Simetries i tr4nsform4cions

Albert Ruiz Cirera

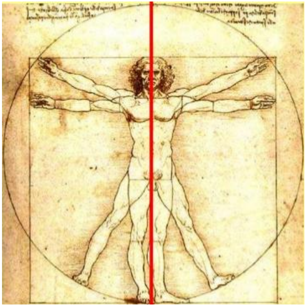
Universitat Autònoma de Barcelona

Dissabtes de les Matemàtiques 2018

Introducció

Universitat Autònoma de Barcelona

La paraula simetria ve del grec ($\sigma\nu\mu\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$) i, en el llenguatge habitual, vol dir harmoniós, de proporcions boniques i compensat.
En un llenguatge més tècnic, si parlem de simetria, ens preguntem de quin tipus, o quin és l'eix:

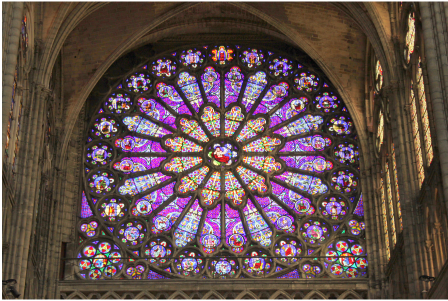


L'home de Vitruvi (L. da Vinci, 1492)

Simetria

UAB
Universitat Autònoma de Barcelona

Taj Mahal (1654, Agra, Índia)



Sant Denis (S. XIV, França)

Definició

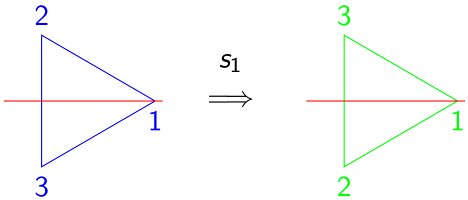
Donat un objecte X, una simetria és una transformació de l'objecte que el deixa invariant.

Objectiu

Volem codificar aquesta informació per tal de poder-la estudiar:

Simetries d'un triangle equilàter (I)

Considerem un triangle equilàter i etiquetem els vèrtexs com 1, 2 i 3. Fem una simetria respecte la recta vermella (l'anomenem s_1, simetria que no mou l'1):



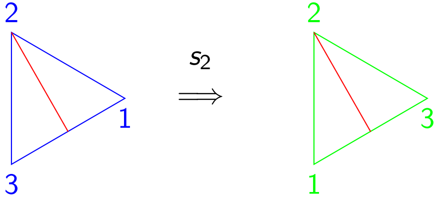
Si mirem on van a parar els vèrtexs tenim: $\begin{matrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{matrix}$.

I podem escriure-ho com $s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ i anomenar-ho una permutació de 3 elements.

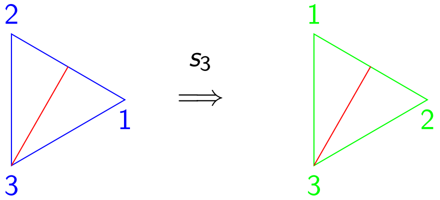
Simetries d'un triangle equilàter (II)

UAB
Universitat Autònoma de Barcelona

En tenim dues més (reflexions respecte rectes):



$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

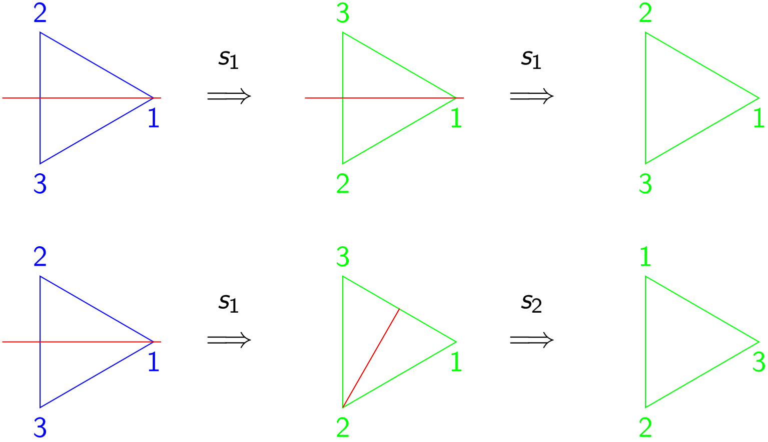


$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Simetries d'un triangle equilàter (III)

UAB Universitat Autònoma de Barcelona

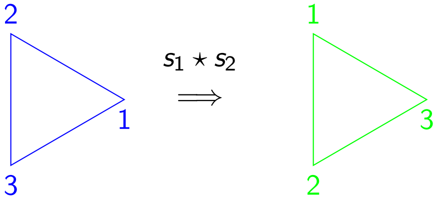
Què passa si fem una simetria i a continuació una altra (componem):



Simetries d'un triangle equilàter (IV)

Universitat Autònoma de Barcelona

Per tant, la composició $s_1 \star s_2$ és:



$$s_1 \star s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Que també podem escriure com:

$$s_1 \star s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Anomenem a aquest element r_{-120} (rotació de -120^o):

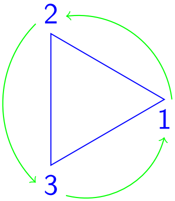
$$r_{-120} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Simetries d'un triangle equilàter (V)

Universitat Autònoma de Barcelona

Si ara calculem $s_2 \star s_1$:

$$s_2 \star s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$



Anomenem a aquest element r_{120} (rotació de 120^o):

$$r_{120} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Simetries d'un triangle equilàter (VI)

Ens queda la taula de multiplicar següent:

	1	s_1	s_2	s_3	r_{120}	r_{-120}
1	1	s_1	s_2	s_3	r_{120}	r_{-120}
s_1	s_1	1	r_{-120}	r_{120}	s_3	s_2
s_2	s_2	r_{120}	1	r_{-120}	s_1	s_3
s_3	s_3	r_{-120}	r_{120}	1	s_2	s_1
r_{120}	r_{120}	s_2	s_3	s_1	r_{-120}	1
r_{-120}	r_{-120}	s_3	s_1	s_2	1	r_{120}

Llegenda:

	b
a	$a \star b$

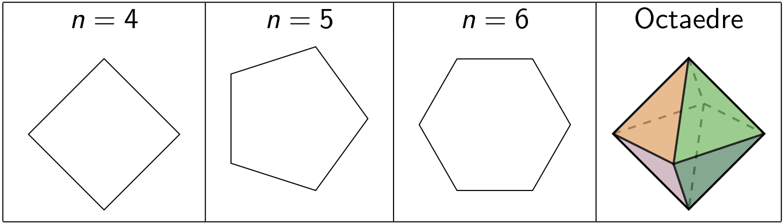
Resum: té 6 elements $\{1, s_1, s_2, s_3, r_{120}, r_{-120}\}$, no és commutatiu, i també es pot veure com totes les permutacions de 3 elements.

Generalitzacions

Universitat Autònoma de Barcelona

Hi ha, com a mínim, dues maneres de generalitzar aquests resultats:

1. Geomètrica: considerar polígons de més costats: quadrats, pentàgons, . . . o, fins i tot, poliedres o figures regulars en dimensions superiors.



2. Algebraica: considerar permutacions de més de 3 elements. $n = 4$:

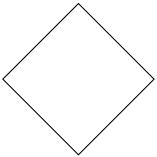
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}. \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}.$$

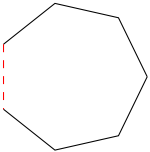
Camí geomètric

Considerem un quadrat:



Té 4 rotacions: 0^o, 90^o, 180^o i 270^o.
Té 4 simetries axials.
Total: 8 elements.

Considerem un polígon regular d'n costats:



Té n rotacions: 0^o, $\frac{1}{n}360^o$, $\frac{2}{n}360^o$, $\dots$, $\frac{(n-1)}{n}360^o$.
Té n simetries axials.
Total: $2n$ elements.

Obtenim uns grups que s'anomenen dihedrals.

Camí algebraic

UAB
Universitat Autònoma de Barcelona

Si fixem un n, quantes permutacions tenim amb n elements?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

x_1 pot prendre n valors diferents,
x_2 pot prendre $n-1$ valors diferents,
x_3 pot prendre $n-2$ valors diferents,
...
x_n només pot prendre 1 valor.

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$$

Camí algebraic $\neq$ camí geomètric

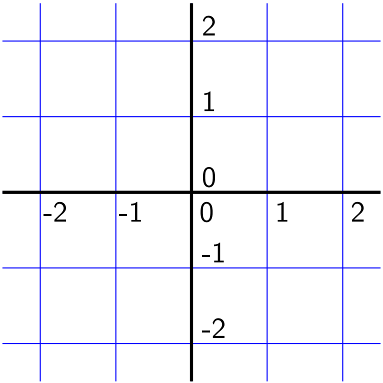
Tenim la taula següent:

n	Simetries polígon n-costats	Permutacions n-elements
3	6	6
4	8	24
5	10	120
6	12	720
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$2n$	$n!$

Tessel·lacions

Universitat Autònoma de Barcelona

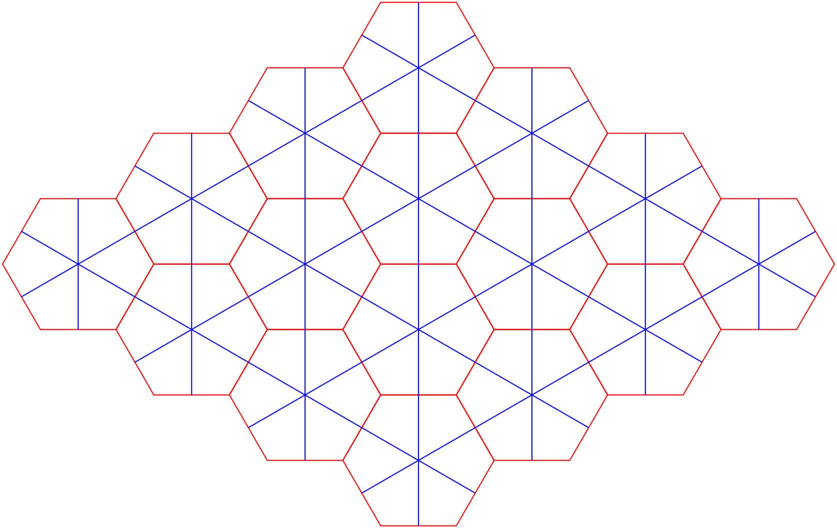
Una tessel·lació és una subdivisió del pla on totes les regions tenen la mateixa forma. Per exemple:



A les simetries que té el mateix quadrat, s'afegeixen les translacions (en l'exemple, per coordenades enteres).

Tessel·lacions

Amb polígons regulars han de ser triangles, quadrats o hexàgons:



Com podem estudiar les tessel·lacions?

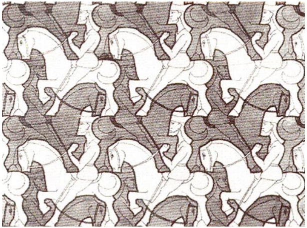
Primer hem de localitzar el que anomenem "un domini fonamental":

I posteriorment hem d'estudiar les simetries d'aquesta regió (en aquest cas, cap).

Més exemples de tessel·lacions

Universitat Autònoma de Barcelona

una reflexió



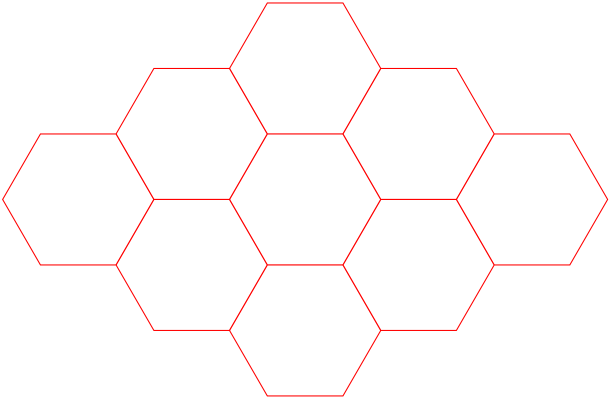
un gir de 180^o

Classificació de tessel·lacions

Les tessel·lacions estan classificades i n'hi ha 17 de diferents.

Classificació de Tessel·lacions

Universitat Autònoma de Barcelona



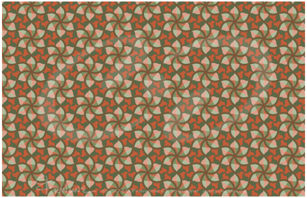
Primer considerem les 3 "famílies": triangles, quadrats o hexàgons.

Considerem el cas regular, obtenint en cada cas un màxim de simetries.

Afegim irregularitats per anar reduint les simetries de la regió fonamental.

L'Alhambra (segles IX-XIV)

L'Alhambra conté 14 de les 17 tessel·lacions si es tenen en compte els colors [E. Müller, 1944], i les 17 si no es tenen en compte [J.M. Montesinos, 1987]:



Més tipus de simetria?

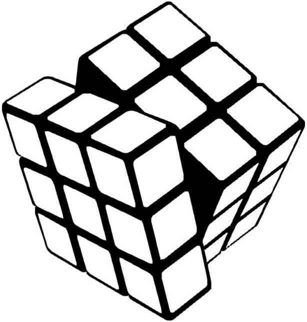
De manera abstracta podem pensar en objectes que queden "igual" per una transformació fixada. En matemàtiques n'hi ha molts.
A més dels que hem vist, podem pensar ens el objectes que són invariants per homotècia (mirar-se l'objecte de més lluny o de més a prop):


Tr de Sierpinski

El cub de Rubik

UAB Universitat Autònoma de Barcelona

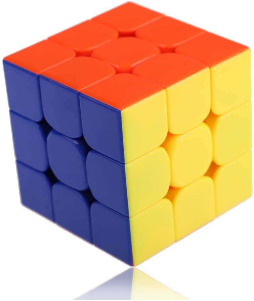
Considerem un cub de rubik $3 \times 3 \times 3$ sense colors:



I considerem els moviments com el de la imatge. A aquest cub, els moviments no el modifiquen, pel que són simetries.

El cub de Rubik de colors

Ara hi afegim colors:

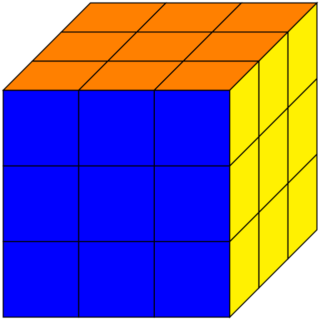


El moviment d'abans ens modifica el resultat.

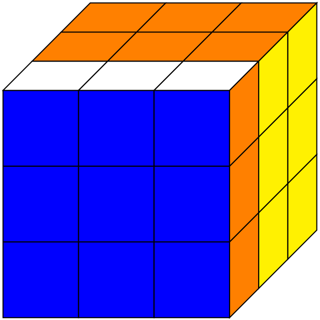
El cub de Rubik: moviment bàsic

Universitat Autònoma de Barcelona

Un moviment bàsic: girar una cara 90 graus en direcció les agulles del rellotge:



$\Rightarrow$



Veiem que si fem 4 vegades aquest moviment ens quedem com al principi.

Cub de rubik: notació

Si posem nom a les cares:

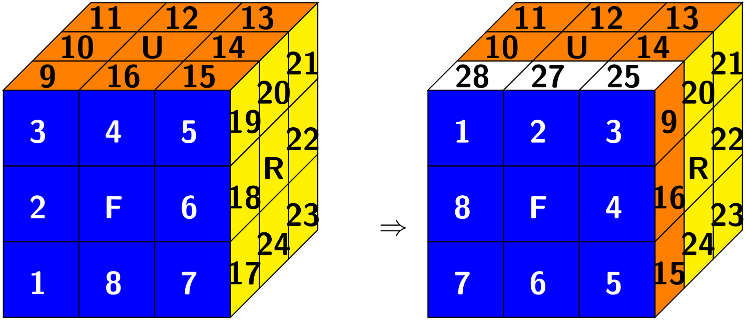
- F la cara del davant (front),
- B la cara del darrera (back),
- U la cara de dalt (up),
- D la cara de sota (down),
- L la cara de l'esquerra (left) i
- R la cara de la dreta (right).

I la mateixa lletra denota fer un gir de 90^o en el sentit de les agulles del rellotge. Utilitzem exponents per a les iteracions i les inverses. Per exemple: $FUF^{-1}U^{-1}$ vol dir: girar la cara frontal en el sentit de les agulles del rellotge, llavors la superior també en el mateix sentit, després la frontal altre cop en contra de les agulles del rellotge i finalment la superior en contra de les agulles del rellotge.

El grup de Rubik

Podem estudiar l'estructura de grup:

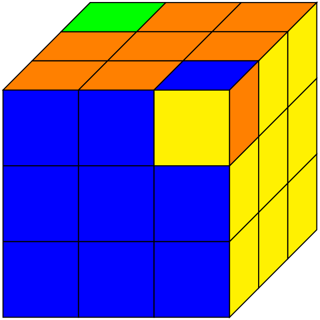
- Els elements són paraules en les lletres $\{F, B, U, D, L, R\}$ tenint en compte que hi ha equivalències: per exemple $F^4 = \emptyset$.
- Si numerem totes les peces de totes les cares (excepte els centres), es pot pensar com un subgrup del grup de permutacions de $8 \times 6 = 48$ elements:



El grup de Rubik

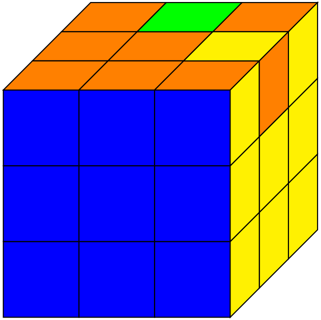
Un altre manera d'estudiar l'estructura és pensar en el cub com la unió de $3 \times 3 \times 3$ blocs (peces), dels que veiem 0, 1, 2 o 3 cares.

- Hi ha moviments que no permuten els blocs, però que sí mouen les cares del bloc (canvien les "orientacions"):



$BR^{-1}D^2RB^{-1}U^2BR^{-1}D^2RB^{-1}U^2$

3^7 posicions



$RUDB^2U^2B^{-1}UBUB^2D^{-1}R^{-1}U^{-1}$

2^{11} posicions

El grup de Rubik

Universitat Autònoma de Barcelona

- Hi ha moviments que permuten els blocs i no canvien les “orientacions” de les cares. Per exemple, fent combinacions de:

$$U^2, D^2, F, B, L^2, R^2 \text{ i } R^2U^{-1}FB^{-1}R^2F^{-1}BU^{-1}R^2.$$

$$\frac{8! \cdot 12!}{2} \text{ posicions.}$$

Per tant, una manera de resoldre'l és:

- utilitzar primer aquests moviments per a posar cada bloc al seu lloc, i
- orientar cada peça mitjançant els moviments d'abans.

Cardinal del grup

El nombre de posicions possibles és:

$$(3^7 2^{11}) \cdot \frac{8! \cdot 12!}{2} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$$

El número de Déu

UAB Universitat Autònoma de Barcelona

Definició

Definim el número de Déu com el nombre mínim de moviment que permet fer el cub de Rubik partint des de qualsevol posició.

- Anomenem $\mathcal{D}$ a aquesta constant quan un gir de 180^o compta com un sol moviment.
- Anomenem $\mathcal{D}'$ a aquesta constant quan un gir de 180^o compta com dos moviments (parlem de moviments-quarts).

Quotes inferiors

Es troba una posició (superflip) que necessita 20 moviments i 24 moviments-quarts per a ser resolt, per tant $\mathcal{D} \geq 20$ (M. Reid, 1995) i $\mathcal{D}' \geq 24$ (J. Bryan, 1998).
S'afegeixen moviments al superflip que demostren que $\mathcal{D}' \geq 26$ (J. Bryan, 1998).

Número de Déu

Quotes superiors

- $\mathcal{D} \leq 277$ (D. Singmaster, 1979).
- $\mathcal{D} \leq 94$ (J. Conway, 1979).
- $\mathcal{D} \leq 45$ (M. Thistletheaite, 1981).
- $\mathcal{D} \leq 29$ (M. Reid, 1995).
- $\mathcal{D} \leq 27$, $\mathcal{D}' \leq 35$ (S. Radu, 2006).
- $\mathcal{D} \leq 22$ (T. Rokicki, 2008).
- $\mathcal{D}' \leq 28$ (T. Rokicki, 2009).
- $\mathcal{D} \leq 20$ (T. Rokicki, H. Kociemba, M. Davidson i J. Dethridge, 2010).
- $\mathcal{D}' \leq 26$ (T. Rokicki i M. Davidson, 2014).

Teorema (Reid, Bryan, Rokicki, Kociemba, Davidson i Dethridge)

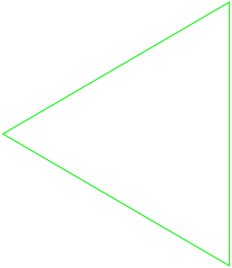
$$\mathcal{D} = 20 \text{ i } \mathcal{D}' = 26.$$

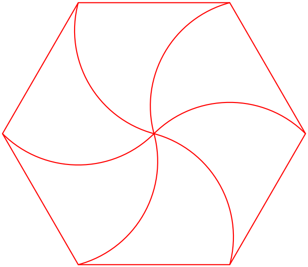
Uns cubs més senzills

Classificació de grups finits

Podem classificar els grups finits?

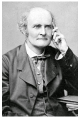
Concepte de simple (indescomponible): els grups finits simples dins el món dels grups finits fan el "mateix paper" que els nombres primers a la factorització de nombres enters.





Cronografia de la classificació

Évariste Galois (1811-1832) utilitza el concepte de subgrup normal (grups no irreductibles) i les primeres famílies de grups simples.



Arthur Cayley (1821-1895) defineix el concepte de grup abstracte.

⋮

Daniel Gorenstein (1923-1992), al 1972 descriu un itinerari de 16 passos per completar la demostració. Al 1983 anuncia que la demostració ja està completa.

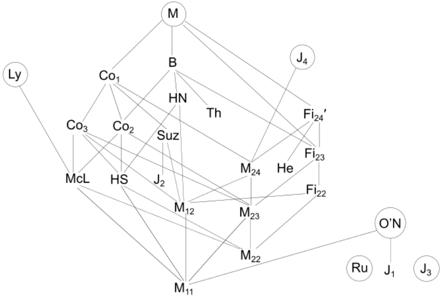
El Teorema

Universitat Autònoma de Barcelona

Teorema de Classificació de grups finits simples

Els grups finits simples es poden classificar en:

- 3 famílies (infinites) de grups: cíclics d'ordre primer, alternats i tipus Lie.
- 26 grups esporàdics + el grup de Tits.



Està demostrat el teorema?

Universitat Autònoma de Barcelona

Situació

Una demostració de desenes de milers pàgines formada per més de 500 articles escrits per uns 100 autors diferents.

Segona revisió

(Gorenstein), Lyons y Solomon comencen al 1994 a escriure una sèrie de volums que continguin la demostració. De moment es porten 7 volums, firmats com [Gorenstein-Lyons-Solomon]. Es preveu que en falten 5 i seran unes 5000 pàgines.

Problema

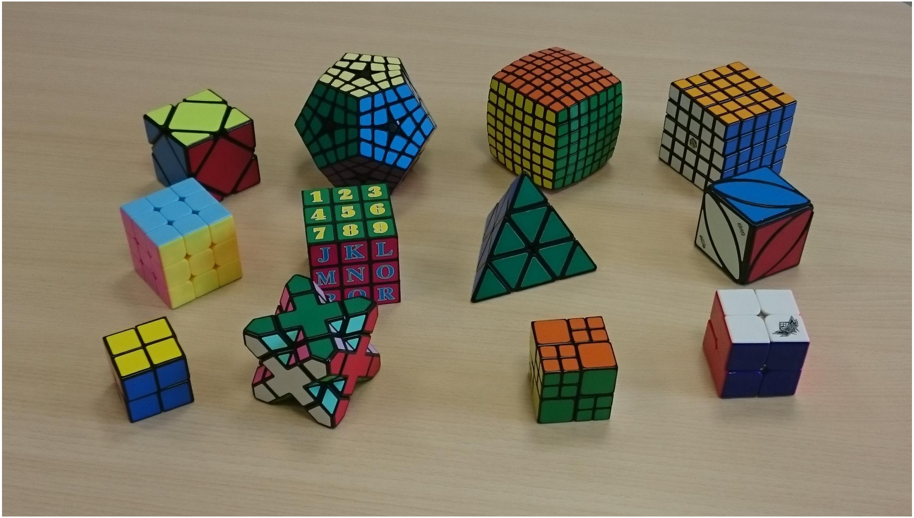
Al 2004, M. Aschbacher va trobar un forat a una de les demostracions. Corregir-lo va suposar un article de 1221 pàgines. Amb aquesta publicació va anunciar que la demostració estava completa.

Saber-ne més:

UAB
Universitat Autònoma de Barcelona

- Pere Ara, Francesc Bars, *Bicentenari d'un revolucionari: Évariste Galois*, Materials Matemàtics UAB, (2012), 3.
- Armengol Gasull, *Fractals i Medicina*, Materials Matemàtics UAB, (2016), 5.
- Branko Grünbaum, *What Symmetry Groups Are Present in the Alhambra?*, Notices of the AMS, **53** (6), (2006), 670–673.
- J.M. Montesinos, *Classical Tessellations and Threee-Manifolds*, Springer New York 1987.
- E. Müller, *El estudio de ornamentos como aplicación de la teoría de grupos de orden finito*, Euclides (Madrid) **6** (1946), 42–52.
- *The Mathematics of de Rubik's Cube: Introduction to Group Theory and Permutation Puzzles*, MIT notes, `http://web.mit.edu/sp.268/www/rubik.pdf`

Moltes gràcies!



Casa Gasull

Casa Gasull, Reus (Lluis Domènech i Montaner)