Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

# CADENES DE SALES DISCRETES

Antoni Torrens Torrell

Dpt. d'Estadística Matemàtica
Universitat de Barcelona

Abstract:
The Sales algebras are the substract of some positive implicational calculi. As a first aproximation to their representation we Study the Sales algebras that are discrete and linear.
In this paper we present a caracteritzation of the finite Sales algebras and we give also an infinite discrete Sales algebra such that we can identify with it every linear infinite simple Sales algebra with a penultimate element. The most interes ting result is the first Theorem .In it we show that certain elements of the Sales algebras generate finit linear subalgebras of them.

Per àlgebras de Sales (a.de.S.),veigi's [2] , [4], entenem una terna (A,.,u) amb A un conjunt, . una operació binaria definida en A, i u un element distingit de A(operació 0-aria), tal que per tot $a,b,c \in A$, satisfà:

1.- $a.a = u$

2.- $a.b = b.a = u$ , implica $a = b$

3.- $a.u = u$

4.- $a.(b.c) = b.(a.c)$

5.- $(a.b).((c.a).(c.b)) = u$

6.- $(a.b).b = (b.a).a$ (Sales [3] )

Es a dir, (A,.,u) és un algebra d- completa que satisfà 6. A més(veigi's [2] [4]), la relació $a \leq b$ sii $a.b = u$, és d'ordre i u n'és l'element maxim; és a dir,(A,.,u) es àlgebra imlicativa. D'altra banda $a \vee b = (a.b).b$ és el suprem de a i b i (A,.,v,u) és supraretícle d- complet(op. cit).

Quan $(A, \leq)$ té element mínim 0 ( [2] , [4] ) , aleshores fent $\neg a = a.0$ , i $a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b)$ s´obté un àlgebra de Wajsberg (a.de W.), i es té que $(A,.,\wedge,\vee,\circ,u,0,\neg)$ es un reticle d- complet distributiu amb negació forta de Morgan. L´obtenció i les propietats de les àlgebres esmentades poden trobars-se en [2] i [4]. També en [1], en reben el nom de MV-algebres), encara que utilitzan unes altres operacions: $\ast$ , $+$ , $\neg$ ; malgrat que es pot veure que: $a + b = \neg a.b$ , i $a \ast b = \neg(\neg a + \neg b)$.

En primer lloc provem el seguent Teorema:

TEOREMA 1.- Si $(A,.,u)$ és a.de S. i $a \in A$ és tal que existeixen $c \in A$ , $n \in N$ i $a^n.c = a$; aleshores : $(W_c(a) = \{c, a.c, a^2.c, \ldots, a^n.c = a, u\}, ., u)$ és subàlgebra lineal de $(A,.,u)$.

Abans ens ha calgut veure:

Lema 1. Si $(a,.,u)$ és a.de S. i $z \in A$ és tal que existeix $a \in A$ i $z.a = a$ , $a.z = u$; aleshores $z = u$.

Lema 2. En les hipòtesis del Teorema 1.

Per tot $k \in \mathbb{N}$ , $1 \leq k \leq n-1$ , es satisfà :

A. $(a^{r+k}.c).(a^r.c) = a^{n-k+1}.c$ ,

per tot $1 \leq r \leq n-k$ .

B. $(a^k.c) = (a^{n-k+1}.c).c$ .

Com a consequències importants obtenim:

I. Si $(A,.,u)$ és un algebra de Wajsberg simple amb penultim element a, aleshores $A = W_c(a)$, on c es el primer element.

Aquest resulat fou donat anteriorment per C.C.Chang [1] usant unes tècniques diferents , que no permeten traslladar el problema a les a. de S.

II. Si $(A,.,u)$ és a. de S. simple i lineal amb penultim element aleshores:

1.- si card $(A) < \aleph_0$ , es el cas 1

2.- si card$(A) \not< \aleph_0$ , aleshores $(A,.,u)$ és isomorf a $(N,\rightarrow,0)$ on $n \rightarrow m = m \dot{-} n$

3.- De 1 i 2 deduim card $(A) \leq \aleph_0$ .

Per demostrar-ho hem definit , en primer lloc, dos tipus d´aplicacions de A en N : Si $d \in A$ :

$$g_d(a) = \begin{cases} m & \text{sii } a^m.d = a \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

i $$G_d(a) = \begin{cases} \min\{l/\ a^l.d = u\} \\ 0 & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

per tot $a \in A$.

I es satisfà:

Lema 3. Si $(A,.,u)$ és a. de S. amb penultim element a, aleshores $(A,.,u)$ és simple sii , $g_d(a) \geq 1$ per tot $d \in A$.

Lema 4. Tota àlgebra lineal de Sales finita és simple

i d'aquests es dedueix que :

en I.- si $d \in A$ $d = a^{g_c(a) - g_{d^-}(a)}.c$ ,

en II.- l'isomorfisme ve donat per l'aplicació de A en N , tal que:

$f(u) = 0$ , $f(a) = 1$ , $f(d) = G_d(a)$ , $d \neq a$ , $d \neq u$

i resulta que f és isomorfisme d'àlgebres de Sales.

Cites:


[1] CHANG,C.C. "Algebraic analysis of many valued logics", T.A.M.S. July 1958.

[2] RODRIGUEZ SALAS,A.J. Treballs previs a la redacció de la seva tesi doctoral. Universitat de Barcelona.

[3] SALES ,F. d'A. "Les algebres de la Lógica". Curs monografic de doctorat. Universitat de Barcelona 1976.

[4] TORRENS TORRELL,A."Estudi i algebraització de certes logiques: Algebres d- completes". Tesi docotral. Pendent de Lectura. Barcelona 1980.