CONSTRUCCIÓN RESPECTO DE HOMOMORFOS

Amparo Cortés Monleón

Dpto. de Algebra
Universidad de Valencia

"Para un homomorfo $H$, cerrado para subgrupos normales y para productos directos, saturado con la $Z$-propiedad se tienen los resultados siguientes: $G / H$-constricto, implica $G$ ($H$-separable) -constricto, y si $G_H' = 1$, se verifica la equivalencia. En las condiciones dadas para el homomorfo $H$, la clase de los grupos $H$-constrictos, es de Fitting, extensible, no es homomorfo y verifica la condición segunda de formación."

1. Introducción y notación.

La notación utilizada será la standard en teoría de grupos vease [2]. Diremos que un subgrupo $M$ de $G$ es $H$-maximal, cuando sea maximal como $H$-subgrupo normal. Designaremos por $L(G)$ el radical semisimple de $G$. Los conceptos relativos a grupos semisimples pueden verse en [3].

En lo que sigue $H$ será un homomorfo en las condiciones anteriores. Los resultados para $H$ saturado, son válidos en general para $H$ con la $Z$-propiedad, sin más que sustituir $H'$ por $1$.

(1.1) Proposición

Si $H$ saturado, todo grupo nilpotente es producto directo de un $H$-grupo y de un $H'$-grupo. Si $H$ verifica la $Z$-propiedad, todo grupo nilpotente es $H$-grupo.
(1.2) Teorema

Sea $G$ un grupo con $G_{H'} = 1$. Sea $L(G)$ su radical semisimple, y designemos por $L_{H}(G)$ a $L(G)^{H}$, sea $K = L_{H}(G)M$, donde $M$ es un subgrupo de $G$, $H$-maximal; entonces:

1) $L_{H}(G)$ es semisimple; 2) $[L_{H}(G), M] = 1$; 3) $L_{H}(G) \cap M = Z(L_{H}(G))$; 4) $(L_{H}(G))^{H'} = L_{H}(G)$; 5) $C_{G}(K) \leq M \leq K$

2. Constricción

(2.1) Definición

Un grupo $G$ es $H$-consticto si $C_{G}(\bar{M}) \neq \bar{M}$, donde $\bar{G} = G/G_{H'}$, y $\bar{M}$ es un subgrupo de $\bar{G}$, $H$-maximal.

(2.2) Teorema

Si $G_{H'} = 1$, y $M$ es un $H$-maximal de $G$; son equivalentes:

1) $G$ $H$-consticto; 2) $L(C_{G}(M)) = 1$; 3) $L(G)$ es $H$-grupo.

(2.3) Lema

Sea $N$, $H'$-subgrupo normal de $G$, entonces $G$ es $H$-consticto si y solo si $G/N$ lo es.

(2.4) Teorema bis

Para un grupo $G$, son equivalentes:

1) $G$ $H$-consticto; 2) $L(C_{G}(\bar{M})) = 1$, siendo $\bar{M}$ $H$-maximal de $\bar{G}$; 3) $L(\bar{G})$ $H$-grupo.

Observaciones: 1) Como consecuencia del teorema (1.2) y del teorema anterior, la definición de grupo $H$-consticto es independiente del maximal elegido.

2) Designaremos por $C$ la clase de los grupos $H$-constictos. $C$ no es homomorfo, ver [3].

Daremos a continuación algunas propiedades de la clase $C$.

(2.5) Proposición

Si $G$ es $H$-consticto y $N \triangleleft G$, entonces $N$ es $H$-consticto.
(2.6) Proposición
La clase C es extensible.

Nota: C verifica la Z - propiedad y es fuertemente saturada.

(2.7) Proposición
La clase C verifica la condición segunda de formación.

Demostración: Sean \( G/N_1 \) y \( G/N_2 \), H-constrictos, y \( N_1 \cap N_2 = 1 \). \( N_1N_2/N_1 \), es normal en \( G/N_1 \), luego \( N_1N_2/N_1 \) es H-constricto, y por tanto \( N_2 \) lo es. Por (2.6) \( G \) es H-constricto.

En este apartado se da un teorema de equivalencia entre \( G \) H-constricto y \( G \) (H-separable) - constricto y como consecuencia probaremos que la clase C es cerrada para producto de subgrupos normales.

(3.1) Definición
\( G \) es H-separable si posee una serie normal

\[
1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G
\]

tal que los factores \( G_{i+1}/G_i \), son H-grupos \( \delta H' \)-grupos.

(3.2) Proposición
La clase de los grupos H-separables es formación de Fitting extensible y contiene a los grupos resolubles.

(3.3) Teorema
Si \( G \) H-separable, entonces \( G \) H-constricto.

Demostración: Sea \( \tilde{G} = G/G_H \), \( \tilde{G} \) es H-separable por tanto \( L_H(\tilde{G}) \) es H-separable. Sabemos que \( L_H(\tilde{G}) \) es semisimple y es producto de las componentes no H-grupos de \( L(\tilde{G}) \), por tanto \( (L_H(\tilde{G}))^H = L_H(\tilde{G}) \). Por otra parte \( (L_H(\tilde{G}))^H = L_H(\tilde{G}) \) por iv) del teorema (1.2).
Por ser $L_H(\bar{G})$ $H$-separable su $H$-serie descendente acaba en 1. Luego $L_H(\bar{G}) = 1$, de donde se seguiría $L(\bar{G})$ es $H$-grupo. Por tanto se tiene que $\bar{G}$ es $H$-constricto y por Lema (2.3) G es $H$-constricto.

(3.4) Teorema

Si G es $H$-constricto, entonces $G$ es ($H$-separable) -constricto. Si además $G_{H'}^H = 1$, se verifica la equivalencia.

Demostración: Si $G$ $H$-constricto, $L(G/G_{H'})$ $H$-grupo, luego $L(G/G_{H'})$ $H$-separable y $G/G_{H'}$ ($H$-separable) - constricto, y por (3.2) G ($H$-separable) - constricto.

Si $G_{H'}^H = 1$ y $G$ ($H$-separable) - constricto, $L(G)$ es $H$-separable, por (3.3) será $H$-constricto, luego $L(L(G)) = L(G)$ es $H$-grupo y por tanto $G$ $H$-constricto.

Observación: Al ser la clase de los $H$-separables formación de Fitting saturada el producto de dos normales ($H$-separables) - constrictos es ($H$-separable) - constricto.

(3.5) Lema

Sean $M, N \not\leq G$, ambos $H$-constrictos y $(MN)_{H'} = 1$, entonces $MN$ es $H$-constricto.

(3.6) Teorema

Sean $M, N \not\leq G$, ambos $H$-constrictos, entonces $MN$ lo es.

Demostración: Sean $\bar{M}$ y $\bar{N}$, definidos por $\bar{M} = M(MN)_{H'}^H/(MN)_{H'}$, $\bar{N} = N(MN)_{H'}^H/(MN)_{H'}$; Por ser $\bar{M} = M/M_\bar{M}$, $(MN)_{H'} = M/M_{H', \bar{N}}$, será $H$-constricto, lo mismo $\bar{N}$. Además $(\bar{M}\bar{N})_{H'} = 1$; luego por (3.5) $\bar{M}\bar{N}$, es $H$-constricto y por (2.3) $MN$ es $H$-constricto.

BIBLIOGRAFÍA.

