficients vegades.) Però ara ja estem en les hipòtesis del cas anterior i, per tant, podem afirmar que $D(\Delta A'B'C') = 0$ tal com volíem veure. □

**Teorema 2.11.** *Si la suma del angles interns d'un triangle és de dos rectes llavors $D(\Delta) = 0$ per a tot triangle.*

*Demostració.* Sigui $\Delta ABC$ el triangle que compleix que $D(\Delta ABC) = 0$ de la hipòtesis i sigui $\Delta A'B'C'$ un triangle qualsevol. Hem de provar que $D(\Delta A'B'C') = 0$.

Sabem que, com a mínim, l'alçada del triangle traçada des del vèrtex que forma un angle més gran caurà dins del segment oposat al vèrtex. Suposem, amb un canvi de notació si és necessari, que l'angle $\angle ABC$ és el més gran i designem per $D$ el peu de l'alçada. Ara estem en la situació del lema 2.1 que ens afirma que $D(\Delta ABC) = D(\Delta ABD) + D(\Delta BCD) = 0$. D'on tenim que $D(\Delta ABD) = D(\Delta BCD) = 0$ ja que hem vist que $D(\Delta) \geq 0$ per a tot triangle.

Tenim que el triangle $\Delta ABD$ és rectangle i té defecte 0 llavors pel lema 2.2 tots els triangles rectangles tenen defecte 0.

Considerem el triangle $\Delta A'B'C'$ que volem provar que té defecte 0 i tracem l'altura des del vèrtex $A'$ que podem suposar sense perdre generalitat que és el que té un angle més gran i posem $D'$ el peu de l'altura que cau entre $B'$ i $C'$ llavors els triangles $A'B'D'$ i $A'C'D'$ són rectangles i per tant, tenen defecte 0. Pel lema 2.1 tenim que

$$D(\Delta A'B'C') = D(\Delta A'B'D') + D(\Delta A'C'D') = 0$$

tal com volíem provar. □

Observem que la hipòtesis de que la suma dels angles d'un triangle és menor de dos rectes i la hipòtesis de l'angle agut que hem comentat que feien Saccheri i Lambert són equivalents ja que podem dividir el quadrilàter per una diagonal i obtindrem dos triangles. Si acceptem la hipòtesis de l'angle agut pel quadrilàter tindrem que almenys un dels dos triangles, però que pel teorema 2.11 sabem que serà pels dos triangles, tindran la suma dels angles interns menor de dos rectes. I recíprocament si suposem que la suma dels angles dels triangles és menor de dos rectes obtindrem que els quadrilàters formats a partir de dos triangles compliran que tenen algun angle agut. D'aquí i del teorema 2.11 tenim que si un quadrilàter de Saccheri compleix la hipòtesis de l'angle agut llavors qualsevol quadrilàter de Saccheri compleix la hipòtesis.

Una manera equivalent d'enunciar el cinquè postulat és també: *Existeix un angle agut tal que la perpendicular aixecada en qualsevol punt d'un dels costats de l'angle talla a l'altre costat.*

Una característica important dels triangles en Geometria Hiperbòlica és que no existeixen triangles d'àrea arbitràriament gran. Això és perquè la funció $f(\Delta)$ que dóna l'àrea dels triangles depèn del seu defecte, de fet tenim que l'àrea d'un triangle és proporcional al seu defecte: $f(\Delta) = K \cdot D(\Delta)$. Per determinar la constant $K$ s'ha d'establir una relació entre la mesura d'àrea i la de longitud tal com fem en Geometria Euclidiana on imposem que el quadrat de costat de longitud 1 sigui d'àrea 1. Per la definició de defecte tenim que $D(\Delta) < \pi$ per tant $f(\Delta) < K \cdot \pi$ per a tot $\Delta$, triangle. De totes maneres, sí que podem trobar polígons d'àrea arbitràriament gran.

Podem formar un polígon a partir de la unió d'una quantitat suficientment gran de triangles amb la mateixa àrea de manera que els triangles formin una triangulació del polígon. Llavors l'àrea del polígon serà la suma de l'àrea dels triangles.

Observem que els triangles que tindran àrea màxima són els que tenen defecte $\pi$, és a dir, tenen els tres angles nuls.

## 3. Models del pla hiperbòlic

Per estudiar la Geometria Hiperbòlica es poden utilitzar diferents models com el model del semiplà de Poincaré, el del disc de Poincaré, el projectiu o el model de l'hiperboloide.

Tal com ja hem mencionat anteriorment, aquí serà utilitzat el model del semiplà de Poincaré en les construccions hiperbòliques, per tant, serà aquest el model que estudiarem amb més detall.

Amb tots aquests models ens trobarem amb l'inconvenient de no poder pensar, o bé les rectes o bé els angles, com a rectes o angles euclidians. A més, en qualsevol model de la Geometria Hiperbòlica que ens puguem imaginar a $\mathbb{R}^3$ amb la mètrica euclidiana ens trobarem que s'hi distorsionen les distàncies. Aquest fet és cert per a tot model de $\mathbb{R}^3$ amb la mètrica euclidiana perquè, l'espai hiperbòlic, es pot veure que és un espai de curvatura constant negativa i sabem, gràcies a un teorema de Hilbert, que no hi ha cap espai de curvatura constant negativa a $\mathbb{R}^3$ amb la mètrica euclidiana.

Donarem quatre models diferents tot i que només n'estudiarem dos. A l'apartat 3.1 donarem el model del semiplà de Poincaré. Per tal de poder estudiar el model necessitem introduir les inversions. Una vegada ja introduïdes veurem quines són les isometries per a aquest model i ja podrem provar que aquest model compleix els axiomes amb què hem definit la Geometria Hiperbòlica. A l'apartat 3.2 exposarem el model del disc de Poincaré i provarem que aquest model també compleix els axiomes de la Geometria Hiperbòlica. Finalment, a l'apartat 3.3 definirem els models projectiu i el model de la quàdrica sense demostrar que compleixen els axiomes.

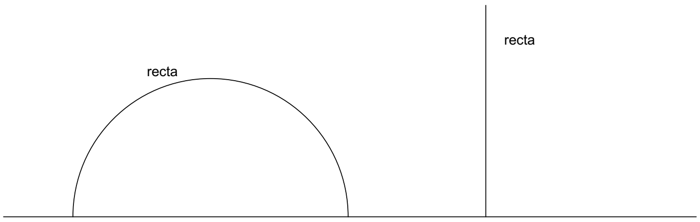


FIGURA 16. Rectes del pla hiperbòlic en el model del semiplà

3.1. **Model del semiplà de Poincaré.** El model del semiplà està construït en el pla euclidià a partir de fixar una recta qualsevol i considerar-la com a recta de l'infinit. Llavors fixem també un dels dos semiplans determinats per la recta. A partir d'aquí considerem com a punts de l'espai hiperbòlic els punts del semiplà fixat (sense incloure-hi els de la recta de l'infinit) i com a rectes hiperbòliques les semicircumferències amb centre a la recta de l'infinit i radi qualsevol i les rectes euclidianes perpendiculars a la recta de l'infinit, que sovint les pensarem com a circumferències de radi infinit per tal d'alleugerir els enunciats.

En aquest model tenim que, clarament, el concepte de recta hiperbòlica no coincideix amb el concepte de recta euclidiana, en canvi, sí que es manté el concepte d'angle, tal com provarem.

Per poder treballar amb el model en necessitem conèixer el concepte fonamental en geometria, és a dir, quines aplicacions són les isometries. Per definir les isometries del model ens cal conèixer les inversions que primer de tot estudiarem com a transformacions del pla euclidià.

3.1.1. *Inversions.* Les inversions són aplicacions definides en el pla euclidià i també s'anomenen simetria respecte d'una circumferència.

**Definició 3.1.** *Donada una circumferència $k$ amb radi $r$ i centre $O$ i un punt $A$ diferent de l'origen de la circumferència definim la inversió del punt $A$ com el punt $A'$ de la semirecta $OA$ que compleix $OA.OA' = r^2$.*
*Direm que $A'$ és l'invers de $A$ respecte $k$.*
*Del punt $O$ en diem centre de la inversió o pol de la inversió.*

Observem que de la definició podem afirmar que si $A$ és un punt exterior (resp. interior) de la circumferència llavors $A'$ és un punt interior (resp. exterior). A més, els punts de la circumferència $k$ són invariants per la inversió respecte de $k$.

La construcció que farem a continuació ens dóna una manera de construir el punt invers d'un altre i, a més, ens permet veure que és únic.

Considerem el punt $B$ d'intersecció de la circumferència $k$ amb una tangent a aquesta que passa per $A$. Si ara tracem la perpendicular a la recta $OA$ que passa per $B$, el punt de la base de la perpendicular traçada serà el punt $A'$ que estem buscant. (fig. 17)

En aquesta construcció el punt $A'$ queda unívocament determinat i compleix la propietat de la inversió. Provem aquestes dues afirmacions. Pel

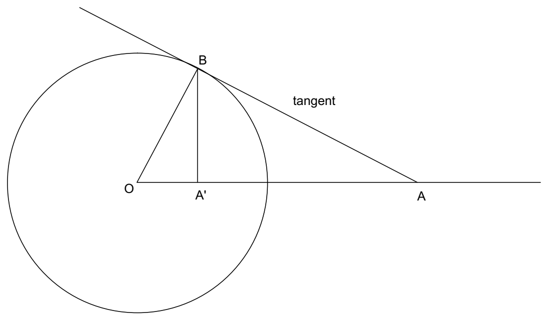


FIGURA 17

cas en què $A$ és exterior tenim que hi ha dues rectes tangents a la circumferència que passen per $A$. Si les considerem totes dues i tracem a partir de cada una d'elles la perpendicular que passa per la intersecció de la tangent corresponent amb la circumferència tenim que les dues perpendiculars són la mateixa recta. Per tant, el peu de les dues rectes perpendiculars és el mateix i, $A'$ és única. Si tenim que $A$ pertany a la circumferència respecte la que fem la inversió també tenim clarament unicitat i, si $A$ és un punt interior a la circumferència llavors podem traçar la recta $OA$ i la perpendicular a aquesta per $A$. La perpendicular tallarà la circumferència en dos punts que són els punts on les tangents, des del punt exterior que estem buscant, tallen la circumferència. Si construïm les dues tangents tenim que es tallen en un punt, no poden ser paral·leles perquè en l'únic cas que ho serien és en el que els punt d'intersecció són antipodals però en aquest cas estaríem prenent com a $A$ l'origen de la circumferència respecte la que fem la inversió i d'aquest punt no n'hem definit el punt invers. Així tenim que l'invers d'un punt respecte una circumferència està ben definit si realment aquesta construcció ens dóna l'invers.

Per veure que aquesta construcció ens defineix el punt invers hem de provar que $OA \cdot OA' = r^2$. Per la figura 17 tenim que els triangles $OBA'$ i $OBA$ són semblants ja que tenen dos angles iguals. Comparteixen l'angle amb vèrtex $O$ i els angles $OBA$ i $OA'B$ són rectes. Per tant, $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OA'}$ i $OB = r$. Llavors $OA \cdot OA' = r^2$ tal com volíem. Així, la construcció anterior ens defineix el punt invers d'un altre respecte una circumferència.

Una de les propietats de les inversions que es pot veure fàcilment és que si $A'$ és l'invers de $A$ llavors $A$ és l'invers de $A'$ respecte de la mateixa circumferència i, per tant, si apliquem dues vegades consecutives la mateixa inversió sobre una determinada figura obtindrem la mateixa figura és a dir, la inversió és una transformació involutiva.

Estudiem, ara, com actuen les inversions sobre determinades figures. Primer de tot, però, observem que el punts de la circumferència respecte de la que fem la inversió són fixos i que les rectes que passen pel centre d'inversió són invariants.

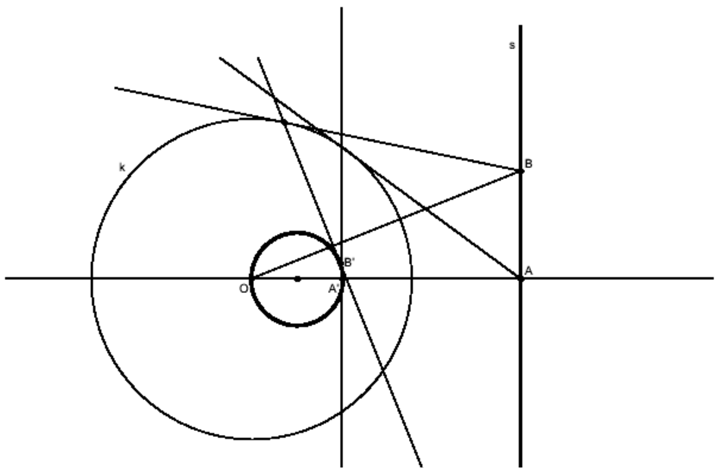


FIGURA 18

**Teorema 3.1.** *La inversió transforma les rectes que no passen pel centre d'inversió en circumferències que passen pel centre d'inversió.*

*Demostració.* Sigui $s$ una recta que no passa pel centre d'inversió $O$. Construïm la recta perpendicular a $s$ que passa per $O$. Sigui $A$ el peu de la perpendicular a la recta $s$ i $B$ un altre punt qualsevol de $s$. Construïm les inversions $A'$ i $B'$ de $A$ i $B$ respectivament respecte la circumferència donada $k$. Ara podem construir la circumferència $q$ que passa per $O$ i $A'$ i té el centre en el punt mig del segment $OA'$. (fig. 18) Llavors ens cal provar que el punt $B'$ pertany a la circumferència i que el punt invers de qualsevol altre punt de la recta $s$ també hi pertany. Per provar que $B' \in q$ només ens cal observar que els angles $OAB$ i $OB'A'$ són congruents. En efecte, els triangles $OAB$ i $OA'B'$ són semblants ja que comparteixen un angle i compleixen la relació $\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}$ per ser $A'$ l'invers de $A$ i $B'$ l'invers de $B$, per tant l'angle $\angle OAB = \angle OB'A'$ i també $\angle OBA = \angle OA'B'$.

En aquest cas, tenim que l'angle $OAB$ és recte, per construcció. Així doncs, $\angle OB'A'$ també és recte i $B' \in q$. Per qualsevol altre punt de $s$, que designem per $C$, també ens trobarem amb que l'angle $OC'A'$ és recte i, per tant, que $C' \in q$ si $C'$ és l'invers de $C$ respecte de $k$. □

Observem que el centre d'inversió, però, no és l'invers de cap punt de la recta $s$ i que, per tant, la figura que realment obtenim és la circumferència $q$ sense el punt $O$.

El recíproc d'aquest teorema també és cert. Així tenim:

**Teorema 3.2.** *La inversió transforma les circumferències que passen pel centre de la inversió en rectes que no passen pel centre de la inversió.*

*Demostració.* Siguin $A$ i $B$ dos punts de la circumferència donada (diferents del centre d'inversió $O$). Designem els inversos per $A'$ i $B'$. Aquests estan sobre una recta que no passa per $O$ perquè estan a sobre del raig d'origen $O$ que conté $A$, o $B$, i $A$ i $B$ estan a una circumferència que passa per $O$;

però la única manera possible de que la recta $A'$, $B'$ passi per $O$ és que el raig $OA$ i $OB$ sigui el mateix, d'on tindríem que $A$, $O$, $B$ estan alineats, cosa que no és possible per pertànyer a una circumferència. Pel teorema anterior sabem que aquesta recta es transforma en una circumferència que passa per $O$, però sabem que si la inversió de $A$ és $A'$ llavors la de $A'$ és $A$. Per tant, la circumferència en què es transforma la recta que passa per $A'$ i $B'$ és la circumferència donada i d'aquí tenim que aquesta circumferència es transforma en una recta que no passa pel centre de la inversió. □

Aquests dos teoremes ens permeten afirmar que donades una recta i una circumferència sempre es pot obtenir una a partir de l'altra amb una inversió. Si la recta no és tangent a la circumferència llavors tenim dues inversions que transformen la recta en la circumferència i viceversa. Aquestes inversions són les de centre un dels punts de la circumferència del diàmetre perpendicular a la recta. En el cas en què la recta sigui tangent la inversió és única i és respecte el punt diametralment oposat al de tangència. Això és perquè, tal com hem vist a la demostració del teorema 3.1 el centre de la circumferència que obtenim de la inversió de la recta està a la recta perpendicular a la recta que passa pel centre de la inversió per tant, si volem obtenir una determinada circumferència a partir de la inversió d'una recta també haurà de complir aquesta propietat i, el centre de la inversió s'haurà de trobar en les punts en què el diàmetre és perpendicular a la recta.

En el cas en el que tinguem una circumferència que no passa pel centre d'inversió tenim:

**Teorema 3.3.** *La inversió transforma les circumferències que no passen pel centre d'inversió en circumferències que tampoc passen pel centre d'inversió.*

*Demostració.* Sigui $q$ la circumferència donada i $k$ la que fem la inversió. Sigui $O$ el centre de la inversió. Tracem una recta que passi per $O$ i talli $q$ en dos punts, $A$ i $B$. Suposem que $A'$ i $B'$ són els inversos de $A$ i $B$. (fig. 19) Aleshores es compleix, per definició, que $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$, on $r$ és el radi de $k$. Suposem també que $OA \cdot OB = g$. Tenim per les propietats de les circumferències que $g$ és positiva si $O$ és a fora de $q$ i negativa si no i és constant, per a tot $A$, $B$.

De la primera igualtat tenim que $OA{\cdot}OA'{\cdot}OB{\cdot}OB' = r^4$ d'on $OA'{\cdot}OB' = \frac{r^4}{g}$ i $\frac{OA}{OB'} \cdot \frac{OB}{OA'} = \frac{g}{r^4}$ però per tenir $\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}$ es compleix $\frac{OA}{OB'} = \frac{g}{r^2}$ que ens diu que la figura que descriuen els punts $B'$ és semblant a la que descriuen els punts $A$ ja que el quocient $\frac{g}{r^2}$ és constant. Però $A$ descriu una circumferència així que $B'$, que ens dóna la figura inversa, també. □

De la demostració del teorema obtenim que la circumferència traçada a partir de la inversió és la mateixa que obtindríem si féssim una homotècia de centre el centre de la inversió i de raó $\frac{r^2}{g}$.

Per tant, la inversió deixa invariant la circumferència si l'homotècia associada és de raó 1. Així, donades dues circumferències podem obtenir l'una a partir de l'altra per mitjà d'una inversió. En el cas en que no siguin ni tangents ni concèntriques tindrem que el centre de la inversió és qualsevol dels dos centres de les homotècies que transformen una circumferència en l'altra. Pel cas en què siguin concèntriques tindrem que són inverses amb

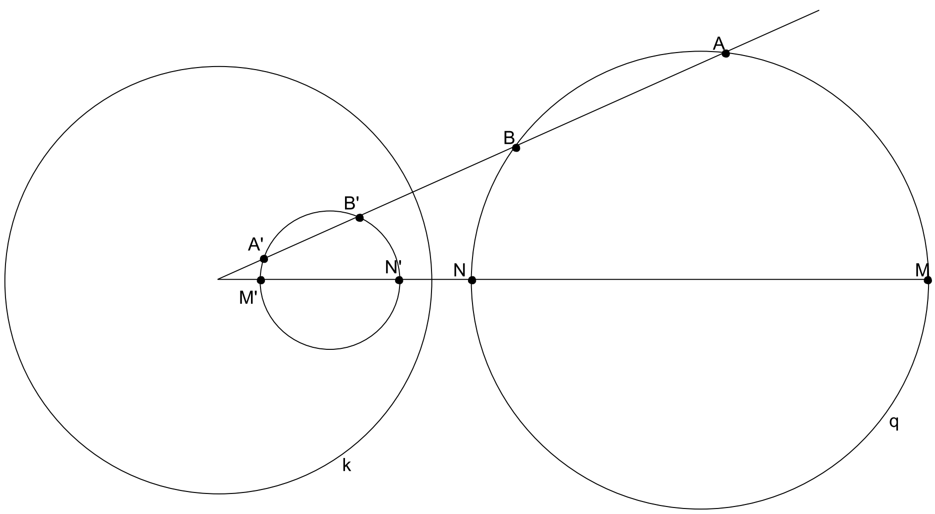


FIGURA 19

centre d' inversió el seu centre ja que aquest és el centre de l'homotècia (que té per raó la raó entre els radis). Si són tangents tenim que el centre de l'homotècia és el punt de tangència però aquest no pot ser el centre de la inversió perquè passa per les circumferències. Llavors, si les dues circumferències tenen radis diferents, el centre de la inversió és el punt d'intersecció de les rectes tangents (diferent de la recta que passa pel punt de tangència) a les dues circumferències. Si les circumferències són tangents i tenen el mateix radi podem obtenir l'una a partir de l'altra amb una simetria respecte la recta tangent a les circumferències que passa pel punt de tangència. Podem pensar que les simetries respecte d'una recta són inversions respecte circumferències de radi infinit.

Una manera fàcil d'obtenir la circumferència que s'obté en fer la inversió la trobem observant que podem construir el diàmetre a partir de la inversió dels punts de la intersecció de la recta que uneix els centres de les circumferències $k$ i $q$ amb la circumferència $q$. (Veure fig. 19)

Una propietat important de les inversions és que són aplicacions conformes, és a dir, es conserven els angles. Per tal de demostrar-ho necessitem primerament el següent resultat:

**Proposició 3.1.** *Siguin $m$ i $m'$ dues corbes inverses l'una de l'altra respecte a la circumferència $k$. Siguin $M$ i $M'$ punts inversos tals que $M \in m$ i $M' \in m'$. Llavors les rectes tangents a $m$ i $m'$ en els punts $M$ i $M'$ o bé són perpendiculars a la recta $MM'$ o bé formen amb el segment $MM'$ un triangle isòsceles de base $MM'$.*

*Demostració.* Suposem que $N$ és un punt diferent de $M$ de $m$ i $N'$ el seu invers, que serà un punt de $m'$. Tracem les rectes $MM'$, $NN'$ que passen pel centre de la inversió, $O$, i les rectes $MN$ i $M'N'$, que suposem que es tallen en el punt $P$. Suposem també que l'angle $MON = \theta$ i l'angle $OMN = \varphi$. Llavors per l'observació feta en la demostració del teorema 3.1 tenim que $\angle ONM' = \varphi$. Si ara considerem el triangle $MPM'$ tenim que l'angle $PMM' = \varphi$ (per ser l'angle oposat pel vèrtex de l'angle $OMN$ han de valdre el mateix) i l'angle $MM'P = \varphi + \theta$ (per ser el complementari de l'angle $OM'N'$ que val $\pi - \theta - \varphi$).

Ara fem un procés de pas al límit per tal d'aconseguir que les rectes $MN$ i $M'N'$ que són secants passin a ser tangents. Si fem tendir l'angle $\theta$ a 0 obtenim que l'angle $MM'P$ tendeix a $\varphi$ que és el que val l'angle $PMM'$. D'aquí que el triangle $MM'P$ passa a ser isòsceles.

Seran perpendiculars si no existeix el punt d'intersecció $P$. □

**Teorema 3.4.** *La inversió deixa invariant les magnituds dels angles.*

*Demostració.* Siguin $m$ i $n$ dues corbes que es tallen en el punt $A$ i $m'$, $n'$ i $A'$ els seus inversos respecte la circumferència $k$. Pel teorema anterior tenim que l'angle entre el segment $AA'$ i les tangents a $m$ i $m'$ en $A$ i $A'$ és el mateix però també és el mateix l'angle entre el segment $AA'$ i les tangents en $n$ i $n'$ en $A$ i $A'$. D'aquí tenim que l'angle entre les tangents a $m$ i $n$ en $A$ és el mateix que l'angle entre $m'$ i $n'$ en $A'$ tal com volíem veure. □

Dos altres resultats importants de les inversions fan referència a la ortogonalitat entre circumferències.

**Teorema 3.5.** *Sigui $q$ una circumferència que passa pels punts $A$ i $A'$ inversos respecte a la circumferència $k$. Llavors la circumferències $q$ i $k$ són ortogonals entre elles.*

*Demostració.* Provarem que les dues circumferències es tallen formant un angle recte veient que els radis que uneixen cada centre amb el punt d'intersecció de les dues circumferències són ortogonals. Primer de tot cal observar que les dues circumferències es tallen. Això és perquè sabem, de la geometria euclidiana, que si una circumferència té punts interiors i exteriors respecte una altra llavors aquestes dues es tallen. En aquest cas tenim que el punt $A$ (o el punt $A'$) és exterior respecte $k$ i $A'$ (o $A$) és interior respecte $k$ ja que $A$ i $A'$ són inversos l'un de l'altre, també respecte $k$. Llavors la intersecció entre les dues circumferències existeix. Cal provar, doncs, que en aquest punt, que designem per $P$, es tallen ortogonalment.

Si $OP$ és el radi de la circumferència $k$ llavors es compleix que $OA \cdot A' = OP^2$. També es compleix que $OA \cdot OA' = OS^2 = OR^2$, si $R$ i $S$ són els punts de tangència de $q$ respecte del centre de $k$. (Aquest producte és invariant i s'anomena potència d'una circumferència respecte d'un punt.)

Ajuntant les dues igualtats obtenim que el punt $P$ ha de ser el punt $S$ o el punt $R$ i, per tant, el radi de $k$ és la tangent de $q$ en el punt $P$. Però, en una circumferència la tangent és perpendicular al radi. D'aquí obtenim que els dos radis són perpendiculars i les circumferències ortogonals. □

**Teorema 3.6.** *Siguin $k$ i $q$ dues circumferències ortogonals entre elles. Llavors les rectes que passen pel centre $O$ de la circumferència $k$ i tallen la circumferència $q$ la tallen en punts inversos respecte a $k$.*

*Demostració.* Suposem que $A$ i $A'$ són els punts d'intersecció de la recta amb $q$ i que $P$ és un dels punts de tall de les dues circumferències. Per hipòtesis tenim que les dues circumferències són ortogonals per tant, la recta $OP$ és tangent a la circumferència $q$ i d'aquí tenim que $OA \cdot OA' = OP^2$. Però aquesta és la igualtat que ens afirma que $A$ i $A'$ són inversos respecte a la circumferència $k$. $\square$

Passem a estudiar l'expressió analítica de les inversions. Per tal de simplificar l'expressió que obtindrem pensarem el pla euclidià com el pla complex, és a dir, representarem un punt $(x, y)$ com $z = x + iy$. També per simplificar podem suposar, sense perdre generalitat, que el punt $O$, el centre de la inversió, és l'origen de coordenades.

Recordem que per dir que un punt $A'$ és l'invers de $A$ respecte de la circumferència $k$ d'origen $O$ i radi $r$ cal que es compleixi que $OA \cdot OA' = r^2$. Aquesta expressió és equivalent a $||z|| \cdot ||z'|| = r^2$ on $z = a_1 + ia_2$ si $A = (a_1, a_2)$ i expressada en forma polar, amb $z = pe^{i\alpha}$, queda $p \cdot p' = r^2$ i $p \cdot p' = z' \cdot \overline{z}$. Així el punt invers és $z' = \frac{r^2}{\overline{z}}$. Ara tenim l'expressió d'una inversió respecte a una circumferència de centre l'origen. Per trobar l'expressió d'una inversió respecte a una circumferència de centre arbitrari $P$ fem el canvi de coordenades que ens centra $P$ a l'origen

$$\begin{cases} Z = z - P \\ Z' = z' - P \end{cases}$$

de manera que la inversió en les noves coordenades queda: $Z' = \frac{r^2}{\overline{Z}}$ i si ho reescrivim en les coordenades originals obtenim: $z' = \frac{P\overline{z} - P\overline{P} + r^2}{\overline{z} - \overline{P}}$ que no està definit en $z = P$, tal com ja hem demanat a la definició d'invers, l'invers del centre de la inversió no esta definit. Com que aquí ens interessa estudiar les inversions per tal d'aplicar-les al model del semiplà de la Geometria Hiperbòlica també considerarem que la circumferència pot ser de radi infinit, és a dir, una recta, en aquest cas al punt simètric d'un altre en direm l'invers respecte la recta $r$. Si ara calculem l'expressió analítica de la inversió respecte una recta obtenim: $z' = e^{2\varphi i}\overline{z} + a$ on $a$ és una constant complexa. Aquesta expressió la podem obtenir de considerar primer el cas en que la recta és l'eix horitzontal, $z' = \overline{z}$, després si la recta passa per l'origen amb un angle $\varphi$ amb l'eix horitzontal obtenim, a partir del canvi de coordenades

$$\begin{cases} Z = e^{i\varphi} z \\ Z' = e^{i\varphi} z' \end{cases}$$

$e^{i\varphi} z' = \overline{e^{i\varphi} z}$ i a més si la recta no passa per l'origen però sí per un punt $a$ obtenim l'expressió anterior: $z' = e^{2\varphi i}\overline{z} + a$.

Ara tenim determinada l'expressió analítica de qualsevol inversió però el que es fa, per tal de reduir les dues expressions en una, és considerar que l'expressió general de les inversions és $z' = \frac{\alpha\overline{z} + \beta}{\gamma\overline{z} + \delta}$ on $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i $\delta$ representen nombres complexos i només cal escollir adequadament els valors de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i $\delta$.

Els resultats que teníem referents a la inversió de rectes i circumferències, si ara considerem les rectes com a circumferències de radi infinit, es poden agrupar en un afirmant que la inversió d'una circumferència és una circumferència. Per tenir l'afirmació provada només ens falta veure el cas en el que la inversió és respecte a una recta però llavors la inversió és, de fet, una simetria respecte la recta, que sí que ho compleix.

Amb l'expressió trobada per les inversions podrem estudiar fàcilment què obtenim en composar més d'una inversió o, en alguns casos particulars, en composició d'inversions.

**Definició 3.2.** *El nombre $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ s'anomena discriminant.*

El discriminant de dues inversions es pot veure que és diferent de zero a partir de mirar qui és $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i $\delta$.

Tenim que la composició de dues inversions es pot escriure com $z' = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ ja que si suposem que $z' = \frac{\alpha_1\bar{z}+\beta_1}{\gamma_1\bar{z}+\delta_1}$ i $z'' = \frac{\alpha_2\bar{z}+\beta_2}{\gamma_2\bar{z}+\delta_2}$ són les dues inversions composant-les obtenim que $z'' = \frac{(\alpha_1\alpha_2+\gamma_2\beta_1)z+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\delta_2)}{(\alpha_2\gamma_1+\delta_1\gamma_2)z+(\delta_1\beta_2+\delta_1\delta_2}$ i a més el discriminant d'aquesta aplicació és producte de discriminants.

En canvi, el producte de tres inversions es pot tornar a escriure com una inversió. Per tant, el producte de quatre inversions es pot escriure amb la mateixa forma que en el cas del producte de dues inversions. Així podem afirmar:

**Proposició 3.2.** *El producte d'un nombre parell d'inversions es pot escriure com $z' = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ i el producte d'un nombre senar d'inversions com $z' = \frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$. A més, es compleix que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$*

**Teorema 3.7.** *Si una aplicació que representa el producte d'un nombre parell d'inversions deixa tres punts fixos, és la identitat.*

*Demostració.* Sabem que podem escriure el producte d'un nombre parell d'inversions com $z' = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$. Els punts que deixa fixos aquesta aplicació compleixen $z = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, és a dir, són arrels del polinomi $\gamma z^2 + (\delta - \alpha)z - \beta = 0$. Però el polinomi és de grau 2 i té 3 arrels diferents, llavors ha de ser el polinomi idènticament nul i s'ha de complir $\gamma = \beta = 0$ i $\delta = \alpha \neq 0$ perquè sabem que $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$. Així tenim que l'aplicació es $z' = z$, és a dir, la identitat. □

**Teorema 3.8.** *Si una aplicació que representa el producte d'un nombre senar d'inversions deixa tres punts fixos, llavors és una inversió respecte a la circumferència que passa per aquests tres punts.*

*Demostració.* Suposem que l'aplicació que representa el producte de les inversions ve donada per $z' = f(z)$ i que la inversió respecte a la circumferència que passa pels tres punts fixos per $z' = g(z)$. Volem veure que $f(z) = g(z)$. Considerem la composició de $f$ amb $g$ $z'' = g(f(z))$. Aquesta aplicació és producte d'un nombre parell d'inversions i té tres punts fixos (perquè la inversió donada per $g$ deixa fixos tots els punts de la circumferència, en particular deixa fixos els tres punts fixos per $f$), per tant, pel teorema anterior tenim que és la identitat. Així, es compleix que $g(f(z)) = z$ i $f(z) = g^{-1}(z)$ però $g^{-1}(z) = g(z)$ per ser $g$ una inversió. Llavors $f(z) = g(z)$, tal com volíem veure. □

Una vegada ja introduïdes les inversions ja podem començar a estudiar el model del semiplà pròpiament.

3.1.2. *Longitud.* El nostre objectiu és provar que realment aquest model es correspon a un model de Geometria Hiperbòlica, és a dir, que es compleixen els cinc axiomes que hem donat a la definició de la Geometria Hiperbòlica.

Recordem que per treballar amb aquest model hem de fixar una recta del pla euclidià, que serà la recta de l'infinit. La recta de l'infinit que considerarem és la recta $y = 0$ i els punts de l'espai hiperbòlic seran el punts del pla euclidià que tenen la segona coordenada positiva, $y > 0$. Per provar l'axioma 2, 3 i 4 necessitarem tenir definit el concepte de longitud per tal de poder parlar dels moviments hiperbòlics que conserven les distàncies, és a dir, les isometries.

La longitud d'un segment hiperbòlic dependrà de la seva distància euclidiana a la recta de l'infinit i de la longitud euclidiana. Així, per la mesura de longituds hiperbòliques tindrem en compte els següents principis:

(1) La longitud hiperbòlica d'un segment euclidià, $AB$, paral·lel a la recta de l'infinit és $\frac{AB}{y}$ si $y$ és la distància euclidiana del la recta de l'infinit ($y = 0$) a $AB$ i $AB$ la longitud euclidiana de $AB$.

(2) Donada una corba $\gamma$ qualsevol definim:

$\sigma$: longitud euclidiana de la corba,
$s$: longitud hiperbòlica de la corba,
$y$: mínima distància euclidiana de la corba a la recta de l'infinit $r$;

$$\min_{x\in\gamma} d_e(x,r),$$

$y'$: màxima distància euclidiana de la corba a la recta de l'infinit $r$;

$$\max_{x\in\gamma} d_e(x,r).$$

Observem que $y \neq 0$ ja que els punts de la recta $r$ no es consideren del semiplà.

Llavors s'ha de complir la desigualtat $\frac{\sigma}{y'} < s < \frac{\sigma}{y}$.

A partir d'aquests dos principis definirem la longitud d'una corba a partir d'utilitzar particions d'aquesta. Suposem primer que volem calcular la longitud d'una corba regular, $\gamma$, que, a més, compleix que és creixent i té per extrems $AB$.

Podem considerar la successió $P_0$, $P_1$, ..., $P_n$ formada per punts de $\gamma$ amb $P_0 = A$ i $P_n = B$.

Definim:

$y_i$: distància euclidiana de $P_i$ a $r$,
$\sigma_i$: longitud euclidiana de l'arc $P_iP_{i+1}$,
$\zeta_i$: longitud euclidiana de la corda que uneix $P_i$ amb $P_{i+1}$,
$\Sigma = \frac{\sigma_1}{y_1} + ... + \frac{\sigma_n}{y_n}$,
$\Sigma' = \frac{\sigma_1}{y_0} + ... + \frac{\sigma_n}{y_{n-1}}$,
$Z = \frac{\zeta_1}{y_1} + ... + \frac{\zeta_n}{y_n}$.

Tenim que $\Sigma < s < \Sigma'$ ja que podem aplicar el segon principi a cada sumand. Per altra banda, tenim també que $\Sigma - \Sigma' \to 0$ quan fem la partició més fina doncs $\Sigma' - \Sigma = \frac{\delta_1 y_1 - \delta_1 y_0}{y_0 y_1} + ... + \frac{\delta_n y_n - \delta_n y_{n-1}}{y_{n-1} y_n} = \frac{\delta_1}{y_0 y_1}(y_1 - y_0) + ... + \frac{\delta_n}{y_{n-1} y_n}(y_n - y_{n-1}) < \frac{\delta_1}{y_0^2}(y_1 - y_0) + ... + \frac{\delta_n}{y_0^2}(y_n - y_{n-1}) < \frac{\delta'}{y_0^2}(y_n - y_0)$ si $\delta'$ és la longitud

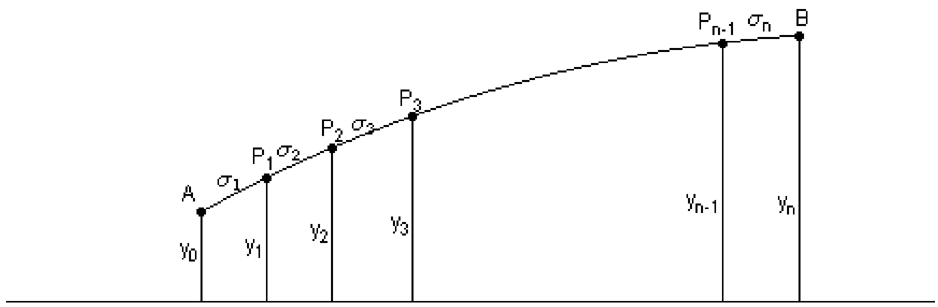


FIGURA 20

major i $y_0$ és la menor (perquè $\gamma$ és creixent) i $\delta'$ tendirà a zero. Ara ja tenim que $\Sigma \to_{n\to\infty} s$ ja que $0 < s - \Sigma < \Sigma' - \Sigma$ però per simplificar s'utilitza la suma $Z$ en comptes de $\Sigma$ ja que els seus termes són més fàcils de calcular. Podem escriure $Z = \frac{\sigma_1}{y_1}\frac{\zeta_1}{\sigma_1} + ... + \frac{\sigma_n}{y_n}\frac{\zeta_n}{\sigma_n}$ i si prenem $\alpha = \min \frac{\zeta_i}{\sigma_i}$ i $\beta = \max \frac{\zeta_i}{\sigma_i}$ tenim la desigualtat $\alpha\Sigma \leq Z \leq \beta\Sigma$. D'aquesta desigualtat sabem que quan $n \to \infty$, $\Sigma \to s$ i, a més, es compleix que $\alpha$ i $\beta$ tendeixen a 1 ja que es pot provar que la relació de la corda de l'arc i l'arc tendeix a 1 quan la longitud de l'arc tendeix a zero.

Per tant, podem calcular la longitud hiperbòlica d'una corba amb les condicions anteriors a partir de $s = lim_{n\to\infty}Z$. Si tenim una corba decreixent podem definir la longitud anàlogament, només cal considerar que $P_0$ és el punt final de la corba i $P_n$ l'inicial. Per tant, si tenim una corba regular a trossos només cal tenir en compte que la suma de la longitud hiperbòlica de cada tros ens dóna la longitud total de la corba.

Ara que ja tenim definida la longitud podem estudiar els moviments hiperbòlics, és a dir, les transformacions del semiplà al semiplà que conserven les longituds.

3.1.3. *Isometries.* Hi ha quatre moviments hiperbòlics bàsics de manera que qualsevol altre es pot obtenir com a composició d'aquests.

(1) Translació paral·lela a $r$, la recta de l'infinit.

Òbviament conserva les longitud ja que no varia ni la longitud euclidiana de les corbes ni la distància de la corba a la recta $r$, que són els dos factors dels que depèn la longitud hiperbòlica.

(2) Semblança amb centre en un punt $O \in r$ i raó positiva.

Suposem que tenim el segment euclidià $MN$ i que aquest es transforma per la semblança amb $M'N'$ llavors, com que els triangles $OMN$ i $OM'N'$ són semblants, tenim que $\frac{MN}{y} = \frac{M'N'}{y'}$, és a dir, es conserva la longitud hiperbòlica de qualsevol corba ja que no varia el valor de cap dels sumands de $Z$, que ens dóna la longitud.

Hem de demanar que la raó de semblança sigui positiva per tal que la corba resultant d'aplicar la transformació segueixi estant en el semiplà on tenim definit el model.

(3) Inversió respecte una circumferència $k$ de radi $R$ i centre $O \in r$.

Suposem que tenim el segment $MN$ que es transforma per la inversió en $M'N'$. Els triangles $\Delta OMN$ i $\Delta ON'M'$ són semblants ja que $OM \cdot OM' = ON \cdot ON'$ o, equivalentment, $\frac{OM}{ON'} = \frac{ON}{OM'}$. Si tracem la bisectriu a l'angle $\angle MON$ i denotem per $y$ (resp. $y'$) la distància del punt d'intersecció d'aquesta amb $MN$ (resp. $M'N'$) tenim que es compleix $\frac{MN}{y} = \frac{M'N'}{y'}$ per ser els triangles $\Delta OMN$ i $\Delta OM'N'$ semblants i, per tant, també les parelles de triangles $\Delta MAC$ i $\Delta N'BD$ i $\Delta NAC$ i $\Delta M'BD$. Llavors, com en el cas de la semblança, es conserven els sumands de $Z$ i, en conseqüència, la longitud hiperbòlica.

(4) Simetria respecte a una recta perpendicular a $r$.

De les propietats de les simetries sabem que donat un segment la seva longitud euclidiana no variarà ni tampoc la distància del segment a la recta $r$ per ser l'eix de la simetria perpendicular a la recta $r$, per tant, com en el cas (1), tenim que la longitud hiperbòlica tampoc varia.

Observem que tots els moviments hiperbòlics que hem definit són conformes, és a dir, conserven els angles. Això està clar en el cas euclidià pels moviments (1), (2) i (4) i pel cas (3) ho hem provat al teorema 3.4 i, tot i que ens interessi pel cas hiperbòlic, veurem (axioma 4) que podem pensar els angles hiperbòlics com a euclidians.

3.1.4. *Compleix els axiomes.* Ara que ja tenim definida la longitud hiperbòlica i que coneixem quins són els moviments hiperbòlics, podem comprovar que aquest model que hem construït compleix els cinc axiomes de la Geometria Hiperbòlica. Una vegada ho tinguem provat també haurem demostrat la consistència de la Geometria Hiperbòlica, si suposem certa la consistència de la Geometria Euclidiana, ja que haurem donat un model euclidià de la Geometria Hiperbòlica.

**Axioma 1.** *Donats dos punts existeix una única recta que els conté.*

Suposem que $A$ i $B$ són dos punts arbitraris de l'espai hiperbòlic. Hem de trobar una recta que els conté i poder assegurar que aquesta es l'única recta que els conté. Per tal com hem definit les rectes hem de distingir dos casos.

Si la recta euclidiana que conté $A$ i $B$ és perpendicular a la recta de l'infinit llavors la recta hiperbòlica és la semirecta que conté $A$ i $B$ i té com a extrem el punt d'intersecció de la recta euclidiana amb la recta de l'infinit.

Si no, podem veure que estan en una semicircumferència amb centre a la recta $y = 0$. Construïm el punt mig del segment $AB$, $C$, i la recta perpendicular al segment $AB$ que passa pel punt mig. (fig. 21) Aquesta talla la recta $y = 0$ en un punt, $D$, ja que no pot ser-hi paral·lela; en l'únic cas que serien paral·leles és el cas en que la recta $AB$ és perpendicular a $y = 0$, però aquest és el cas anterior. Afirmen que el punt de tall és el centre de la semicircumferència.

En efecte, els triangles $ACD$ i $CBD$ són congruents pel criteri costat-angle-costat de Geometria Absoluta. Tenen els costats $AC$ i $CB$ congruents per ser $C$ el punt mig, els angles $ACD$ i $BCD$ són rectes i comparteixen el

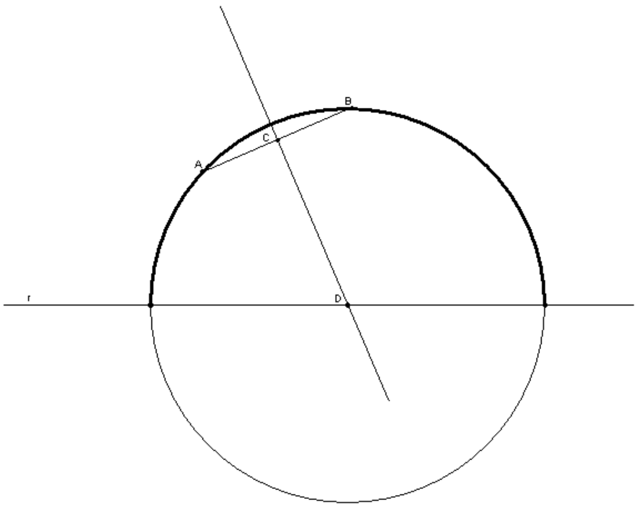


FIGURA 21

costat $CD$. Així els costats $AD$ i $BD$ són congruents i la distància de $D$ a $A$ és la mateixa que la distància de $D$ a $B$.

Si ara tracem la circumferència amb centre $D$ i radi $AD$ tenim que també passa per $B$.

Per tal d'obtenir una recta hiperbòlica només cal que considerem els punts de la circumferència que estiguin per sobre la recta de l'infinit, excloent els punts de la intersecció de la circumferència amb $y = 0$.

Per tant, tenim provada l'existència. La unicitat es desprèn del fet que les construccions són úniques pensades a la Geometria Euclidiana, no hi ha cap altre punt que pugui ser el centre de la semicircumferència i quan no existeix és perquè la recta $AB$ és perpendicular a la recta de l'infinit i només passa en aquest cas.

Així queda provat que el primer axioma de la Geometria Hiperbòlica es compleix en el model del semiplà. Més endavant, després de demostrar la veracitat dels cinc axiomes en aquest model, provarem que aquests dos tipus de rectes que hem considerat es corresponen amb el concepte de recta euclidià, és a dir, ens dóna la distància hiperbòlica entre dos punts. A més, veurem que són les úniques corbes que compleixen aquesta propietat i, per tant, cap altre corba pot ser considerada com a recta.

**Axioma 2.** *Qualsevol recta es pot prolongar indefinidament.*

Com abans, distingim dos casos:

Si la recta és perpendicular a la recta $y = 0$ podem pensar que es pot prolongar indefinidament en el mateix sentit que en el cas euclidià per l'extrem oposat a la recta de l'infinit. Cal provar però que en el cas hiperbòlic també augmenta la distància indefinidament entre un punt fixat $A$ i els punts que estan a sobre seu, els que tenen coordenada $x$ igual i $y$ cada vegada més gran. Hem vist que les semblances de centre un punt de la recta $r$ i raó positiva són moviments hiperbòlics i per tant, conserven les longituds. Si definim la semblança de centre el punt de tall $M$, de la recta $s$, perpendicular a $r$ que passa per $A$ obtenim un punt $A_1$ que està a $s$ amb coordenada $y$ major que la de $A$. Si ara apliquem la semblança de $A_1$ obtenim un $A_2$ que també ho compleix. Aplicant recurrentment la semblança obtenim una successió $A_1$, $A_2$,... de punts de la recta $s$, cadascun amb coordenada $y$ més gran i que compleix que $MA = AA_1$, $MA_1 = A_1A_2$,... ,$MA_n = A_nA_{n+1}$,... , és a dir, tots els segments $AA_1$, $A_1A_2$,... ,$A_nA_{n+1}$,... tenen la mateixa longitud hiperbòlica i, per tant, podem trobar punts a la recta $s$ allunyats tant com vulguem de $s$, podem prolongar indefinidament la recta $s$ en el mateix sentit que en el cas euclidià.

Per l'altre extrem, però, també la podem allargar indefinidament només cal aplicar recurrentment, com en el cas anterior, una semblança de centre $M$ i raó $1/2$. Obtindrem punts cada vegada més propers a $M$ (però mai arribarem a $M$) en el sentit euclidià però que en el sentit hiperbòlic estaran a una mateixa distància, la distància hiperbòlica de $A$ a $A_1$. Per tant, també podem prolongar indefinidament la recta en aquest sentit.

Ens falta el cas en què la recta hiperbòlica és una semicircumferència centrada a $r$. En aquest cas tenim que la recta talla en dos punts $P$ i $Q$ la recta de l'infinit. Podem trobar punts que estan tan a prop de $P$ o de $Q$ com vulguem, en el sentit euclidià però que en el sentit hiperbòlic estan a una mateixa distància. Això és cert ja que sempre podem trobar moviments hiperbòlics que passin d'una semicircumferència a una semirecta, només cal considerar, per exemple la inversió amb centre un dels punts $P$ o $Q$ i radi menor que el diàmetre de la semicircumferència, la inversió de la semicircumferència serà la recta (els punts amb $y > 0$) que passa pels dos punts d'intersecció de la circumferència d'inversió i la semicircumferència pensada com a circumferència.

Ara en aquesta recta ja sabem que és cert (és cert per a tota recta perpendicular a $r$) i, per tant, també és cert en una recta hiperbòlica arbitrària.

**Axioma 3.** *Donat un punt qualsevol, que prenem com a centre, i una distància qualsevol, que prenem com a radi, podem traçar una circumferència.*

El concepte de circumferència en Geometria Hiperbòlica serà el mateix que en Geometria Euclidiana, és a dir, el lloc geomètric dels punts que estan a una mateixa distància (radi) que un cert punt fixat (centre).

Per veure que la construcció de la circumferència, donat un punt i un radi, sempre és possible donarem un mètode per fer-la. Sigui $P$ el punt donat com a centre i $R$ la longitud donada com a radi. Tracem per $P$ la perpendicular, $s$, a $r$ i considerem un punt $A$ de $s$ que estigui a distància $R$ de $P$. (fig. 22) El punt $A$ existeix per la noció de longitud i per l'axioma 2 ja que ens afirmen que donat un punt sempre en podem trobar un altre a una determinada distància, sobre una recta fixada. Per construir l'altre punt $B$ que està a la mateixa distància de $P$ que $A$ utilitzem que les semblances de centre un punt de $r$ són moviments hiperbòlics. Construïm $B$ de manera que compleixi $\frac{BM}{PM} = \frac{PM}{AM}$ perquè així tenim que la distància hiperbòlica de $AP$ és la mateixa que la de $BP$ doncs el punt $A$ passa al punt $P$ i el punt $P$

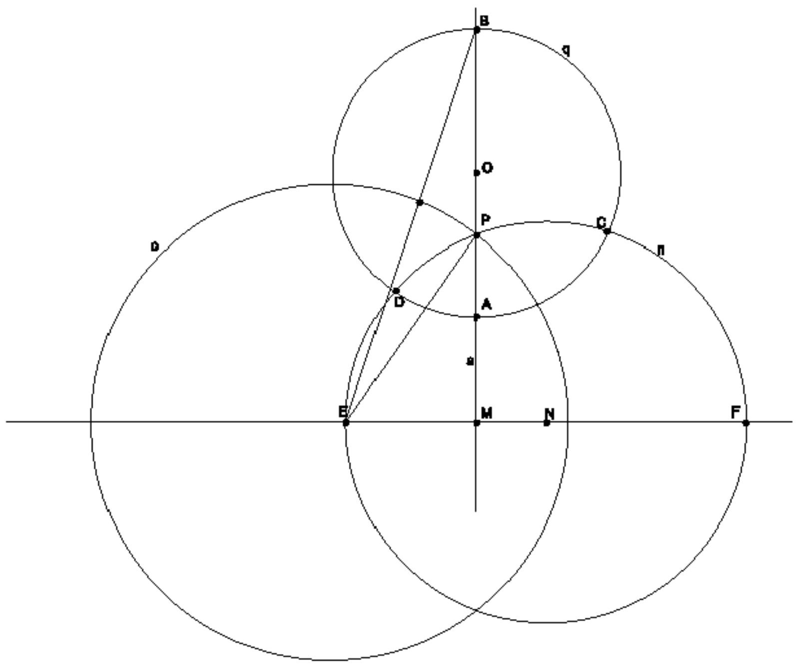


FIGURA 22

passa al punt $B$ per mitjà de la semblança de centre $M$ i raó $\frac{PM}{AM}$. Veiem-ho.

$$AM \cdot \frac{PM}{AM} = PM \text{ i } A \text{ passa a } P$$

$$PM \cdot \frac{PM}{AM} = PM \cdot \frac{BM}{PM} \text{ i } P \text{ passa a } B.$$

Així tenim que $P$ és el centre hiperbòlic del segment $AB$. Ara ens falta construir tots els altres punts de la circumferència. Afirmem que la circumferència euclidiana $q$ de centre el punt mig euclidià $O$ del segment $AB$ i radi $OA$ és la circumferència hiperbòlica que estem buscant. Tracem aquesta circumferència. Observem que en aquesta construcció sempre estem a la part del pla euclidià on hem definit el model ja que el primer punt ($A$) el podem triar sempre amb coordenada $y$ més gran que la de $P$ i, per tant, $y > 0$. El segon punt ($B$) també té $y > 0$ ja que fem una semblança amb raó positiva i centre un punt de la recta de l'infinit. La circumferència euclidiana també està en el semiplà ja que hi té el centre i dos punts diametralment oposats.

Per tant, si provem que tots els punts de $q$ estan a la mateixa distància hiperbòlica de $A$ ja haurem provat que l'axioma tres es verifica.

Per provar que les distàncies són iguals provarem que els punts diametralment oposats en el sentit hiperbòlic es poden portar a $A$ i $B$ per mitjà d'un moviment hiperbòlic.

Construïm el punt $P_1$ simètric de $P$ respecte la recta $r$. $P_1$ i $P$ són inversos respecte la circumferència $q$. Provem-ho.

Per construcció tenim les igualtats: $OP = OM - PM$, $OP_1 = OM + MP_1 = OM + PM$ d'on $OP \cdot OP_1 = OM^2 - PM^2$ i $OM = \frac{1}{2}(AM + BM)$

ja que $2 \cdot OM = BM + (BM + OA + OB)$. D'aquí i de que $\frac{BM}{PM} = \frac{PM}{AM}$ tenim que $PM^2 = BM \cdot AM$. Ara podem escriure la igualtat $OP \cdot OP_1 = OM^2 - PM^2 = \frac{1}{4}(BM - AM)^2$ però per ser $OB = \frac{1}{2}(BM - AM)$ tenim finalment que $OP \cdot OP_1 = OA^2$, és a dir, $P$ i $P_1$ són inversos respecte $q$.

Construïm la inversió que ens permetrà afirmar que $q$ és una circumferència hiperbòlica.

Tracem una circumferència euclidiana $n$, que passa per $P$ i $P_1$ i té el centre, $N$, a la recta $r$. $q$ i $n$ es tallen en dos punts, que podem designar per $C$ i $D$, i $n$ talla $r$ també en dos punts, $E$ i $F$. (fig. 22) Tracem la circumferència $o$ amb radi $EP$ i centre $E$. $o$ serà la circumferència des de la que farem la inversió que ens portarà $CP$ a $AP$ i $DP$ a $BP$. Les circumferències $o$ i $q$ són ortogonals ja que estem en la situació del teorema 3.5 perquè $P$ i $P_1$ són inversos respecte $q$. Llavors pel teorema 3.6 tenim que $q$ és invariant respecta la inversió donada per $o$.

La circumferència $n$ es transforma per la inversió en la recta que passa per $P$ i $P_1$ ja que pel teorema 3.2 per ser $n$ una circumferència que passa pel centre d'inversió s'ha de convertir en una recta que no hi passa però, a més, els punts $P$ i $P_1$ han de ser fixos per ser també de la circumferència que dóna la inversió.

Finalment tenim que el punt $C$ es transforma en l'$A$; per ser $D$ de les circumferències $q$ i $n$ i la circumferència $q$ invariant respecte la inversió de $o$, $D$ s'ha de transformar en un punt de $q$ i de la recta que es transforma en $n$ i aquest veiem que només pot ser $A$. De la mateixa manera, tenim que el punt $D$ passar a ser el punt $B$ i com que $P$ és fix tenim que $PC$ passa a $PA$ i $PD$ a $PB$ tal com volíem.

Així queda vist l'axioma 3.

**Axioma 4.** *Tots els angles rectes són iguals.*

Sabem que l'afirmació és certa en el cas euclidià i en aquest model els angles es poden pensar igual que els angles euclidians per tant, tenim que tots els angles rectes són iguals.

Veiem que els angles es poden pensar com a angles euclidians. Per fer-ho utilitzarem que qualsevol angle es pot escriure a partir de la suma finita o infinit, en forma de límit, dels angles $w$, $\frac{1}{2}w$, $\frac{1}{4}w$, $\frac{1}{8}w$, $\frac{1}{16}w$,... si $w$ denomina l'angle recte i veurem que en tots aquests angles la magnitud euclidiana és la mateixa que la hiperbòlica.

Pel cas de l'angle recte, $w$, tracem una recta hiperbòlica $k$, en forma de semicircumferència i centre en el punt $M$. Tracem la perpendicular $s$ a $r$ que passa per $M$. $s$ talla $k$ en un punt $A$, i forma quatre angles (fig. 23) que són rectes ja que són tots iguals, tant si els pensem com a euclidians com a hiperbòlics. La seva igualtat es desprén del fet que podem transformar l'un en l'altre a partir de moviments hiperbòlics. Així, per exemple, podem portar $\angle 1$ a $\angle 2$ i $\angle 3$ a $\angle 4$ a partir d'una simetria respecte $s$ i $\angle 1$ a $\angle 3$ i $\angle 2$ a $\angle 4$ a partir de la inversió respecte $k$.

Provem que per l'angle $\frac{1}{2}w$ també es verifica. Tracem pel punt $B$ d'intersecció de $k$ amb $r$ la recta hiperbòlica $n$ de centre $B$ i radi $AB$. Aquesta divideix l'angle 1 en dos que en el sentit euclidià són iguals, és a dir, valen $\frac{1}{2}w$. Pel cas hiperbòlic també valen el mateix ja que podem portar l'un a l'altre a partir de la inversió respecte $n$.

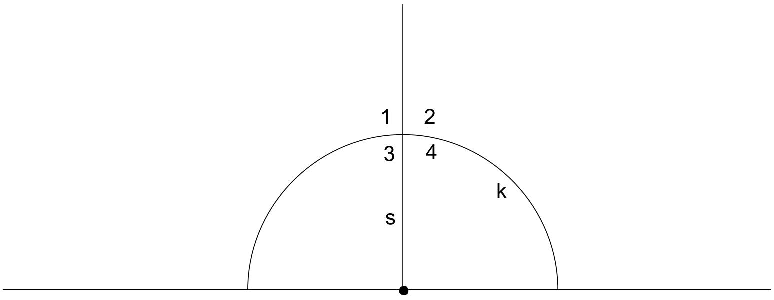


FIGURA 23

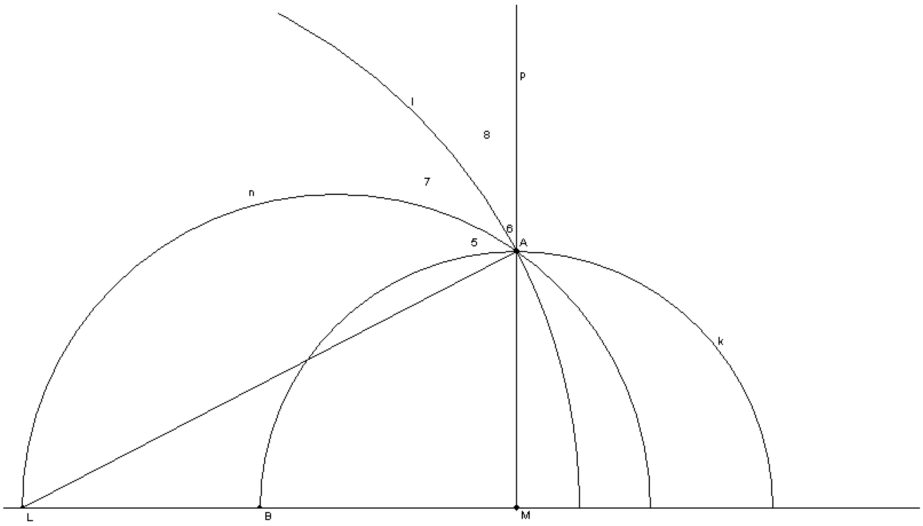


FIGURA 24

Per un procés anàleg, traçant la recta hiperbòlica $l$ i considerant-la com a circumferència d'inversió, tenim que els angles 7 i 8 són iguals tant en el sentit hiperbòlic com en l'euclidià i cada un és la meitat de l'angle 6, és a dir, valen $\frac{1}{4}w$. (fig. 24) Reiterant aquest procés obtenim que tots els angles d'amplitud $\frac{1}{2^n}w$ són equivalents i la seva magnitud és la mateixa tant si la pensem en el sentit euclidià com en l'hiperbòlic.

**Axioma 5.** *Existeixen una recta $r$ i un punt $P$ que no pertany a la recta tals que per $P$ passen almenys dues rectes que no tallen $r$.*

Fixem una recta $s$, perpendicular a $r$ qualsevol i un punt $P$ exterior a $s$. Des d'aquest punt podem traçar, almenys, dues rectes, de fet infinites, que no tallen $s$. Una d'elles és la recta perpendicular a $r$ que passa per $P$ i l'altra pot ser, per exemple, la semicircumferència que passa per un punt de la recta de l'infinit del mateix costat del semiplà que conté $P$ respecte la recta $s$ i a més, si fem la projecció a la recta de l'infinit del punt $P$ aquest punt que triem està entre la projecció de $P$ i el peu de la perpendicular $s$, i té el centre a la recta de l'infinit.

Observem que tenim que hi ha infinities paral·leles ja que hi ha infinits punts que compleixen la condició anterior però veurem que només hi ha dues paral·leles segons la definició.

Seran paral·leles les rectes que es tallin en el punt de l'infinit. En aquest cas les paral·leles són l'altra recta perpendicular a $r$ (es talla a l'infinit amb $s$ en el mateix sentit que en el euclidià) i la semicircumferència que passa pel peu de la recta $s$, ja que aquest punt és un punt de la recta de l'infinit.

Per provar l'axioma no és necessari provar més casos però ens podem convèncer fàcilment de que per les rectes que són semicircumferències també és cert. Tal com ja vam provar pel cas general, si es compleix l'axioma per una recta i un punt exterior a aquesta es compleix per a qualsevol altra parella de recta i punt i a més no podem trobar només dues rectes que no la tallen sinó que en podem trobar infinites.

Hem trobat una recta i un punt exterior pel que hi passa més d'una recta que no la talla, per tant, queda l'axioma provat i així tenim que el model del semiplà amb les nocions de recta i longitud que hi ha definides és un model de la Geometria Hiperbòlica i, per tant, el podem utilitzar per estudiar-la.

Provem que les corbes que hem definit com a rectes hiperbòliques ens donen la distància entre dos punts que hi pertanyen.

Estudiem primer el cas de les semirectes euclidianes perpendiculars a la recta de l'infinit.

Suposem que $s$ és una d'aquestes rectes i que $A$ i $B$ són dos punts de $s$. Volem veure que el segment de la recta $s$ que uneix $A$ i $B$ ens dóna la distància hiperbòlica entre $A$ i $B$, és a dir, tota altra corba que uneix $A$ i $B$ té longitud hiperbòlica més gran.

Suposem que $\gamma$ és una altra corba que uneix $A$ i $B$ i que $a$ i $b$ són dues rectes paral·leles a la recta de l'infinit que tallen el segment $AB$ en els punts $C$ i $D$, respectivament. Tenim que $a$ i $b$ també han de tallar $\gamma$, en els punts $E$ i $F$. (fig. 25)

Com que $a$ i $b$ són arbitràries si provem que la longitud hiperbòlica de $CD$ és menor que la de $EF$ llavors ja tindrem que $s$ és una recta hiperbòlica. Pel que hem vist la longitud hiperbòlica de $CD$ ve donada per $\frac{CD}{y}$ on $CD$ és la longitud euclidiana del segment i $y$ és la distància euclidiana de $CD$ a $r$ i la longitud hiperbòlica de $EF$ ve donada per $\frac{EF}{y'}$ on $EF$ és la longitud euclidiana de l'arc $EF$ i $y'$ la distància euclidiana de $EF$ a $r$. Observem que $y$ i $y'$ són iguals ja que la seva magnitud està definida a partir de la distància entre dues rectes paral·leles (els punts dels arcs $CD$ i $EF$ que ens donen la distància a $r$ són un dels extrems) i a la Geometria Euclidiana es compleix que rectes paral·leles són equidistants.

Per altra banda, tenim que la longitud euclidiana de $CD$ és menor que la de $EF$, no poden ser sempre iguals ja que en aquest cas $A$ i $B$ serien iguals, per ser $a$ i $b$ arbitràries.

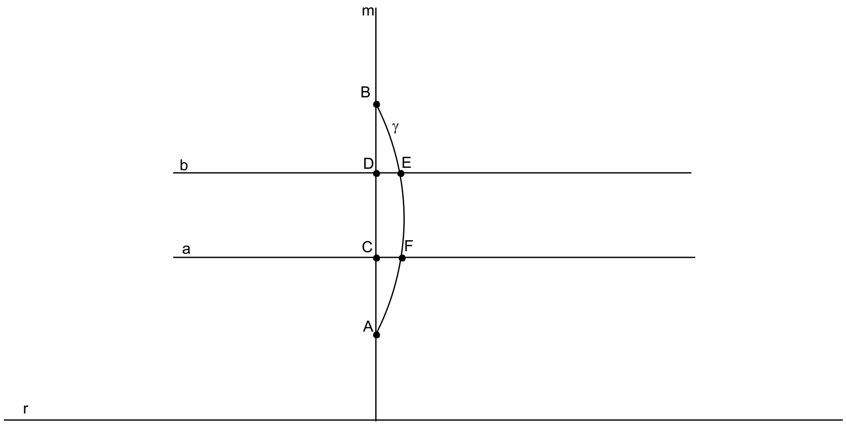


FIGURA 25

D'aquí obtenim que la longitud hiperbòlica de $A$ a $B$ és menor si recorrem $s$ que si recorrem $\gamma$. Com que $\gamma$ és una corba arbitrària obtenim que la distància entre $A$ i $B$ ens ve donada per la recta $s$ que, per tant és una recta hiperbòlica.

Provem que les semicircumferències de centre un punt de la recta $r$ són rectes hiperbòliques. Per veure-ho utilitzarem que les inversions conserven les distàncies, per tant, si dos punts estan units per un arc i aquest dóna la distància entre els punts l'arc que obtinguem en fer una inversió també donarà la distància entre els dos punts inversos i aquesta distància serà la mateixa.

Suposem que $k$ és una semicircumferència de centre un punt de $r$ i que la circumferència que determina talla $r$ en els punts $A$ i $B$. Suposem, a més, que $q$ és una circumferència que té $A$ com a origen i que talla $k$ en els punts $M$ i $N$. Considerem $q$ com a la circumferència respecte la que fem una inversió. La inversió de $k$ respecte $q$ ens donarà una recta (teorema 3.2). Aquest recta passa per $M$ i $N$ per ser $M$ i $N$ punts de $q$ i, per tant, fixos, però llavors la recta és perpendicular a $r$ i sabem que és també una recta hiperbòlica. D'aquí tenim que són rectes hiperbòliques les rectes perpendiculars a $r$ i les semicircumferències de centre un punt de $r$.

Per veure que cap altra corba pot ser considerada com a recta hiperbòlica segons la noció de longitud i de manera que la minimitzi entre dos punts qualsevol. Provarem que donats dos punts no pot passar que una altra corba que els uneixi també en doni la distància, és a dir, donats dos punts hi ha una única recta hiperbòlica que els uneix. Com que a l'axioma 1 hem vist que per a qualsevol parell de punts podem trobar una (i només una) semicircumferència amb centre a $r$ o recta perpendicular a $r$ que els uneix tindrem que no hi ha cap altre corba que pugui ser considerada com a recta.

Suposem que $A$ i $B$ són dos punts tals que es poden unir a partir d'una recta perpendicular a $r$. Els altres casos es poden reduir a aquest a partir d'una inversió. Suposem que $l$ i $l'$ són dues rectes hiperbòliques que uneixen

$A$ i $B$ i que $l$ és la perpendicular a $r$. Sabem que $l'$ ha de coincidir amb $l$ entre $A$ i $B$ ja que en demostrar que les perpendiculars a $r$ són rectes hiperbòliques hem vist que qualsevol altra corba que uneixi $A$ i $B$ (si $A$ i $B$ estan en aquesta posició) no en dóna la distància i ara estem suposant que $l'$ és una recta hiperbòlica que passa per $A$ i $B$ i, en particular, ha de donar la distància entre $A$ i $B$.

Suposem doncs, que existeix un punt $C$ de $l'$ que no pertany a $l$. Suposem també que es compleix que $B$ està entre $A$ i $C$, en el sentit que si recorrem $l$ des de $A$ en la direcció que hi ha $C$ trobem primer el punt $B$. La semicircumferència que passa per $A$ i $C$ i té centre $r$ és una recta hiperbòlica que passa per $A$ i $C$ però no per $B$, ($B$ està a la perpendicular respecte $r$ que passa per $A$) per tant, no coincideix amb $l'$ però abans hem vist que hi ha una única recta que passa per dos punts fixats. Perquè $l$ i $l'$ fossin dues rectes diferents que uneixen $A$ i $B$ hauríem de tenir que $l'$ minimitza la longitud entre $A$ i $C$, cosa que no passa ja que $l'$ entre $A$ i $C$ no coincideix amb la recta hiperbòlica, semicircumferència euclidiana amb centre $r$, que sí que la minimitza.

Així doncs, no hi ha cap altra corba que ens doni la distància entre els punts que uneix. Les rectes que havíem postulat com a rectes hiperbòliques per a aquest model, per la noció de longitud que hem fixat, compleixen que donen la distància entre els punts que uneixen i a més són les úniques corbes que ho compleixen.

3.1.5. *Relacions mètriques.* En aquest apartat trobarem fórmules explícites per als diferents conceptes que hem definit, com l'angle de paral·lelisme, la longitud d'un segment, l'àrea d'un triangle o la circumferència i definirem nous objectes com l'equidistant o l'horocicle, és a dir, construirem a la Geometria Hiperbòlica aquells objectes i relacions mètriques que necessitem tenir definides per conèixer més el funcionament d'aquest model i poder arribar al nostre objectiu, a fer les construccions amb *Sketchpad*.

Primer de tot ens cal definir la raó doble entre quatre punts del pla complex.

*Raó doble*. A partir d'ara seguirem considerant el semiplà de Poincaré com la regió del pla complex amb els punts amb segona coordenada positiva.

**Definició 3.3.** *Definim la raó doble de quatre punts del pla complex com* $(u, v, s, t) = \frac{u-s}{u-t} : \frac{v-s}{v-t}$.

En la raó doble és important l'ordre dels punts ja que, per exemple, si $(u, v, s, t) = \lambda$ llavors $(v, u, s, t) = \frac{1}{\lambda}$ i $(u, v, t, s) = \frac{1}{\lambda}$.

Pel cas en que un dels quatre punts sigui el punt de l'infinit aplicarem la fórmula anterior fent un procés formal de pas al límit.

Teníem que el producte d'un nombre parell d'inversions es pot escriure com $z' = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ i el producte d'un nombre senar d'inversions com $z' = \frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$. Tot i que aquestes expressions no estan definides en un punt direm que en el punt on no estan definides, és a dir, a $-\frac{\delta}{\gamma}$ o a $-\frac{\bar{\delta}}{\bar{\gamma}}$, la seva imatge val infinit. A més, direm que la imatge de infinit és $\frac{\alpha}{\gamma}$ (o $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\gamma}}$). D'aquesta manera tenim que el producte d'inversions és una aplicació bijectiva de $\mathbb{C} \cup \infty$. Pel cas en que $\gamma = 0$ prendrem com a imatge de $\infty$ el mateix $\infty$ ja que, de fet, no hi ha cap punt on no estigui definida l'aplicació.

La raó doble serà necessària per donar la fórmula de la longitud hiperbòlica d'un segment, per tant, n'haurem de conèixer algunes propietats.

**Teorema 3.9.** *Donada una transformació del tipus $z' = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ amb $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ i quatre punts $u$, $v$, $s$, $t$ diferents es compleix que $(u,v,s,t) = (u',v',s',t')$. I si la transformació és del tipus $z' = \frac{\alpha\overline{z}+\beta}{\gamma\overline{z}+\delta}$ amb $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ es compleix que $(u,v,s,t) = \overline{(u',v',s',t')}$.*

*Demostració.* Demostrarem primer el cas en què la transformació és $z' = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ i cap dels quatre punts és el de l'infinit.

Calculem les diferències en funció de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ i els punts donats. Tenim que

$$u' - s' = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma u+\delta)(\gamma s+\delta)}(u-s)$$

i anàlogament tindríem les altres tres diferències.

Per tant,

$$\frac{u'-s'}{v'-t'} = \frac{u-s}{u-t} \cdot \frac{\gamma t+\delta}{\gamma s+\delta}$$

i

$$\frac{v'-s'}{v'-t'} = \frac{v-s}{v-t} \cdot \frac{\gamma t+\delta}{\gamma s+\delta}$$

d'on obtenim que $(u,v,s,t) = (u',v',s',t')$ tal com volíem provar.

Pel cas en què un dels punts sigui infinit podem aplicar el mateix si tenim en compte que en aquest cas la definició de la raó doble dels quatre punts l'obtenim de fer el pas al límit.

Ens falta provar el cas en què la transformació donada és $z' = \frac{\alpha\overline{z}+\beta}{\gamma\overline{z}+\delta}$. Per provar aquesta part utilitzarem la primera i que la transformació que ens dóna $z'$ es pot pensar com a producte de dues transformacions $z' = \frac{\alpha z''+\beta}{\gamma z''+\delta}$ i $z'' = \overline{z}$. Si considerem els quatre punts donats tenim que la seva raó doble és la mateixa que la dels seus punts conjugats, per ser el mateix la suma, producte i invers de punts conjugats que el conjugat d'aquests. Així tenim $(u'',v'',s'',t'') = (\overline{u},\overline{v},\overline{s},\overline{t}) = \overline{(u,v,s,t)}$. Per altra banda, de la primera part del teorema tenim que es compleix la igualtat $(u',v',s',t') = (u,v,s,t)$ i ajuntant les dues igualtats obtenim el resultat que volíem. □

**Teorema 3.10.** *Suposem que $u$ i $v$ són dos puns del semiplà de Poincaré i que $s$ i $t$ són els punts d'intersecció de la recta hiperbòlica que passa per $u$ i $v$ amb la recta de l'infinit, $y = 0$. Llavors $(u,v,s,t)$ és un nombre real estrictament positiu.*

*Demostració.* Distingim dos casos, segons la recta hiperbòlica sigui una recta euclidiana o no. En el cas en que $u$ i $v$ tenen igual la primera coordenada la recta hiperbòlica que passa per aquests punts és una recta euclidiana perpendicular a la recta de l'infinit. Llavors el punt $t$ és $\infty$ i tenim que la raó doble dels quatre punts és $(u,v,s,\infty) = \frac{u-s}{v-s}$ però $u - s = i \cdot r_1$ i $v - s = i \cdot r_2$ són imaginaris purs per estar a sobre de la mateixa recta perpendicular a $y = 0$, és a dir, per tenir igual la part real. Llavors es compleix que $(u,v,s,t) = \frac{r_1}{r_2}$.

Si no, $u$ i $v$ estan a sobre d'una semicircumferència amb centre a $y = 0$ i llavors $s$ i $t$ són punts de la recta $y = 0$. Podem escriure els nombres complexos $u-s$ i $u-t$ en forma polar de manera que ens queda $u-s = r_1 e^{i\theta_1}$ i $u - t = r_2 e^{e\theta_2}$ amb $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ per ser l'angle $\angle sut$ un angle recte. Si fem el primer quocient que ens demana la raó doble tenim que $\frac{u-s}{u-t} = \frac{r_1}{r_2} e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Anàlogament pel segon quocient tenim $\frac{v-s}{v-t} = \frac{r_3}{r_4} e^{-i\frac{\pi}{2}}$ si $r_3$ i $r_4$ són el mòdul de $v - s$ i $v - t$ respectivament. Ajuntant les dues igualtats obtenim que la raó doble $(u, v, s, t) = \frac{r_1}{r_2} : \frac{r_3}{r_4}$ que també és un nombre real positiu. □

*Longitud de segments.* Afirmem que la longitud d'un segment que uneix els punts $u$ i $v$ ve donada per:

$$\rho(u, v) = |\ln(u, v, s, t)|.$$

Observem que la longitud d'un segment amb extrems $u$ i $v$ és la distància entre els punts $u$ i $v$, per tant, aquesta és la fórmula hiperbòlica de la distància.

Els punts $s$, $t$ que hi ha a la fórmula de la distància que hem donat són els mateixos que els que hem definir al teorema 3.10. Per veure que la fórmula que hem donat per la distància és realment una distància cal provar, primer de tot, que està ben definida i que compleix la definició de distància.

**Teorema 3.11.** *La longitud d'un segment hiperbòlic d'extrems $u$, $v$ està donada per $\rho(u, v) = |\ln(u, v, s, t)|$ on $s$, $t$ són els punts d'intersecció de la recta hiperbòlica que passa per $u$ i $v$ i la recta de l'infinit.*

*Demostració.* Provem que està ben definida. Per poder fer el logaritme d'un nombre cal que aquest sigui real i estrictament positiu. Però el teorema 3.10 afirma que la raó doble de quatre punts tals que els dos primers són arbitraris i els altres dos s'obtenen de la intersecció de la recta hiperbòlica que passa per aquests dos punts i la recta de l'infinit, com és aquest cas, és un nombre real estrictament positiu. Així doncs, la fórmula està ben definida.

Ara falta demostrar que compleix el principi (2) que hem imposat a l'apartat 3.1.2 pel cas en què la corba és un segment hiperbòlic. Per veure-ho distingirem dos casos, segons el segment pertanyi a una recta perpendicular a la recta de l'infinit o no.

Suposem primer que la recta hiperbòlica que uneix els punts $u$ i $v$ és una semirecta euclidiana perpendicular a la recta de l'infinit. Considerem els punts $u'$ i $v'$ que estan a aquesta mateixa recta i que compleixen que $\frac{su}{sv} = \frac{su'}{sv'}$ on $s$ és el punt d'intersecció de la recta que passa per $u$ i $v$ i la recta de l'infinit i $sv$ és la longitud euclidiana entre els punts $s$ i $v$.

Si ara considerem la semblança amb centre $s \in r$ i raó $\frac{su}{su'}$ tenim que el segment $u'v'$ es transforma en el segment $uv$ i per ser les semblances amb centre un punt de $r$ i raó positiva isometries del pla hiperbòlic tenim que la longitud hiperbòlica dels dos segments és la mateixa. Per tant, podem afirmar que la longitud hiperbòlica del segment $uv$ depèn de la relació $\frac{su}{sv}$ ja que aquesta proporció és la mateixa que la determinada per $u'v'$, $\frac{su'}{sv'}$, per construcció de $u'$ i $v'$.

Així doncs, la longitud hiperbòlica del segment $uv$, que denotarem per $\rho(u, v)$ ha de ser funció de $\frac{su}{sv}$.

Volem provar que $\rho(u, v) = |\ln(u, v, s, t)|$. Provem si aquesta fórmula ens dóna la funció de $\frac{su}{sv}$ que estem buscant.

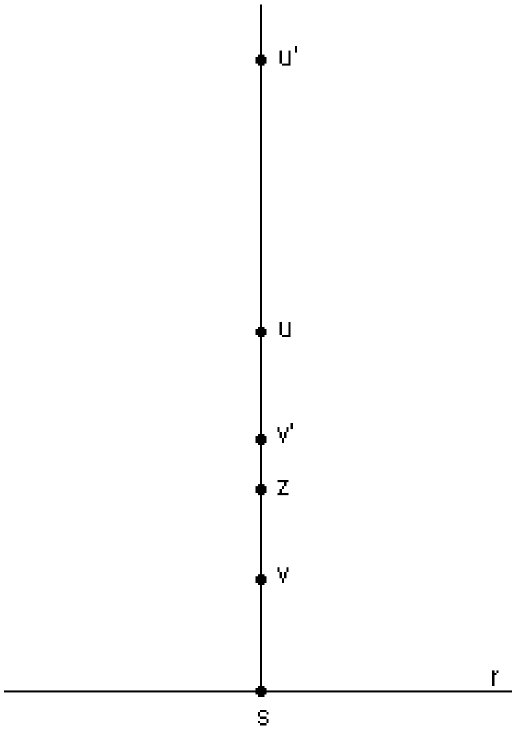


FIGURA 26

Com que $u$ i $v$ estan a una recta perpendicular a $r$ tenim que el punt $t$ val $\infty$. En aquest cas la raó doble $(u, v, s, t)$ queda: $(u, v, s, t) = (u, v, s, \infty) = \frac{u-s}{v-s}$ però $u - s$ és la distància euclidiana entre $u$ i $s$ perquè aquests dos punts estan sobre una recta perpendicular a $y = 0$, la recta de l'infinit. Anàlogament per $v - s$. D'aquí podem escriure, en aquest cas, $\rho(u, v) = |\ln(\frac{su}{sv})|$.

Ens falta provar que aquesta expressió compleix el principi (2) de l'apartat 3.1.2 pel segment hiperbòlic que uneix $u$ i $v$.

Volem veure que $\frac{\sigma}{y'} < \rho(u, v) < \frac{\sigma}{y}$ on $\sigma$ és la longitud euclidiana, $y$ la distància mínima entre la recta de l'infinit i el segment, $y'$ la distància màxima i $\rho(u, v)$ la longitud hiperbòlica que hem definit.

Pel cas en què els punts $u$, $v$ estiguin a la mateixa perpendicular respecte $r$, si substituïm cada terme de l'expressió pel seu valor obtenim

$$\frac{vu}{su} < |\ln(\frac{su}{sv})| < \frac{vu}{sv}.$$

Estudiem cada desigualtat per separat:

De la segona desigualtat, $|\ln(\frac{su}{sv})| < \frac{vu}{sv}$ fent el canvi de variable $\frac{vu}{sv} = x$, aplicant l'exponencial i tenint en compte que $su = sv + vu$ obtenim $(1+x) < e^x$ que, per l'anàlisi, sabem que és cert.

Per l'altra desigualtat fent el canvi de variable $\frac{sv}{su} = x$ aplicant l'exponencial i tenint en compte que $vu = su - sv$ obtenim $e^{(1-x)} < (\frac{1}{x})$ que, per l'anàlisi, sabem que és cert.

Observem que si en comptes de calcular $\rho(u, v)$ calculéssim $\rho(v, u)$ també tindríem que es compleixen les desigualtats. Llavors hauríem de provar

$$\frac{vu}{su} < |\ln(\frac{sv}{su})| < \frac{vu}{sv}.$$

Tenint en compte que ara $\ln(\frac{sv}{su}) < 0$ i fent canvis da variable semblants als del cas anterior obtenim les desigualtats.

Així doncs, es compleix que pel cas en què $u$ i $v$ estiguin sobre una mateixa recta perpendicular a la recta de l'infinit la fórmula verifica els principis demanats per ser longitud.

Aquesta expressió també compleix que la longitud d'un segment que obtenim a partir de la suma de d'altres segments és la suma de les longituds de cada un d'aquests altres segments. Suposem que $z$ és un punt que pertany al segment determinat per $u$ i $v$. Llavors es compleix que $\frac{su}{sv} = \frac{sz}{sv} \cdot \frac{su}{sz}$ i si apliquem logaritmes a la igualtat obtenim que: $\ln(\frac{su}{sv}) = \ln(\frac{sz}{sv}) + \ln(\frac{su}{sz})$ però cada un dels quocients és més gran que 1 per la disposició dels punts, per tant, el seu valor és el mateix amb o sense valor absolut i obtenim:

$$|\ln(\frac{su}{sv})| = |\ln(\frac{sz}{sv})| + |\ln(\frac{su}{sz}))|$$

que ens dóna $\rho(u, v) = \rho(u, z) + \rho(z, v)$, el que havíem de provar.

El fet de posar valor absolut és per aconseguir que si considerem el segment $vu$ en comptes de l'$uv$ ens doni el mateix valor; perquè la distància no depengui de la direcció.

Suposem que els punts $u$, $v$ no estan a una mateixa recta perpendicular a la de l'infinit. Llavors estan sobre una semicircumferència euclidiana, $q$, amb centre $M$ a la recta $r$ i que talla a $r$ en els punts $s$ i $t$.

Per calcular la longitud entre els punts $u$ i $v$ primer de tot trobarem l'expressió per calcular la longitud entre els punts $z$ i $u$ (veure fig. 27). Així doncs, considerem la recta perpendicular a $r$ que passa per $M$ i la intersecció d'aquesta amb la semicircumferència $q$, $z$.

Suposem que $u$ i $v$ són punts de l'arc comprés entre $z$ i $t$ de $q$.

Tracem la recta que passa per $t$ i $u$ i considerem $u'$ com la intersecció d'aquesta amb la recta que passa per $M$ i $z$. $u'$ sempre existirà ja que la recta per $t$ i $u$ no pot ser paral·lela a la recta per $M$ i $z$ per ser $t$, $u$ i $z$ punts d'una mateixa circumferència.

Si ara considerem la circumferència $q'$ de centre $t$ i radi $tz$ podem provar que el segments hiperbòlics $zu$ i $zu'$ es poden obtenir un de l'altre a partir de la inversió respecte $q'$. En efecte, $z$ és un punt de la circumferència d'inversió, per tant, és fix en fer la inversió i igualment el punt diametralment oposat a $z$ respecte $q$, $z'$. Pel teorema 3.2 tenim que la inversió d'una circumferència que passa pel centre de la inversió és transforma en una recta que no passa pel centre d'inversió. En aquest cas, com que els punts $z$ i $z'$ són fixos i pertanyen a la circumferència $q$, es compleix que $q$ es transforma per la inversió amb la recta $Mz$ i, per tant, el punt $u$ passa a ser el punt $u'$ per estar aquests dos punts també sobre la recta que passa per $t$ (el centre de la inversió).

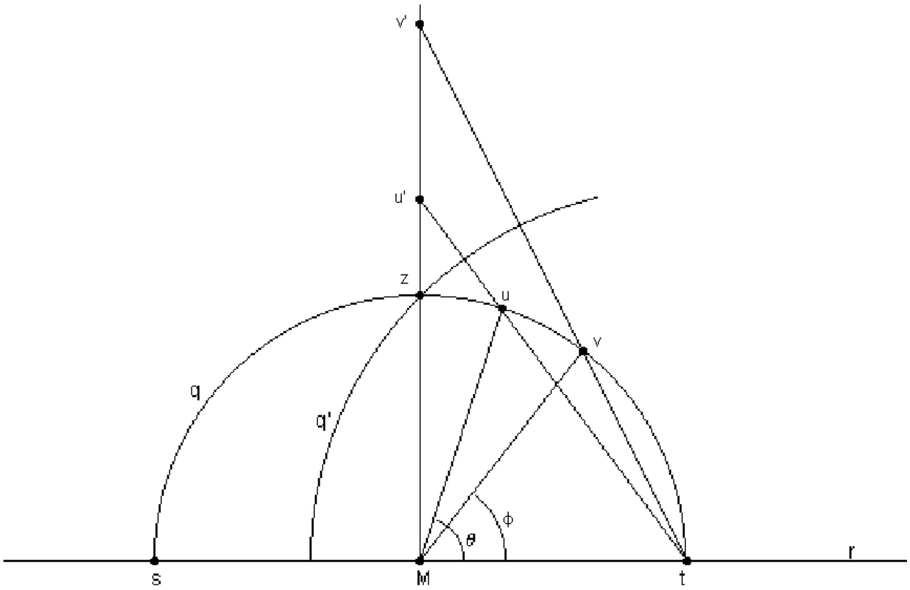


FIGURA 27

Així doncs, hem construït un segment $u'z$ de la mateixa longitud hiperbòlica que el segment $uz$ però amb la diferència que l'$u'z$ està sobre una recta perpendicular a la recta de l'infinit i en aquesta situació ja tenim la fórmula de la longitud.

Ara podem fer la mateixa construcció pel punt $v$, és a dir, podem construir un $v'$ a sobre la recta $Mz$ de manera que per la inversió respecte $q'$ el punt $v$ es transformi en $v'$. (fig. 27)

Per calcular la longitud hiperbòlica del segment $uv$ calcularem la del segment $u'v'$, que és la mateixa.

$$\rho(u,v) = \rho(u',v') = \rho(v',z) - \rho(u',z) = |\ln(\frac{Mv'}{Mz})| - |\ln(\frac{Mu'}{Mz})|. \tag{1}$$

Ens agradaria poder ajuntar els dos logaritmes en un i que la fórmula no depengués dels punts auxiliars $u'$, $v'$, $z$. Per aconseguir-ho observem que hem provat que els quocients del tipus de $\frac{Mv'}{Mz}$ són la raó doble $(v', z, M, \infty)$ i tenim que el punt $z$ sempre estarà per sota dels punts $u$ i $v$ perquè suposem que els punts $u$ i $v$ estan al mateix arc determinat per $t$ i $z$ de la circumferència $q$. Per tant, els dos logaritmes tindran el mateix signe. Així podem ajuntar el valor absolut i els logaritmes. Per treure la dependència dels punts $u'$, $v'$ i $z$ ens fixarem amb els angles $\theta$ i $\phi$ de la figura 27.

El triangle $uMt$ és isòsceles (en el sentit euclidià) ja que els costats $Mu$ i $Mt$ tenen la mateixa longitud euclidiana per ser radis d'una mateixa circumferència $q$. Llavors l'angle $Mtu$ val $\frac{\pi-\theta}{2}$ i, per ser $Mz$ un altre radi de $q$, la raó $\frac{Mu'}{Mz} = \frac{Mu'}{Mt} = \tan(\frac{\pi-\theta}{2}) = \cot(\frac{\theta}{2})$.

Anàlogament per l'angle $\phi$ obtenim que l'angle $\angle Mtv = \frac{\pi-\phi}{2}$ i $\frac{Mv'}{Mz} = \frac{Mv'}{Mt} = \tan(\frac{\pi-\phi}{2}) = \cot(\frac{\phi}{2})$.

Si ara substituïm aquests valors a l'equació 1 obtenim:

$$\rho(u,v) = |\ln(\cot(\frac{\theta}{2}) : \cot(\frac{\phi}{2}))|. \tag{2}$$

Amb l'expressió (2) ja no tenim dependència de $z$, $u'$ i $v'$ perquè els angles $\theta$ i $\phi$ els podem determinar directament només amb els punts $u$ i $v$ i la circumferència $q$. Ara ens falta comprovar que l'expressió (2) és la mateixa que l'expressió de l'enunciat del teorema. Si provem això ja haurem acabat la demostració perquè en aquest cas tenim que es compleixen els principis imposats a 3.1.2 per complir-se als segments hiperbòlics verticals.

Però que les dues expressions són la mateixa també és immediat de veure ja que al teorema 3.10 hem vist que la raó doble de quatre punts alineats situats com a les hipòtesis es pot calcular a partir d'un producte que és exactament el mateix que tenim ara, la cotangent de l'angle que obtenim a partir de $u$ i la tangent del que obtenim a partir de $v$. □

**Nota:** Sovint es considera $\rho(u,v) = R \cdot |\ln(u,v,s,t)|$ on $R$ és una constant real positiva arbitrària com a fórmula per la longitud d'un segment hiperbòlic. Aquesta $R$, que en un principi és arbitrària, es fixa en determinar quin segment té longitud 1 i està relacionada amb la curvatura del model. Nosaltres hem de considerar $R = 1$ pels principis que hem imposat que ha de complir la longitud, que per qualsevol altra $R$ no es compleixen. L'elecció de la $R$ és equivalent a l'elecció de la base del logaritme que, en el nostre cas, per tenir coherència amb la longitud que hem definit, només pot ser en base $e$.

*Angle de paral·lelisme.* Ara que ja tenim una fórmula explícita per la longitud dels segments i també sabem (teorema 2.5) que l'angle de paral·lelisme només depèn de la distància del punt a la recta podem donar una fórmula explícita per a aquest. Observem que el teorema 2.5 hem vist que és cert per la Geometria Hiperbòlica en general, sense pensar en cap model en concret, i que el model del semiplà de Poincaré que estem considerant és un model de la Geometria Hiperbòlica, per tant, també és cert per aquest model, i el podem aplicar.

La fórmula que donarem per l'angle de paral·lelisme és:

$$\Pi(x) = 2.\arctan(e^{-x})$$

i en el següent teorema demostrarem que és vàlida si $x$ és la distància del punt $P$ a la recta $a$.

**Teorema 3.12.** *L'angle de paral·lelisme està donat per la fórmula* $\Pi(x) = 2.\arctan(e^{-x})$

*Demostració.* Per provar el teorema n'hi haurà prou en veure que és cert per un punt $P$ i un recta $a$ concretes que estiguin a distància $x$ ja que la funció $\Pi(x)$ no depèn del punt $P$ ni de la recta $a$.

Així doncs, triem la recta hiperbòlica que ens vagi millor pels càlculs. Considerem que $a$ és una semicircumferència de radi euclidià igual a 1, i centre $M$ a la recta de l'infinit, $y = 0$. Per triar el punt $P$ tracem la recta

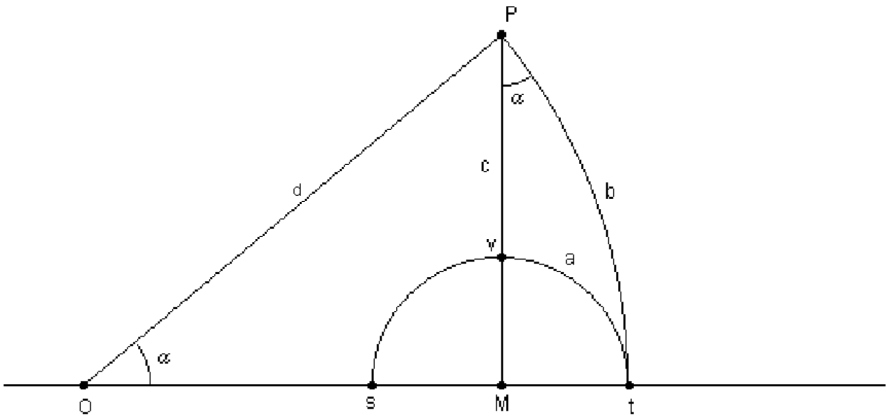


FIGURA 28

perpendicular a $y = 0$, $c$, que passa per $M$ i l'elegim a sobre d'aquesta recta. (fig. 28)

Seguint la notació de la figura 28 tenim que $v$ és el punt d'intersecció de la recta $c$ i $a$, $s$ i $t$ els punts de tall de la recta de l'infinit amb la recta $a$ i $O$ el centre de la circumferència tangent a $a$ que passa per $P$. Per la definició de longitud d'un segment hiperbòlic que hem donat podem afirmar que

$$x = \rho(P, v) = |\ln(P, v, M, \infty)| = |\ln(\frac{P-M}{v-M}) = |\ln(P-M)| \tag{3}$$

perquè suposem que el radi de la circumferència $a$ és 1. Calculem $P - M$.

Els dos angles que a la figura hem anomenat $\alpha$ són realment iguals perquè, de la Geometria Euclidiana, tenim que angles de costats perpendiculars són iguals i en aquest cas tenim dues parelles de costats perpendiculars ja que les rectes de l'infinit i la recta $c$ ho són i les rectes $d$ i la tangent a la circumferència pel punt $P$ a la circumferència $b$ també (aquestes dues són perpendiculars per ser el radi i la tangent d'una circumferència en el mateix punt).

Si ara considerem el triangle euclidià $\Delta POt$ tenim que aquest és isòsceles ja que té els costats $Ot$ i $OP$ iguals per ser radis de la mateixa circumferència d'on obtenim que $\angle OtP = \frac{\pi-\alpha}{2}$.

Observem que $P - M = \frac{P-M}{t-M}$ és la tangent de l'angle $MtP$ del triangle euclidià $MtP$ i que aquest angle sabem quan mesura ja que és el mateix angle que el $OtP$ que hem calculat. Així doncs, tenim que les igualtats següents són certes: $P - M = tg(\angle MtP) = tg(\angle OtP) = \frac{\pi-\alpha}{2} = \cot(\frac{\alpha}{2})$.

Si ara substituïm $P - M$ per $\cot(\frac{\alpha}{2})$ a l'expressió 3 obtenim que $x = |\ln(\cot(\frac{\alpha}{2}))|$ d'on obtenim que $\alpha = 2 \cdot \arctan(e^{-x})$ i $\alpha$ és l'angle de paral·lelisme. □

*Algunes fórmules de la trigonometria hiperbòlica.* Tal com hem vist, a la Geometria Hiperbòlica tenim una relació entre les longituds dels segments i la magnitud dels angles. Aquest fet ens permet afirmar que no existeixen

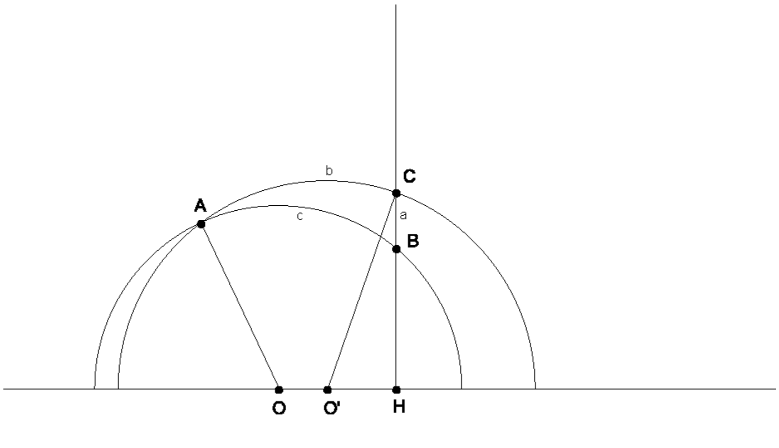


FIGURA 29

triangles semblants ja que si dos triangles tenen els angles iguals llavors, per aquesta relació, han de tenir les longituds dels costats iguals.

En aquest apartat donarem algunes de les fórmules de la trigonometria hiperbòlica en el model del semiplà de Poincaré.

Suposem que tenim un triangle amb vèrtexs $A$, $B$, $C$. A partir d'isometries podem posar el triangle de manera que un dels costats estigui sobre una recta perpendicular a la de l'infinit. Suposem que aquest costat és el $BC$ i que el peu de la perpendicular és el punt $H$. (fig. 29)

Amb la notació de la figura 29 i amb la fórmula de la longitud hiperbòlica tenim que

$$a = \ln(\frac{HC}{HB}).$$

A partir d'aquí podem obtenir l'expressió dels costats del triangle en funció dels angles i la relació entre els costats i els angles d'un triangle hiperbòlic. També donarem les expressions pel cas del triangle rectangle.

La longitud del costat $a$ ens permet posar-la com a paràmetre de les funcions cosh i sinh ja que aïllant $\frac{HC}{HB}$ obtenim que $e^a = \frac{HC}{HB}$ d'on resulta que:

$$\sinh a = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a}) = \frac{HC^2 - HB^2}{2HC.HB} i \cosh a = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) = \frac{HC^2 + HB^2}{2HC.HB}.$$

Si pensem els triangles $OBH$ i $O'CH$ com a triangles euclidians tenim que es compleix el teorema de Pitàgores i, per tant, que $HB^2 = OB^2 - OH^2 = OA^2 - OH^2$ i $HC^2 = O'C^2 - O'H^2 = O'A^2 - O'H^2$. Si ara considerem la suma $HC^2 + HB^2$ i apliquem el teorema del cosinus per al triangle euclidià $AOO'$ obtenim que $HB^2 + HC^2 = 2 \cdot OB \cdot O'C \cdot \cos \angle OAO' - 2 \cdot OH \cdot O'H$.

Per altra banda tenim que es verifiquen les següents igualtats d'angles: $\angle OAO' = \alpha$, $\frac{HB}{HC} = \sin\beta$, $\frac{HB}{O'C} = \sin\gamma$, $\frac{HB}{OH} = \tan\beta$ i $\frac{O'H}{HC} = \cot \angle CO'H = cot\pi - \gamma = -cot\gamma$. Aquestes igualtats es desprenen o bé directament de la trigonometria euclidiana o bé de que l'angle entre dues semirectes és el mateix que l'angle entre les dues perpendiculars. Per obtenir l'expressió de la longitud del costat $a$ en funció dels angles només cal substituir les igualtats anteriors a l'expressió que ja teníem del $\cosh a$. Així la fórmula final que obtenim és:

$$\cosh a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Aquesta expressió és coneguda com a segona llei del cosinus.

Per obtenir la dels altres costats només cal fer una permutació entre les longituds i els angles. L'expressió que havíem obtingut amb el sinus hiperbòlic també la podríem transformar per un procés semblant però també podem utilitzar que es compleix que $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$. Per obtenir una altra de les relacions bàsiques de la trigonometria hiperbòlica considerem el quocient següent, que és constant si canviem el costat i l'angle:

$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)^2 - \sin^2\beta\sin^2\gamma}}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

De l'expressió anterior obtenim la llei del sinus que afirma:

$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \frac{\sinh b}{\sin\beta} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma}.$$

També podem donar una relació entre els angles d'un triangle i els seus costats. Per tal d'obtenir-la considerem els productes $\cosh b \cdot \cosh c$ i $\sinh b \cdot \sinh c \cdot \cos\alpha$ que es poden posar en funció dels resultats anteriors. A partir de les igualtats que obtindríem podem restar el segon producte del primer i resulta que aquesta diferència és $\cosh a$. Així doncs només caldria aïllar $\cos\alpha$ per obtenir la següent expressió, coneguda com la primera llei del cosinus:

$$\cos\alpha = \frac{\cosh b\cosh c - \cosh a}{\sinh b\sinh c}.$$

Per obtenir les fórmules pel cas d'un triangle rectangle només cal posar que un dels angles val $\frac{\pi}{2}$. Totes les fórmules segueixen sent vàlides perquè han estat calculades en general. Destaquem, però, algunes de les fórmules més fonamentals:

$$\begin{gathered}
\sinh a = \sinh c\sin\alpha \\
\tanh a = \tanh c\cos\beta \\
\tanh a = \sinh b\tan\alpha \\
\cosh c = \cosh a\cosh b \\
\cosh c = \cot\alpha\cot\beta \\
\cosh a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}.
\end{gathered}$$

on hem considerat que, si suposem que tenim la mateixa notació que fins ara, l'angle recte és $\gamma$.

Finalment, cal comentar que si es comparen les fórmules obtingudes per la trigonometria hiperbòlica amb les que obtindríem amb la trigonometria esfèrica es pot observar que els resultats són molt semblants i que es pot passar de l'esfèrica a la hiperbòlica pensant que el radi de l'esfera és $i$. Per això, a vegades, es diu que la Geometria Hiperbòlica és la geometria d'una esfera de radi imaginari.

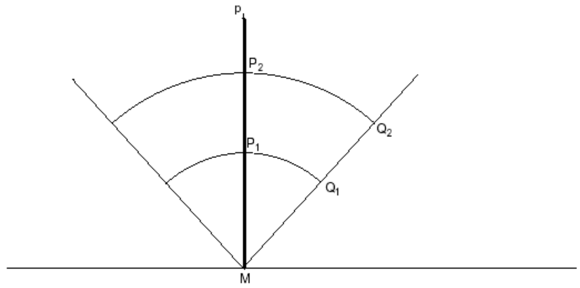


FIGURA 30. Equidistant

*Equidistant hiperbòlica.* Tal com ja vam observar, a partir del teorema 2.2.1 tenim que a la Geometria Hiperbòlica rectes paral·leles no són equidistants. Això ens fa estudiar quin és el lloc geomètric dels punts del pla hiperbòlic que equidisten d'una recta donada. És a dir, quina forma pren l'equidistant.

Afirmem que en el cas en què la recta hiperbòlica, $p$, sigui una recta perpendicular a la recta de l'infinit els punts que equidisten de $p$ una determinada distància formen dues semirectes euclidianes amb origen al peu de $p$. (fig. 30)

Per provar-ho només cal veure que cada un dels punts de la semirecta està a la mateixa distància de $p$. De fet, provarem que podem obtenir tots els punts de les dues semirectes a partir d'isometries. Fixat un punt d'una de les dues semirectes i traçada la perpendicular a $p$ per aquest punt podrem construir isometries que ens portin aquest punt a un altre de les semirectes i el punt d'intersecció a un altre de $p$. Com que la transformació serà una isometria es conservarà la distància entre els dos punts i també ens donarà la distància entre el punt i la semirecta ja que també es conservaran els angles.

Suposem que tenim una distància donada $d$. Tracem la recta hiperbòlica perpendicular a $p$ que passa per un punt qualsevol de $p$ que designem per $P_1$. Ara considerem un punt a distància $d$ que pertanyi a la recta hiperbòlica. Aquest punt, que designem per $Q_1$, sabem segur que existeix perquè hem provat que l'axioma 3 és cert per aquest model de la Geometria Hiperbòlica. Tracem la semirecta euclidiana amb origen al peu de $p$ que passa per $Q_1$ i la recta simètrica a aquesta respecte $p$. Afirmem que aquestes dues semirectes són l'equidistant. Podem transformar una semirecta en l'altre a partir d'una isometria de tipus (4) ja que hem construït la segona semirecta justament a partir d'una simetria respecte una recta perpendicular a $p$. Per tant, si una semirecta és equidistant l'altre també. Per provar que qualsevol altre punt $Q_2$ de la semirecta està a la mateixa distància, considerem la semblança amb centre $M$ i raó $\frac{MQ_2}{MQ_1}$. Aquesta transformació és una isometria, del tipus (2), que transforma $Q_1$ en $Q_2$ i els punt de $p$ en punts de $p$. Per tant, el punt $Q_2$, que és un punt arbitrari de la semirecta $q$, està a la mateixa distància que $Q_1$ de $p$. Així doncs, l'equidistant hiperbòlica d'una recta perpendicular a la recta de l'infinit està formada per dues semirectes euclidianes.

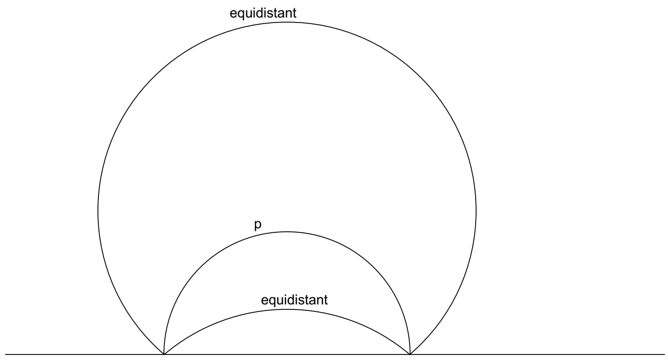


Figura 31. Equidistant

Pel cas en què la recta hiperbòlica no sigui una recta perpendicular trobarem l'equidistant a partir de considerar primer una inversió que ens porti la semicircumferència en una semirecta perpendicular. Amb aquesta nova situació traçarem l'equidistant i tornarem a la situació inicial per mitjà de la mateixa inversió. Això ho podem fer gràcies a que les inversions són isometries per aquest model.

Considerem una inversió que tingui el centre a la recta de l'infinit i que, a més, coincideixi amb un dels dos punts de tall de la recta hiperbòlica amb la recta de l'infinit. Si també considerem que la circumferència talli a la recta hiperbòlica obtindrem que la inversió de la recta hiperbòlica és la recta perpendicular a la recta de l'infinit que passa pel punt d'intersecció de la recta hiperbòlica amb la circumferència d'inversió. En aquesta situació ja podem traçar l'equidistant. Per retornar a la situació inicial apliquem la inversió, que per ser involutiva portarà la recta perpendicular a la hiperbòlica inicial. Les dues semirectes que formen l'equidistant passaran a ser un arc de circumferència euclidiana amb centre en un punt que no pertany a la recta de l'infinit. Això és perquè les inversions conserven els angles. L'angle entre les dues rectes euclidianes és diferent d'un angle recte, per tant, també ho ha de ser l'angle entre les dues circumferències. Si la circumferència que ens dóna l'equidistant tingués el centre a la recta de l'infinit llavors les dues circumferències serien tangents i es tallarien formant un angle recte.

Així doncs, tenim que l'equidistant o bé és una semirecta euclidiana amb origen a la recta de l'infinit i no perpendicular a aquesta o bé un arc de circumferència que té centre en un punt que no pertany a la recta de l'infinit.

*Horocicle*. Diem horocicle a la corba que obtenim en fer créixer arbitràriament el radi d'una circumferència una vegada n'hem fixat un punt. El radi el fem créixer a partir de desplaçar el centre per la recta perpendicular a la recta de l'infinit en una de les dues direccions possibles, o bé la direcció en la que no trobarà la recta de l'infinit o bé en la que ens acostem en el sentit euclidià a la recta de l'infinit. Si ens desplacem en el sentit en el que no trobarem la recta de l'infinit tenim que l'horocicle és una recta euclidiana paral·lela a la

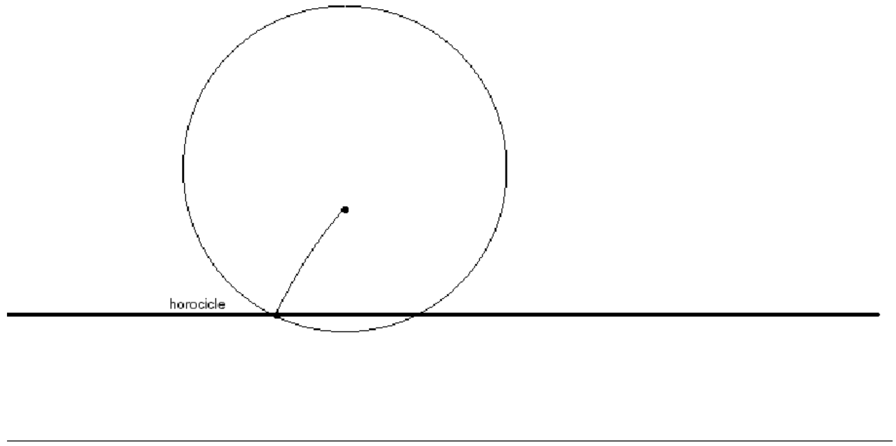


FIGURA 32. Horocicle

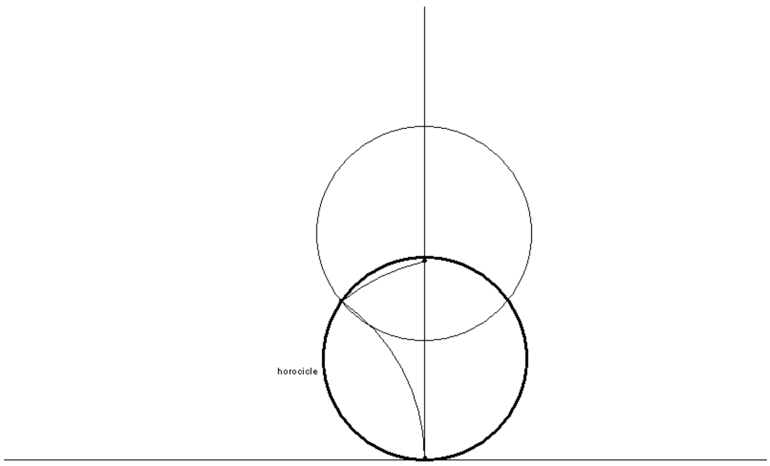


FIGURA 33. Horocicle

recta de l'infinit que passa pel punt fixat. Per veure-ho pensem euclidianament els punts del semiplà. Tenim un dels punts de la circumferència fixats, per tant, en desplaçar el centre cap a la direcció fixada arribarem a una situació en què el centre estarà per sobre d'aquest punt fixat. A partir d'aquí, com que el centre se seguirà desplaçant, la distància a aquest punt anirà augmentant, però per ser el punt fix i el radi a la mateixa perpendicular tindrem que la circumferència cada vegada serà de radi més gran i seguirà passant per aquest punt. Això, en el límit, ens dóna una recta euclidiana que passa pel punt fixat i és perpendicular a la recta que donava el radi. Però per ser el radi perpendicular a la recta de l'infinit tenim que l'horocicle és paral·lel a la recta de l'infinit. (fig. 32)

Si, en canvi, desplacem el radi en l'altra direcció ens queda que l'horocicle és una circumferència, en el sentit euclidià, tangent a la recta de l'infinit. (fig. 33)

Observem que si fem una inversió respecte a una circumferència amb centre a la recta de l'infinit a un horocicle com el de la figura 32 es transforma en un horocicle com el de 33 i que, a més, la circumferència euclidiana que descriu passa pel centre de la inversió. Això és directe a partir del teorema 3.1.

*Circumferència hiperbòlica.* En provar que l'axioma 3 es compleix en el model del semiplà de Poincaré hem donat un mètode per construir una circumferència hiperbòlica i hem vist que es pot construir com una circumferència euclidiana. La diferència la trobem amb què el centre de l'hiperbòlica i l'euclidiana no coincideixen. Hem provat, de fet, que donat un punt i una distància sempre podem construir una circumferència de centre el punt i radi la distància.

També és cert que donats dos punts sempre podem considerar-ne un com a centre i l'altre com a punt d'una circumferència hiperbòlica. Per provar que aquesta afirmació és certa només cal veure que podem transformar, per una inversió, el punt donat en un punt de la recta perpendicular a la recta de l'infinit. Si tenim això ja estem a la mateixa situació que en el cas que tenim el centre i el radi.

Si el punt donat ho compleix ja estem. Si no, només cal trobar una inversió que ho faci i que, a més, deixi el centre fix. Necessitem que la transformació sigui una inversió ja que aquestes són isometries i, per tant, ens asseguren que tant el punt donat com l'invers estan a la mateixa distància hiperbòlica del centre de la circumferència, si el centre és fix. Per construir aquesta inversió seguirem el mateix mètode que vam utilitzar en provar que per aquest model es compleix l'axioma 3, és a dir, tracem la circumferència euclidiana que passa pels dos punts donats i té el centre a la recta de l'infinit.

Considerem la recta que passa per un dels punts d'intersecció de la circumferència anterior amb la recta de l'infinit i el segon punt donat. Vam provar que la intersecció d'aquesta recta amb la recta perpendicular a la de l'infinit que passa pel primer punt donat (el centre) és un punt de la circumferència hiperbòlica que volem construir. Així doncs, tenim que donats dos punts sempre podem construir una circumferència hiperbòlica que passi per un d'ells i tingui el centre a l'altre.

Ens falta estudiar el cas en què tinguem tres punts no alineats en el sentit hiperbòlic.

A la geometria euclidiana sabem que es compleix que donats tres punts no alineats sempre es pot construir una circumferència que passa per aquests tres punts. Això no serà cert a la Geometria Hiperbòlica. Ens podem trobar que per tres punts no alineats hi passi una circumferència, l'horocicle o l'equidistant.

Estudiem quina posició entre els tres punts ens dóna un o altre objecte. Recordem que l'horocicle al model de la Geometria Hiperbòlica és una recta euclidiana o una circumferència euclidiana tangent a la recta de l'infinit i l'equidistant és una recta euclidiana o una circumferència euclidiana que talla la recta de l'infinit però no hi té el centre. Per estudiar-ho suposarem que els tres punts no estan alineats en el sentit hiperbòlic i distingirem tres casos.

Suposem que estan alineats en el sentit euclidià i que la recta euclidiana és paral·lela a la recta de l'infinit. Sabem que les rectes paral·leles a la recta de l'infinit són horocicles, per tant, en aquest cas tenim que pels tres punts hi passa un horocicle.

Suposem que estan alineats en el sentit euclidià i que la recta euclidiana talla la recta de l'infinit. En aquest cas pels tres punts hi passa l'equidistant. Sempre podem considerar la recta hiperbòlica perpendicular a la recta de l'infinit que té el peu en el punt d'intersecció de la recta anterior amb la recta de l'infinit. Aquestes dues rectes euclidianes vam provar que són equidistants en el sentit hiperbòlic. Per tant, tenim que pels tres punts hi passa l'equidistant.

Suposem que els tres punts no estan alineats en el sentit euclidià. En aquesta situació podem traçar la circumferència euclidiana per aquests tres punts, que sabem que sempre existeix. També sabem que els punts de la circumferència hiperbòlica coincideixen amb els punts de l'euclidiana, tot i que el centre no sigui el mateix. Així doncs, perquè puguem traçar la circumferència pels tres punts cal que l'euclidiana no talli la recta de l'infinit; d'aquesta manera tots els punts de la circumferència seran punts hiperbòlics i tindrem definida la circumferència. Si la circumferència euclidiana talla la recta de l'infinit llavors no tindrem circumferència hiperbòlica però considerant l'arc de la circumferència que pertany al semiplà tenim que la corba és l'equidistant. Si la circumferència euclidiana és tangent a la recta de l'infinit tenim que la corba és un horocicle.

Així doncs, tenim demostrat el següent teorema:

**Teorema 3.13.** *Donats tres punts no alineats del semiplà de Poincaré sempre hi passa o bé una circumferència hiperbòlica o bé l'horocicle o bé l'equidistant.*

Per tant, podem pensar que qualsevol circumferència euclidiana que té punts al semiplà on hi hem definit el model hiperbòlic és o bé una circumferència hiperbòlica si hi té tots els punts, o bé un horocicle si és tangent a la recta de l'infinit o bé una equidistant si talla la recta de l'infinit en dos punts.

3.2. **Model del disc de Poincaré.** Aquest model del pla hiperbòlic també té la propietat que està construït a partir del pla euclidià i conserva els angles euclidians però no les rectes. Per construir aquest model fixem un disc. Els punts del seu interior seran els punts del pla hiperbòlic i les rectes seran els diàmetres del disc i la intersecció de les circumferències ortogonals al disc amb l'interior del disc. Observem que els punts de la frontera del disc no es consideren com a punts hiperbòlics.

Les isometries del model són les inversions respecte a circumferències ortogonals al disc i les rotacions amb centre el centre del disc.

Una vegada ja definit el model podem provar que satisfà els cinc axiomes.

**Axioma 1.** *Donats dos punts existeix una única recta que els conté.*

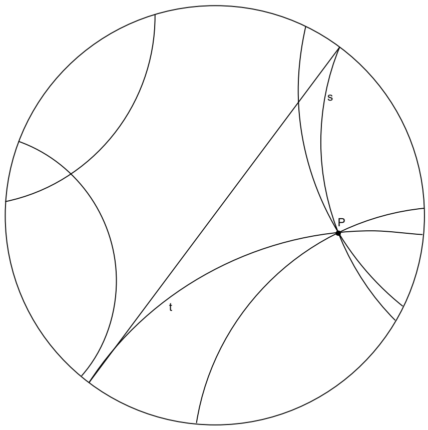


FIGURA 34. Rectes del pla hiperbòlic en el model del disc de Poincaré

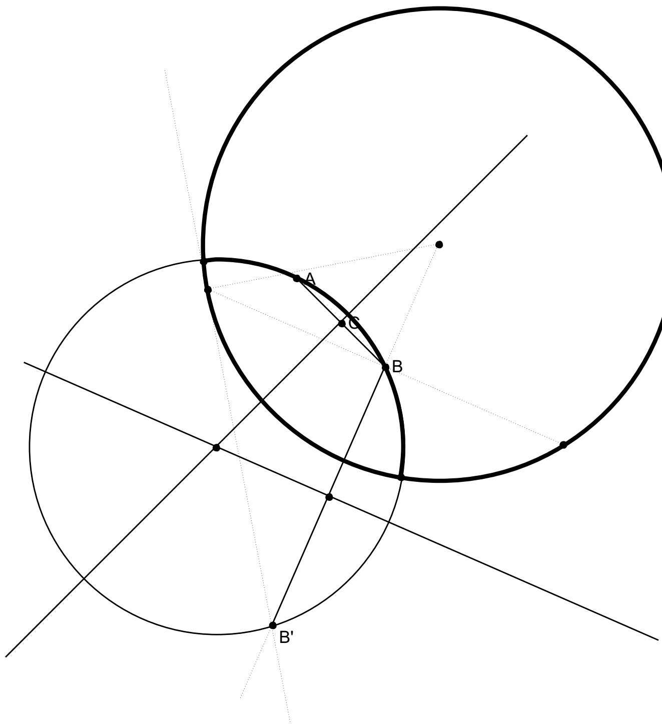


FIGURA 35

Tal com hem definit les rectes del model podem distingir dos casos. Provem primer l'existència.

Si els dos punts pertanyen a un mateix diàmetre, llavors la recta que els uneix és aquest diàmetre. Si no, hem de construir un arc de circumferència que passi per aquests dos punts i que sigui tangent al disc. Tracem el segment que uneix els dos punts i la mediatriu euclidiana a aquest segment. (fig. 35) El centre de la circumferència que busquem ha de pertànyer a aquesta recta. Per les propietats de les inversions, concretament pels teoremes 3.5 i 3.6, tenim que dues circumferències són ortogonals si i només si una passa per dos punts mútuament inversos respecte l'altra circumferència. Així doncs, busquem l'invers d'un dels dos punts donats respecte el disc. La circumferència que estem buscant ha de passar pels dos punts donats i per l'invers. Per trobar la circumferència que passa per aquests tres punts podem considerar la intersecció de la mediatriu traçada i la mediatriu pel segment que uneix, per exemple, els dos punts inversos. El centre de la circumferència que volem traçar serà aquesta intersecció. La recta hiperbòlica serà l'arc de la circumferència anterior que té per extrems els punts d'intersecció amb el disc i passa pels punts donats.

Així queda provat que donats dos punts sempre podem traçar una recta hiperbòlica que els conté. La unicitat s'obté directament de la construcció que hem fet. Si els dos punts pertanyen a un diàmetre del disc i volem fer la construcció com en el segon cas, obtindrem que l'invers dels punts està alineats amb els dos punts donats i que, per tant, no podem traçar una circumferència pels tres punts. Així, en el primer cas no podem trobar una recta hiperbòlica del segon tipus i la que hem construït és l'única que uneix els dos punts. Pel segon cas cal observar que hem fet una elecció que, en principi, podria variar el resultat. Quan hem construït el punt invers d'un dels dos punts donats n'hem elegit un dels dos sense cap criteri. Provem que si haguéssim elegit l'altre hauríem obtingut la mateixa circumferència. Pel teorema 3.6 tenim que si dues circumferències són ortogonals llavors la recta que passa pel centre d'una i talla a l'altra, la talla en punts inversos. Podem traçar la recta que passa pel centre del disc i per l'altre punt donat. L'altre punt en el que talli la circumferència serà invers d'aquest. Però sabem que l'invers d'un punt respecte una circumferència és únic, per tant, la circumferència és la mateixa. Observem que la recta sempre tallarà la circumferència en el punt donat i en un altre de diferent ja que si no hauria de ser tangent. En l'únic cas que podria ser tangent és en el que el punt fos de la frontera del disc ja que estem considerant que les dues circumferències són ortogonals però els punts de la frontera no es consideren punts hiperbòlics.

**Axioma 2.** *Qualsevol recta es pot prolongar indefinidament.*

Per tal de comprovar que se satisfà aquest axioma distingirem dos casos segons la recta sigui un diàmetre o no.

Si tenim que la recta hiperbòlica és un diàmetre del disc, per provar que la podem prolongar indefinidament considerarem dos punts $A$ i $B$ sobre ella i tals que no estiguin separats pel centre del disc. Provarem que podem transportar el segment que determinen, tantes vegades com vulguem, a sobre de la recta, en el mateix costat que els dos punts respecte del centre, de manera que podrem prolongar la recta indefinidament en aquesta direcció. Anàlogament ho provaríem per l'altra direcció.

Per transportar el segment $AB$ utilitzem que les inversions respecte circumferències ortogonals al disc són isometries per aquest model. Considerem la circumferència, $q$, que passa pel punt més allunyat del centre del disc (en

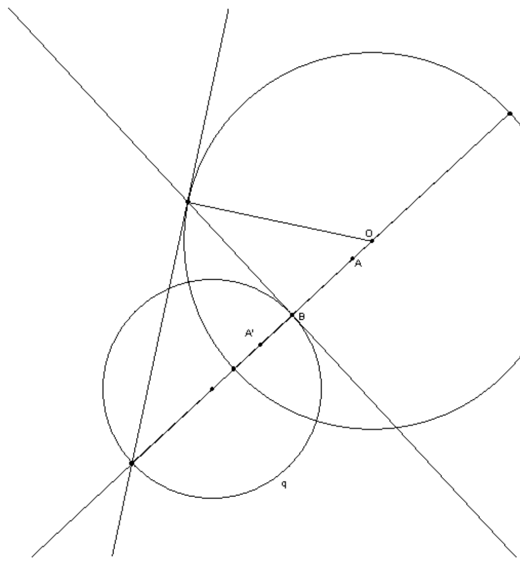


FIGURA 36

el sentit euclidià) i és ortogonal al disc i té el centre sobre la recta que obtenim de prolongar el diàmetre $AB$. Aquesta construcció (fig. 36) la podem fer sempre per les propietats de les circumferències i tenint en compte la construcció que hem donat de les rectes hiperbòliques en provar que es compleix l'axioma 1. Si pensem aquesta circumferència com la circumferència d'una inversió, transforma el punt $A$ en un punt $A'$ que està a l'interior d'aquesta i, per tant, més allunyat del centre del disc. Els segments $AB$ i $BA'$ tenen la mateixa longitud hiperbòlica perquè obtenim l'un de l'altre a partir d'una isometria del model. Ara podem repetir el mateix procediment amb els punts $B$ i $A'$ i seguir iterant el procés. D'aquesta manera tenim que podem prolongar indefinidament les rectes hiperbòliques que es representen com a diàmetres.

Pel cas en què tinguem una recta hiperbòlica, $r$, representada com un arc de circumferència tangent al disc podem veure que es pot prolongar indefinidament a partir de transformar-la per una isometria en un diàmetre. Fixem un diàmetre, que no talli la recta. Tracem les rectes euclidianes que uneixen els punts $A$ i $B$ i $C$ i $D$, respectivament, amb la notació de la figura 37. Aquestes dues rectes sempre es tallen en un punt de la circumferència euclidiana que s'obté de tancar la recta $r$, per ser la circumferència $r$ ortogonal al disc on pertanyen els punts $A$, $B$, $C$ i $D$. Considerem la inversió amb centre aquest punt d'intersecció i escollim el radi de manera que porti el punt $A$ al punt $B$. Si compleix això també transformarà el punt $C$ en el punt $D$ per ser la definició de la potència d'un punt respecte d'una circumferència. Per determinar el radi només cal utilitzar la definició de punts inversos; el radi al quadrat ha de valdre $OA \cdot OB$. Aquesta circumferència d'inversió, $k$, és tangent al disc perquè el disc passa per punts inversos de $k$ i, per tant,

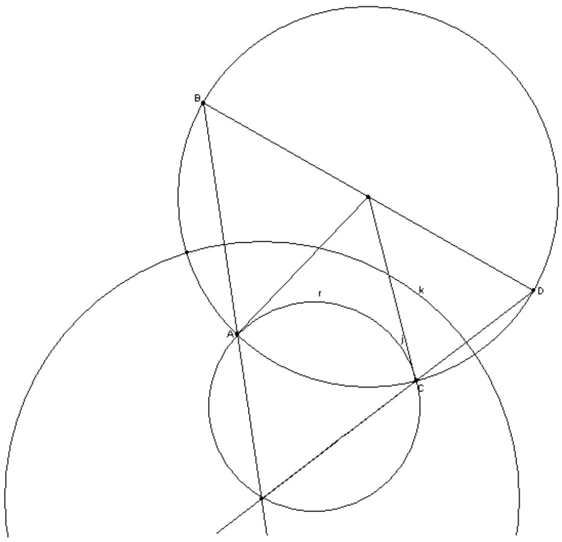


Figura 37

podem aplicar el teorema 3.5. Del teorema 3.2 tenim que realment $r$ es transforma en el diàmetre que havíem fixat.

**Axioma 3.** *Donat un punt qualsevol, que prenem com a centre, i una distància qualsevol, que prenem com a radi, podem traçar una circumferència.*

En el model del disc de Poincaré tenim que les circumferències són les circumferències euclidianes contingudes al disc. El centre hiperbòlic, com en el cas del model del semiplà, no coincideix amb el centre euclidià.

Per comprovar que es verifica aquest axioma podríem fer una demostració semblant al cas del model del semiplà de Poincaré, donant inversions que ens assegurin que els punts que afirmem que són de la circumferència estan tots a la mateixa distància del centre.

**Axioma 4.** *Tots els angles rectes són iguals.*

En aquest model també es verifica que els angles es poden pensar com a angles euclidians. Per tant, podríem fer una demostració anàloga a la vista en el cas del model del semiplà.

**Axioma 5.** *Existeix una recta $r$ i un punt $P$ que no pertany a la recta tals que per $P$ passen almenys dues rectes que no tallen $r$.*

Considerem com a recta $r$ un diàmetre qualsevol i com a punt $P$ un punt que no pertanyi al diàmetre. (fig. 34) Cal trobar dues rectes que passin per aquest punt i no tallin a $r$. Considerem dos altres punts que pertanyin al mateix costat del disc que $P$ respecte $r$. Podem traçar les rectes hiperbòliques que passen per $P$ i un dels altres dos punts. Aquestes no tallaran $r$. Per assegurar-ho podem elegir dos punts suficientment propers a $P$ i que pertanyin a la recta euclidiana paral·lela al diàmetre $r$.

Observem que en aquest model les rectes paral·leles en el sentit de la definició 2.2 són les que es tallen a la frontera del disc. Per exemple, en la figura 34 tenim que les rectes $s$ i $t$ són les rectes paral·leles. Totes les altres rectes que no tallen a $r$ i també passen per $P$ són les que hem anomenat rectes ultraparal·leles.

3.3. **Altres models del pla hiperbòlic.** Fins ara hem donat dos models diferents del pla hiperbòlic. Aquest dos tenen en comú que conserven els angles, és a dir, podem pensar els angles del model com a angles euclidians, però les rectes hiperbòliques dels models no es corresponen amb les euclidianes. Ara donarem dos altres models del pla hiperbòlic: el model projectiu i el model de l'hiperboloide. El model projectiu conservarà les rectes però no els angles.

Aquests tres models estan construïts sobre el pla euclidià. El quart model està construït a l'espai però tampoc pot complir que conservi longituds i angles ja que, com hem comentat (veure pàgina 20) no és possible. En el model de l'hiperboloide canviem la mètrica.

3.3.1. *Model projectiu.* Fixem un disc al pla euclidià. Considerem com a punts hiperbòlics tots els punts de l'interior del disc i com a rectes la intersecció de les rectes euclidianes amb l'interior del disc. Els punts de la frontera del disc no es consideren com a punts del model, sinó com a punts de l'infinit.

Aquest model és conegut com a model de Beltrami o de Klein. Eugenio Beltrami va ser el primer, a l'any 1868, en utilitzar aquest model. El va utilitzar per provar la independència del cinquè postulat de manera totalment rigorosa, utilitzant geometria diferencial. A l'any 1871, Felix Klein va interpretar aquest model a partir de la Geometria Projectiva, i va introduir el terme *geometria hiperbòlica.* Va considerar que les isometries per al model són les projectivitats que deixen invariant el disc de l'infinit. Les projectivitats poden ser interpretades com a isometries ja que conserven la raó doble i, per tant, la distància.

Pensant els punts, rectes i isometries tal com hem comentat es pot provar que aquest model compleix els axiomes de la Geometria Hiperbòlica i és, per tant, un model de la Geometria Hiperbòlica.

Provar el cinquè axioma, és a dir, que donada una recta i un punt exterior a aquesta hi ha infinites rectes que passen pel punt i no tallen a la recta és immediat. Podem pensar que hi ha rectes que es tallen a fora del disc i que, per tant, pensades només amb la part de dins del disc són paral·leles. (fig. 38)

Per provar que els angles no es poden pensar com a angles euclidians podem estudiar quins són els angles rectes del model. Considerem dues rectes que es tallen en un punt $Q$. Aquestes es tallen formant angles rectes si podem transformar un angle en un altre a partir d'una isometria del model. Considerem els punts d'intersecció de la recta $p$ amb el disc de l'infinit i les rectes tangents al disc que passen per un d'aquests punts. (fig. 39) El punt d'intersecció de les dues tangents, $P$, és el pol de la recta $p$. La segona recta, $h$, que tenim ha de passar per $P$ perquè formi angles rectes amb la recta $p$.

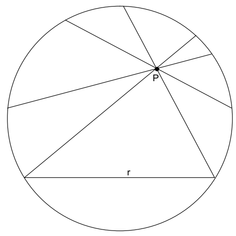


FIGURA 38. Rectes hiperbòliques en el model projectiu

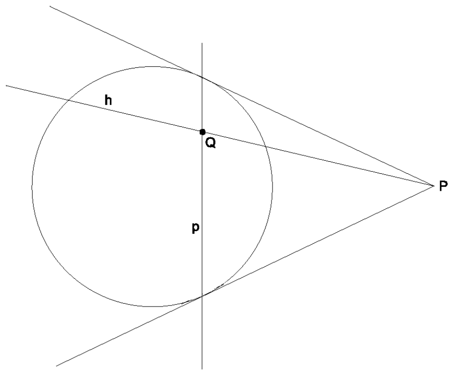


FIGURA 39

Considerem la transformació harmònica del pla projectiu amb centre el punt $P$ i eix la polar $p$. Per les propietats d'aquesta transformació i de la polar tenim que els punts de la recta $h$ s'apliquen en ells mateixos de manera que els punts d'un costat de $h$ que determina la recta $p$ en tallar $h$ s'apliquen a punts de l'altre costat. La recta $p$ és fixa per la transformació. (veure [6]) D'aquesta manera tenim que els angles adjacents que formen les rectes $p$ i $h$ són iguals i, per tant, rectes. Així doncs, tota recta que talli a una altre i passi pel pol d'aquesta és perpendicular a aquesta. Però el recíproc també és cert pel principi de reciprocitat de la Geometria Projectiva que afirma que si una recta conté el pol d'una altra llavors aquesta conté el pol de la primera.

Amb això hem vist que, en aquest model, els angles no poden ser interpretats com a angles de la Geometria Euclidiana, però, en canvi, les rectes sí.

Ara hauríem de provar que es compleixen els cinc axiomes de la Geometria Hiperbòlica. Tot i que no és difícil provar-ho no ho farem ja que el nostre objectiu és donar construccions explícites pel model del semiplà de Poincaré. De totes maneres, es pot trobar una exposició més detallada del model, per exemple, a [6].

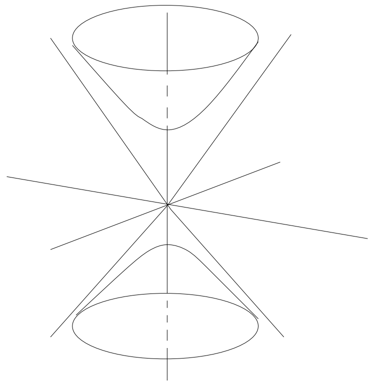

FIGURA 40

3.3.2. *Model de l'hiperboloide.* L'últim model del pla hiperbòlic que comentarem és el de l'hiperboloide. Tal com ja hem comentat, aquest model no és, com tots els vistos fins ara, un model del pla euclidià, sinó que és de l'espai euclidià en el que considerem una mètrica diferent a l'euclidiana. La mètrica amb la que cal interpretar aquest model és la mètrica de Minkowski. Aquest model té importància ja que és el que s'utilitza per estudiar la teoria especial de la relativitat.

Els punts del model són els punts que pertanyen a la part positiva de l'hiperboloide de dos fulls donat per l'equació $x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$ (fig. 40)i les rectes són les branques de les hipèrboles que resulten de la intersecció de dels plans que passen per l'origen amb l'hiperboloide. Els angles coincideixen amb els angles donats per la mètrica. No estudiarem aquest model ja que s'aparta de la idea d'aquest treball però per a més informació sobre el tema es pot consultar, per exemple, [4].

Caldria comentar que aquests quatre models de la Geometria Hiperbòlica que hem presentat no són els únics que podem trobar. També es pot provar que existeixen aplicacions conformes, de variable complexa, que passen d'un model a un altre. L'exposició i la demostració d'aquest dos fets es pot trobar, per exemple, a [2].

## Referències


[1] N.V. Efimov. *Geometria Superior.* Editorial Mir. Moscú. (1978)

[2] A.I. Markushevich. *Teoría de las funciones analíticas.* Editorial Mir. Moscú. (1984)

[3] P. Puig Adam. *Curso de Geometria Métrica,* Vol. I. Fundamentos. Euler, G. Puig Ediciones. Madrid. (1981). Quinzena edició.

[4] J.G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds.* Springer-Verlag. New York. (1994)

[5] A. Reventós. *Geometria axiomàtica.* Institut d'Estudis Catalans. (1993)

[6] L.A.Santaló. *Geometrias no euclidianas.* EUDEBA. Buenos Aires.

[7] A.S. Smogorzhevski. *Acerca de la geometría de Lobachevski.* Editorial Mir. Moscú. (1984) Segona edició.