Pub. Mat. UAB
Nº 12 Juny 1979

GRUPS AMB DUALITAT HOMOLÒGICA

Manuel Castellet
Dept. de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Un grup G amb dualitat de Poincaré (un PD-grup) és un grup, l'homologia i la cohomologia del qual verifiquem relacions anàlogues a les de les varietats compactes ($H_k(G,Z) = H^{n-k}(G,Z)$, n fix ,per a tot k). Aquests grups foren estudiats recentment per R. Bieri -- (Gruppen mit Poincaré-Dualität, Comment. Math. Helv. 47- (1972), 373-396) i per F.E.A. Johnson i C. T.C. Wall (On groups satisfying Poincaré dualitu, Ann. of Math. 69 (1972) 592-598), el primer dès d'un punt de vista quasi exclusivament algebraic i els segons sota un aspecte més topològic.

En aquesta conferència parlaré d'un tipus més general de dualitat que inclou la dualitat de Poincaré i que dóna noves aplicacions a l'àlgebra i a la topologia. El paper que en els PD-grups li toca a Z ara el realitzarà un G-mòdul qualsevol (que veurem que no pot ser tan - qualsevol!). Aquest grups, que anomenaré D-grups van - ésser introduïts per R. Bieri i B. Eckmann a "Groups with Homological Duality Generalizing Poincaré Duality", Inventiones Math. 20 (1973) 103-124.

Un cop hagi donat la definició i les primeres propietats dels D-grups, tractaré aquí quatre aspectes dels grups amb dualitat:

1) Propietats de finitud, tant del D-grup G com del G-mòdul dualizant C, entre les que cal destacar:

1.1. Tot D-grup és de tipus finit

1.2. El G-mòdul C admet una presentació finita

1.3. C admet una G-resulució finita per mòduls projectius de tipus finit

1.4. $H_k(G,Z)$ i $H^k(G,Z)$ són grups abelians de tipus finit

1.5. Si G és un PD-grup, G és de tipus FP, és a dir, el G-mòdul trivial Z admet una G-resolució finita per mòduls projectius de tipus finit.

2) Propietats d'extensió:

2.1. Tot subgrup d'índex finit d'un D-grup és un D-grup

2.2. Se H és un D-grup subgrup d'índex finit d'un grup G lliure de torsió, aleshores G és un D-grup

2.3. Tota extensió d'un D-grup per un D-grup és un D-grup

3) Determinació dels PD-grups resolubles:

Un grup resoluble és un D-grup, si i només is és policíclic i lliure de torsió

4) Relacions amb la topologia:

4.1. Tot grup de nusos és un D-grup, però no un - PD-grup

4.2. La introducció dels D-grups porta de manera natural a la introducció d'un concepte de dua litat a topologia que generalitzi la dualitat de Poincaré

4.3. Si G admet un complex d'Eilenberg-Mac Lane $K(G,1)$ que sigui una varietat compacta amb - contorn, aleshores es poden donar condicions- per tal que G sigui un D-grup en termes de l'homologia entera del contorn del recobriment universal de $K(G,1)$

Anem a desenvolupar amb el mínim de tècnica possible cada un dels quatre aspectes esmentats.

Definicions i primeras propietats

Un grup G es diu un D-grup de dimensió n respecte al G-dòdul per la dreta C, si existeix un --- $e \in H_n(G,C)$ tal que per a tot G-mòdul per l'esquerra- A, el cap-producte per a dongui un isomorfisme.

$$e \cap -: H^k(G,A) \xrightarrow{\simeq} H_{n-k}(G,C \otimes A)$$

per a tot enter k

D'aquesta definició resulten immediatament:

a) $C \cong H^n(G,ZG)$,

b) $H_n(G,C) \cong Z$,

c) G té dimensió homològica i cohomològica n , i , per tant, utilitzant el teorema de K.W. Grüenberg (Cohomological Topics in Group Theory, cap. 8, L.N. Mathe. 157 Springer 1970), G és lliure de torsió

d) C és un grup abelià lliure de torsió (Considerar la succesió d'homologia associada a la successió exacta de coeficients $ZG \rightarrowtail ZG \twoheadrightarrow Z_p \otimes ZG$ donada per la multiplicació per p , p primer).

Les propietats c) i d) junt amb la condició de que $H^k(G,F) = 0 \quad k \neq n, \forall F$ G-mòdul lliure (propietat que compleixen trivialment els D-grups), permeten afeblir l'isomorfisme imposat en la definció de D-grup, requirint lo únicament per dimensió n i coeficits lliures . (Veure R. Bieri-B.Eckmann, abans citat) .

1. Propietats de finitut

1.1. Si G és un D-grup, G és de tipus finit . Sigui $\{G_i\}$ la família dels subgrups de tipus finit de G . Com que l'homologia commuta amb els colímits, ha d'existir un subgrup G_i de tipus finit amb $H_n(G_i,C) \neq 0$, d'on

$$0 \neq H_n(G_i,C) \cong H_n(G,C \otimes_{G_i} ZG)$$

$$\cong H_n(G,C \otimes Z(G/G_i)) \cong H^0(G,Z(G/G_i)) \ .$$

($Z(G/G_i)$ indica el G-mòdul per la dreta generat per les classes $G_i x$, $x \in G$) . Ara bé, només hi ha elements de $Z(G/G_i)$ fixos per G si G/G_i és finit.

1.2. El que C admeti una presentació finita es basa en el següent criteri de M.Auslander: " Sigui R un anell amb unitat, C un R-mòdul i $\mu_I : C \otimes_R \prod_I R \longrightarrow \prod_I C$ l'homomorfisme donat per $\mu_I(c \otimes \prod_I r_i) = \prod_I cr_i$. Aleshores, C admet una presentació finita si i sols si μ_I és un isomorfisme per tot producte directe $\prod_I R$ " .

En el cas en què G sigui un D-grup, agafant $R = ZG$, l'homomorfisme μ_I no és altre que ,

$$C \otimes_R \prod_I ZG = H_0(G, C \otimes \prod_I ZG) \longrightarrow \prod_I H_0(G, C \otimes ZG) = \prod_I C$$

són Hom (A,Z) i Ext (A,Z)

(Veure, per exemple, R.Bieri-B.Eckmann "Finiteness properties of duality groups", CR Acad.Soc.,Paris,276,série A, 831-833).

1.5. Un D-grup G es diu un PD-grup (grup amb dualitat de Poincaré) si el mòdul dualitzant C és el G-mòdul Z (amb estructura no necessàriament G-trivial). En aquest cas, és clar que G és un grup FP, d'acord -

amb la definició donada a la introducció, ja que al ser la dimensió cohomològica de G finita, el G-mòdul Z (possiblement no trivial) admet una resolució projectiva finita

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_o \twoheadrightarrow Z$$

que dóna una resolució projectiva finita de Z (G-trivial) dotant a P_i de l'estructura de G-mòdul següent:

$$x.p = \mathrm{sig}(x)\; p.x^{-1} \;, \quad x \in G \;, \quad p \in P_k \;,$$

sig: $G \longrightarrow Z_2$ definit per l'acció de G sobre Z .

El recíproc no és del tot cert. Es pot demostrar, però, que si G és un grup FP, $H^k(G,ZG) = 0$ $k \neq n$ i $C = H^n(G,ZG)$ és lliure de torsió, aleshores G és un D-grup de dimensió n respecte al mòdul C .
La demostració fa ús essencial de que per als grups de tipus FP, el functor $H^k(G,-)$ commuta amb les sumes directes, d'on $H^k(G,F) = 0$ per a tot G-mòdul lliure.

2. Propietats d'extensió

La demostració de las tres propietats d'extensió esmentades a la introducció segueixen línies bastant independents.

2.1. Es pot considerar trivial ja que l'isomorfisme de dualitat pel subgrup H ve donat composant el del grup G amb la restricció $H_n(G,C) \longrightarrow H_n(H,C)$.

2.2. Es pot reduir el cas en qué H sigui normal a G per 2.1. La demostració de que G és un D-grup es fa -- comprovant les següents 4 condicions, que són sufi -- cients:

a) G té dimensió cohomològica finita (igual a la de H per un teorema de J.P.Serre, "Prospects in Mathema - tics, Ann. of Math. Studies, 70, (1971),Princeton).

b) $H^k(G,F) = 0 \quad k \neq n, \quad F$ G-lliure, ja que G-lliure implica H-lliure i la successió espectral de Lyndon-Hochschild-Serre dóna el resultat.

c) $H^n(G,ZG) \cong H^n(G,ZH)$ (ja que $|G:H| < \infty$) és lliure de torsió.

d) Si $e \in H_n(N,C)$ dóna l'isomorfisme de dualitat per - N, $\bar{e} = \mathrm{cor}\ e \in H_n(G,C)$ és tal que per tot G-mòdul lliure F es té
$(\bar{e} \cap -) : H^n(G,F) \cong C \otimes_G F(=H_o(G,F))$.

En efecte, si $Q = G/H$, de l'estudi del diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^n(G,F) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[rrr, bend left, "\bar{e} \cap -"] \arrow[dr] & H^n(H,F) \arrow[r, "e \cap -"] & H_o(H,C \otimes F) \arrow[r, "\mathrm{cor}"] & H_o(G,C \otimes F) \\
 & & H_o(H,C \quad F) \arrow[u, hook] & \\
 & H^n(H,F)^Q \arrow[uu, hook] \arrow[r, dash, "\cong"] & H^n(H,C \otimes F)^Q \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] \arrow[r, "i"] & H_o(H,C \otimes F)_Q \arrow[uu, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

resulta que $\bar{e} \cap -$ és isomorfisme sempre que --

cor $H_n(H,G) \subset |Q| H_n(G,C)$, ja que r és isomorfisme (per la successió espectral de Lyndon-Hochschild-Serre) i

$$i : H_o(H, C \otimes F)^Q = C \otimes F \longrightarrow C \otimes F = H_o(H, C \otimes F)_Q$$

és la multiplicació per $|Q|$.

La inclusió desitjada és, aleshores, conseqüència de que per a tot $Z_{|Q|}$ G-mòdul D i tot $k \geq 0$ l'aplicació $\bar{e} \cap - : H^k(G,D) \longrightarrow H_{n-k}(G, C \otimes D)$ és - trivial.

2.3. Es tracte de demostrar que la classe dels D-grups és tancada per la formació d'extensions. Més precisament, si $N \longrightarrow G \longrightarrow Q$ és una successió exacta de grups i N i Q són D-grups de dimensions n i m respectivament, aleshores G és un D-grup de dimensió $n + m$.

Les condicions a), c) i d) esmentades a l'apartat anterior es comproven aplicant repetidament la successió espectral de Lyndon-Hochschild-Serre . La condició b) $(H^k(G,F) = 0 \quad k \neq n+m$, F G-lliure) , és conseqüencia de l'isomorfisme.

$$H^k(G,F) \cong H^{k-n}(Q, H^n(N,F)) \qquad k \neq n+m$$

i del fet que $H^n(N,F)$ és un Q-mòdul coinduït.

3. PD-grups resolubles

Recordem, breument, les definicions de grup resoluble, poli - cíclic i nilpotent.

G es diu resoluble si existeix una série normal (finita)

$$G = G_o \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_{k-1} \rhd G_k = \{e\}$$

amb quocients abelians.

Si existeix una tal sèrie normal amb quocients cíclics, el grup es diu policíclic i si existeix una tal sèrie central (és a dir, si $G_{i+1}/G_i \subset \text{Centre}(G/G_i)$) el grup es diu nilpotent.

És clar que tot grup nilpotent i tot grup policíclic són - grups resolubles, així com que tot grup nilpotent de tipus fi - nit és policíclic.

Si G és resoluble es difineix el número de Hirsch de G per

$$hG = \sum_{i=1}^{k} \text{rang } G_i/G_{i-1}$$

independent de la sèrie normal escollida. Si G és policíclic hG és el nombre de factors cíclics infinits de la sèrie i si G és nilpotent $hG = \sum_{i-0}^{k} \text{rang centre } (G/Gi)$

3.1. Teorema: Tot grup policíclic G liure de torsió és un PD-grup de dimensió hG .

En efecte, si considerem una sèrie normal amb quocients cíclics, al ser G lliure de torsió, G_{k-1} ha d'esser cíclic infinit i per tant PD-grup de dimensió 1 . Aleshores tenim:

$$G_{k-1} = \mathbb{Z} \longrightarrow G_{k-2} \longrightarrow G_{k-1}/G_{k-1} = H \text{ cíclic}$$

Si H és infinit, és un PD-grup de dimensió 1, i per 2.3., G_{k-2} és un PD-grup de dimensió 2. Si H és finit, per 2.2., G_{k-2} (lliure de torsió) és un PD-grup de dimensió la de G_{k-1} (=1) Seguint així s'obté el teorema.

Una mena de recíproc del teorema anterior ens diu que els grups policíclics són els únics PD-grups resolubles.

3.2. Teorema: Tot PD-grup resoluble G és policíclic.

Posem $G^{o} = \mathrm{Ker}(G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, H^{n}(G, ZG))$ que és trivial o isomorf a Z_2 . En tot cas $|G/G^{o}| \leq 2$. Per tant, per 2.1. G^{o} és un PD-grup i tot subgrup abelià de G^{o} és de rang finit.

Aleshores, per un teorema de Baer-Heinecker, existeix una sèrie normal

$$G^{o} \triangleright H \triangleright N \triangleright \{e\}$$

amb N nilpotent, H/N abelià lliure de rang finit i $|G^{o}/H| < \infty$

El punt essencial en la demostració del teorema consisteix en veure que N és de tipus finit. En tal cas N serà policíclic, d'on H serà policíclic i, com que G^{o}/H és finit, i $|G/G^{o}| \leq 2$, G serà policíclic.

La demostració de que N és de tipus finit és molt elaborada i gens trivial.

Per acabar aquest apartat, observem que el teorema 3.2 no es pot estendre a D-grups. De fet el grup G generat per x,y amb les relacions $yxy^{-1} = x^{2}$ és un D-grup resoluble no policíclic.

4. Algunes conseqüències topològiques

4.1. Primer de tot un exemple, que és el que ha motivat la introducció dels D-grups.

Sigui G un grup de nusos, és a dir el grup fonamental del complementari d'un nus no trivial a S^{3}. G admet una presentació finita, té dimensió cohomològica 2 i $H^{1}(G,ZG) = 0$ (que implica $C = H^{2}(G,ZG)$ és lliure de torsió). Aleshores, per l'observació feta al final de 1.5., G és un D-grup de dimensió 2 i mòdul dualitzant C.

G no pot ésser un PD-grup, ja que si fos $C = Z$ G-trivial, aleshores $H_2(G,Z) = Z$ i es sab que $H_2(G,Z) = 0$; si fos $C = Z$ no G-trivial, aleshores $H^2(G,Z) = Z_2$ que contradiu el teorema dels coeficients universals, ja que $H_1(G,Z) = Z$.

4.2. Transportant els conceptes algebraics que hem tractat a la topologia, direm que un CW-complex Y és un complex amb dualitat si està dominat per un CW-complex finit (és a dir, si existeix un CW-complex finit X i aplicacions $f : Y \longrightarrow X$, $g : X \longrightarrow Y$ tals que $gf \simeq 1_Y$) , i existeix un $e \in H_n(Y,C)$ (C $\Pi_1 Y$-mòdul) tal que $e \cap - : H^k(Y,A) \cong H_{n-k}(Y, C \otimes A)$ per a tot enter k i tot $\Pi_1 Y$-mòdul A

Aleshores, si $K(G,1)$ denota un complex d'Eilenberg-MacLane (es a dir, un CW-complex amb grup fonamental G i grups d'homotopia superiors nuls), $K(G,1)$ és un complex amb dualitat si i sols si G és un D-grup finitament presentat, i de tipus FP . Per tant,

Teorema: Si G és un grup finitament presentat, de tipus FP i tal que per algun enter n, $H^n(G,ZG)$ és lliure de torsió i $H^k(G,ZG) = 0$ $k \neq n$, aleshores $K(G,1)$ és un complex amb dualitat.

Observis que si C és el $\Pi_1 Y$-mòdul Z , la dualitat definida més amunt és la de Poincaré usual.

4.3. Suposem que el grup G admet un complex d'Eilenberg-MacLane X que sigui una varietat amb contorn orientable connexa i compacta de dimensió m , aleshores

$$H^k(X,ZG) \cong H_{m-k-1}(X, \partial X; ZG) \cong H_{m-k}(\tilde{X}, \partial \tilde{X};Z) \cong H_{m-j-1}(\partial\tilde{X},Z)$$

on $\tilde{X}$ és el recobriment universal de X .

Si,a més, G és un D-grup de dimensió n, aleshores $H_{m-k-1}(\partial\tilde{X},Z) = 0 \quad k \neq n$ i $H_{m-n-1}(\partial\tilde{X},Z)$ és no trivial i lliure de torsió. Així, doncs, $H_i(\partial\tilde{X},Z) = 0$ $i \neq m-n-1$ i la dimensió de G és $\leq m-1$.

Recíprocament, com que G és de tipus FP , si suposem que $H_i(\partial\tilde{X},Z) = 0 \quad i \neq q$ i $H_q(\partial\tilde{X},Z)$ és lliure de torsió, aleshores G és un D-grup de dimensió $n = m-q-1$.

Això s'aplica, per exemple, al cas en què G sigui - un grup de nusos, amb $q = 0$. El complement d'un nus no trivial a S^3 és una 3-varietat amb contorn que és un $K(G,1)$ i el seu contorn és un 2-tor.

$$H_1(\partial\tilde{X},Z) = H_2(\partial\tilde{X},Z) = 0$$

i $\partial\tilde{X}$ té una infinitat de components arc-connexes.
