

## ALGUNOS ASPECTOS DE LA TEORIA DE CUBIERTAS RAMIFICADAS

José Ma Montesinos-Amilibia

Dpto. de Geometría y Topología  
Universidad de Zaragoza

Trataremos de cubiertas de la 3-esfera  $S^3$  ramificadas sobre un enlace (= sistema de nudos), como un procedimiento de representar las 3-variedades cerradas y orientables.

La aplicación simplicial  $f: M^n \rightarrow N^n$  entre las  $n$ -variedades compactas y trianguladas <sup>(1)</sup>  $M$  y  $N$  se llama cubierta ramificada si es una cubierta ordinaria fuera del  $(n-2)$ -esqueleto de  $N^n$ . Los puntos de  $N^n$  cuya preimagen tiene menos puntos que hojas tiene la cubierta componen un subcomplejo  $B^{n-2}$  llamado ramificación. Usaremos la locución " $f$  es una cubierta de  $N^n$  ramificada sobre  $B$ ".

Siendo este artículo de exposición, únicamente tocaremos algunos temas selectos que ayuden a darse una idea de la teoría. El material es, en general, conocido, aunque algunos resultados son nuevos.

### RAMIFICACION UNIVERSAL

En 1908 Tietze [T, p 104] preguntó, y en 1919 Alexander [A] probó que toda  $M^n$  cerrada y orientable es una cubierta de  $S^n$  ramificada. Ramírez [R] a petición de González-Acuña dió una versión más fuerte de ese teorema:

---

(1) Siempre consideraremos variedades triangulares y conexas.

Teorema 1 (Ramírez) Toda  $n$ -variedad cerrada y orientada es una cubierta de  $S^n$  ramificada sobre el  $(n-2)$ -esqueleto de un  $n$ -simple.

Prueba del teorema 1.-

Se triangula  $M^n$  y se dan orientaciones coherentes a los  $n$ -simples.

Se divide baricéntricamente la triangulación. Entonces cada nuevo  $n$ -simple, al tener un orden natural en sus vértices, adquiere una orientación natural.

Pero cada nuevo  $n$ -simple tiene una orientación heredada del  $n$ -simple viejo en el que descansa.

Un  $n$ -simple nuevo se colorea de negro si su orientación natural coincide con la heredada; en otro caso se colorea de blanco. El resultado es una coloración de la triangulación en tablero de damas, pues  $n$ -simples nuevos, adyacentes a lo largo de una  $(n-1)$ -cara tienen orientaciones heredadas coherentes, pero orientaciones naturales incoherentes.

Sea  $S^n$  formado pegando linealmente dos  $n$ -simples, uno negro y otro blanco, por sus bordes, y ordénense los  $n+1$  vértices resultantes.

La función  $f: M^n \rightarrow S^n$  envía un  $n$ -simple blanco (negro) al  $n$ -simple blanco (negro) preservando el orden de los vértices.  $\square$

El siguiente corolario proporciona un nuevo modo de representar 3-variedades. Sea  $G$  el subconjunto de  $S^3$  de Figura 1.

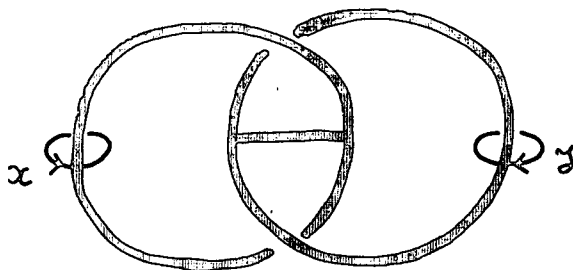


Figura 1

Corolario 1. Toda 3-variedad cerrada y orientada es una cubierta de  $S^3$  con ramificación contenida en G.

Prueba del corolario 1. Por el teorema 1  $M^3$  es una cubierta de  $S^3$  ramificada sobre el 1-esqueleto de un tetraedo t.

Supóngase t contenido en  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 + \infty$  y regular. Entonces una rotación de 120º en torno a un eje de simetría trigonal de t, define una cubierta de  $S^3$  sobre sí misma. La ramificación de esta cubierta junto con la imagen del 1-esqueleto de t es G. □

Es bien sabido (ver  $[F_1]$ , por ejemplo) que las cubiertas de h hojas de  $S^3$  ramificadas sobre  $B^1$  están en correspondencia biunívoca con las clases de equivalencia natural de representaciones transitivas de  $\pi_1(S^3 - B^1)$  en el grupo simétrico de grado h  $\mathcal{G}_h$ .

Pero  $\pi_1(S^3 - G)$  es un grupo libre en los generadores x e y de Fig. 1. Por tanto, dado un par  $(\sigma, \tau)$  de permutaciones de  $\mathcal{G}_h$ , tendremos una representación  $\omega: \pi_1(S^3 - G) \rightarrow \mathcal{G}_h$  que será transitiva si y sólo si el subgrupo de  $\mathcal{G}_h$  generado por  $(\sigma, \tau)$  es transitivo. Por tanto podemos asociar al par transitivo  $(\sigma, \tau)$  una pseudo-variedad  $M(\sigma, \tau)$ , a saber, la cubierta de  $S^3$  ramificada sobre G asociada a la representación  $\omega$ . El corolario 1 se puede entonces anunciar así:

Corolario 1'. Toda 3-variedad cerrada y orientada puede representarse como  $M(\sigma, \tau)$ , para algún par transitivo de permutaciones  $(\sigma, \tau)$ . □

La siguiente proposición facilita la confección de la "lista" de 3-variedades.

Proposición 1. Se tienen las siguientes propiedades

- i)  $M(\sigma, \tau) \cong M(\sigma^{-1}, \tau^{-1})$
- ii)  $M(\sigma, \tau) \cong M(\tau, \sigma)$
- iii)  $M(\sigma, \tau) \cong -M(\tau, \sigma)$  ,

donde el signo menos significa cambio de orientación.

Prueba de la Proposición 1

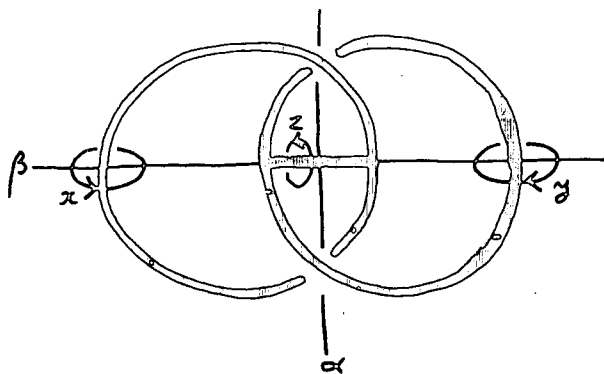


Figura 2

i) La simetría con respecto al eje  $\beta$  fija  $G$  como conjunto y envía  $(x, y)$  a  $(x^{-1}, y^{-1})$ .

ii) La simetría con respecto al eje  $\alpha$  fija  $G$  como conjunto y envía  $(x, y)$  a  $(y^{-1}, x^{-1})$


iii) La simetría de  $G$  con respecto al papel seguida de la rotación de  $180^\circ$  en torno a  $\beta$  de uno de los círculos de  $G$ , fija  $G$  como conjunto y envía  $(x, y)$  a  $(x, y^{-1})$   $\square$

Corolario 2.  $M(\sigma, \tau)$  es simétrica si  $\sigma = \sigma^{-1}$  ó  $\tau = \tau^{-1}$ .  $\square$

Nótese que  $z = xyx^{-1}y^{-1}$  en  $\pi_1(S^3 - G)$ , luego

Corolario 3.  $M(\sigma, \tau)$  tiene  como ramificación si y sólo si  $\sigma\tau = \tau\sigma$ . En este caso la cubierta es regular.  $\square$

Ejemplos. 1.- Si  $\sigma = 1$ , entonces  $\tau = (12\dots h)$  y la cubierta  $M(1, \tau) = S^3$

2.- Si  $\sigma = \tau$ , entonces  $\sigma = \tau = (12\dots h)$  y la cubierta es cíclica de  $h$  hojas ramificada sobre , y la cubierta  $M(\sigma, \sigma)$  es la lente  $L(h, 1)$ . Por tanto  $M(\sigma, \sigma^{-1}) = -L(h, 1)$ . Nótese que  $\sigma = (123) \neq (132) = \sigma^{-1}$ , y en efecto  $L(3, 1) \neq -L(3, 1)$  [ST].

3.- Damos sin demostración algunos ejemplos:  
 $M(12, 13) = S^3$ ,  $M((12)(34), (13)(24)) = S^3$ ,  $M(12, 123) = S^1 \times S^2$ .

Como se ve, la anterior representación, cuyo estudio abandonamos aquí tras esas breves observaciones, tiene la importancia de proporcionar una ramificación universal. Pero nótese que el  $n^\circ$  de hojas puede ser arbitrariamente alto<sup>(1)</sup>.

(1) Puede verse esto considerando  $M^3 = h * S^1 \times S^2$ . Aquí  $\pi_1 M^3$  es libre con  $h$  generadores y  $h$  tan alto como queramos.

### MINIMO NUMERO DE HOJAS

Se trata ahora de averiguar si toda  $M^n$  puede representarse como cubierta de  $S^n$  ramificada, de modo que el nº de hojas se mantenga bajo cierta cota.

Como entonces la ramificación dejará de ser universal, desearemos que se mantenga dentro de una clase de subcomplejos de  $S^n$  manejable. Por ejemplo, ¿es toda  $M^n$  cubierta de  $S^n$  ramificada sobre una subvariedad de  $S^n$ ? La respuesta es negativa si se exige que la subvariedad sea localmente plana [EB]:

Teorema 2 (Edmonds y Berstein). Sea  $M^n$  una variedad diferenciable spin, que es cubierta de  $S^n$  ramificada sobre una subvariedad localmente plana. Entonces todos los productos de clases de Stiefel-Whitney de  $M^n$  valen cero.

Nota.- Esto implica que todos los números de Stiefel-Whitney, excepto por el último que es la característica de Euler módulo 2, valen cero. Luego si además de las condiciones del teorema,  $M$  tiene característica de Euler par, se deduce que  $M^n$  es borde de alguna  $Q^{n+1}$  (Teorema de Thom).

Por ejemplo el plano proyectivo cuaterniónico  $QP^2$  es spin ya que tiene cohomología sólo en dimensiones 0, 4 y 8. Como  $W_4^2 \neq 0$ ,  $QP^2$  no puede cubrir  $S^8$  con ramificación una 6-variedad localmente plana [EB].

También para el número mínimo de hojas se conocen restricciones [E].

Teorema 3 (Edmonds). Supóngase que  $M^n$  es cubierta ramificada de  $S^n$  con  $h$  hojas. Entonces el máximo número de clases de cohomología reducida entera de  $M$  cuyo producto no es cero, no puede rebasar  $h$ .

Por ejemplo, este número es  $n$  para el  $n$ -toro  $T^n$ . Luego, si  $T^n$  es cubierta ramificada de  $S^n$ , el nº de hojas es  $\geq n$ . Para  $T^3$  esto fue demostrado primero por Fox [ $F_2$ ].

Pasando ahora a resultados positivos, vemos que toda 2-variedad cerrada y orientable es una cubierta de dos hojas de  $S^2$  ramificada (exámínesse la Figura 3).

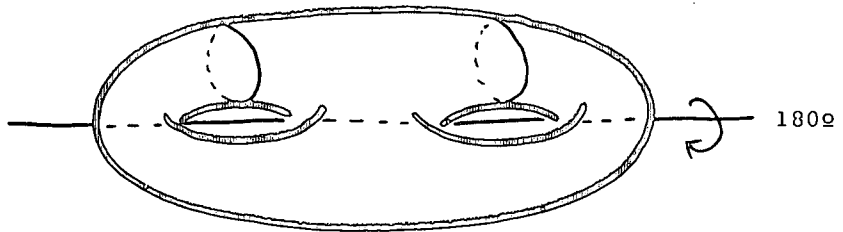


Figura 3

Para  $n=3$  tenemos el siguiente resultado obtenido independientemente por Hilden [H] y el autor [ $M_1$ ].

Teorema 4 (Hilden y Montesinos).- Toda 3-variedad cerrada y orientada es una cubierta, diedral de tres hojas, de  $S^3$  ramificada sobre un nudo.

Nota. "Diedral" significa que el grupo diedral  $\mathcal{G}_3$ , de seis elementos, es el grupo de monodromía. Así la variedad corresponde a una cierta representación transitiva  $\omega: \pi_1(S^3-K) \rightarrow \mathcal{G}_3 \rightarrow 0$ , en donde  $K$  es un nudo. Por tanto  $\omega$  representa necesariamente meridianos de  $K$  por trasposiciones. Luego la cubierta es irregular pues el estabilizador de un índice no es normal. Así un punto de  $K$  tiene exactamente dos preimágenes, de índices de ramificación dos y uno.

Esbozo de la prueba del teorema 4.- Seguiremos la nueva prueba de este teorema publicado en [ $M_2$ ].

El punto de partida es la representación de 3-variedades, debida a Lickorish [L] y Wallace [W], mediante cirugía en un enlace de  $S^3$ .

Notamos que  $S^3$  satisface el teorema, pues la cubierta diedral de  $S^3$  ramificada sobre el enlace trivial de dos componentes  $L$ , asociada a la única posible representación de  $\pi_1(S^3-L)$  sobre  $\zeta_3$ , es  $S^3$ . Llamemos  $P$  y  $Q$  a las componentes de  $L$  y sean  $P_{12}, P_3$  (resp.  $Q_{13}, Q_2$ ) las preimágenes de  $P$  (resp.  $Q$ ) de índices de ramificación dos y uno. Así  $P_{12}, P_3, Q_{13}, Q_2$  es un enlace trivial de cuatro componentes y la cubierta  $f:S^3 \rightarrow S^3$  pliega  $S^3$  sobre sí mismo con líneas de plegado  $P_{12}$  y  $Q_{13}$ , del modo en que se hacen tres dobles en una carta.

Supongamos para facilitar que la variedad problema viene dada por cirugía en el nudo  $N$  de la Figura 4.

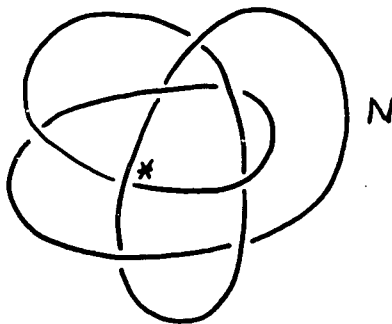


Figura 4

Entonces "simetrizamos" el nudo con respecto a los dos ejes  $P_{12}, Q_{13}$ . Esto se realiza en dos pasos. Primero cambiamos  $N$  en  $N'$  para hacerlo simétrico con respecto a  $P_{12}$  (Figura 5).

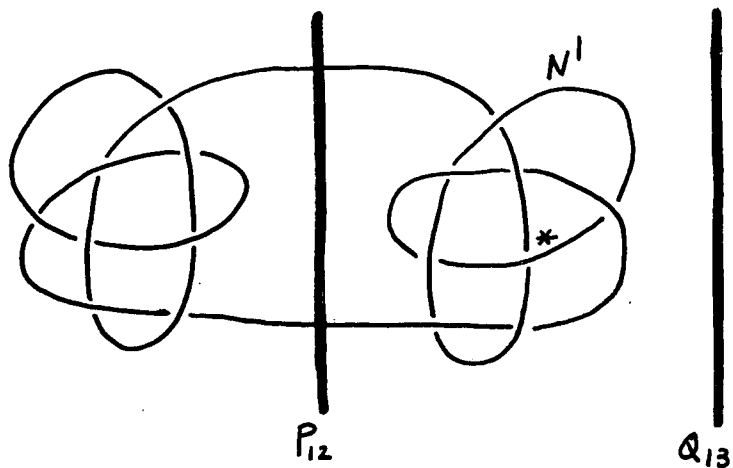


Figura 5

Después localizamos puntos dobles de la proyección de  $N$  en los que un cambio local de pasos superiores en inferiores convierte  $N$  en el nudo trivial (en el nudo  $N$  basta el punto indicado en Figura 4).

Introducimos, en torno al correspondiente punto doble de  $N'$  (Figura 5), una componente trivial  $T$ , que puede hacerse simétrica con respecto a  $T$ . (Figura 6).

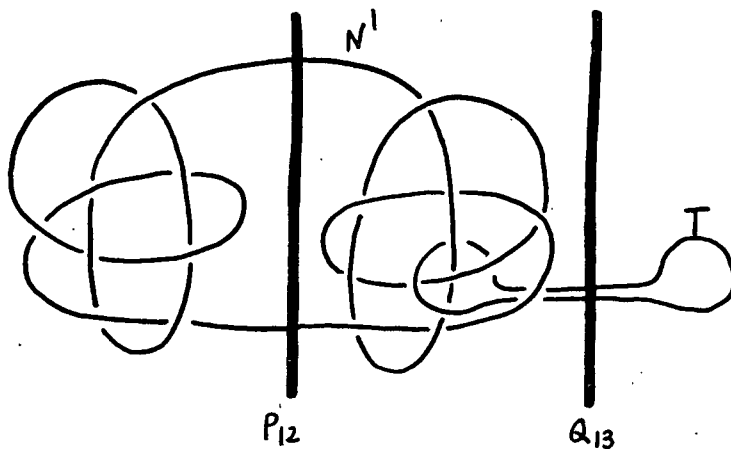


Figura 6



La conversión de  $N$  en  $N'UT$  es lo que hemos llamado simetrización más arriba. Pues bien,  $M^3$  se obtiene por cirugía en  $N'UT$ . En efecto, aplicando el truco de Hempel [H] a  $T$  se produce un cambio local de un paso superior en inferior y una conversión de  $N'$  en  $N$ .

La imagen de  $N'UT$  mediante  $f$  está formada de dos arcos cuyos extremos descansan en  $L$  (Figura 7)

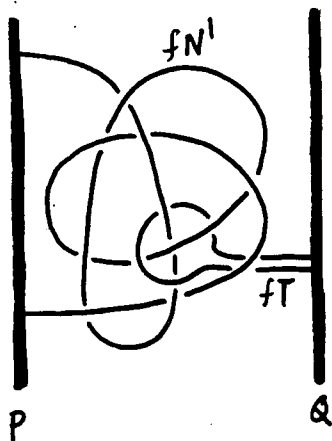


Figura 7

Resta convencerse de que cualquier cirugía realizada en  $N'UT$  es compatible con el pliegue que define  $f$ . Pero nótese que este pliegue restringido a  $N'$  ó a  $T$  viene generado por una simetría axial. Luego cualquier curva simple que descanse en la frontera de un entorno regular de  $N'$  ó  $T$  es simétrica con respecto a tal simetría. Interpretando tal curva como el nuevo meridiano de la cirugía, vemos que ésta se proyecta por  $f$ , produciendo una modificación en el entorno de  $N'$  ó  $T$ , que no altera el tipo topológico de  $S^3$  (truco de Alexander).

La prueba se acabará cuando consigamos una ramificación con una sólo componente. Esto lo veremos en la siguiente sección.

El teorema anterior es constructivo, pero, en la práctica, el proceso de simetrización puede abortarse, como en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo. El nudo de la figura 4 se puede simetrizar, economizando puntos dobles, como en la Figura 8.

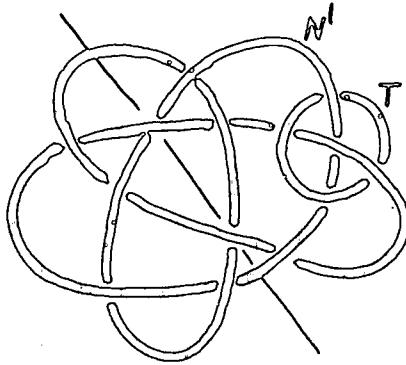
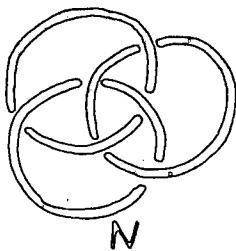
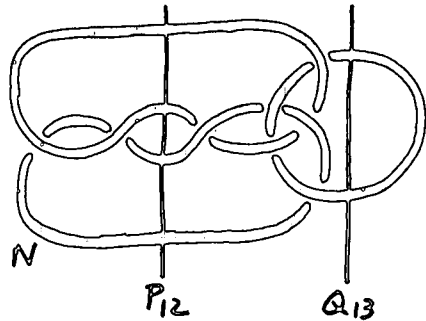


Figura 8

Ejemplo (Anillos de Borromeo) El enlace de la Figura 9a es simétrico (Figura 9b).



9 a



9 b

Figura 9

El toro tridimensional  $T^3$  se obtiene por 0-cirugía en los anillos de Borromeo. La ramificación de la cubierta  $T^3 \rightarrow S^3$  dada por el teorema 4 (y figura 9b) aparece en Figura 10

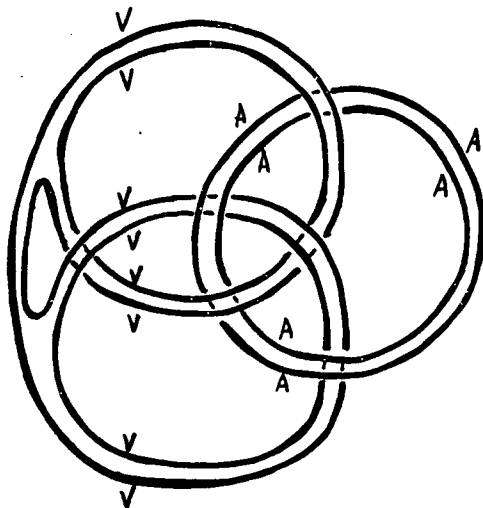


Figura 10

El anterior teorema no puede mejorarse exigiendo, por ejemplo, que la cubierta sea regular. En efecto, Tollefson [T] ha hallado ejemplos de 3-variedades que no admiten automorfismos periódicos; sus cubiertas ramificadas sobre  $S^3$  tienen entonces grupo trivial de superposiciones, y, así, no pueden ser regulares.

#### ENLACES COLOREADOS

Un modo sugestivo de dar un enlace  $L$  junto con una representación  $\omega: \pi_1(S^3-L) \rightarrow \mathfrak{S}_3$ , ideado por Fox, consiste en colorear los pasos del enlace  $L$  usando tres colores (V=verde, A=azul y R=rojo, por ejemplo) <sup>(1)</sup> de modo que los tres colores de junto

(1) Sugerimos que el lector ilumine por sí mismo las figuras.

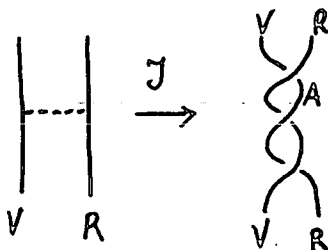
a un cruce sean o todos iguales o todos distintos; pues basta hacer  $V = (12)$ ,  $A = (13)$ ,  $R = (23)$  y asignar a cada meridiano de  $L$  su color (o permutación) para tener  $\omega$ . La representación es transitiva si se usan los tres colores (el enlace de Figura 10 está coloreado de modo que la cubierta asociada es  $T^3$ ).

Podemos entonces enunciar el Teorema 4 así

Teorema 4'. Toda 3-variedad cerrada y orientable está representada por un nudo coloreado.

Conclusión de la prueba del teorema 4'.- Hemos visto que toda 3-variedad viene dada por un enlace coloreado. Para acabar la prueba consideramos ciertas modificaciones de un nudo coloreado introducidos en  $[M_3]$ .

Lema 1 (Montesinos) La jugada



aplicada a un enlace coloreado no cambia la cubierta de  $S^3$  asociada

Esbozo de prueba del lema 1. El arco de puntos de la figura se levanta a un arco. La jugada  $J$  se levanta a una modificación en el entorno de un arco y esto no cambia la cubierta.  $\square$

Nótese ahora que  $J$  permuta los dos ramales. Aplicando  $J$  varias veces a un enlace coloreado resultará un nudo coloreado.

La jugada  $J$  sugiere un interesante

Problema 1. Hallar un sistema de jugadas de un enlace coloreado que no alteran la cubierta asociada y tales que dos nudos coloreados de igual cubierta están relacionados por una sucesión finita de jugadas.

El interés de este problema es que si tiene respuesta positiva, dispondremos de una traducción, en términos de nudos coloreados, del problema de clasificación de 3-variedades cerradas y orientadas.

Obsérvese que en el entorno del arco punteado del Lema 1, pueden hacerse modificaciones más complicadas que  $\mathcal{Y}$  y que también se levantan. Pero todas ellas dependen de  $\mathcal{Y}$ . En efecto las modificaciones más generales aparecen en figura 11

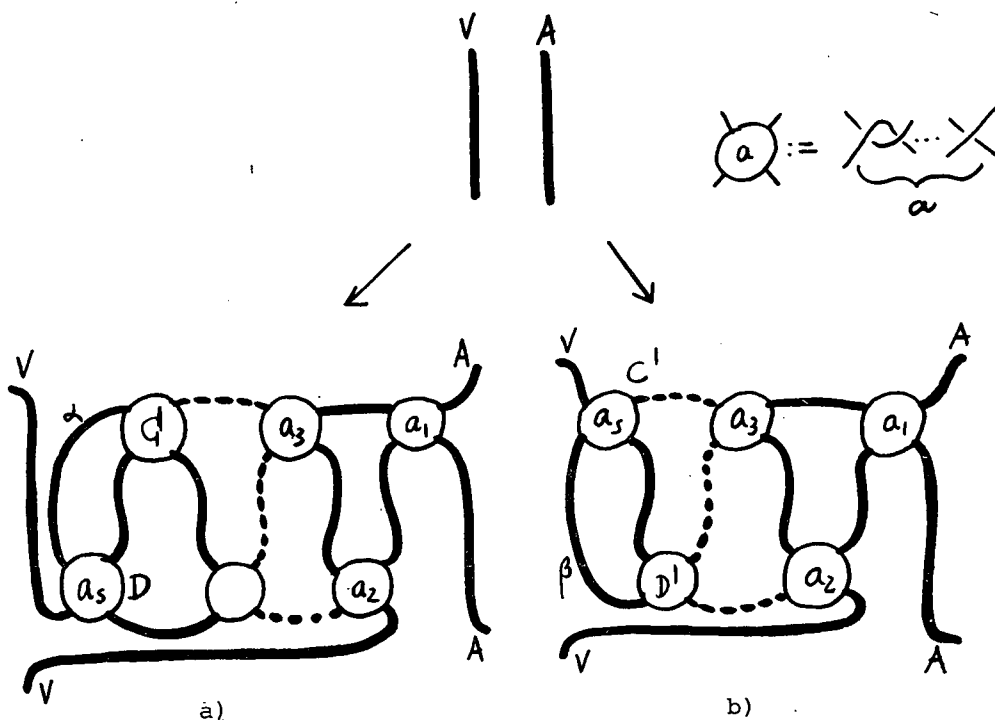


Figura 11

Pero  $\alpha$  no puede ser verde, luego tras aplicar jugadas  $\mathcal{Y}$  el ovrillo D tendrá cero ó  $\pm 1$  cruces. Si tiene cero cruces podemos eliminar los ovillos C y D. Si tiene  $\pm 1$  cruces podemos incorporar D al ovrillo C obteniendo una situación como la de la Fig. 11b). Pero  $\beta$  no es verde, luego tras aplicar jugadas  $\mathcal{Y}$  el ovrillo C' tendrá cero ó  $\pm 1$  cruces, etc... Después de un número finito de pasos no quedará ningún ovrillo. Así las jugadas de la Fig. 11 dependen de  $\mathcal{Y}$ .

En principio esto no significa que la jugada  $\mathcal{Y}$  baste para resolver el anterior problema. Son, en efecto, concebibles otras jugadas.

Los dos nudos coloreados de la Figura 12 tienen igual cubierta asociada  $[M_4]$ . ¿Están relacionados entre sí mediante jugadas  $\mathcal{Y}$ ?

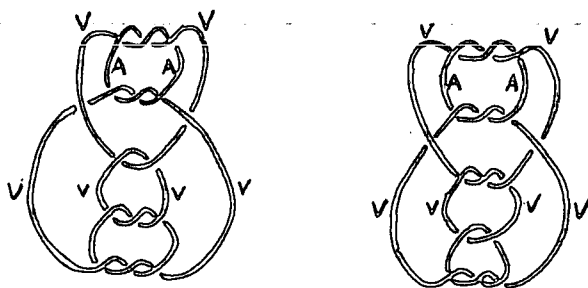


Figura 12

ENLACES COLOREADOS SEPARABLES<sup>(1)</sup>

Obsérvese cómo los nudos coloreados de Figura 13 se "separan" mediante aplicación de jugadas  $\mathcal{J}$  en los lugares marcados.

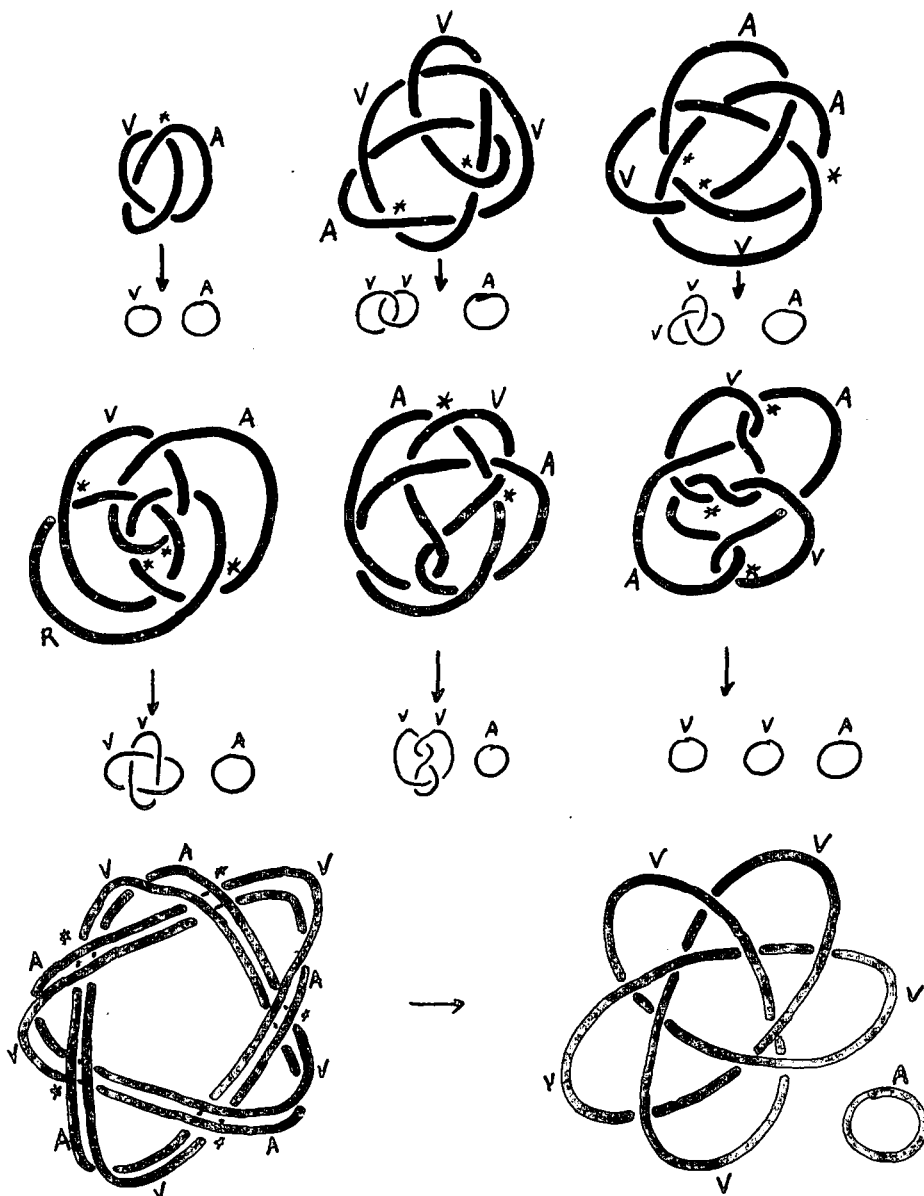


Figura 13

(1) El material de esta sección está tomado de  $[M_3]$  (ver también  $[F_2]$ ).

Diremos que un enlace coloreado es separable si mediante jugadas  $\mathcal{M}$  se convierte en un enlace separado  $L_1 \cup L_2$  en el que  $L_1$  está coloreado de verde y  $L_2$  de azul

El lector puede ejercitarse viendo que toda trenza de 2 o 3 filamentos coloreada, es separable  $[M_3]$ . Sin embargo, hay algunos nudos coloreados no separables, como se sacará del siguiente teorema.

Teorema 5. La variedad asociada a un enlace separable es una cubierta cíclica de dos hojas de  $S^3$  ramificada sobre una suma de  $L_1$  y  $L_2$ .

Esbozo de la prueba del teorema 5.

Una 2-esfera que separa  $L_1$  de  $L_2$  se levanta a una 2-esfera que define la suma conexa de  $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2$  (cubiertas dobles ramificadas sobre  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente). Pero  $\tilde{L}_1$  suma conexa  $\tilde{L}_2$  es la cubierta doble de una suma de  $L_1$  y  $L_2$ , como se ve levantando una 2-esfera que defina dicha suma.  $\square$

Las variedades asociadas a los ejemplos de Figura 13 son todas cubiertas dobles de  $S^3$ ; a saber (y por orden)  $S^3$ ,  $\mathbb{R}P^3$ ,  $L(3,1)$ ,  $L(4,1)$ ,  $L(5,2)$ ,  $S^1 \times S^2$  y esfera homológica de Poincaré (cubierta doble del toroidal (3,5) [SW]).

El teorema 5 junto con el teorema 3 implican que hay nudos coloreados no separables. Un ejemplo es el enlace coloreado de Figura 10, pues su variedad asociada es  $T^3$  que no es cubierta doble de  $S^3$  (el primer ejemplo de enlace no separable se debe a Fox  $[F_2]$ ).

Problema 2. Un nudo coloreado cuya cubierta asociada es cubierta doble ramificada de  $S^3$  ¿es separable?

Problemas 1 y 2 están relacionados.

Conjetura 1. (Fox  $[F_2]$ ) Un nudo coloreado cuya cubierta asociada es simplemente conexa, es separable

La conjetura 1 implica la conjetura de Poincaré. Pues si el nudo es separable, la variedad es cubierta doble ramificada de  $S^3$  y para éstas la conjetura de Poincaré es válida <sup>(1)</sup>.

---

(1) Este reciente resultado es consecuencia de la llamada "Conjetura de Smith fuerte". Consúltense las actas (sin publicar todavía) del simposio habido sobre este tema en la Universidad de Columbia.



La afirmación de que la conjetura de Poincaré implica la conjetura 1, es la solución del problema 2 en el caso de que la cubierta sea  $S^3$ .

#### REFERENCIAS

- R A. RAMIREZ: "Sobre un teorema de Alexander" Anales del Instituto de Matemáticas de la UNAM 15(1975) 77-81.
- T H. TIETZE: "Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten" Monatsh. Math. 19(1908) 1-118.
- A J. W. ALEXANDER: "A note on Riemann spaces" Bull. Amer. Math. Soc. 26(1919) 370-372.
- ST H. SEIFERT y W. THRELHALL: "Lehrbuch der Topology" Leipzig und Berlin, 1934.
- F<sub>1</sub> R. H. FOX: "A quick trip through knot theory" Topology of 3-manifolds and related topics, Englewood Cliffs (1962) 120-167.
- E A. L. EDMONDS: "The degree of a branched covering of a sphere" Geometric Topology, Academic Press (1979), 337-343
- BE I. BERSTEIN y A. L. EDMONDS: "The degree and branch set of a branched covering" Invent. Math.
- M<sub>1</sub> J. M. MONTESINOS: "A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of  $S^3$ " Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974) 845-846
- H H. M. HIEDEN: "Every closed, orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of  $S^3$ " Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974) 1243-1244.
- F<sub>2</sub> R. H. FOX: "A note on branched cyclic coverings of spheres" Rev. Mat. Hisp. Amer. 32(1972) 158-166.
- L W. B. R. LICKORISH: "A representation of orientable combinatorial 3-manifolds" Annals of Math. 76(1962) 531-540
- W A. D. WALLACE: "Modifications and cobounding manifolds" Canad. J. Math. (1960) 503-528
- M<sub>2</sub> J. M. MONTESINOS: "A note on 3-fold branched covering of  $S^3$ " Math. Proc. Camb. Phi. Soc. (1980)
- SW C. WEBER y H. SEIFERT: "Die beiden Dodekaederräume" Math. Z. 37(1933) 237-253.

- M<sub>3</sub> J.M.MONTESINOS: "Sobre la conjetura de Poincaré y los recubridores ramificados sobre un nudo". Tesis doctoral, Madrid (1971).
- H J.HEMPEL: "Construction of orientable 3-manifolds" Topology of 3-manifolds and related topics. Englewood Cliffs (1962) 207-212.
- T J.L.TOLLEFSON: "A 3-manifold with no PL involutions" Notices of the Amer.Math.Soc. 22(1975) A-231.
- M<sub>4</sub> J.M.MONTESINOS: "Variedades de Seifert que son recubridores cíclicos ramificados de dos hojas" Bol.Soc.Mat. Mex. 18 (1973)1-32.