Pub. Mat. UAB
Vol. 31 nº 1 Abril-1987

DESCOMPOSICIONES BORNOLOGICAS DE SHAUDER

Mercè Serrahima

1. Descomposiciones bornólogicas de Schauder

Sea E un espacio bornológico convexo (e.b.c.) separado. Una sucesión $(M_n)_n$ de subespacios Mackey-cerrados no triviales define una descomposición bornológica de E, si todo elemento $x \in E$ admite una representación única

$$x = M\text{-}\sum_{n\geq 1} x_n = M\text{-}\lim_n \sum_{k\leq n} x_k \text{ , siendo para todo n, } x_n \in M_n.$$

A una descomposición se le asocia una sucesión de aplicaciones $(p_n)_n$ definidas por:

$$p_n : E \longrightarrow E$$
$$x \longrightarrow \sum_{k\leq n} x_k \text{ , si } x = M\text{-}\sum_{n\geq 1} x_n$$

Las aplicaciones $(p_n)_n$ son proyecciones sobre los subespacios $(M_1 +\ldots+ M_n)_n$ y verifican trivialmente $p_n \circ p_m = p_{\min(m,n)}$, $\forall_{n,m}$.

Definiendo $q_1 = p_1$, $q_n = p_n - p_{n-1}$ si $n > 1$, se obtiene una sucesión de proyecciones $(q_n)_n$ sobre los espacios M_n, que cumplen $q_n \circ q_m = 0$ si $n \neq m$.

Todo elemento $x \in E$ se podrá escribir:

$$x = M\text{-}\lim_n p_n(x) = M\text{-}\lim_n \sum_{k\leq n} q_k(x) = M\text{-}\sum_{n\geq 1} q_n(x) .$$

Una descomposición bornológica es de Schauder, si todas las proyecciones p_n (o q_n) son acotadas. Si la sucesión $(p_n)_n$ (o $(q_n)_n$) es equiacotada, la descomposición es equi-Schauder.

Se comprueba sin dificultad que una sucesión de proyecciones acotadas $p_n : E \longrightarrow E$, que verifiquen:

a) $\forall_{n,m}\ p_n \circ p_m = p_{\min(m,n)}$, y

b) para todo $x \in E$, $x = M\text{-}\lim p_n(x)$,

define una descomposición bornológica de Schauder de E. Los subespacios de la descomposición son $M_1 = p_1(E) = q_1(E)$, $M_n = (p_n - p_{n-1})(E) = q_n(E)$ si $n \geq 2$.

1.1. Proposición. Sea E un e.b.c. separado. $(p_n)_n$ una sucesión equiacotada de proyecciones $p_n : E \longrightarrow E$ tales que:

a) $\forall\ n, m \in N,\ p_m \circ p_n = p_{\min(m,n)}$.

b) La envoltura lineal de los subespacios $p_n(E)$ es Mackey-densa en E.

Entonces, $(p_n)_n$ define una descomposición equi-Schauder de E.

Demostración. Sea $M_1 = p_1(E)$, y para $n \geq 2$, $M_n = (p_n - p_{n-1})(E)$. Como hemos indicado anteriormente, será suficiente comprobar que para todo $x \in E$, $x = M - \lim\limits_n p_n(x)$.

Sean F la envoltura lineal de los espacios $p_n(E)$, $x \in E$, y $\varepsilon > 0$. Si $(x_i)_i \subset F$ es una sucesión tal que $x = M - \lim\limits_i x_i$, existirán un disco acotado B y una sucesión $(s_i)_i$ de reales convergente a 0 tales que para todo i, $x - x_i \in s_i B$.

Sea C un disco acotado tal que para todo n, $p_n(B) \subset C$. Designamos por $\|\ \|_B$, $\|\ \|_C$ las normas definidas por los calibradores de B y C en sus respectivas envolturas lineales.

Si $i_0 \in N$ es tal que para $i \geq i_0$, $s_i < \varepsilon/2$, para $n \in N$ e $i \geq i_0$, tendremos:

$$\| x - x_i \|_B < \varepsilon/2\ ,\quad \| p_n(x - x_i) \|_C < \varepsilon/2\ .$$

Como $x_{i_0} \in F$, por la condición a), la sucesión $(p_n(x_{i_0}))_n$ será constante e igual a x_{i_0} a partir de un cierto n_0.

Sea A un disco acotado que contenga B y C. Para $n \geq n_0$:

$$\| x - p_n(x) \|_A \leq \| x - x_{i_0} \|_A + \| x_{i_0} - p_n(x_{i_0}) \|_A + \| p_n(x_{i_0}) - p_n(x) \|_A \leq \varepsilon$$

al ser la norma definida por el calibrador de A más fina que las definidas por los calibradores de B y C. Por tanto, $x = M - \lim\limits_n p_n(x)$. □

Llamaremos espacios LB a los e.b.c. completos y con base numerable de acotados. Todo e.b.c. LB es límite inductivo bornológico de una sucesión creciente de espacios de Banach $(E_k)_k$, de forma que para todo k y todo $x \in E_k$, $\| x \|_{k+1} \leq \| x \|_k$. (Representación de E). El resultado que sigue, generalización de un lema de Moscatelli ([4]) para bases bornológicas, permitirá extender algunas propiedades de las descomposiciones de Schauder en espacios de Banach a las descomposiciones en espacios LB.

1.2. Lema. Sea E un e.b.c. LB y $(M_n, p_n)_n$ una descomposición bornológica de Schauder de E. Entonces, existe una representación $(E_k)_k$ del espacio E tal que para todo k, $(M_n \cap E_k, p_{n|E_k})_n$ es una descomposición de Schauder del espacio de Banach E_k. (Suprimiendo, para cada E_k los índices n tales que $M_n \cap E_k = 0$).

Nota: puede darse el caso de que para toda representación $(E_k)_k$ del espacio E, $E_k \cap M_n = 0$ salvo para un número finito de índices n. Abusando del lenguaje, continuaremos llamando descomposición de Schauder del espacio E_k a la sucesión finita de subespacios $(E_k \cap M_n)$.

Demostración: Sea $(F_k, \nu_k)_k$ una representación de E tal que para todo k, $F_k \subset F_{k+1}$ y $\nu_{k+1}(x) \leq \nu_k(x)$ para todo $x \in F_k$. Supondremos que F_1 tiene intersección distinta de cero con alguno de los espacios M_n de la descomposición.

Si N_k es el conjunto de índices n para los que $F_k \cap M_n \neq 0$, se define

$$G_k = \{(x_n)_n \in \prod_n (M_n \cap F_k) : x_n = 0 \text{ si } n \notin N_k, \text{ y } \sum_n x_n \text{ es convergente en } F_k\}$$

y en G_k la norma $\|(x_n)_n\|_k = \operatorname{Sup}_m (\nu_k(\sum_{i\leq m} x_i))$. Teniendo en cuenta que los espacios M_n son M-cerrados, se comprueba que para todo k, $(G_k \| \ \|_k)$ es de Banach.

En cada uno de los espacios G_k, los subespacios $\| \ \|_k$ - cerrados

$$\{ (0,...0, x_n, 0, 0,...) \in G_k : x_n \in M_n \cap F_k , n \in N_k \}$$

definen una descomposición de Schauder: si $x = (x_n)_n \in G_k$, e $(y_i)_i = (0,...0, x_i, 0...)$,

$$\|x - \sum_{i\leq m} y_i\|_k = \|(x_i)_{i>m}\|_k = \operatorname{Sup}_n (\nu_k(\sum_{i=m+1}^{n} x_i)) , \text{ para } n > m ,$$

que tiende a 0 cuando m tiende a infinito por ser $\sum_i x_i$ ν_k - convergente. Por otra parte, los espacios G_k y las inclusiones naturales forman un sistema inductivo bornológico: sea $G = \bigcup_k G_k$ su límite inductivo. La aplicación

$$u : G \rightarrow E$$
$$(x_n)_n \rightarrow M\text{-}\sum_n x_n$$

es inyectiva por la unicidad de la descomposición $(M_n, p_n)_n$, exhaustiva por implicar la Mackey- Convergencia en E la ν_k -convergencia en algún F_k, y acotada, ya que si A es acotado en G, lo será en algún G_k, y si $(x_n)_n \subset A$,

$$\nu_k (u((x_n)_n)) = \nu_k \left(M\text{-}\sum_{n\geq 1} x_n\right) \leq \operatorname*{Sup}_m \nu_k \left(\sum_{n\leq m} x_n\right) = \|(x_n)_n\|_k .$$

El teorema del homomorfismo para espacios bornológicos completos, ([2]), asegura el isomorfismo bornológico entre E y G, lo que concluye la demostración. ▫

1.3. Proposición. En un e.b.c. LB toda descomposición bornológica es equi-Schauder.

Demostración: Sea (M_n, p_n) una descomposición bornológica de E. Sea $(E_k)_k$ una representación de E, (construida como en el lema anterior) formada por espacios de Banach y tal que para todo k $(M_n \cap E_k, p_{n|Ek})_{n\in Nk}$ defina una descomposicón de E_k.

Como los espacios $M_n \cap E_k$ son cerrados en E_k, las descomposiciones serán equi-Schauder en cada E_k. Entonces, como todo acotado A de E está contenido en algún E_k, el conjunto $\cup_n p_n(A) = \cup_n p_{n|Ek}(A)$ será un acotado de E_k y en consecuencia de E.

Si E es un e.b.c., designaremos por TE al espacio E provisto de la topología localmente convexa más fina de entre las compatibles con la bornología de E. El dual bornológico E^x de E, coincide con el dual topológico (TE)' de TE, y si TE es un e.b.c. separado, $<E, E^x>$ será un par dual. En este caso, la topología de TE coincide con la topología de Mackey $\tau_m(E, E^x)$.

1.4. Proposición. Sea E un e.b.c. tal que la topología de TE sea separada. Entonces, toda descomposición bornológica de Schauder $(M_n,p_n)_n$ de E, es también una descomposición de Schauder de E para las topologías de Mackey $\tau_m(E, E^x)$ y débil $\sigma(E, E^x)$. Si la descomposición bornológica es equi-Schauder, también lo son las descomposiciones topológicas.

Demostración: La Mackey-convergencia en E implica la convergencia según la topología de TE que es $\tau_m(E, E^x)$, y ésta la $\sigma(E, E^x)$-convergencia.

También, si las proyecciones $(p_n)_n$ son acotadas (equiacotadas), serán continuas (equicontinuas) para las topologías $\tau_m(E, E^x)$, $\sigma(E, E^x)$. ▫

1.5. Proposición. Sea E un e.b.c. topológico (es decir, la bornología de E es la bornología de Von Neumann de un espacio localmente convexo) tal que TE sea tonelado. Entonces, toda descomposición bornológica de Schauder de E, es equi-Schauder.

Demostración: Como $\forall$ x $\in$ E, $(p_n(x))_n$ es acotado, y TE tonelado, la sucesión $(p_n)_n$ será equicontinua, y al ser E un e.b.c. topológico, será equiacotada. ▫

1.6. Corolario. Si E es un e.b.c. completo y topológico, toda descomposición bornológica de Schauder es equi-Schauder.

Demostración: Si E es completo, TE es tonelado. ▪

1.7. Proposición. Sea E un e.b.c. topológico tal que TE sea tonelado. Si $(M_n, p_n)_n$ es una descomposición de Schauder para $\tau_m(E, E^x)$ (o para $\sigma(E, E^x)$), y la envoltura lineal de $\bigcup_n M_n$ es Mackey-densa en E, (M_n, p_n) es una descomposición bornológica equi-Schauder de E.

Demostración: Al ser TE tonelado, la sucesión $(p_n)_n$ será $\tau_m(E, E^x)$-equicontinua y equiacotada por ser E topológico. Es suficiente entonces aplicar la proposición 1.1.

Por otra parte, al ser TE tonelado, toda descomposición para la topología débil es también descomposición para la topología tonelada ([5]). ▪

Si E es un e.b.c. y $(M_n, p_n)_n$ una descomposición de Schauder de E, la topología de TE induce en cada uno de los espacios M_n la topología propia de TM_n, ya que al ser las proyecciones $q_n : E \to M_n$ acotadas, serán continuas para las topologías de los espacios TE, $T M_n$. En particular, si la topología de TE es separada, se tiene;

$$\tau_m (M_n, M_n^x) = \tau_m (E, E^x)_{|Mn}, \text{ y } \sigma(M_n, M_n^x) = \sigma(E, E^x)_{|Mn} .$$

2. Descomposiciones inducidas en el dual bornológico.

Sea E un e.b.c. Designaremos por $E^x{}_\nu$ el dual bornológico de E provisto de la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de E (topología natural).

Si $(p_n)_n$ es una sucesión de proyecciones que define una descomposición bornológica de Schauder de E, $(p'_n)_n$, $(q'_n)_n$ serán las sucesiones de aplicaciones adjuntas de las proyecciones $(p_n)_n$, $(q_n)_n$ respectivamente. Si A es un acotado de E, para todo $u \in E^x$, $\langle p'_n(u), A\rangle = \langle u, p_n(A)\rangle$ es acotado en R por ser acotasas las aplicaciones p_n, y tendremos

$$\begin{array}{rccl} p'_n : & E^x & \to & E^x \\ & u & \to & u \circ p_n \end{array} , \quad q'_1 = p'_1 , \quad q'_n = p'_n - p'_{n-1} \text{ si } n > 1 .$$

Se comprueba inmediatamente que las aplicaciones p'_n, q'_n son proyecciones continuas para la topología natural en E^x, que verifican $p'_n \circ p'_n = p'_{\min(m,n)}$, $q'_n \circ q'_m = 0$ si $n \neq m$.

También, $q'_n(E^x) = \{u \circ q_n : u \in M_n{}^x\} \equiv M_n{}^x$, y el isomorfismo es topológico considerando en $q'_n(E^x)$ la topología natural de E^x, y en $M_n{}^x$ su propia topología natural. (De conv. uniforme sobre los acotados de M_n).

2.1. Proposición. Sea E un e.b.c. tal que TE sea separado, y $(M_n, p_n)_n$ una descomposición bornológica de Schauder de E. Entonces, la sucesión $(p'_n)_n$ define una descomposición de Schauder de E^x para la topología débil $\sigma(E^x, E)$.

Demostración: Como las aplicaciones $(p_n)_n$ son $\tau_m(E, E^x)$-continuas, las aplicaciones p'_n serán $\sigma(E^x, E)$-continuas, y como para todo $x \in E$, $x = M\text{-lim}\, p_n(x)$, para $u \in E^x$ tendremos

$$< u, x > = < u, M - \lim p_n(x) > = \lim < u, p_n(x) > = \lim < p'_n(u), x > . \square$$

2.2. Proposición. Sea E un e.b.c. tal que TE sea tonelado. Sea $(p_n)_n$ una sucesión de proyecciones acotadas definidas sobre E tales que la envoltura lineal de $\bigcup_n p_n(E)$ sea Mackey-densa en E. Si $(p'_n)_n$ define una $\sigma(E^x, E)$-descomposición de Schauder de E^x, la sucesión $(p_n)_n$ define una descomposición equi-Schauder de E.

Demostración: Como $(E^x, \sigma(E^x, E))' = E$, la sucesión $(p_n)_n$ define una $\sigma(E, E^x)$-descomposición de E, según el conocido resultado para descomposiciones en el dual de un espacio localmente convexo. Basta entonces aplicar 1.7. □

2.3. Proposición. Sea E un e.b.c. tal que TE sea separado. $(p_n)_n$ una sucesión de proyecciones que define una descomposición equi-Schauder de E. Sea F la ν-clausura en E^x de la envoltura lineal de $\bigcup p'_n(E^x)$. Entonces, $(p'_n)_n$ define una descomposición equi-Schauder de F para la topoligía natural.

Demostración: Para todo $u \in F$, la sucesión $(p'_n(u))_n$ es de ν-Canchy por ser la sucesión $(p'_n)_n$ equicontinua, y como ν tiene una base de entornos de cero $\sigma(E^x, E)$-cerrados, $u = \nu\text{-}\lim p'_n(u) = \sigma(E^x, E)\text{-lim}\, p'_n(u)$. □

Si $(p_n)_n$ es una sucesión de proyecciones que define una descomposición de Schauder en el e.b.c. E, designaremos por $(p''_n)_n$, $(q''_n)_n$ las sucesiones de aplicaciones adjuntas de las proyecciones $(p'_n)_n$, $(q'_n)_n$ respectivamente. Como estas últimas son continuas para la topología natural ν en E^x, tendremos, para todo n, $p''_n((E^x{}_\nu)') \subset (E^x{}_\nu)'$ y $q''_n((E^x{}_\nu)') \subset (E^x{}_\nu)'$. Podremos enunciar:

2.4. Proposición. Sea E un e.b.c. tal que TE sea separado. $(M_n, p_n)_n$ una descomposición equi-Schauder de E tal que $(q'_n(E^x), p'_n)_n$ sea una descomposición de E^x para la topología natural. Entonces, $(q''_n (E^x{}_\nu)'), p''_n)_n$ es una descomposición equi-Schauder de un subespacio de $(E^x{}_\nu)'$ para la bornología equicontinua.

Demostración: Trivialmente, $p''_n \circ p''_m = p''_{\min(m,n)}$. Como $(p_n)_n$ es equiacotada, $(p'_n)_n$ será un conjunto equicontinuo de $L(E^x{}_\nu, E^x{}_\nu)$, y $(p''_n)_n$ un conjunto equiacotado para la bornología equicontinua de $(E^x{}_\nu)'$.

Según la proposición 1.1, $(p''_n)_n$ definirá una descomposición equi-Schauder de la M- adherencia de la envoltura lineal de $\bigcup_n q''_n(E^x{}_\nu)')$. ▪

3. Descomposiciones en espacios reflexivos

Si E es un e.b.c. bornológico, el espacio $(E^x{}_\nu)'$ provisto de la bornología equicontinua, es el bidual bornológico de E.

E será reflexivo si coincide algebraica y bornológicamente con su bidual. Una condición necesaria y suficiente, es que E posea una base de su bornología formada por discos $\sigma(E, E^x)$-compactos. ([2]).

Si algebraicamente $E = (E^x{}_\nu)'$, E es semirrefelexivo, y si E es subespacio bornológico de $(E^x{}_\nu)'$, E es polar: una condición necesaria y suficiente es que E tenga una base de su bornologia formada por discos cerrados para la topología de TE. ([2]).

En los espacios de Banach, la existencia de una descomposición acotadamente completa y recortante, equivale a la reflexividad del espacio. Siguiendo esta idea, definiremos las descomposiciones acotadamente completas y recortantes en espacios bornológicos, y veremos que caracterizan la reflexividad de los e.b.c. polares i de los e.b.c. LB siempre que los espacios de la descomposición sean de dimensión finita.

Una descomposición bornológica de Schauder $(M_n,p_n)_n$ de un e.b.c. E es acotadamente completa, si para toda sucesión $(x_n)_n \subset E$ tal que $x_n \in M_n$ para todo n, y $(\sum_{k=1}^{n} x_k)_n$ sea acotada, la serie $\sum_n x_n$ es Mackey-convergente en E.

Una descomposición bornológica de Schauder $(M_n, p_n)_n$ de un e.b.c. E es recortante, si la sucesión $(p'_n)_n$ define una descomposición de Schauder para la topología natural en E^x.

*3.1. **Proposición.*** Sea E un e.b.c. tal que TE sea separado. Entonces:

a) Si E es reflexivo, toda descomposición de Schauder $(M_n, p_n)_n$ es acotadamente completa.

b) Si E es semirreflexivo, toda descomposición equi-Schauder es recortante.

Demostración: a) Sea $(\sum_{k=1}^{n} x_k)_n$ acotada tal que $\forall\ n, x_n \in M_n$.

Como E es reflexivo, la sucesión estará contenida en un conjunto A acotado y $\sigma(E, E^x)$-compacto: sea $x \in A$ $\sigma(E, E^x)$-adherente a la sucesión. x admite la representación $x = M - \sum_k q_k(x)$ con $q_k(x) \in M_k$, y también $x = \sigma(E, E^x)\text{-}\sum_k q_k(x)$, siendo las aplicaciones q_k continuas para la topología débil.

Entonces, para todo k, $q_k(x)$ será adherente a la sucesión $(q_k(\sum_{i \leq n} x_i))_n$, y como $q_k(\sum_{i \leq n} x_i) =$ $= x_k$ si $n \geq k$, y 0 en caso contrario, $x = M\text{-}\lim \sum_{k \leq n} x_k$.

b) Por. 2.3, $(p'_n)_n$ define una descomposición equi-Schauder de la ν-clausura de la envoltura lineal F de $\bigcup_n q'_n(E^x)$. Pero F es denso en $E^x{}_\nu$: como $(E^x{}_\nu)' = E$, si x pertenece al ortogonal de F, para todo $u \in E^x$ y todo $n \in N$, $(q'_n(u)(x) = u\,(q_n(x)) = 0$, y de aquí $q_n(x) = 0$ para todo n por ser $< E, E^x >$ un par dual, y $x = 0$. □

Si (M_n, p_n) es una descomposición de Schauder del e.b.c. E tal que cada M_n sea semirreflexivo, para todo n, $q''_n((E^x{}_\nu)') = \{u \circ q'_n \mid u \in ((M_n)^x{}_\nu)'\} \equiv M_n$. Identificando estos espacios, podremos enunciar el siguiente lema de representación del bidual de los espacios polares:

*3.2. **Lema.*** Sea E un e.b.c. polar. $(M_n, p_n)_n$ una descomposición equi-Schauder acotadamente completa y tal que cada subespacio M_n sea semirreflexivo. Entonces, $(E^x{}_\nu)' = E \oplus V$, suma directa algebraica, siendo V el ortogonal en $(E^x{}_\nu)'$ de la envoltura lineal de la unión de los subespacios $p'_n(E^x)$.

Demostración: Sea $z \in (E^x{}_\nu)'$. Para todo n, $q''_n(z) \in M_n \subset E$, e igualmente, $p''_n(z) \in E$.

Como la descomposición es equi-Schauder, $(p''_n)_n$ es un equiacotado de $L^x((E^x{}_\nu)'_e, (E^x{}_\nu)'_e)$, y por lo tanto $(p''_n(z))_n$ un equicontinuo de $(E^x{}_\nu)'$. Al ser E polar, $(p''_n(z))_n = (\sum_{k \leq n} q''_k(z))_n$ será un acotado de E, y al ser la descomposición acotadamente completa, existirá $x \in E$ tal que

$$x = \text{M-lim}\, p''_n(z) = \text{M-} \sum_{k \leq n} q''_k(z).$$

Definiendo la aplicación $(E^x{}_\nu)' \to E$

$$z \to x = \text{M-}\lim_n p''_n(z)$$

se tiene una proyección sobre E de núcleo $\bigcup_n \text{Ker}\, p''_n = V$. ▪

Podemos demostrar ahora el recíproco de la proposición 3.1. para los e.b.c. polares:

3.3.Proposición. Sea E un e.b.c. polar $(M_n, p_n)_n$ una descomposición acotadamente completa y recortante tal que cada M_n sea semirreflexivo. Entonces E es reflexivo.

Demostración: Según el lema 3.2, $(E^x{}_\nu)' = E \oplus V$, siendo $V = (\bigcup_n p'_n(E^x))^\perp$. Pero al ser la descomposición recortante, la unión de los subespacios $p'_n(E^x)$ es densa en E^x y $V = 0$. ▫

Para demostrar un resultado análogo en los espacios LB, utilizaremos dos lemas relativos a espacios de Banach que posean una descomposición de Schauder, análogos a conocidos resultados para bases de Schauder que se encuentran en [3]. También un lema para espacios LB en el que se identifican las adherencias de determinados conjuntos.

3.4. Lema. Sea E un espacio de Banach, y $(M_n, p_n)_n$ una descomposición de Schauder. Sea F la adherencia, en la dual E' de E de la envoltura lineal de $\bigcup_n q'_n(E')$ con la norma inducida. Entonces, el espacio E es topológicamente isomorfo a un subespacio cerrado del dual F' de F.

3.5. Lema. Sea E un espacio de Banach. $(M_n, p_n)_n$ una descomposición de Schauder tal que cada M_n sea reflexivo. Sea F la adherencia en E' de la envoltura lineal de $\bigcup_n q'_n(E')$ con la norma inducida, y F' su dual.

Entonces, F' con la norma dual, es topológicamente isomorfo al subespacio Y del producto $\prod_n M_n$ formado por las sucesiones $(x_n)_n$ tales que $\sup_n \| \sum_{k \leq n} x_k \|_E$ es finito, con la norma $\| (x_n)_n \| = \sup_n \| \sum_{k \leq n} x_k \|_E$.

3.6. Lema. Sea E un e.b.c. LB. (M_n, p_n) una descomposición de Schauder recortante tal que cada subespacio M_n sea de dimensión finita. Sea $(E_k)_k$ una representación de E tal que $(E_k \cap M_n, p_{n|Ek})_{n \in Nk}$ defina una descomposición de E_k. (Lema 1.2).

Designamos por $\pi_k : E^x \longrightarrow E'_k$ las aplicaciones adjuntas de las inclusiones de los espacios E_k en E, siendo E'_k los duales de los espacios E_k con la norma correspondiente.
Entonces, la adherencia en E'_k de $\pi_k(E^x)$ coincide con la adherencia en E'_k de la envoltura lineal del conjunto $\bigcup_{n \in N_k} (q_{n|Ek})' (E'_k)$.

Demostración: Al ser $(M_n, p_n)_n$ recortante, $\bigcup_n q'_n(E^x)$ es ν-denso en E^x, y coincidirán las adherencias en E'_k de los conjuntos $\pi_k(E^x)$ y $\pi_k [\bigcup_n q'_n(E^x)]$. Pero

$$\pi_k (q'_n (E^x)) = \{ u \circ q_{n|Ek} : u \in M^x{}_n \} \text{ si } n \in N_k \qquad (*)$$

$$\pi_k (q'_n (E^x)) = 0 \quad \text{si } n \notin N_k .$$

Por otra parte,

$$(q_{n|Ek})' (E'_k) = \{ v \circ q_{n|Ek} : v \in (M_n \cap E_k)' \} \ \forall n \in N_k \qquad (**)$$

Como $\dim M_n < \infty$, $M^x{}_n$, $(M_n \cap E_k)'$ coinciden con sus respectivos duales algebraicos y se comprueba fácilmente la igualdad entre (*) y (**). ▪

3.7. Proposición. Sea E un e.b.c. LB tal que TE sea separado. $(M_n, p_n)_n$ una descomposición de Schauder de E acotadamente completa y recortante tal que cada M_n sea de dimensión finita. Entonces, el espacio E es reflexivo.

Demostración: Sea $(E_k)_k$ una representación de E formada por espacios de Banach tal que $(E_k \cap M_n, p_{n|Ek})_{n \in Nk}$ defina una descomposición de E_k.

Entonces, como $E = \lim\limits_{\rightarrow} E_k$, $E^x = \lim\limits_{\leftarrow} E'_k$ considerando en cada E_k la topología de la norma y las aplicaciones adjuntas de las inclusiones $(\pi_k : E^x{}_\nu \rightarrow E'_k,\ \pi_k(u) = u|_{Ek})$.

Si F_k es la adherencia en E'_k de $\pi_k(E^x{}_\nu)$, también $E^x{}_\nu = \lim\limits_{\leftarrow} F_k$, siendo en este caso un

límite

proyectivo reducido, y por tanto, $(E^x{}_\nu)' = \lim\limits_{\rightarrow} F_k$ considerando en los espacios las topologías de Mackey, y las aplicaciones adjuntas de las que definen el sistema proyectivo. Entonces, para todo $z \in (E^x_\nu)'$ exisirán $k \in N$ y $h \in F_k$ tales que para $\forall\ u \in E^x$, $z(u) = h(\pi_k(u))$. (*)

Como todo acotado de E es equicontinuo en $(E^x{}_\nu)'$, la inclusión natural $E \rightarrow (E^x{}_\nu)'_e$ es acotada. Si comprobamos que es una biyección, el teorema del homomorfismo entre espacios bornológicos, ([2]), válido entre e.b.c. LB y eb.c. completos, asegurará el isomorfismo bornológico.

Sea $z \in (E^x{}_\nu)'$. Sea $h \in F_k$ tal que $\forall\ u \in (E^x{}_\nu)'$, $z(u) = h(\pi_k(u))$, y consideremos la sucessión de F_k, $(((q_{n|Ek})'_{|Fk})'(h))_n$.

Teniendo en cuenta el lema 3.6, podemos aplicar el lema 3.5 a la descomposición $(M_n \cap E_k, q_{n|Ek})_{n \in Nk}$ del espacio E_k. El espacio F'_k será isomorfo al subespacio del producto de los $M_n \cap F_k$ formado por las sucesiones tales que sus sumas parciales están acotadas para la norma de E_k.

Por tanto, la sucesión de las sumas parciales de $\sum\limits_{n \in N_k} ((q_{n|Ek})'_{|Fk})'(h)$ estará acotada en E_k, luego en E. Como la descomposición es acotadamente-completa, la serie será Mackey-convergente hacia un elemento $x \in E$.

Veremos que $x = z$, lo que concluirá la demostración.

Como la descomposición es recortante, y los espacios M_n de dimensión finita, $(M_n, p''_n)_n$ define una $\sigma((E^x{}_\nu)', E^x)$-descomposición de Schauder de $(E^x{}_\nu)'$: $z = \sigma((E^x{}_\nu)', E^x)\text{-}\sum\limits_n q''_n(z)$.

Por otra parte, $x = M\text{-}\sum_n q_n(x)$, y también $x = \sigma(E, E^x)\text{-}\sum_n q_n(x)$: será suficiente comprobar que para todo $u \in E^x$, y $n \in N$, $(q''_n(z)(u) = u(q_n(x))$.

Teniendo en cuenta (*):

$$(q''_n(z))(u) = z(q'_n(u)) = z(u \circ q_n) = h(\pi_k(u \circ q_n)) \text{ si } n \in N_k, \text{ y } q''_n(z) = 0 \text{ si } n \notin N_k.$$

Según la definición de x, $q_n(x) = 0$ si $n \notin N_k$, y si $n \in N_k$,

$$u(q_n(x)) = (((q_{n|Ek})'_{|Fk})'(h))(\pi_k(u)) = h((q_{n|Ek})'(\pi_k(u))) =$$

$$= h(\pi_k(u) \circ q_{n|Ek}) = h(\pi_k(u \circ q_n)). \square$$

BIBLIOGRAFIA

[1] H.HOGBE-NLEND.: Théorie des bornologies et applications. Lecture Notes in Mathematics 213. Berlin, Springer. 1971.

[2] -- : Bornologies and Functional Analysis. North Holland, Amsterdam. 1977.

[3] J. LINDENSTRAUSS; L. TZAFRIRI.: Classical Banach Spaces I. Springer Verlag, Berlin. 1977.

[4] V. B. MOSCATELLI.: Bases in bornological spaces. Studia Math. 50, 251-264. 1974.

[5] C. W. Mc. ARTHUR.: The weak basis theorem. Colloq. Math. XVI, 71-76. 1967.

Rebut el 23 de Maig de 1986

Dep. de Teoria de Funcions.
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via 585
BARCELONA-SPAIN.