Pub. Mat.UAB
Nº 12 Juny 1979

PROBLEMES AMB LES EQUACIONS DE LA HIDRODINAMICA. (*)

Carles Perelló
Secció de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona

Fa 200 anys que en Euler va proposar les equacions que imposen condicions a l'escolament d'un fluid incompressible no viscós. Aquestes equacions en derivades parcials relacionen la pressió p i les tres components de la velocitat v, considerades com a funcions del temps t i de la posició x :

$$v_t + (v,\nabla)\, v = -\text{grad } p + f$$
$$\text{div } v = 0$$

Aquí la notació és la següent: v és el vector (v_1, v_2, v_3), v_t és $\frac{\partial v}{\partial t}$, $(v, \nabla)\, v$ és el vector $\Sigma\, v_j \frac{\partial v}{\partial x_j}$ f és la força deguda a un camp extern (per exemple la gravetat) i div $v = \Sigma \frac{\partial v}{\partial x_j}$.

Si M és la regió a la que està confinat el líquid, s'ha d'imposar la condició suplementària de que v sigui tangent a la vora de M.

La utilització d'aquest sistema d'equacions com a model del comportament d'un fluid, va portar a resultats que resultaven contradictoris amb les observacions experimentals.

(*) Conferència presentada al Seminari Barcelona el 4 de Maig a la ETSEIB.

Entre les més sorprenents hi ha la paradoxa de d'Alembert: fent servir aquestes equacions es demostra que l'escolament estacionari d'un fluid a l'exterior d'un cos, el qual escolament tendeix a tenir una velocitat constant a l'infinit, no produeix cap força sobre aquest cos. És a dir, que una peça submergida en un torrent no experimenta cap força!

Per tal de salvar aquests inconvenients, al segle XIX es van modificar les equacions de manera de tenir en compte l'efecte d'una viscositat lineal. Sota els noms de Navier i de Stokes es coneix el sistema d'equacions

$$v_t + (v, \nabla)\, v = -\text{grad}\, p + \nu \Delta v + f$$

$$\text{div}\, v = 0,$$

on ν és l'anomenat coeficient de viscositat (constant), i Δv és el vector $\sum \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$.

A més s'acostuma a imposar la condició de que la velocitat s'anul.la a les parets del recipient, és a dir, $v = 0$ a ∂M.

El terme de viscositat salva la paradoxa de l'Alembert al permetre la creació de vorticitat a la capa limit, poguent-se explicar aleshores els fenòmens de sustentació i d'arrossegament d'un cos dins d'un escolament torrencial. A canvi d'això es complica molt el model matemàtic: les solucions estacionàries per v de l'equació d'Euler es poden obtenir, al menys localment, com a gradients de potencials (és a dir, de solucions de l'equació del potencial), mentre que això ja no és cert en el cas de Navier-Stokes. El problema és tant difícil que es tenen molt pocs exemples d'escolaments estacionaris que satisfaguin les condicions de Navier-Stokes. Per exemple, ni tan sols es sap si existeix solució estacionaria de l'escolament viscós al voltant d'un cilindre!

Hem tingut compte de dir que les equacions posen condicions sobre l'escolament, i no que determinen l'escolament. Això és degut a que no sabem a priori que les equacions junt amb el coneixement de la pressió i la velocitat a tots els punts del fluid en un moment donat, determinen (d'una manera única, és clar), la pressió i velocitat en tot temps posterior. I aquí precisament es troba un dels problemes més seriosos de la hidrodinàmica: el decidir sobre l'existència, la unicitat, la regularitat i la continuitat de les solucions de les equacions d'Euler i de Navier-Stokes, conegut el valor d'aquesta solució (p i v) en un moment donat. La solució satisfactòria d'aquest problema no ha estat encara assolida en dimensió 3, però si en dimensió 2. Els resultats coneguts están escampats en una gran quantitat d'articles i en algún llibre, i no és gens senzill resumir-los en poques paraules. El primer en obtenir resultats interessants va ser en Leray, que va publicar els seus resultats l'any 1934, obrint tota una nova etapa, no només en l'estudi de la hidrodinàmica, sino en l'estudi de les equacions d'evolució. El treball va ser seguit per en E. Hopf, que va publicar els seus resultats al 1951, i per Ladixenskaia, que va ser la primera en escriure un llibre contenint els resultats (miri's la bibliografia al final). En el problema hi ha treballat i hi segueix treballant tot un estol de matemàtics, entre els que podem esmentar Judovic, Kato, Fujita, Foias, Lions, Prodi, Sobolevski , Iooss, Temam, etc..

El mètode utilitzat per a tots aquests resultats es basa en la utilització de les anomenades solucions "febles", es a dir, de funcions que satisfan les solucions sense ser derivables en el sentit clàssic, sinó en el sentit de la Teoria de Distribucions. Més precisament, les solucions es cerquen en el espai del tipus de Lebesgue (L^P), o del tipus de Sobolev ($H^{S,P}$).

Per a donar una idea de com s'aborda el problema, farem l'esboç d'una demostració, en el cas de M campacta, deguda a en Weissler (vègis el llibre de Marsden i McCracken esmentat a la bibliografia). Es comença per reduir les equacions de Navier-Stokes a equacions d'evolució en un espai convenient. Per a fer això es tracta d'eliminar p, el que s'aconsegueix, per exemple, utilitzant la descomposició única d'un camp vectorial en un camp solenoidal i un camp gradient. En forma precisa, tenim que si H^s és l'espai de Sobolev de les funcions a M que tenen derivades a L^2 fins a l'ordre s, i si X és un camp que té les seves components a H^s, llavors existeix un camp Y amb components a H^s i un element $\emptyset$ de H^{s+1}, tals que $X = Y + \text{grad } \emptyset$, amb $\text{div } Y = 0$ i Y paral.lela a ∂M. A més Y i $\emptyset$ són únics amb aquesta propietat. Si es defineix la projecció P dels camps en el camps de divergència nula i paral.lels a ∂M mitjançant $PX = Y$, i si apliquem P a les equacions de Navier-Stokes, obtenim:

$$v_t = P(\nu\Delta v - (v,\nabla)v) = T(v),$$

és a dir, la derivada del camp v respecte a t resulta ser una funció de v. Malauradament no podem aplicar directament els teoremes d'existència i unicitat de solució per a equacions diferencials ordinàries en espais de

Banach, perquè T fa baixar l'ordre de l'espai de Sobolev. Per a solventar aquesta dificultat, s'observa que l'equació lineal $v_t = \nu P\Delta v$ determina un semigrup analític d'operadors (anàleg al que apareix a l'equació del calor), i que la norma de $\exp(\nu P\Delta)t$ com a operador de H^1 a H^2 és integrable a tot interval $[0,T]$. Escrivint llavors la solució al temps t com una perturbació d'aquesta, mitjançant una fórmula del tipus de la de variació de paràmetres, i fent servir el que certa aplicació és contractiva, es demostra que existeix una solució local a H^2. El comprobar que aquesta solució és diferenciable si la condició inicial ho és i que existeix per tota $t > 0$ si M està a $\mathbb{R}^2$ exigeix més feina. Fem notar que si M és a $\mathbb{R}^3$ és un problema encara obert el demostrar que no hi ha solucions que s'escapin a l'infinit en un temps finit. També és notable que no s'ha pogut demostrar més que dependència continua de les solucions respecte a t! En el cas de que M no sigui compacte el problema està molt poc tocat, emcara que és clar que s'han de demanar condicions a l'infinit ben precises per a poder assolir algún resultat.

Per les equacions d'Euler la situació és encara més difícil, i una manera de demostrar que les solucions de la equació d'evolució resultant existeixen és fer tendir ν a 0 a les equacions de Navier-Stokes. Cal remarcar aquí el treball de Arnold, que mostra que les solucions de les equacions, de Euler es poden interpretar com a geodèsiques en una varietat riemanniana de dimensió infinita. (Es poden consultar els llibres de Arnold i de Marsden esmentats a la bibliografia).

Observem que el teorema d'existència i unicitat ens dóna una aplicació F_t de H en H, tal que si v és el camp de velocitats al temps inicial, $F_t v$ l'és al temps t. Si F_t està definit per tota $t > 0$ això és conegut com a un semisistema dinàmic (com en el cas de M a $\mathbb{R}^2$). En el cas de que no estigui definit per tota $t > 0$ es parla d'un semisistema dinámic local.

Per una v donada, l'aplicació de l'interval $[0,\infty)$ a H donada per $F_t v$ és la trajectòria de v, i descriu a l'espai d'estats de la velocitat H, l'evolució d'aquest camp en el temps. Les solucions estacionàries corresponen a punts de repòs o d'equilibri d'aquest sistema, i en ells $F_t v$ és constant.

Un problema natural i que pot ser d'importància pràctica, és el de l'estabilitat de les solucions estacionàries. Suposem que es sap que hi ha un escolament torrencial estacionari al voltant d'un cos, si aquest escolament, com a punt crític del sistema dinàmic és estable, les petites perturbacions no l'afectaran molt, en canvi, si és inestable, una petita perturbació pot modificar molt l'escolament en el curs del temps. Donarem un exemple per il.lustrar el problema. Per a viscositats altes i velocitats petites, s'observa experimentalment que l'escolament torrencial al voltant d'un cilindre (es suposa molt llarg), amb eix perpendicular a la direcció del flux a l'infinit, té una solució estacionaria simètrica respecte al plà determinat per l'eix i la direcció limit del flux. Matemàticament es demostra que aquesta solució és globalment asimptòticament estable, és a dir, que es parteixi de l'estat que sigui, amb el temps es tendeix al mateix estat estacionari. Ara bé, si s'augmenta la velocitat o es disminueix la viscositat, s'observa experimentalment que a partir de cert valor, el flux comença a fuetejar passat el cilindre submergit. És com si la solució estacionària hagués deixat de ser estable i tot tendis a una solució periòdica: els camps de velocitat van canviant amb el temps d'una faisó periòdica. Matemàticament això no està encara explicat satisfactòriament, (encara que m'acaven d'arrivar noves de que en Bábenkov ho ha fet i encara no ho ha publicat), però l'explicació sembla ser del següent tipus:

En el cas de viscositat alta la solució estacionària v_o és tal que totes les trajectòries $F_t v$ tendeixen a v_o quan $t \to \infty$. Això es pot deduir d'un estudi de l'espectre de la part lineal T_t de F_t al punt v_o, que és un semigrup d'operadors lineals. Si l'espectre de T_t està contingut a un compacte de l'interior del cercle unitari als complexs, llavors v_o és asimptòticament estable. Si a l'anar variant la viscositat ν s'arriva a un valor crític ν_c tal que un parell de eigenvalors simples i conjugats creuen el cercle per sortir-se'n, pot ocorrer que v_o (que depèn de ν, és clar), deixi de ser estable, i que apareixi una trajectòria periòdica prop d'ella, que atregui les trajectòries del seu entorn . Això és conegut com a bifurcació de Hopf. (Vègis el llibre de Marsden-McCracken esmentat a la bibliografia). El problema de determinar l'espectre de la part lineal de F_t a v_o és tan seriós que fins ara no hi ha publicat cap resultat on es tingui prou control com per veure com es perd l'estabilitat. En una publicació recent es tracta un problema semblant per un disc girant al si d'un líquid. Es tenen tots els resultats satisfactòriament, però l'autor, incapaç de provarho, ha de suposar que els valors propis que surten del cercle unitari són simples.

Un altra exemple interessant el constitueix el moviment d'un líquid entre dos cilindres coaxials,

suposant que el cilindre exterior està quiet i que es fa girar l'interior amb una velocitat constant, ω, que serà el paràmetre del nostra problema. Per a ω baixa s'observa (i es demostra matemàticament) que hi ha una solució estacionària amb simetria tant axial com longitudinal, és a dir, invariant tant per girs al voltant de l'eix com per translacions en la seva direcció. Per un cert valor ω, es produeix la primera bifurcació: el flux estable discretitza la seva simetria longitudinal i, sense deixar de ser estacionari, es formen uns compartiments anul.lars, coneguts com a cel.les de Taylor, cada un entre els dos cilindres i dos plans perpendiculars a l'eix, i on el líquid, a més de girar al voltant de l'eix, va girant al voltant de la trajectòria circular al centre del compartiment, i de manera d'anar alternant el sentit d'aquest gir d'un compartiment al següent. Per a valors de ω encara més grans, també l'estructura en cel.les estacionàries deixa de ser estable, i es presenta un moviment no estacionari, en que les cel.les s'ondulen i giren al voltant de l'eix. Per valors de ω encara més grans s'observa un comportament turbulent. Per a més detalls del que passa es pot consultar el llibre de Marsden i McCracken.

L'anàlisi matemàtic dels fenòmens esmentats encara és molt incomplert i el que manca és precisemant, al menys per les dues primeres bifurcacions, un bon coneixement dels espectres dels operadors involucrats. En el mateix llibre de Marsden i McCracken hi ha un article d'en Schecter on fà un anàlisi matemàtic correcte, però hipotètic, en quan a que ha de suposar que els espectres fan el que els hi toca per que tot vagi bé.

Després del problema de la estabilitat i les bifurcacions, tocarem un problema més conflictiu: el de la turbulència. Encara no està clar el que es vol dir per turbulència en un sentit matemàtic, encara que en un sentit físic es designa així un estat en el que sembla que les particles es moguin d'una manera caòtica. En alguns experiment s'ha observat que l'aparició de la turbulència coincideix amb l'aparició d'un continu d'harmòniques a l'anàlisi de Fourier de la velocitat de les partícules, per comptes de les freqüències discretes que s'observen en els fluxs no turbulents (Vègis l'article de Bowen al"Turbulence Seminar").

En Leray va suggerir que la turbulència era deguda a que les solucions de la equacions no eren diferenciables en aquestes condicions pel que el model de Navier-Stokes no era vàlid. Més modernament en Landan va suposar que la turbulència era un moviment quasi-periòdic, amb una quantitat gran de frequències independents com per que fós molt complicat. Aquesta idea s'ha portat més endavant, en el sentit de que la turbulència es podria presentar com a resultat de bifurcacions successives, cada una aportant noves freqüencies, i acumulant-se en nombres infinit (com a les catàstrofes generalitzades d'en Thom). En els darrers temps els matemàtics, al menys els qui utilitzen el llenguatge dels sistemes dinàmics, es senten inclinats a rebutjar les hipòtesis anteriors. Això és degut a dos fets: primer a que els mètodes numèrics d'en Chorin (vègis el llibre d'en Marsden), han permès integrar les equacions per números de Reynolds molt grans (vol dir viscositats molt petites o velocitats molt grans), i han conseguit una resolució prou bona com per explicar la formació de vòrtexs en el flux torrencial passat un cilindre. Àixó sembla indicar que, encara per aquests escolaments d'apariència turbulenta, les equeacions són vàlidas i les solucions diferenciables.

En segón lloc sembla que la turbulència no apareix al cap de moltes bifurcacions que incrementin gradulament el nombre de frequències, sinó que, al cap d'un parell o tres de bifurcacions, ja apareix el continu de frequències (com en el cas ressenyat del flux entre dos cilindres). Aixó fa pensar en la possibilitat del següent mecanisme: per a valors grans de viscositat es té una solució estacionària asimptòticament estable. Al disminuir la viscositat es perd l'estabilitat, i apareix una varietat invariant de dimensió finita (1 o 2 en general), a la que tendeixen totes les trajectòries $F_t v$ i on passen les coses interessants: per exemple pot haver-hi la trajectòria tancada asimptòticament estable corresponent a la bifurcació de Hopf. Aquesta trajectòria tancada pot perdre la seva estabilitat per altres valors de la viscositat, i es pot separar d'ella un tor invariant de dimensió dos, diguem, asimptòticament estable, on el flux tendirà encara a òrbites tancades (genèricament). Del tor bidimensional es pot separar, al perdre aquest l'estabilitat, un tor tridimensional, per exemple, que sigui asimptòticament estable. Dins d'aquest tor de dimensió tres el flux ja pot ser molt complicat. Tant que, si hi ha el que s'ha batejat amb el nom de "strange attractor" en anglès, i que nosaltres anomanem atractor complicat, es podria tenir un bon candidat per a la turbulència, doncs les trajectòries que tendeixen a un d'aquests atractor tenen un comportament bastant caòtic.

Aquests atractors complicats han sigut detectats en sistemes dinàmics a espais de tres dimensions, i en particular són molt coneguts els exemples de Lorenz i Rikitake. El seu comportament és molt estable, en el sentit de que persisteixen sota perturbacions, el que els fa uns bons candidats, en contra de les solucions quasiperiòdiques, que no són gens genèriques. Els primers en suggerir que la turbulència es pot deure a la presència d'atractors complicats i que essencialment és un fenòmen de sistemes dinàmics en dimensió finita van ser Ruelle i Takens (vègis bibliografia). Per a tenir més informació sobre aquests atractors recomenem llegir l'article del Marsden al Turbulence Seminar o bé el meu esmentat a la bibliografia.

Aquests ens semblen els problemes relacionats amb sistemes dinàmics més importants de la hidrodinàmica, al menys per el que fà als líquids incompressibles. Si s'admet compressibilitat o transmisió de calor, llavors les equacions es compliquen encara més i es poden presentar fenòmens com el de la convexió, que és ric en problemes matemàtics, però que ja no tocarem aquí.

BIBLIOGRAFIA

Marsden, J., McCraken, M. "The Hopf bifurcation and its applications". Springer, New York, 1976

Marsden, J., "Applications of global analysis in mathematical physics". Publish or Perish, Boston, 1979.

Leray, J. "Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace". Acta Math. 63 (1934), 193-248.

Ruelle, D., Takens, F. "On the nature of turbulence". Comm. Math. Phys. 20(1971), 167-192.

———— "Turbulence Seminar", Berkeley 1976/1977", Lecture Notes 615, Springer, New York, 1977.

Arnold, V.I. "Méthodes Mathematiques de la Mécanique classique". MIR. Moscú. 1976.

Ladixenskaia, O.A. "The mathematical Theory of viscous Incompressible Flow". Annals of Math. Studies 11, Princeton, 1947.

Perelló, C. "Turbulencia y atractores complicados" Acta del I Congres de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, El Escorial, 1978.