

L'infinit i alguns comptes

Joan Orobitg

Departament de Matemàtiques.
Universitat Autònoma de Barcelona

Dissabtes de les Matemàtiques
Bellaterra, 7 de març de 2024



L'atracció del concepte infinit és innegable

L'infinit !

Cap altra qüestió ha mogut tan profundament la ment humana.

David Hilbert (1862-1943)

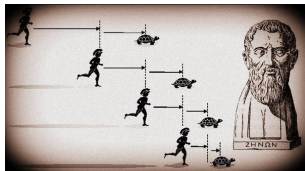
Si estàs buscant l'infinit, simplement tanca els ulls!

Milan Kundera (1929- 2023)

però quan ens hi aturem a pensar sobre ell aviat ens aclapara

L'infinit

Fins al segle XIX, l'estudi de l'infinit era propi de filòsofs i teòlegs. Tot i usar-lo en el càlcul i les sèries, els matemàtics el consideraven només “una manera de parlar”. Fins i tot al segle XVIII, malgrat emprar infinits i infinitesimals, no van sentir la necessitat d'analitzar l'infinit en si mateix.



Al segle V aC, Zenó va formular paradoxes que contradeïen l'experiència física —que els corredors corren, les fletxes volen i el món és divers. Eren sofismes: conclusions aparentment certes però falses. Com que moltes depenien de la divisió infinita de l'espai i del temps, Zenó va ser el primer a mostrar que l'infinit és un concepte problemàtic.

L'infinit

La frase **la part sempre és menor que el tot** és un axioma lògic i matemàtic clàssic (atribuït a Euclides) que estableix que un component, subconjunt o fragment d'un objecte mai pot superar en magnitud, mida o quantitat l'objecte complet del qual forma part. Aristòtil defensa que l'infinit no és un objecte existent, sinó un procés sense fi.

Va ser Georg Cantor (1845-1918) a la dècada de 1870 qui es va adonar de la importància de les correspondències un a un i qui es va embarcar en un estudi sistemàtic dels conjunts abstractes i dels números cardinals i ordinals. També és seva la primera aplicació dels mètodes teòric conjuntistes. Concretament, la seva demostració no constructiva de l'existència de nombres transcendentals.

Un conjunt és, llavors, infinit quan es pot posar en correspondència un a un amb una part d'ell.

	Visió de l'infinit	Infinit acceptat	Actitud
Aristòtil i Euclides	No existeix com a objecte.	Potencial	Rebuig de l'infinit actual; por a paradoxes
Euler	Eina operativa	Potencial (i pragmàtic)	Flexibilitat tècnica, prudència filosòfica
Gauss	Procés, no objecte	Només potencial	Rebuig explícit al concepte d'infinit actual
Cantor	Objecte complet	Actual (transfinit)	Revolucionari, creador de la teoria
Hilbert	Entitat legítima i fonamental	Actual	Defensor ferm del sistema Cantorià

Hilbert defensa que la teoria de Cantor és una de les grans creacions humanes.

Ningú no ens expulsarà del paradís que Cantor ha creat

Hotel de Hilbert

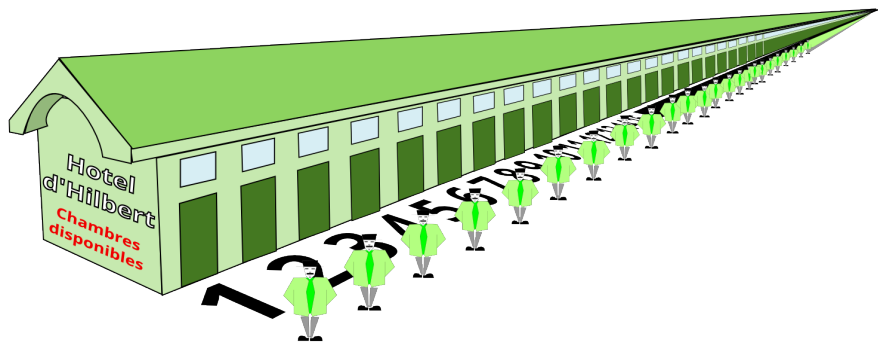


Té una particularitat: té infinites habitacions !!



Hotel de Hilbert

Suposem que l'hotel està complet i arriba un nou client. El podem allotjar ?



Sí, la recepcionista era molt espavilada.
Convé que les habitacions estiguin numerades.

Hotel de Hilbert

Què passa si arriba un autobús amb N passatgers ? La recepcionista ordena als clients:

Si sou a l'habitació k passeu a l'habitació $k + N$

Les habitacions $1, 2, 3, \dots, N$ queden lliures pels passatgers de l'autobús.
I si arriba un autobús infinit ?



Hotel de Hilbert

La recepcionista ordena al client de l'habitació N que passi a l'habitació $2N$.

Les habitacions 1, 3, 5, 7, 9, ... queden lliures pels infinits passatgers de l'autobús.

I si arriben infinits autobusos amb infinits passatgers cadascun ?

La solució és una mica més complicada, però també hi caben !!

	Seient 1	Seient 2	Seient 3	Seient 4	Seient 5	...
Autobús 1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	...
Autobús 2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	...
Autobús 3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	...
Autobús 4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	...
Autobús 5	5/1	5/2	5/3	4/4	5/5	...
...	...	...	...	...	...	...

Hotel de Hilbert

	Seient 1	Seient 2	Seient 3	Seient 4	Seient 5	...
Autobús 1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	...
Autobús 2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	...
Autobús 3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	...
Autobús 4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	...
Autobús 5	5/1	5/2	5/3	4/4	5/5	...
...	...	...	...	...	...	...

Amb aquest mètode s'assigna un nombre natural m a cadascun dels passatgers dels infinits autobusos.

No és la única manera d'encabir els passatgers dels infinits autobusos a l'hotel.

Tenim infinits nombres primers $\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$. Assignem un primer p a cada autobús i el passatger k de dit autobus l'enviem a l'habitació p^k .

Clients sense habitació a l'Hotel de Hilbert

Arriba un gran autobús amb la gran família AB .

Els passatgers estan identificats pel seu nom únic (personal i intransferible).

Cada nom està format només per les lletres A i B i cada nom és infinitament llarg.

ABAABBAAABBBABABABBB.....

ABABABABABABABABABABABABA....

AAAAAAAAAAAAABAAAAAAAAAAAAAB.....

A l'autobús hi ha una persona per cada seqüència possible d'aquestes dues lletres.

La delegada de la família, la persona $ABBAABBAABBAABBA\dots$, entra l'hotel per organitzar la distribució en habitacions.

La recepcionista li diu que NO els hi pot encabir.

Com que no ? L'hotel té infinites habitacions ?

Per què no hi cab tota la família ?

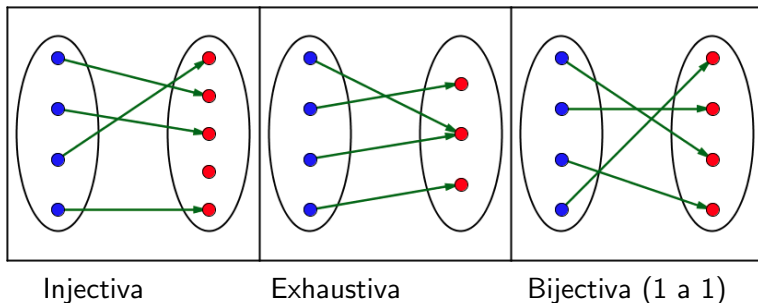
Fem un llistat d'habitacions i clients

Habitació 1	ABBAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
Habitació 2	ABBAAAAABBBBBBBBBBAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
Habitació 3	BABABABABABABABABBABABABABBABABABABABB
Habitació 4	BBAABBAABBAABBBAAABBBBAAAABABABBBBBBABB BB
Habitació 5	AAABBABBAABBBBAAABBBABABBAAABBBBAAAAABAB
Habitació 6	ABBAAAAABBBBBBBBBBAAAAAAAAAAAAAABBBBBBBBBBBB
Habitació 7	BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
.....	
Sense habitació	BAABABA.....

L'infinit numerable

Un conjunt té cardinalitat finita quan té una quantitat finita d'elements.

Un conjunt X té cardinalitat **numerable** (infinita numerable) si hi ha una aplicació **bijectiva** entre els nombres naturals $\mathbb{N}$ i X .



Si existeix una aplicació bijectiva entre dos conjunts X i Y direm que tenen la mateixa cardinalitat i escriurem $\text{car}(X) = \text{car}(Y)$.

L'infinit numerable

Els conjunts de nombres:

❶ Naturals,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, k, \dots\}$$

❷ Enters,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -k, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, k, \dots\}$$

❸ Racionals,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

són tots numerables

L'infinit NO numerable

El conjunt de tots els nombres reals $\mathbb{R}$ no és numerable.

Suposem que sí que ho fos i arribem a una contradicció.

El mateix raonament que hem explicat a l'hotel. Posen en una llista els nombres reals a l'interval $(0, 1)$ en expressió decimal

1	0.1224567999000123 ...
2	0.3334560101997875 ...
3	0.7864530008997765 ...
4	0.4561223004584322 ...
...	
—	0.3478

Trobar aplicacions bijectives entre conjunts no sempre és fàcil.
Hi ha un resultat que facilita la feina.

Teorema (Cantor-Bernstein-Schröder. 1896)

Siguin E i F dos conjunts. Si hi ha una aplicació injectiva de E a F i una aplicació injectiva de F a E llavors també hi ha una aplicació bijectiva entre E i F .

Exemple. Tenim les aplicacions injectives

$$g : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto x$$

$$h : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$$

$$x \mapsto \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$$

i per tant existeix un $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ bijectiva (encara que no en tenim cap descripció explícita !).

Cardinalitat

Es defineix **alef zero** $\aleph_0$ com la cardinalitat de $\mathbb{N}$, $\text{car}(\mathbb{N}) = \aleph_0$.

Els conjunts $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, els nombres primers, ... tenen cardinalitat $\aleph_0$.

No la tenen, $\mathbb{R}$, $[0, 1]$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, ...

Donat un conjunt X , es denota per $\mathcal{P}(X)$ el conjunt format per tots els seus subconjunts (aquest nou conjunt s'anomena **parts de X**). Així, per exemple, si $X = \{a, b, c\}$, aleshores

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Si X té n elements, $\mathcal{P}(X)$ en té 2^n .

S'usa la notació $2^X = \mathcal{P}(X)$.

Teorema (Cantor. 1891)

NO hi ha cap aplicació bijectiva entre X i $\mathcal{P}(X)$. A més, $\text{car}(X) < \text{car}(\mathcal{P}(X))$.

Diem que $\text{car}(X) < \text{car}(Y)$ si hi ha una aplicació injectiva de X a Y , però no n'hi ha cap d'exhaustiva

Podem definir infinits tipus de conjunts infinits.

- 1 Els que tenen cardinalitat $\aleph_0$.
- 2 Els que tenen la mateixa cardinalitat que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, és a dir, $2^{\aleph_0}$.
- 3 Els que tenen la mateixa cardinalitat que $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, és a dir, $2^{2^{\aleph_0}}$.
- 4 Els que tenen la mateixa cardinalitat que $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$, és a dir, $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$.
- 5 ...

Quina cardinalitat té $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ té cardinalitat $2^{\aleph_0}$. Hem de construir una aplicació bijectiva entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $\mathbb{R}$. Equivalentment, donem una aplicació bijectiva f entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $[0, 1]$.

Agafem $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ i definim

$$f(A) = 0.n_1n_2n_3n_4 \dots n_k \dots_{(2)} \in [0, 1],$$

on $0.n_1n_2n_3n_4 \dots n_k \dots_{(2)}$ és l'expressió en base 2 del número a l'interval $[0, 1]$.

$$n_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in A \\ 0 & \text{si } j \notin A \end{cases}$$

$$\text{Tenim } f(\emptyset) = 0, f(\mathbb{N}) = 1, f(\{1, 4\}) = 0.1001 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} = \frac{9}{16}$$

Hi ha més cardinals que $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$, ... ?

Existeix algun conjunt Y amb $\aleph_0 < \text{car}(Y) < 2^{\aleph_0}$?

Va ser el primer problema d'una llista de 23 que va posar David Hilbert (1862 - 1943) a la comunitat matemàtica, l'any 1900 a París en el Congrés Mundial de Matemàtiques. contingut...

La NO existència conjunts amb cardinalitat entre $\aleph_0$ i $2^{\aleph_0}$ s'anomena
HIPÒTESI DEL CONTINU.

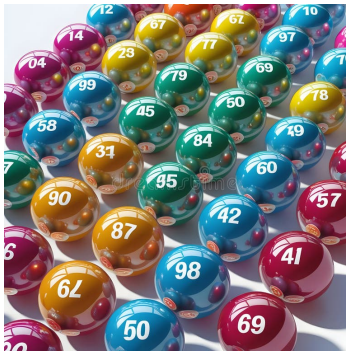
El 1939 el matemàtic, filòsof i especialista en lògica austríac-americà Kurt Gödel (1906-1978) va demostrar que la hipòtesi del continu és compatible amb tots els altres axiomes de la teoria de conjunts. Per tant **mai es podrà demostrar la seva falsedat.**

El 1963 el matemàtic americà Paul Cohen (1934-2007) va demostrar la **indecidibilitat** de la hipòtesi del continu.

Paradoxa de Ross-Littlewood

Descrita pel matemàtic John E. Littlewood al seu llibre *A Mathematician's Miscellany* de 1953, i després va ser ampliat per Sheldon Ross al seu llibre de 1988 *A First Course of Probability*. Intenta il·lustrar les dificultats conceptuals amb la noció d'una [supertasca](#), en què un nombre infinit de tasques es completen seqüencialment.

El problema comença amb un capsa infinita i un subministrament infinit de boles.



Paradoxa de Ross-Littlewood

Després es realitza un nombre infinit de passos, de manera que a cada pas s'hi afegeixen 10 boles a la capsa i se'n retira 1. Cada pas es realitza amb la meitat de temps que l'anterior, de manera que en dos minuts s'ha complert la tasca.

Després es planteja la pregunta: "Quantes boles hi ha a la capsa quan finalitza la supertasca?"

La capsa conté infinites boles

La capsa és buida

Depèn de les condicions

El problema està subespecificat / El problema està mal plantejat

Paradoxa de Thomson

La paradoxa del llum de Thomson és un experiment de pensament filosòfic basat en infinits. Va ser ideada el 1954 pel filòsof britànic James F. Thomson, que la va utilitzar per analitzar la possibilitat d'una supertasca, que és la realització d'un nombre infinit de tasques.

Considerem un llum amb un interruptor de palanca. Si premem l'interruptor una vegada, el **llum s'encén**. Amb una altra pulsació, el **llum s'apagarà**. Ara suposem que hi ha un ésser capaç de realitzar la tasca següent: iniciar un temporitzador i encendre la làmpada. Al cap d'un minut, l'apaga. Al cap de mig minut més, la torna a encendre. Al cap d'un quart de minut més, l'apaga. Al següent vuitè de minut, la torna a encendre i continua així, prement l'interruptor cada vegada després d'esperar exactament la meitat del temps que havia esperat abans de prémer-lo anteriorment. La suma d'aquesta sèrie infinita d'interval·ls de temps és exactament dos minuts.

La làmpada està encesa o apagada al cap de dos minuts?

Benardete i trompeta de Gabriel

Inspirada en el llibre *Infinity: An Essay in Metaphysics* (1964), del filòsof José Benardete. És un experiment mental que parla sobre una sèrie infinita de sicaris amb una mateixa tasca; matar una persona concreta si un altre sicari no l'ha matat encara. [La paradoxa planteja el dubte de si és possible un passat infinit.](#)



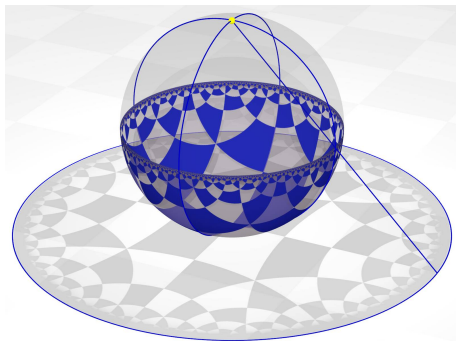
Trompeta de l'arcàngel Gabriel

Més enllà dels càlculs. Punt de l'infinit

Ampliació de $\mathbb{R}^2$ per tenir en compte l'infinit.

Un punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ està a prop de ∞ si el mòdul de (x, y) , $x^2 + y^2$, és molt gran.

Compactificació del pla: $\overline{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \simeq S^2$.



Projecció estereogràfica. El pol nord de l'esfera és el punt de l'infinit.

Micos escrivint a màquina

Posem un mico a escriure a màquina. Suposem que polsa completament a l'atzar les tecles, i que la probabilitat de polsar cadascuna d'elles és $\frac{1}{50}$.

A més, suposem que el que polsa en un cert instant és totalment independent del que polsa en els instants anteriors i posteriors.



$P \{\text{escriure BANANA}\} = \left(\frac{1}{50}\right)^6 = \frac{1}{15625000000} \approx 6.4 \times 10^{-11}$. La probabilitat de no escriure BANANA polsant 6 tecles és $p = 1 - \left(\frac{1}{50}\right)^6 = 0.999999999936 < 1$

Micos escrivint a màquina

Anàlogament, la probabilitat de NO escriure BANANA en cap de N blocs de 6 tecles és p^N .
Veiem alguns valors:

N	10^6	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}
p^N	0.99993	0.993	0.94	0.53	0.002	1.6×10^{-28}

Si el mico escriu 10^{12} blocs de 6 lletres, la probabilitat d'escriure BANANA en algun d'ells és

$$1 - p^{10^{12}} = 0.9999999999999999999999999999998396...$$

Observeu que la probabilitat de que ho escrigui polsant 6×10^{12} tecles encara és més gran, ja que pot passar que el mico escrigui:

... X97BAN ANA;I) 9TY6DS ...

Micos escrivint a màquina

Així,

$$P \{ \text{escriure BANANA en } N \text{ blocs de 6 lletres} \} \geq 1 - p^N.$$

Com que $0 < p < 1$, $\lim_{N \rightarrow \infty} 1 - p^N = 1$. Si el mico polsa infinites tecles la probabilitat de que escrigui BANANA és 1.

De fet, pel Lema de Borel-Cantelli,

La probabilitat de que escrigui infinits cops BANANA també és 1.

I si enlloc d'una paraula de 6 lletres agafem un llibre ? Per exemple,
El mecanoscrit del segon origen, Manuel de Pedrolo, que podria tenir un 300.000 caràcters.

L'únic que canvia és que si considerem que un llibre té M caràcters, llavors hem de considerar

$$p = 1 - \left(\frac{1}{50}\right)^M < 1$$

Llavors, si el mico polsa **infinites tecles** la probabilitat de que escrigui el *El mecanoscrit del segon origen* és 1.

I la probabilitat de que l'escrigui **infinites vegades**, també és 1.

Micos escrivint a màquina

Si el mico polsa **infinites tecles** la probabilitat de que escrigui
TOTES LES OBRES QUE S'HAN ESCRIT FINS ARA és 1.

Es més, la probabilitat de que escrigui **infinits cops**
TOTES LES OBRES QUE S'HAN ESCRIT FINS ARA també és 1.



I posats a imaginar, si hi ha infinits micos polsant infinites tecles, amb probabilitat 1, algun d'ells escriurà a la primera **TOTES LES OBRES QUE S'HAN ESCRIT FINS ARA**; bé, de fet
INFINITS D'ELLS !!

Gràcies per la vostra atenció !
Gràcies per la vostra atenció !
Gràcies per la vostra atenció !
Gràcies per la vostra atenció !
Gràcies per la vostra atenció !
Gràcies per la vostra atenció !
Gràcies per la vostra atenció !