Pub. Mat. UAB
Vol. 31 nº 1 Abril-1987

D-DIMENSION EN ESPACIOS NO METRIZABLES

Regino Criado (*) y Juan Tarrés (**)

En este trabajo se extiende la D-dimensión (definida en [6] para espacios métricos) a espacios no metrizables. Aunque la definición de la dimensión D(X) puede establecerse para espacios normales (T_4), las propiedades consideradas se establecen para espacios paracompactos y perfectamente normales (T_{5*}), si bien algunos teoremas, como el del subespacio y el de la suma localmente finita se dan en la clase más general de los espacios fuertemente herditariamente normales.

A lo largo de todo el trabajo consideraremos, junto a la clase de los números ordinales, los símbolos -1 y Δ de manera que para todo ordinal α será $-1<\alpha$ y $\alpha<\Delta$. Asimiso, para cualquier ordinal α, designaremos por $\lambda(\alpha)$ al mayor ordinal límite que es menor o igual que α, y por $n(\alpha)$ al ordinal finito tal que $\alpha=\lambda(\alpha)+n(\alpha)$. Convenimos que $\lambda(-1)=0$, $n(-1)=-1$ y $\lambda(\Delta)=\Delta$, $n(\Delta)=0$, así como $\alpha+(-1)=\alpha$ para todo número ordinal α.

Definición 1. *Sean X un espacio T_4 y β un número ordinal ó -1 con $\lambda(\beta)=\gamma$. Llamaremos β-D-representación de X a toda expresión de la forma;*

$$X = \bigcup_{0\leq\alpha\leq\gamma} A_\alpha$$

tal que:

a) Para $0\leq\alpha\leq\gamma$, A_α es un conjunto cerrado en X con $\mathrm{Ind}(A_\alpha)$ finita y $\mathrm{Ind}(A_\gamma)=n(\beta)$.

b) Para todo $\delta\leq\gamma$, el conjunto $\bigcup\{A_\alpha / \delta\leq\alpha\leq\gamma\}$ es un cerrado de X.

c) Para todo elemento $x\in X$ existe un número ordinal δ máximo tal que $x\in A_\delta$

(*) E.T.S.I. Telecomunicación. Universidad Politécnica. Madrid.

(**) Facultad de C. Matemáticas. Universidad Complutense. Madrid.

Proposición 1. Si un espacio T_4, X, tiene una β-D-representación, existe una β-D-representación del mismo:

$$X = \bigsqcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma} A_\alpha$$

tal que para todo $\alpha<\gamma$ es $Ind(A_\alpha) \leq n(\alpha)$.

Demostración. Sea $X=\bigsqcup \{B_\alpha \mid 0 \leq \alpha \leq \gamma\}$ una β-D-representación de X. Llamemos $\Gamma(\gamma)$ al conjunto de todos los ordinales menores o iguales que que γ; vamos a definir (por inducción transfinita) una aplicación inyectiva creciente $f\colon \Gamma(\gamma) \longrightarrow \Gamma(\gamma)$ tal que $f(\gamma)=\gamma$ y para todo $\alpha<\gamma$, $f(\alpha)$ sea igual a α más un número ordinal finito y además, $Ind(B_\alpha) \leq n[f(\alpha)]$:

Hacemos, en primer lugar, $f(0)=máx[o, Ind(B_0)]$. Suponiendo ahora que $f(\delta)$ está definida para $0 \leq \delta<\alpha<\gamma$, sea:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \alpha+máx[0, Ind(B_\alpha)] & \text{si } n(\alpha)=0 \\ máx[\lambda(\alpha)+Ind(B_\alpha, f(\alpha-1)+1] & \text{si } n(\alpha)\neq 0 \end{cases}$$

y podemos comprobar que la aplicación f está definida conforme a las condiciones exigidas.

Ahora, dado $\alpha\in\Gamma(\gamma)$ definimos:

$$A_\alpha = \begin{cases} B_{f^{-1}(\alpha)} & \text{si } f^{-1}(\alpha)\neq\emptyset \\ \emptyset & \text{si } f^{-1}(\alpha)=\emptyset \end{cases}$$

y la igualdad:

$$X = \bigsqcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma} A_\alpha$$

es una β-D-representación de X que verifica las condiciones del enunciado.

A toda β-D-representación de un espacio T_4, X, que satisfaga las condiciones de la proposición 1 le daremos el nombre de β-D-representación **propia** de X. En lo sucesivo, supondremos que toda β-D-representación de un espacio T_4, es propia.

Estamos ahora en condiciones de establecer el concepto de D-dimensión de un espacio topológico T_4:

Definición 2. ([6]). *Si X es un espacio T_4, la D-dimensión de X - D(X) - se define como un número ordinal, -1 ó Δ tal que:*

D1. $D(X)=-1$ si y sólo si $X=\emptyset$.

D2. Si $X\neq\emptyset$, D(X) es el menor ordinal β (si existe) tal que X tiene una β-D-representación.

D3. Si $X\neq\emptyset$ y no existe ningún ordinal β de manera que X tenga una β-D-representación, es $D(X)=\Delta$.

La D-dimensión es una extensión transfinita de la dimensión inductiva fuerte, Ind, en el sentido de que si X es un espacio T_4 y una de las dimensiones D(X) o Ind(X) es finita, la otra también lo es y, además, coinciden. Veremos en el teorema 3 la relación entre la dimensión inductiva transfinita fuerte trInd (cuando existe) y la D-dimensión, bajo determinadas condiciones respecto a los espacios.

Existen espacios T_4 que no tienen dimensión trInd mientras que su D-dimensión es menor que Δ: Los espacios definidos en [5] de la forma $X=\oplus\{X_n \mid n=1,2,\dots\}$ con $\mathrm{Ind}(X_n)<n$ para todo $n=1,2,\dots$ y además $\mathrm{Ind}(X)=\infty$. Dicha clase de espacios, que en [5] se denomina la clase $\mathcal{S}$, tiene la propiedad de que ninguno de sus elementos tiene dimensión trInd, mientras que:

Proposición 2. *Si X es un espacio de la clase $\mathcal{S}$, $D(X)=\omega_0$*

Demostración. Sea $X\in\mathcal{S}$; evidentemente, $D(X)\geq\omega_0$, ya que si $D(X)<\omega_0$, $\mathrm{Ind}(X) = n = \mathrm{trInd}(X)$.

Fácilmente se comprueba que:

$$X = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (X_n \times \{n\}) = \bigsqcup_{0<\alpha<\omega_0} A_\alpha$$

es una ω_0-D-representación, donde para cada $\alpha<\omega_0$, $A_\alpha= X_\alpha x(\alpha)$ y $A_{\omega_0}=\emptyset$. Por lo tanto, $D(X)\leq\omega_0$, lo que termina la demostración.

Como sabemos, la dimensión Ind no es monótona en la clase de los espacios normales ni en los hereditariamente normales (ver [4] y [9]). Por tanto, como consecuencia de las consideraciones anteriores, la D-dimensión no satisface el teorema del subespacio en estos casos. No obstante, es inmediato que se cumple el siguiente:

Teorema 1. (Teorema del subespacio). *Si X es un espacio fuertemente hereditariamente normal y $M\subset X$, $D(M)\leq D(X)$.*

Naturalmente, para espacios T_4, la D-dimensión es monótona para subespacios cerrados de X. Asimismo, el teorema 1 se cumple para aquellos espacios en los que es válido el teorema del subespacio para la dimensión inductiva fuerte finita.

El teorema de la suma localmente finita se cumple también en espacios fuertemente hereditariamente normales:

Teorema 2. (Teorema de la suma localmente finita) *Si X es un espacio fuertemente hereditariamente normal que puede expresarse como unión de una familia localmente finita de cerrados Ω tal que para todo $C\in\Omega$ es $D(C)\leq\beta$, se tiene $D(X)\leq\beta$.*

Demostración. Consideremos, para cada $C\in\Omega$, una $D(C)$-D-representación propia del mismo:

$$C = \bigsqcup_{0\leq\alpha\leq\gamma(C)} A_\alpha(C)$$

Supongamos que es $\delta=\lambda(\beta)$; si $\gamma(C)<\delta$ definimos $A_\alpha(C)=\emptyset$ para $\gamma(C)<\alpha\leq\delta$ y así, para cada $C\in\Omega$ tenemos la colección de cerrados $(A_\alpha(C))_{0\leq\alpha\leq\delta}$ con $\mathrm{Ind}[A_\alpha(C)]<n(\alpha)$ para $0\leq\alpha<\delta$ y además, $\mathrm{Ind}[A_\delta(C)]\leq n(\beta)$, ya que $D(C)\leq\beta$.

Ahora, para cada ordinal α tal que $0\leq\alpha\leq\delta$ definimos:

$$A_\alpha = \bigsqcup_{C\in\Omega} A_\alpha(C)$$

y la expresión:

$$X = \bigsqcup_{0\leq\alpha\leq\delta} A_\alpha$$

es una $[\delta+\mathrm{Ind}(A_\delta)]$-D-representación de X:

a) Si $0\leq\alpha\leq\delta$, A_α es cerrado en X, pues la familia $\{A_\alpha(C)\}_{C\in\Omega}$ es localmente finita. Asimismo, como consecuencia del teorema de la suma localmente finita para la dimensión "Ind" en el caso finito en espacios fuertemente hereditariamente normales, $\mathrm{Ind}(A_\alpha)$ es finita. Por otra parte, como $\mathrm{Ind}[A_\delta(C)]\leq n(\beta)$ para todo $C\in\Omega$, tenemos $\mathrm{Ind}(A_\delta)\leq n(\beta)$.

b) Si $\gamma<\delta$, para cada $C\in\Omega$ la unión:

$$B_C = \bigsqcup_{\gamma\leq\alpha\leq\delta} A_\alpha(C)$$

es un cerrado de C y, por tanto, de X. Ahora, la familia $\{B_C\}_{C\in\Omega}$ es localmente finita y el conjunto:

$$\bigsqcup_{\gamma\leq\alpha\leq\delta} A_\alpha = \bigsqcup_{C\in\Omega} B_C$$

es cerrado en el espacio X.

c) Si $x\in X$, sean $\{C^1, C^2, \ldots, C^r\}$ los cerrados de Ω tales que $x\in C^j$ $(j=1,2,\ldots,r)$. Para cada indice $j=1,2,\ldots,r$, existe un ordinal máximo $\alpha(j)$ tal que $x\in A_{\alpha(j)}(C^j)$; si $\alpha=\max\{\alpha(j)\mid j=1,2,\ldots,r\}$, α es el mayor ordinal tal que $x\in A_\alpha$.

Luego, $D(X)\leq\delta+\mathrm{Ind}(A_\delta)\leq\lambda(\beta)+n(\beta)=\beta$.

Corolario. *Si un espacio fuertemente hereditariamente normal X es la unión de una familia finita de cerados $\{C_i\}_{i=1,2,\ldots,k}$, entonces $D(X)=\max\{D(C_i\mid i=1,2,\ldots,k\}$.*

En [4] (Teorema 2.3.1) se demuestra que si X es un espacio T_5 que puede expresarse como unión de una sucesión $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots\}$ de subespacios disjuntos dos a dos tales que para cada $i=1,2,\ldots$ es $\mathrm{Ind}(Y_i)\leq n$ y

$\bigsqcup\{Y_j \mid j\leq i\}$ es cerrado en X, entonces es $\mathrm{Ind}(X)\leq n$. Asimismo, en [8] (Proposición 4.14) se establece que si X es T_4 y A un cerrado de X tal que $X\setminus F$ es normal para todo cerrado F contenido en A, se verifica que $\mathrm{Ind}(X)\leq \text{máx}[\mathrm{Ind}(A),\mathrm{Ind}(X\setminus A)]$.

Por otra parte, en [10] (Lema C) se prueba que si X es hereditariamente normal y contiene un subespacio cerrado C tal que $\mathrm{trInd}(C)\leq\alpha$ y para todo cerrado T de X contenido en $X\setminus C$ es $\mathrm{trInd}(T)\leq\beta$, la dimensión $\mathrm{trInd}(X)$ está definida y, además:

$$\mathrm{trInd}(X)\leq\begin{cases}\beta+\alpha+1 & \text{si} \quad \alpha<\omega_0\\ \beta+\alpha & \text{si} \quad \alpha\geq\omega_0\end{cases}$$

Vamos a obtener un resultado en este sentido para la D-dimensión, como indica la proposición siguiente:

Proposición 2. *Si X es un espacio* T_{5m} *con* $D(X)<\Delta$ *y F, un cerrado de X, se verifica:*

$$D(X)\leq \lambda[D(X\setminus F)] + \text{máx}\{n[D(X\setminus F)],D(F)]\leq D(X\setminus F)+D(F)$$

Demostración. a) Supongamos, en primer lugar, que la dimensión inductiva fuerte de F, $\mathrm{Ind}(F)$, es finita. Si $X\setminus F=\bigsqcup\{A_\alpha \mid 0\leq\alpha\leq\gamma\}$ es una $D(X\setminus F)$-D-representación de $X\setminus F$, la expresión:

$$X=\bigsqcup_{0\leq\alpha\leq\gamma}(A_\alpha\cup F)$$

es una $[\gamma+\mathrm{Ind}(A_\alpha\cup F)]$-D-representación de X, por lo que:

$$\begin{aligned}D(X)&\leq \gamma+\mathrm{Ind}(A_\alpha\cup F)\leq\gamma+\text{máx}[\mathrm{Ind}(A_\alpha),\mathrm{Ind}(F)]\leq\\ &\leq\lambda[D(X\setminus F)]+\text{máx}\{n[D(X\setminus F)],D(F)\}\leq\\ &\leq D(X\setminus F)+D(F)\end{aligned}$$

b) Si F es de dimensión inductiva fuerte infinita, sean:

$$X\setminus F=\bigsqcup_{0\leq\alpha\leq\gamma}A_\alpha \qquad F=\bigsqcup_{0\leq\alpha\leq\delta}B_\alpha$$

$D(X\setminus F)$ y $D(X)$-D-representaciones de los conjuntos respectivos. Para $0\leq n\leq\omega_0$ llamemos:

$$M_n = F \setminus \bigsqcup_{0 \leq \alpha \leq n} B_\alpha \qquad\qquad N_{n+1} = F \setminus \bigsqcup_{n+1 \leq \alpha \leq \delta} B_\alpha$$

que son dos abiertos disjuntos del subespacio F.

Vamos a construir por inducción dos familias de abiertos de X, $(G'_n)_{n=0,1,\ldots}$ y $(H'_{n+1})_{n=0,1,\ldots}$ tales que para $n = 0,1,\ldots$ satisfagan:

i) $G'_n \supset M_n$ y $H'_{n+1} \supset N_{n+1}$

ii) $G'_n \cap H'_{n+1} = \emptyset$

iii) $G'_{n+1} \subset G'_n$ y $H'_{n+2} \supset H_{n+1}$

Puesto que $M_0 = F \setminus B_0$ y $N_1 = F \setminus \bigsqcup \{B_\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq \delta\}$ son conjuntos separados en X, existen abiertos $G'_0 \supset M_0$ y $H'_1 \supset M_1$ que cumplen las condiciones exigidas para el caso n=0.

Si suponemos construidos los abiertos G'_{k-1} y H'_k para $k=1,2,\ldots,n$ que verifican las condiciones i) a iii), al ser M_n y N_{n+1} conjuntos separados en X, existen dos abiertos de este espacios, G_n y H_{n+1} tales que $M_n \subset G_n$, $N_{n+1} \subset H_{n+1}$ y $G_n \cap H_{n+1} = \emptyset$. Tenemos también, $M_n \subset M_{n-1} \subset G'_{n-1}$, por lo que podemos construir los abiertos de X:

$$G'_n = G'_{n-1} \cap G_n \qquad\qquad H'_{n+1} = H'_n \cup H_{n+1}$$

que cumplen las condiciones i) a iii). La construcción de las familias $(G'_n)_{n=0,1,\ldots}$ y $(H'_{n+1})_{n=0,1,\ldots}$ queda pues terminada.

Los abiertos de X:

$$G''_n = G'_n \setminus \bigsqcup_{0 \leq \alpha \leq n} B_\alpha \qquad\qquad H''_{n+1} = H'_{n+1} \setminus \bigsqcup_{n+1 \leq \alpha \leq \delta} B_\alpha$$

son disjuntos y, además, $G''_n \cap F = M_n$ y $H''_{n+1} \cap F = N_{n+1}$.

Por ser X un espacio T_{5*} y F un cerrado de X, existe una aplicación continua $f\colon X \longrightarrow R$ tal que $F = f^{-1}(0)$. Para cada $n=0,1,\ldots$ definimos:

$O_n = G''_n \cap f^{-1}[(-1/2^n, 1/2^n)]$

$U_{n+1} = H''_{n+1} \cup (X \setminus \overline{f^{-1}[(-1/2^n, 1/2^n)]})$

$U_0 = \emptyset$

con lo que tenemos las familias de abiertos de X: $(O_n)_{n=0,1,\ldots}$ y $(U_n)_{n=0,1,\ldots}$ de manera que para $n=0,1,\ldots$ se tiene:

1. $O_n \cap U_{n+1} = \emptyset$

2. $O_n \cap F = M_n$, $U_{n+1} \cap F = N_{n+1}$

3. $O_{n+1} \subset O_n$, $O_n \subset f^{-1}[(-1/2^n, 1/2^n)]$

$U_{n+1} \supset U_n$, $U_n \supset X \setminus \overline{f^{-1}[(-1/2^n, 1/2^n)]}$

En estas condiciones, para $\alpha<\gamma$ definimos:

$C_\alpha = [A_\alpha \setminus f^{-1}(-1/2^{n(\alpha)}, 1/2^{n(\alpha)})] \cup$

$\cup\{(\bigsqcup\{A_\beta \mid \lambda(\alpha) \leq \beta \leq \alpha\}) \cap$

$\cap[\overline{f^{-1}(-1/2^{n(\alpha)-1}, 1/2^{n(\alpha)-1})} \setminus f^{-1}(-1/2^{n(\alpha)}, 1/2^{n(\alpha)})]\}$

Para $0 \leq n \leq \omega_0$ hacemos:

$$C_{\gamma+n} = B_n \cup [A_\gamma \setminus (O_n \cup U_n)]$$

y para $\omega_0 \leq \beta \leq \delta$:

$$C_{\gamma+\beta} = B_\beta$$

Se comprueba que la expresión:

$$X = \bigsqcup_{0\leq\alpha\leq\gamma+\delta} C_\alpha$$

es una $[\gamma+\delta+\mathrm{Ind}(C_{\gamma+\delta})]$-D-representación de X de manera que $\gamma+\delta+\mathrm{Ind}(C_{\gamma+\delta}) = \lambda[D(X\setminus F)] + D(F)$.

Es decir, $D(X) \leq D(X\setminus F)+D(F)$.

Esta última proposición, es válida para espacios fuertemente herditariamente normales en el caso en que Ind(F) sea finita.

Nos proponemos estudiar ahora la relación existente entre la D-dimensión y la dimensión inductiva transfinita fuerte trInd en determinadas clases de espacios (ver teorema 3). Para ello, consideraremos un tipo especial de D-representaciones (definición 3 y proposición 3):

Definición 3. *Si X es un espacio T_4 con $D(X)<\Delta$, diremos que la $D(X)$-D-representación de X:*

$$X = \bigsqcup_{0\leq\alpha\leq\gamma} A_\alpha$$

es reducida si para todo abierto V de X para el cual A_γ $V\neq\emptyset$ se verifica que $D(\overline{V})\geq\gamma$.

La existencia de D-representaciones reducidas en determinadas clases de espacios queda asegurada por la proposición siguiente:

Proposición 3. *Si X es un espacio paracompacto y T_{5} con $D(X)\neq\Delta$, X tiene una $D(X)$-D-representación reducida.*

Demostración. Sea $X=\bigsqcup\{A_\alpha \mid 0\leq\alpha\leq\gamma\}$ una $D(X)$-D-representación del espacio X. Consideremos el conjunto C de todos los elementos $x\in A_\gamma$ para los que existe un abierto V tal que $x\in V$ y $D(\bar{V})<\gamma$; evidentemente, $T=X\setminus(A_\gamma\setminus C)$ es abierto en X. La familia $\mathcal{V}$ de los abiertos determinados con la condición anterior junto con $X\setminus A_\gamma$ es un recubrimiento abierto de T; además, para todo $M\in\mathcal{V}$ se tiene $M\cap(A_\gamma\setminus C)=\emptyset$.

Al ser X un espacio para compacto y T_{5} es hereditariamente paracompacto (ver [2]). Por otra parte, X es un espacio regular, por lo que para cada $M\in\mathcal{V}$ y todo $x\in M$ existe un abierto U^x tal que $x\in U^x\subset\bar{U}^x\subset M$. La familia $\mathcal{U}=\{U^x\}_{x\in T}$ es un recubrimiento abierto de T, y como este subespacio es paracompacto, existe un refinamiento abierto (en T y, por tanto, en X) localmente finito en T, $\mathcal{U}'=\{O_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{U}$. Consideremos la familia $\mathcal{U}''$ de $\mathcal{U}'$ formada por los abiertos de $\mathcal{U}'$ que tienen intersección con C distinta del vacío y sea $\mathcal{U}''=\{O_j\}_{j\in J}$; naturalmente, la familia $\mathcal{U}''$ es un recubrimiento abierto de C localmente finito en T. Llamemos $\mathcal{W}=\{\bar{O}_j\}_{j\in J}$ donde la adherencia se toma en todo X. Se cumple ahora:

a) Puesto que si un abierto A tiene intersección vacía con O_j también es $A\cap\bar{O}_j=\emptyset$, $\mathcal{W}$ es una familia de cerrados de X localmente finita en T.

b) Como para todo $j\in J$ es $O_j\subset\mathring{\bar{O}}_j$, la familia $\mathcal{W}'=\{\mathring{\bar{O}}_j\}_{j\in J}$ es un recubrimiento abierto de C.

c) Para cada $j\in J$, existe $x\in T$ tal que $O_j \subset U^x$. Así, $\bar{O}_j \subset \bar{U}^x \subset M$ para algún $M\in \mathcal{V}$, $M\neq X\setminus A_\gamma$. Luego, $D(\bar{O}_j)\leq D(M)<\gamma$.

d) Finalmente, para $j\in J$, $\mathring{\bar{O}}_j \cap (A_\gamma\setminus C)=\emptyset$, pues si es $\bar{O}_j\subset M$ ($M\in \mathcal{V}$, $M\neq X\setminus A_\gamma$) y $x\in\mathring{\bar{O}}_j \cap (A_\gamma\setminus C)$ es $x\in\bar{O}_j$, y como $D(\bar{O}_j)<\gamma$, $x\in C$, lo que contradice que $x\in A_\gamma\setminus C$.

Para cada $W\in \mathcal{W}$ sea:

$$W = \bigsqcup_{0\leq\alpha\leq\gamma(W)} A_\alpha(W)$$

una $D(W)$-D-representación propia de dicho conjunto, donde $\gamma(W)<\gamma$. Para $0\leq\alpha\leq\gamma$, definimos:

$$B_\alpha = [A_\alpha\setminus(\bigsqcup\{\mathring{W}\mid W\in \mathcal{W}\})] \cup$$
$$\cup[\bigsqcup\{A_\alpha(W)\mid W\in \mathcal{W},\ \alpha<\gamma(W)\}]\cup$$
$$\cup(A_\gamma\setminus C)\cup$$
$$\cup[\bigsqcup\{A_{\gamma(W)}(W)\mid W\in \mathcal{W},\ \alpha=\gamma(W)+\mathrm{Ind}[A_{\gamma(W)}(W)]\}]$$

Observemos que:

$$X = \bigsqcup_{0\leq\alpha\leq\gamma} B_\alpha$$

además, esta expresión es una $D(X)$-D-representación de X:

1. Los conjuntos $A_\alpha\setminus(\bigsqcup\{\mathring{W}\mid W\in \mathcal{W}\})$ y $A_\gamma\setminus C$ son cerrados en X. POr otra parte, como $\mathcal{W}$ es localmente finita en T, los conjntos:

$$H_\alpha = \bigsqcup\ \{A_\alpha(W)\mid W\in \mathcal{W},\ \alpha<\gamma(W)\}$$
$$K_\alpha = \bigsqcup\ \{A_{\gamma(W)}(W)\mid W\in \mathcal{W},\ \alpha=\gamma(W)+\mathrm{Ind}[A_{\gamma(W)}(W)]\}$$

son cerrados en T; como éste es abierto en X, las fronteras de H_α y K_α en X están contenidas en $A_\gamma\setminus C$, por lo que tanto $\bar{H}_\alpha$ como $\bar{K}_\alpha$ están incluídos en B_α. Es decir, B_α es cerrado para $0\leq\alpha\leq\gamma$.

2. Análogamente al caso anterior se prueba que para $\beta\leq\gamma$, $\bigsqcup\{B_\alpha\mid\beta\leq\alpha\leq\gamma\}$ es cerrado en X.

3. El conjunto $B_\alpha\setminus(A_\gamma\setminus C)$ es unión de una familia localmente finita de cerrados de dimensión menor o igual que $\max(\mathrm{Ind}A_\alpha), n(\alpha))$; luego, $\mathrm{Ind}[B_\alpha\setminus(A_\gamma\setminus C)]<\infty$. Tenemos también:

$$B_\alpha = [B_\alpha\cap(A_\gamma\setminus C)]\cup[B_\alpha\setminus(A_\gamma\setminus C)]$$

y como $B_\alpha \cap (A_\gamma \backslash C) \subset A_\gamma$, $D[B_\alpha \cap (A_\gamma \backslash C)] \leqslant D(A_\gamma) = \mathrm{Ind}(A_\gamma)$. Puesto que $B_\alpha \cap (A_\gamma \backslash C)$ es cerrado en B_α, por la proposición 2 es:

$$D(B_\alpha) \leqslant D(A_\gamma) + D[B_\alpha \backslash (A_\gamma \backslash C)] =$$
$$= \mathrm{Ind}(A_\gamma) + \mathrm{Ind}[B_\alpha \backslash (A_\gamma C)] < \infty$$

4. Como todo elemento $x \in X$ pertenece, a lo sumo, a un número finito de miembros de $\mathcal{W}$ podemos asegurar que existe un ordinal máximo α tal que $x \in B_\alpha$.

Por consiguiente, $X = \bigsqcup \{B_\alpha \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma\}$ es una D-representación de X, y como $B\gamma = A_\gamma \backslash C \subset A_\gamma$ y $D(X) = \gamma + \mathrm{Ind}(A_\gamma)$, será $\mathrm{Ind}(B_\gamma) = \mathrm{Ind}(A_\gamma)$, por lo que esta representación es una D(X)-D-representación de X. Además, por ser $B_\gamma = A_\gamma \backslash C$, es reducida.

Proposición 4. *Sean X, un espacio fuertemente hereditariamente normal; C, un cerrado no vacío de X tal que $\mathrm{Ind}(C) < \infty$, y γ, un ordinal límite. Si todo abierto de X cuya intersección con C es distinta del vacío tiene D-dimensión mayor o igual que γ, $D(X) \geqslant \gamma + \mathrm{Ind}(C)$.*

Demostración. Si $D(X) = \Delta$ el resultado es evidente. Supongamos, pues, $D(X) \neq \Delta$:

Sea $X = \bigsqcup \{B_\alpha \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant \delta\}$ una D(X)-D-representación de X. Por el teorema del subespacio, será $D(X) \geqslant \gamma$ y así, $\delta \geqslant \gamma$. Si $\delta > \gamma$, al ser δ y γ ordinales límite e $\mathrm{Ind}(C) < \infty$, se tiene $D(X) \geqslant \delta > \gamma + \mathrm{Ind}(C)$ y la proposición, en este caso, es evidente.

Supongamos que es $\delta = \gamma$, con $\mathrm{Ind}(B_\gamma) < \mathrm{Ind}(C)$. En estas condiciones, $C \not\subset B_\gamma$. Sean $x \in C \backslash B_\gamma$ y β el mayor ordinal para el que es $x \in B_\beta$. Ahora, $x \in X \backslash (\bigsqcup \{B_\alpha \mid \beta+1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma\}) \cap C$ y puesto que $X \backslash (\bigsqcup \{B_\alpha \mid \beta+1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma\})$ es abierto en X, como su intersección con C es distinta del vacío, tenemos:

$$D[X \backslash (\bigsqcup_{\beta+1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma} B_\alpha)] \geqslant \gamma$$

Ahora bien, $X\setminus(\bigsqcup\{B_\alpha|\beta+1\leq\alpha\leq\gamma\})\subset\bigsqcup\{B_\alpha|0\leq\alpha\leq\beta\}$ con lo que $D[X\setminus(\bigsqcup\{B_\alpha|\beta+1\leq\alpha\leq\gamma\})]\leq\beta$ en contradicción con lo anterior.

Luego, $Ind(B_\gamma)\geq Ind(C)$ y en consecuencia, se cumple $D(X)\geq\gamma+Ind(C)$.

Tenemos ahora:

Teorema 3. *Dado un espacio X, paracompacto y T_{5a}, si existe trInd(X), es $trInd(X)\leq D(X)$.*

Demostración. Aplicaremos inducción transfinita respecto a trInd(X):

Si trInd(X) es un ordinal finito, $trInd(X)=Ind(X)= =D(X)$.

Supongamos que el teorema es cierto para todo espacio paracompacto y T_{5a} cuya dimensión trInd es menor que α y sea X un espacio de las características indicadas tal que $trInd(X)=\alpha$. Distinguiremos dos casos:

a) **α es un ordinal límite.** Ahora (ver [5]) para cada ordinal $\beta<\alpha$ existe un cerrado X_β de X tal que $trInd(X_\beta)=\beta$. Aplicando la hipótesis de inducción se tiene $D(X_\beta)\geq\beta$ para todo $\beta<\alpha$, por lo que $D(X)\geq\alpha$.

b) **α no es un ordinal límite.** Sea $\alpha=\gamma+n$, donde γ es un ordinal límite. Si $trInd(X)=\alpha$, existen dos cerrados E y F en X de manera que toda separación de X entre ellos tiene dimensión trInd mayor o igual que $\gamma+(n-1)$.

Llamemos Ω a la familia de todos los cerrados de X cuya dimensión trInd es igual a $\gamma+(n-1)$. Para cada $C\in\Omega$, sea:

$$C = \bigsqcup_{0\leq\alpha\leq\gamma} A_\alpha(C)$$

una $[\gamma+(n-1)]$-D-representación reducida de C; así, para todo abierto U de C tal que $U\cap A_\gamma(C)\neq\emptyset$ será $D[Adh_C(U)]\geq\gamma$. Definimos:

$$A = \overline{\bigsqcup_{C\in\Omega} A_\gamma(C)}$$

Si L es una separación de A entre $E \cap A$ y $F \cap A$; existe una separación L' de X entre E y F tal que $L' \cap A \subset L$ (ver [4], 1.2.9 y 1.2.10). en consecuencia, $\operatorname{trInd}(L') \geq \gamma+(n-1)$; por la hipótesis de inducción, $D(L') \geq \gamma+(n-1)$. Si $D(L') \geq \gamma+n=\alpha$, por el teorema del subespacio, $D(X) \geq \alpha = \operatorname{trInd}(X)$. Si $D(L')=\gamma+(n-1)$, entonces $L' \in \Omega$ y por tanto, $A_{\gamma}(L') \subset L' \cap A \subset L$, con lo que $\operatorname{trInd}(L) \geq \operatorname{trInd}[A_{\gamma}(L')] \geq n-1$ y así, $\operatorname{trInd}(A) \geq n$.

Ahora, en virtud de la proposición 3.4 de [5], A contiene un cerrado de X de dimensión n. Por la proposición 4 del presente trabajo podemos concluir:

$$D(X) \geq \gamma+n = \alpha = \operatorname{trInd}(X)$$

lo que finaliza la demostración.

La desigualdad del teorema 3 puede ser estricta, pues los espacios D^{α} definidos en [6] satisfacen, para todo α numerable, $\operatorname{trInd}(D^{\alpha})=\omega_0$ mientras que $D(D^{\alpha})=\alpha$.

Por otra parte, la condición que exige la existencia de $\operatorname{trInd}(X)$ no puede suprimirse, ya que los espacios Q^{α} de [6] verifican, para $\alpha > \omega_1$, $D(Q^{\alpha})=\alpha$ y sin embargo no existe $\operatorname{trInd}(Q^{\alpha})$.

La proposición siguiente establece una propiedad local de la D-dimensión en los espacios paracompacos y T_{5*}, que nos va a permitir enunciar el teorema 4, que da una relación entre el cardinal de $D(X)$ - si $D(X)<\Delta$ - y el peso del espacio en la clase de espacios citada:

Proposición 5. *Sea X un espacio paracompacto y* T_{5*}.

a) Si $D(X)=\Delta$ *o si* $D(X)$ *no es un ordinal límite, existe un elemento* $x \in X$ *tal que para todo entorno V del mismo es* $D(V)=D(X)$.

b) Si $D(X)$ *es un ordinal límite, para cada* $\beta < D(X)$ *existe un punto* $x(\beta) \in X$ *tal que todos sus entornos tienen D-dimensión mayor o igual que* β.

Demostración. Sea:

$$X = \bigsqcup_{0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma} A_\alpha$$

una D(X)-D-representación reducida de X. Consideraremos dos posibilidades:

1. $A_\gamma \neq \emptyset$.

En este caso, puesto que $\mathrm{Ind}(A_\gamma)$ es finita, existe $x \in A_\gamma$ tal que todo entorno de x en A_γ tiene dimensión igual a $\mathrm{Ind}(A_\gamma)$ (ver [1]). Sea ahora V un abierto tal que $x \in V$; por ser X un espacio $T_{5\frac{1}{2}}$, también es regular y, por tanto, existe un abierto U tal que $x \in U \subset \bar{U} \subset V$. Por definición de D-representación reducida, $D(\bar{U}) \geqslant \gamma$ y, por la proposición 2, al ser $V \cap A_\gamma$ cerrado en V, tenemos:

$$\gamma \leqslant D(V) \leqslant D(V \setminus A_\gamma) + D(V \cap A_\gamma)$$

y como además $D(V \cap A_\gamma) \leqslant \mathrm{Ind}(A_\gamma)$, será $D(V \setminus A_\gamma) = \gamma$.

Luego $D(V) \leqslant \gamma + \mathrm{Ind}(A_\gamma)$ y como, por la proposición 4 $D(V) \geqslant \gamma + \mathrm{Ind}(A_\gamma)$, obtenemos $D(V) = D(X)$.

2. $A_\gamma = \emptyset$ o $D(X) = \Delta$.

Ahora $D(X) = \Delta$ o bien D(X) es un ordinal límite. Sea β cualquier ordinal menor que D(X) y supongamos que para todo $x \in X$ existe un entorno V^x de x tal que $D(V^x) < \beta$.

Puesto que X es paracompacto y regular podemos encontrar un recubrimiento cerrado localmente finito de X formado por conjuntos de D-dimensión menor que β. Pero en este caso, como consecuencia del teorema de la suma localmente finita, será $D(X) \leqslant \beta$, contra la hipótesis.

Para cualquier ordinal α llamemos $|\alpha|$ al cardinal de α y para un espacio topológico X, sea w(X) el peso del mismo. Ahora, con métodos análogos a [6] (teorema 10) podemos probar:

Teorema 4. *Si X es un espacio paracompacto y $T_{5\infty}$ tal que $D(X)\neq\Delta$, se cumple que $|card[D(X)]|\leqslant w(X)$.*