Matemàtiques a Geologia / Àlgebra

Agustí Reventós

2021-22

Índex

Capítol 1

Programa de l'assignatura

Donem una distribució aproximada de les 15 hores de teoria del mòdul d'Àlgebra.

1. Nombres reals.
2. Sistemes d'equacions lineals. Matrius esglaonades.
3. Producte de matrius. Matriu inversa.
4. Determinants. Mètode de Cramer.
5. Vectors. Combinacions lineals. Vectors linealment independents.
6. Rang d'una matriu. Teorema de Rouché-Frobenius.
7. Vectors i valors propis.
8. Diagonalització.
9. Producte escalar, angle i distància.
10. Geometria plana. Equació de la recta.
11. Geometria plana. Teoremes clàssics.
12. Geometria de l'espai. Producte vectorial.
13. Geometria de l'espai. Equacions de rectes i plans.
14. Geometria de l'espai. Distància entre punts rectes i plans.
15. Projecció Estereogràfica. Poliedres regulars.

Capítol 2

Els nombres reals

2.1 Nombres racionals i nombres reals

Els nombres racionals es poden pensar com fraccions o com decimals periòdics. Veiem aquestes dues presentacions.

El conjunt dels nombres racionals és el conjunt

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

amb el conveni de que

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \quad \text{si i només si} \quad pq' = p'q.$$

En aquests moments la notació $\frac{p}{q}$ no vol dir p dividit per q, sinó que és tan sols una manera de referir-nos a la parella ordenada (p, q), de manera que també haguéssim pogut escriure

$$\mathbb{Q} = \{(p, q);\ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

amb el conveni de que

$$(p, q) = (p', q') \quad \text{si i només si} \quad pq' = p'q.$$

Però perquè aquest conjunt $\mathbb{Q}$ sigui realment el que els matemàtics anomenen el *cos del nombres racionals*, ens cal dir com sumem i com multipliquem els elements de $\mathbb{Q}$. Ho farem així:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} &= \frac{pq' + p'q}{qq'} \\ \frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} &= \frac{pp'}{qq'} \end{aligned}$$

Teorema 2.1.1 *Els nombres racionals són els decimals periòdics*

L'algorisme d'Euclides ens diu que donats dos nombres enters D (dividend) i d (divisor), existeixen dos únics nombres enters q (quocient) i r (residu) tals que

$$\boxed{D = dq + r, \quad 0 \leq r < d}$$

Dividint per d obtenim

$$\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}, \quad 0 \leq r < d.$$

Això ens dóna la idea d'identificar el nombre racional $(D, d) = \frac{D}{d}$ amb el decimal periòdic $q + \frac{r}{d}$.

La fracció $\frac{r}{d}$ és més petita que 1 i per tant, quan realitzem la divisió r/d usant l'algorisme d'Euclides obtenim un número del tipus $0, abc \ldots$ I $q + \frac{r}{d}$ és doncs del tipus $q, abc \ldots$

Per exemple, calculem 3/7.

$$\begin{array}{ccccccl}
3 &&&&&& |7 \\ \cline{7-7}
2 & 0 &&&&& 0,428571 \\
& 6 & 0 &&&& \\
&& 4 & 0 &&& \\
&&& 5 & 0 && \\
&&&& 1 & 0 & \\
&&&&& 3 &
\end{array}$$

La observació fonamental és que quan s'obté un residu que ja havia sortit abans (el número 3 en el nostre cas) no cal continuar, ja que ara s'anirien repetint els càlculs com al començament.

Ara bé, com els possibles restos són números més petits que 7 és clar que el quocient podrà tenir com a molt set xifres decimals diferents, ja que a partir d'un cert moment s'aniran repetint.

En el nostre cas

$$\frac{3}{7} = 0,428571\overline{428571}\ldots$$

És a dir, obtenim un decimal periòdic de període 428571.

Més exemples:

$$\begin{aligned}
\frac{3448}{990} &= 3,482\overline{82}\ldots \\
\frac{3}{5} &= 0,6 \quad \text{periòdica de període zero} \quad 0,6 = 0,60\overline{0}\ldots \\
\frac{1}{3} &= 0,3\overline{3}\ldots
\end{aligned}$$

Observem, per exemple en el primer cas, com en efectuar la divisió usant l'algorisme d'Euclides, el residu es repeteix.

$$\begin{array}{cccccccl}
3 & 4 & 4 & 8 &&&& |990 \\ \cline{8-8}
& 4 & 7 & 8 & 0 &&& 3,482 \\
&& 8 & 2 & 0 & 0 && \\
&&& 2 & 8 & 0 & 0 & \\
&&&& 8 & 2 & 0 & 0
\end{array}$$

Recíprocament, donat un decimal periòdic, sempre podem obtenir dos nombres enters que al dividir-los ens doni aquest decimal periòdic. Veiem un exemple.

Exercici 2.1.2 *Trobeu dos nombres enters D, d tals que* $\frac{D}{d} = 34,56789\overline{789}$

Solució. Posem

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7, & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 \\ - & & & & 3 & 4, & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline & 3 & 4 & 5 & 3 & 3, & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

És a dir, el número que ens donen el restem d'ell mateix però desplaçat cap a l'esquerra de manera que els períodes coincideixin. En el nostre cas la resta que estem fent és $1000a - a$ amb $a = 34,56789\overline{789}$.

Tenim doncs

$$999a = 34533,33$$

o, equivalentment

$$a = \frac{34533,33}{999} = \frac{3453333}{99900}.\square$$

Ara que tenim controlats els decimals periòdics, és lògic pensar en què són els decimals no periòdics.

Definició 2.1.3 *Els nombres reals són els decimals periòdics i no periòdics.*

El nombre real, no racional, més famós és probablement el nombre π. Sabem que $\pi = 3,1415\ldots$, i que els decimals van apareixent sense que es formi mai un període que es vagi repetint.

La observació important és que $3,14 < \pi < 3,142$, és a dir, que tot i que no sabem encara ben bé què és π sí que veiem que és un valor que està entre dos racionals. I com més decimals donem, més el podem acotar entre dos racionals. Per exemple, la meva calculadora diu $\pi = 3,14159265359$, això vol dir que

$$3,14159265358 < \pi < 3,14159265360.$$

El que volem dir amb això és que en donar un decimal no periòdic estem donant un valor no racional però que el podem aproximar tant com vulguem per racionals.

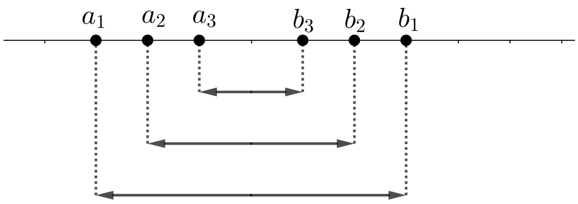
No obstant, la definició no és suficientment satisfactòria pel rigor de la matemàtica, entre altres coses la definició de nombre real no hauria de dependre de la base decimal, per exemple. La construcció dels reals que donen els matemàtics és més complicada i no hi entrarem en aquests apunts, però es basa en el

Teorema 2.1.4 (Principi de continuïtat de Cantor) *Donada una successió d'intervals encaixats $[a_i, b_i]$ de nombres racionals sempre existeix un punt c que pertany a tots ells.*

Encaixats vol dir que tenim $a_1 \leq a_2 \leq \ldots b_3 \leq b_2 \leq b_1$.

Per exemple, si per mètodes geomètrics volem aproximar π podem anar acotant i obtenir coses de l'estil

$$3,1 \leq 3,14 \leq 3,141 \leq \ldots \pi \cdots \leq 3,14159265359 \leq 3,14159265360$$



Arrel quadrada de 2

Ja sabeu que la primera demostració que es va fer usant el mètode conegut com *reducció a l'absurd* va ser demostrar que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. És a dir, no hi ha cap nombre racional que elevat al quadrat doni 2.

La repetim tot i que que és molt estandard. Té més de dos mil anys! Es basa en la observació que en elevar al quadrat un nombre parell obtenim un nombre parell i que en elevar al quadrat un nombre imparell obtenim un nombre imparell.

En efecte, $(2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ i $(2k+1)^2 = 2(2k^2+k)+1$.

Suposem que hi ha un nombre racional $\dfrac{p}{q}$ tal que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Podem suposar que p i q no són tots dos parells. En efecte, és clar que anant dividint per dos successivament podem escriure $p = 2^a p'$ i $q = 2^b q'$ amb p' i q' imparells. Llavors

$$\frac{p}{q} = \frac{2^a p'}{2^b q'} = \frac{2^{a-b} p'}{q'}, \quad \text{si } a \geq b$$

$$\frac{p}{q} = \frac{2^a p'}{2^b q'} = \frac{p'}{2^{b-a} q'}, \quad \text{si } a \leq b$$

En ambdós casos tenim un nombre racional amb numerador o denominador imparell.

Suposem doncs

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2,$$

amb p, q no parells a la vegada.

Llavors $p^2 = 2q^2$, que implica p^2 parell, i per tant p *parell.* Posem $p = 2k$. Llavors $p^2 = 4k^2 = 2q^2$. Per tant $q^2 = 2k^2$, d'on q *és parell.* Contradicció.

Teorema 2.1.5 *La diagonal no és commensurable amb el costat.*

Això vol dir que no hi ha una unitat de mesura u tal que $d = nu$ i $D = mu$, amb $m, n \in \mathbb{N}$, on D és la diagonal d'un quadrat de costat d.

Com que pel teorema de Pitàgores sabem que $D^2 = d^2 + d^2 = 2d^2$, tenim

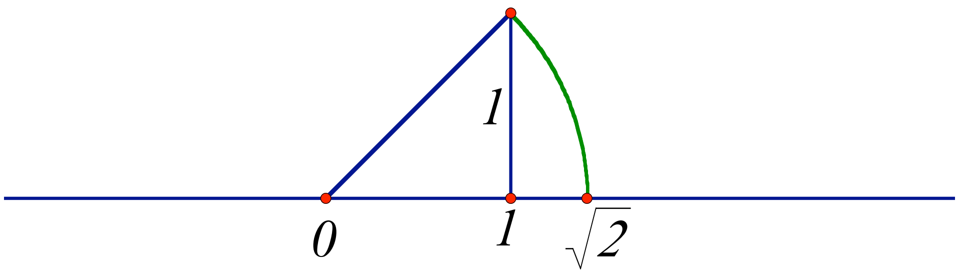
$$\left(\frac{D}{d}\right)^2 = 2.$$

Si la diagonal fos commensurable amb el costat tindríem

$$\left(\frac{D}{d}\right)^2 = \left(\frac{mu}{nu}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2,$$

i tindríem un número racional que elevat al quadrat donaria dos.

Si representem els racionals sobre una recta de seguida veiem que hi ha punts de la recta que no són racionals. Només cal abatre sobre la recta la diagonal del quadrat de costat 1.



Exponencial

Què vol dir 2^π?

Recordem que si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ i $n \in \mathbb{N}$, llavors

$$a^n = a \cdots a, \quad n \text{ vegades}$$

Observem també que si $m \in \mathbb{N}$ llavors

$$(a^n)^m = a^{mn}. \tag{2.1}$$

Això suggereix una notació molt adequada per denotar l'arrel n-èssima d'un nombre real. En efecte, l'arrel n-èssima de a és, per definició, un altre nombre real b tal que $b^n = a$. Si escrivim $b = a^{\frac{1}{n}}$ tenim (usant (2.1))

$$b^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a$$

Tenim doncs

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Anàlogament, el significat natural per a $a^{\frac{m}{n}}$ és el de ser l'arrel n-èssima de a^m. En efecte (usant novament (2.1)),

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

D'aquesta manera *sabem elevar un nombre real positiu a un nombre racional.* Com que els nombres reals es poden aproximar per racionals (simplement quedant-nos amb un nombre finit de les seves infinites xifres decimals) podem definir a^r per a tot nombre real r.

Per exemple, per calcular 2^π, calcularem $2^{3,1}$, $2^{3,14}$, $2^{3,141}$, $2^{3,1415}$, etc. fins tenir una aproximació adequada per als nostres propòsits. Per exemple, la calculadora del meu ordinador només em deixa introduir quinze decimals, de manera que dir que $2^\pi \simeq 8,824977827076$ és una bona aproximació.

Valor absolut

El valor absolut $|x|$ del nombre real x es defineix per

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Per exemple, $|5| = 5$ perquè $5 > 0$ i $|-5| = -(-5) = 5$ perquè $-5 < 0$.
Es pot veure fàcilment que

$$|x| \leq a \quad \Longleftrightarrow \quad -a \leq x \leq a \tag{2.2}$$

Per parlar dels nombres reals situats entre dos nombres reals donats, com ara ha passat al considerar els $x \in \mathbb{R}$ que estan entre $-a$ i a, fem servir la notació següent:

$$\begin{aligned} (a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} \\ (a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} \\ [a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} \\ [a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} \end{aligned}$$

Exercici 2.1.6 *Trobeu els nombres reals x tals que $|3x-2| \leq 5$.*

Solució. Aplicant (2.2) tenim

$$|3x-2| \leq 5 \quad \Longleftrightarrow \quad -5 \leq 3x-2 \leq 5.$$

Sumant 2 a cadascun dels tres termes i dividint-los per 3 obtenim

$$-1 \leq x \leq \frac{7}{3}.$$

La resposta és doncs que x compleix la desigualtat donada si i només si $x \in [-1, \frac{7}{3}]$.
□

Aquesta manipulació de desigualtats que acabem de fer suggereix recordar les propietats següents:

$$\begin{aligned} a > b; c > 0 &\Longrightarrow ac > bc, \\ a > b; c < 0 &\Longrightarrow ac < bc, \\ a > b > 0 &\Longrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Capítol 3

Sistemes lineals i matrius

3.1 Sistemes d'equacions lineals. El mètode del pivot

L'objectiu és resoldre sistemes del tipus

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 9 \\ x - 4y + 5z &= 2 \\ 5x - 6y - z &= 1 \end{aligned}$$

És a dir, trobar tots els valors de x, y i z que satisfan les tres equacions anteriors. Aquests sistemes es diuen *lineals* perquè les incògnites x, y, z apareixen només multiplicades per nombres enters o nombres reals, i no apareix cap expressió del tipus $x^2, xy, \sin(x), etc.$

En aquest exemple els coeficients són nombre enters, però tots els resultats del capítol són certs per a sistemes amb coeficients nombres reals.

Avui dia hi ha molts programes que et donen aquest resultat de manera immediata. Per exemple, amb el programa lliure Wolfram Alpha, `https://www.wolframalpha.com/` simplement posant 'solve' davant les equacions separades per una coma,

$$\text{solve}\, 2x - 3y + z = 9, x - 4y + 5z = 2, 5x - 6y - z = 1$$

dóna $x = 277/4, y = 211/4, z = 115/4$. L'objectiu nostre no és doncs resoldre el sistema sinó entendre què passa i com podríem nosaltres dissenyar aquests programes. A més, quan intervenen ordinadors, no es tracta només de trobar una manera de resoldre el problema sinó de trobar el camí més curt per arribar-hi, ja que el temps de càlcul és molt important i quan es manipulen moltes equacions es col·lapsa l'ordinador fàcilment. Les transformacions elementals que introduïm a continuació són útils en aquests sentit.

Operacions elementals. Són operacions sobre aquestes equacions que no modifiquen la solució del sistema. En considerarem tres:

1. Podem permutar equacions.
2. Podem multiplicar qualsevol de les equacions per un número real diferent de zero.

3. Podem canviar una de les equacions per ella mateixa més un múltiple qualsevol d'una de les altres.

Això vol dir que el sistema donat i, per exemple, els sistemes

$$\begin{aligned} x - 4y + 5z &= 2 \\ 2x - 3y + z &= 9 \\ 5x - 6y - z &= 1 \end{aligned}$$

(obtingut permutant dues equacions),

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 9 \\ 100x - 400y + 500z &= 200 \\ 5x - 6y - z &= 1 \end{aligned}$$

(obtingut multiplicant una equació per un número), i

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 9 \\ x - 4y + 5z &= 2 \\ 5x - 6y - z + 4(x - 4y + 5z) &= 1 + 4 \cdot 2 \end{aligned}$$

(obtingut sumant a la tercera equació un múltiple de la segona), tenen les mateixes solucions.

Que les operacions elementals 1 i 2 no canvien les solucions del sistema és evident. Per veure clar que la operació 3 tampoc les canvia podem esquematitzar el sistema (passant el terme independent a l'esquerra i denotant per E_i l'equació i) com

$$\begin{aligned} E_1 &= 0 \\ E_2 &= 0 \\ E_3 &= 0 \end{aligned}$$

i el sistema que obtindríem amb la tercera operació elemental seria

$$\begin{aligned} E_1 &= 0 \\ E_2 &= 0 \\ E_3 + \lambda E_2 &= 0 \end{aligned}$$

Escrit així es veu evident que qualsevol solució del primer sistema ho és del segon i recíprocament.

Una manera simplificada de recordar el sistema donat és escriure simplement

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 9 \\ 1 & -4 & 5 & 2 \\ 5 & -6 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Aquestes caixes de números es diuen matrius i ara veurem algunes de les seves propietats.

3.2 Matrius esglaonades. Teorema de Rouché-Frobenius

Les matrius són caixes de números com la que acabem d'escriure. Una matriu $m \times n$ és una caixa de números amb m files i n columnes.

Per exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 89 \end{pmatrix}$$

és una matriu 2×2,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -8 \\ 10 & 90 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

és una matriu 4×2, i

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

és una matriu 3×1.

Una manera útil d'escriure les matrius és

$$A = (a_{ij})$$

on a_{ij} és el terme que està a la fila i, columna j.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Definició 3.2.1 *Una matriu està esglaonada quan a sota del primer element no nul de cada fila, i sota dels anteriors, tots els termes són zero. El primer terme no nul de cada fila es diu* pivot.

Per exemple, les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 89 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

són matrius esglaonades.

També

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

és esglaonada, en canvi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

no és esglaonada.

Quan una matriu està esglaonada, podem "baixar l'escala" formada pels pivots:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aquesta escala pot tenir replans, com per exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

La gràcia de les matrius esglaonades es que quan la matriu associada a un sistema està esglaonada el sistema es resol trivialment començant per la última fila.

Per exemple, el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y + z &= 0 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

té solució (començant per la última equació): $z = 3$, $y = -3$, $x = 1$.

La matriu associada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

està esglaonada.

Mètode per resoldre un sistema d'equacions. Donat un sistema d'equacions li associarem una matriu. A continuació l'esglaonarem. Esglaonar una matriu vol dir transformar-la en una matriu esglaonada utilitzant les *transformacions elementals*. Les transformacions elementals (òbviament inspirades en les transformacions que es poden fer sobre un sistema sense que aquest canvïi les solucions) són:

1. Permutar files.
2. Multiplicar qualsevol fila per un número real diferent de zero.
3. Canviar una de les files per ella mateixa més un múltiple qualsevol d'una de les altres.

Els sistema associat a la matriu ja esglaonada té les mateixes solucions que l'inicial (esglaonar no canvia les solucions) però té l'avantatge que es resol trivialment començant per la darrera equació.

Resumint, per resoldre un sistema fem els següents passos:

1. Considerem la matriu associada al sistema donat.
2. Esglaonem aquesta matriu.

3. Resolem el sistema associat a questa matriu (començant per la darrera fila).

Mètode mecànic per esglaonar.

Donarem a continuació una manera mecànica per esglaonar.[1] Comencem amb un exemple.

Exercici 3.2.2 *Resoleu el sistema*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 9, \\ x - 4y + 5z &= 2, \\ 5x - 6y - z &= 1. \end{aligned}$$

Solució. La matriu associada a aquest sistema és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 9 \\ 1 & -4 & 5 & 2 \\ 5 & -6 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Esglaonem-la.

Primer pas. Mirem si el terme a_{11} és diferent de zero. En aquest cas $a_{11} = 2$. Com que és diferent de zero l'agafem com a pivot. Això vol dir, de moment, només que fiquem el 2 dins un quadradet.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -3 & 1 & 9 \\ 1 & -4 & 5 & 2 \\ 5 & -6 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

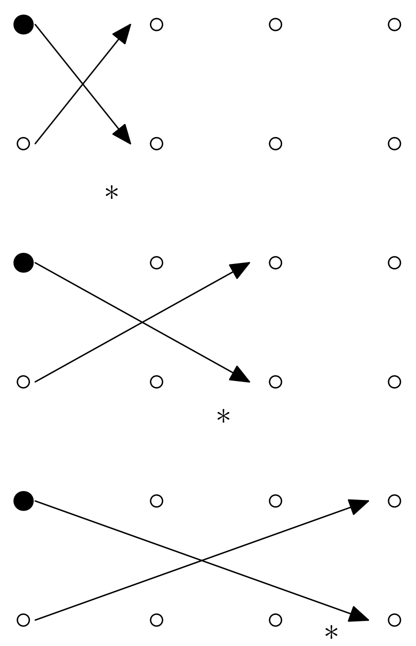
Segon pas. Posem zeros a sota el pivot. Deixem la fila del pivot igual.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -3 & 1 & 9 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array} \right)$$

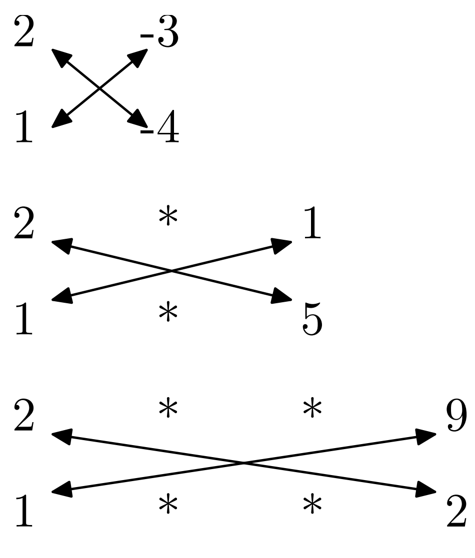
Tercer pas. Canviem cada element $*$ pel determinant[2] determinat per ell i el pivot, seguint l'esquema següent

[1] D'aquest mètode se'n diu a vegades mètode de Gauss o mètode del pivot, tot i que hi ha discussions sobre el tema.

[2] $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$



En el nostre cas



Així, on hi havia el -4 ara hi va $\begin{pmatrix} \boxed{2} & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = 2(-4) - 1(-3) = -5$.

On hi havia el 5 ara hi va $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 1 = 9$.

On hi havia el 2 ara hi va $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 9 \cdot 1 = -5$.

Observem que el que hem fet es canviar la segona fila F_2 per $a_{11}F_2 - a_{21}F_1 = 2F_2 - 1F_1$. Això vol dir que la matriu que hem obtingut s'obté de la inicial per operacions elementals.

I ara canviem la tercera fila, pivotant també amb el $\boxed{2}$:

On hi havia el -6 ara hi va $\begin{pmatrix} \boxed{2} & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = 2(-6) - 5(-3) = 3$.

On hi havia el -1 ara hi va $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = 2(-1) - 1 \cdot 5 = -7$.

On hi havia el 1 ara hi va $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 9 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - 9 \cdot 5 = -43$.

Tenim doncs,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -3 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -7 & -43 \end{array}\right)$$

> Observem que el que hem fet es canviar la tercera fila F_3 per $a_{11}F_3 - a_{31}F_1 = 2F_3 - 5F_1$. Això vol dir que la matriu que hem obtingut s'obté de la inicial per operacions elementals.

Repetim tot el procés però agafant ara com a nou pivot el -5:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -3 & 1 & 9 \\ 0 & \boxed{-5} & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -7 & -43 \end{array}\right)$$

Posem 0 a sota del pivot i canviem el -7 per $\begin{vmatrix} \boxed{-5} & 9 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 8$, i canviem el -43 per $\begin{vmatrix} \boxed{-5} & -5 \\ 3 & -43 \end{vmatrix} = 230$. Tenim doncs

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -3 & 1 & 9 \\ 0 & \boxed{-5} & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{8} & 230 \end{array}\right).$$

> Observem que el que hem fet es canviar la tercera fila F_3 per $a_{22}F_3 - a_{32}F_2 = -5F_3 - 3F_2$. Això vol dir que la matriu que hem obtingut s'obté de la inicial per operacions elementals.

Per tant, el sistema donat és equivalent a

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 9 \\ -5y + 9z &= -5 \\ 8z &= 230 \end{aligned}$$

que es resol trivialment començant per la darrera fila: $z = \frac{230}{8}, y = \frac{211}{4}, x = \frac{277}{4}$. $\square$

Exercici 3.2.3 *Estudieu, segons els valors del paràmetre a, el sistema*

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 1, \\ 3x - 5y + 7z &= -2, \\ 3x - y + (11 - 3a^2)z &= a + 4. \end{aligned}$$

Solució. La matriu associada és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 11-3a^2 & a+4 \end{array}\right)$$

Com que el terme a_{11} és 3, que és diferent de zero, l'agafem com a pivot, i tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & -2 & 1 & 1 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

i ara trobem els termes $*$ pel mètode del pivot. Obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & 18 & -9 \\ 0 & 3 & 30-9a^2 & 3a+9 \end{array}\right)$$

Com que el terme a_{22} és diferent de zero (-9) pivotem agafant-lo a ell com a nou pivot. Obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & -2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-9} & 18 & -9 \\ 0 & 0 & 81a^2-324 & -27a-54 \end{array}\right)$$

Si $81a^2 - 324 \neq 0$, és a dir $a \neq \pm 2$, tenim tres pivots i per tant podem resoldre fàcilment a partir de la tercera equació. Es diu que el sistema és *compatible determinat*, ja que té una única solució.

Si $a = 2$, la última fila de la última matriu és $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 108 \end{pmatrix}$, que correspon a l'equació $0x + 0y + 0z = 108$. Com no hi ha valors x, y, z que compleixin aquesta equació, el sistema inicial tampoc té solució. Es diu que el sistema es *incompatible.*

Si $a = -2$, la última fila de la última matriu és $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que correspon a l'equació $0x+0y+0z = 0$. Aquesta equació no imposa restriccions a x, y, z i podem, doncs, prescindir d'ella. El sistema es redueix a

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 1 \\ -9y + 18z &= -9 \end{aligned}$$

que es resol fàcilment començant per la segona equació i pensant que z pot prendre qualsevol valor. Obtenim $y = 1 + 2z$, que substituint a la primera equació dóna $x = 1 + z$. Es diu que el sistema és *compatible indeterminat*, ja que té moltes solucions (una per a cada valor de z). □

A la vista de com hem esglaonat en aquest dos exemples ja es veu que aquest tipus d'operacions sempre els podrem fer. Tenim el resultat següent.

Teorema 3.2.4 *Tota matriu es pot esglaonar, usant operacions elementals.*

Demostració. Permutant si cal les files sempre podem arribar a tenir la matriu escrita amb el terme $a_{11} \neq 0$. Pel mètode del pivot que acabem de veure, arribarem a una matriu del tipus

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \dots \\ 0 & * & * & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & \dots \end{pmatrix}$$

i ara continuarem el procés agafant com a nou pivot el nou terme a_{22}. Com que aquesta matriu és més petita que la inicial en número finit de passos acabem. $\square$

Teorema 3.2.5 (Rouché-Frobenius) *Sigui $(A|B)$ la matriu associada a un sistema d'equacions (A és la matriu dels coeficients de les incògnites i B és la columna dels termes independents). Sigui $(A'|B')$ la matriu que obtenim esglaonant $(A|B)$.*

(1) Si el número de files no nul·les de A' és igual al número de files no nul·les de $(A'|B')$ el sistema és compatible amb $n-r$ graus de llibertat, on $n =$ número d'incògnites i $r =$ número de pivots.[3]

(2) Si el número de files nul·les de A' és diferent al número de files nul·les de $(A'|B')$ el sistema és incompatible.

Demostració. Un cop hem esglaonat mirem la darrera fila no nul·la de $(A'|B')$. Si té l'aspecte

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & a \end{array} \right), \quad a \neq 0$$

el sistema és clarament incompatible. Si és de la forma

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \dots & 0 & \bullet & * & \dots & * & b \end{array} \right), \quad b \in \mathbb{R}$$

on $\bullet$ és el pivot, és clar que totes les variables corresponents als $*$ queden lliures. Podem aïllar la variable corresponent el darrer pivot en funció d'aquestes.

Ara aniríem resolent el sistema de baix a dalt i veiem que en cada fila podem aïllar la variable corresponent al pivot d'aquesta fila en funció de les variables de la seva dreta. Això fa que les variables les columnes de les quals a A' no tenen pivot queden lliures.

Per tant hi ha $n-r$ variables lliures. $\square$

Per exemple, si tenim

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4t + 5u &= 6 \\ y + z + t + u &= 8 \end{aligned}$$

que és un sistema ja esglaonat amb darrera fila

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \bullet & * & * & * & b \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

tenim $n = 5$ variables, $r = 2$ pivots (el coeficient de la x de la primera equació i el coeficient de la y de la segona), i per tant $n - r = 3$ graus de llibertat. Correspon

[3] Observem que de pivots n'hi ha com a molt un a cada fila i també com a molt un a cada columna. En particular $n - r \geq 0$.

a dir que les variables z, t, u són lliures (poden prendre qualsevol valor) i llavors la darrera equació ens diu

$$y = 8 - z - t - u$$

que substituint a la primera dóna

$$x = -10 - z - 2t - 3u.$$

Però no sempre les variables lliures apareixen a la dreta del darrer pivot.

Per exemple, si tenim

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4t + 5u &= 6 \\ z + t + u &= 8 \end{aligned}$$

que és un sistema ja esglaonat (amb replans) amb darrera fila

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \bullet & * & * & b \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

tenim $n = 5$ variables, $r = 2$ pivots (el coeficient de la x de la primera equació i el coeficient de la z de la segona), i per tant $n - r = 3$ graus de llibertat. Correspon a dir que les variables que corresponen a columnes sense pivot y, t, u són lliures (poden prendre qualsevol valor). La darrera equació ens diu

$$z = 8 - t - u$$

que substituint a la primera dóna

$$x = -18 - 2y - t - u.$$

Corol·lari 3.2.6 *El sistema homogeni*[4] $AX = 0$ *és sempre compatible amb* $d = n - r \geq 0$ *graus de llibertat (*n *és el número de columnes de* A *i* r *el número de pivots de* A *esglaonada).*

Demostració. Apliquem Rouché-Frobenius amb $B = 0$. El procés d'esglaonament aplicat a la matriu $(A|0)$ en porta a una matriu del tipus $(A'|0)$. Les files no nul·les d'aquesta matriu són les files no nul·les de A' i el cas (2) del teorema de Rouché no es pot donar. $\square$

L'inconvenient d'aquesta manera d'enunciar el teorema de Rouché-Frobenius és que s'ha de esglaonar el sistema, procés que pot ser llarg. A la secció 4.6 donem una segona versió d'aquest teorema en llenguatge d'espais vectorials.

3.3 Producte de matrius. Matriu inversa

Les matrius es multipliquen *multiplicant files per columnes.* Aquest producte de files per columnes es fa com el producte escalar de vectors.

[4] Un sistema es diu homogeni quan tots els termes independents són igual a zero.

Recordem que el producte escalar es defineix com

$$(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2, \quad \text{a } \mathbb{R}^2$$

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3, \quad \text{a } \mathbb{R}^3$$

etc.

Per exemple, per multiplicar les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

posarem

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \\ 7 \quad 8 \quad 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 13 \\ 16 \end{matrix}} & \begin{matrix} 11 & 12 \\ 14 & 15 \\ 17 & 18 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

i

$$\bullet = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 16 = 84.$$

A continuació posarem

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \\ 7 \quad 8 \quad 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 13 \\ 16 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 11 \\ 14 \\ 17 \end{matrix}} & \begin{matrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & \bullet & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

i

$$\bullet = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix} = 1 \cdot 11 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 17 = 90.$$

A continuació posarem

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \\ 7 \quad 8 \quad 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 10 & 11 \\ 13 & 14 \\ 16 & 17 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 90 & \bullet \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

i

$$\bullet = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix} = 1 \cdot 12 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 18 = 96.$$

I ara repetiríem el procés per a les files dues i tres.

En general, *el terme a_{ij} de la matriu producte (és a dir, el terme que està a la fila i columna j) sobté multiplicant la fila i de la primera matriu amb la columna j de la segona.*

Per exemple el terme a_{33} de la matriu pructe val

$$a_{33} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix} = 366.$$

Finalment obtenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 90 & 96 \\ 201 & 216 & 231 \\ 318 & 342 & 366 \end{pmatrix}$$

Wolfram Alpha. Per fer productes de matrius amb Wolfram Alpha només hem d'escriure

$$\{\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\}\} * \{\{10,11,12\},\{13,14,15\},\{16,17,18\}\}.$$

Observeu la sintaxis: les matrius s'entren per files i cadascuna d'elles entre claus.

Propietats del producte de matrius

Només destaquem que *no és commutatiu* i que *no es pot simplificar.*

Per exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

en canvi

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

I podem tenir $AB = AC$ amb $B \neq C$ (no podem simplificar). Per exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una altra observació important és que cada columna de la matriu producte s'obté multiplicant la matriu de l'esquerra per la corresponent columna de la matriu de la dreta.

Per exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

i

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix}$$

i

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ho recordarem així (per a matrius $n \times n$):

$$AB = A \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & \dots & AB_n \end{pmatrix}$$

on B_i representa la columna i-èssima de la matriu B. Aquesta propietat justifica el mètode per trobar la inversa d'una matriu, pàgina 27.

Matriu identitat. La matriu que té uns a la diagonal i zeros fora d'ella es diu matriu *identitat.* És l'lement neutre del producte de matrius. Per exemple, en matrius 2×2,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Matrius elementals

Les matrius que s'obtenen de la matriu identitat per una (i només una) transformació elemental es diuen matrius elementals. Per exemple, en dimensió dos les matrius elementals són:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La gracia d'aquestes matrius es que realitzen, quan multipliquem per elles, transformacions elementals. Per exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

(hem permutat les files),

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(hem multiplicat la primera fila per λ),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c+\lambda a & d+\lambda b \end{pmatrix}$$

(hem sumat a la segona fila un múltiple de la primera).

Per tant, quan a una matriu A li fem successivament diverses transformacions elementals, per exemple quan esglaonem, la matriu A' a la que arribem finalment es pot escriure com

$$A' = PA$$

on P és la matriu que obtenim com producte de totes les matrius elementals que hem anat aplicant en cada pas de la transformació.

És a dir, prenem A i fem una transformació elemental. Obtenim E_1A on E_1 és una matriu elemental. Fem una segona transformació elemental. Obtenim E_2E_1A on E_2 és una matriu elemental. Això és el que escrivim com PA amb $P = E_2E_1$ producte d'elementals. I anar seguint.

Les matrius elementals 3×3 són:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrius i sistemes

Utilitzant el producte de matrius que acabem de definir ens adonem que, per exemple, el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 9 \\ x - 4y + 5z &= 2 \\ 5x - 6y - z &= 1 \end{aligned}$$

es pot escriure simplement com

$$AX = B$$

on

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si fóssim capaços de trobar una matriu, diguem-li A^{-1}, tal que $A^{-1}A = I$ on I es la matriu identitat, és a dir

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podríem multiplicar la igualtat $AX = B$ als dos costats per A^{-1} i tindríem

$$A^{-1}AX = IX = X = A^{-1}B$$

i ja tenim solucionat el sistema.

Això és el que dóna tanta importància al càlcul d'aquesta matriu A^{-1}, que es diu *matriu inversa* de la matriu A.

De fet, la definició precisa de matriu inversa d'una matriu quadrada $n \times n$, A, és que és la única matriu A^{-1} tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

on I_n és la matriu identitat $n \times n$.

Hi ha diversos mètodes per calcular la inversa d'una matriu. N'explicarem algun perquè veieu què hi ha darrera dels programes d'ordinador que les calculen ràpidament.

Wolfram Alpha. Per calcular la inversa de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

amb Wolfram Alpha, només hem d'escriure

$$\text{inverse}\,\{\{1,2,3\},\{3,2,1\},\{2,1,3\}\}$$

També podeu posar

$$\{\{1,2,3\},\{3,2,1\},\{2,1,3\}\}^{-1}$$

Un mètode per calcular la inversa d'una matriu

Per calcular la inversa de la matriu A usarem el següent mètode (que donem sense justificació):

1. Escriurem la matriu identitat a la dreta de la matriu A. Tindrem
$$(A|I)$$
2. Efectuarem transformacions elementals fins arribar a tenir la matriu identitat en el lloc on estava la matriu A. Tindrem (recordeu la propietat del producte de matrius, pàgina 24),
$$P(A|I) = (PA|P)$$
3. La matriu P, que està on hi havia la matriu identitat és la inversa de A. En efecte, ens hem aturat quan $PA = I$, per tant $P = A^{-1}$.

Exercici 3.3.1 *Calculeu la inversa de*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solució. Posem la identitat a la dreta de A:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Esglaonem pel mètode del pivot.
Primer pas.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Segon pas. Tots els pivots han de ser iguals a 1, ja que volem obtenir la matriu identitat. Dividim per -2 la darrera fila.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Ara pivotem sobre el pivot de la segona fila per obtenir zeros a sobre d'aquest pivot (no a sota, com habitualment). Posarem un zero a sobre del pivot i canviarem els demés termes de la primera fila pel determinant corresponent *canviat de signe!*.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 0 & \clubsuit & \spadesuit \\ 0 & \boxed{1} & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\clubsuit = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \boxed{1} & 3/2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\spadesuit = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ \boxed{1} & -1/2 \end{vmatrix} = 1$$

Per tant

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

i

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Exercici 3.3.2 *Calculeu la inversa (si és que en té) de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posem

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Pivotem sobre el terme a_{11}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Multipliquem la segona fila per 1/2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Pivotem sobre el terme a_{22}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -15/2 & 5/2 & -9/2 & 1 \end{array}\right)$$

Multipliquem la tercera fila per $-2/15$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 3/5 & -2/15 \end{array}\right)$$

Pivotem de cap per avall (canviar signe del determinant) sobre el terme a_{33}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 5/3 & -6/5 & 4/15 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/5 & 1/15 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/3 & 3/5 & -2/15 \end{array}\right)$$

Pivotem de cap per avall (canviar signe del determinant) sobre el terme a_{22}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/3 & -1 & 1/3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1/3 & 1/5 & 1/15 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 3/5 & -2/15 \end{array}\right)$$

Per tant

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1 & 1/3 \\ -1/3 & 1/5 & 1/15 \\ -1/3 & 3/5 & -2/15 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Observem però que *hi ha matrius que no tenen inversa.* En efecte, el mètode anterior funciona sempre que podem obtenir la matriu identitat a base de transformacions elementals. Però a vegades no es pot, per exemple, si tenim

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

i pivotem sobre el terme a_{11} tenim

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

i ja no podem obtenir la matriu identitat a l'esquerra. Només hi ha un pivot diferent de zero i en necessitem dos.

3.4 Determinants

El determinant d'una matriu 2×2 es defineix per

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc$$

Utilitzarem la notació habitual

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

El determinant d'una matriu 3×3 es defineix per

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Es diu que s'ha obtingut *desenvolupant per la primera columna,* ja que cada terme de l'anterior suma és un element de la primera columna multiplicat pel determinant de la matriu que queda al suprimir la fila i la columna del corresponent terme.

Així, a_{11} està multiplicat pel determinant de la matriu que queda en suprimir la primera fila i la primera columna a la matriu donada. a_{21} està multiplicat pel determinant de la matriu que queda en suprimir la segona fila i la primera columna a la matriu donada. a_{31} està multiplicat pel determinant de la matriu que queda en suprimir la tercera fila i la primera columna a la matriu donada.

El determinant que multiplica a a_{ij} es diu l'*adjunt* de a_{ij}.

Per fer aquests desenvolupaments tenim en compta sempre la regla dels signes. Les matrius les hem de pensar així:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

El signe $+$ vol dir que el terme que està en aquell lloc s'ha de multiplicar per 1 i el signe $-$ vol dir que el terme que està en aquell lloc s'ha de multiplicar per -1.

Així com els determinants 3×3 s'han definit a partir dels determinants 2×2, els determinants $n \times n$ es defineixen a partir dels determinants $(n-1) \times (n-1)$, aquests a partir dels $(n-2) \times (n-2)$, etc, de manera que per recurrència hem definit determinant de qualsevol matriu quadrada.

Acceptarem sense demostració el resultat següent.

Teorema 3.4.1 *Per calcular el determinant d'una matriu podem desenvolupar per qualsevol fila o columna.*

Per exemple, l'anterior determinant també és igual a (desenvolupant per la tercera fila)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

I també és igual (desenvolupant per la segona columna),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Comprovem-ho en un exemple numèric. Calculem de dues formes diferents el determinant de

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Desenvolupant per la primera columna tenim

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -49.$$

I, desenvolupant per la segona columna,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -49.$$

Propietats dels determinants

1. Si multipliquem una fila d'una matriu per un número, el determinant queda multiplicat per aquest número. Per exemple, si multipliquem per λ la primera fila de la matriu
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
i calculem el determinant, obtenim
$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc) = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

2. Si una fila es pot pensar com suma de dues files (cada terme de la fila es pensa com suma de dos termes), el determinant és suma de determinants, cadascun amb una d'aquests files. Per exemple,
$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

3. Si permutem dues files el determinant canvia de signe. Per exemple,
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$
i
$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad$$

4. Si un determinant té dues files iguals, el determinant és zero. Conseqüència immediata de l'anterior propietat, ja que si permutem dues files iguals per una part el determinant no canvia i per l'altre canvia de signe. Això només pot passar si aquest determinant és zero. Aquest fet permet calcular en un moment determinants com aquest:
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & 6 & 9 & 1 \\ -5 & 0 & 0 & 3 & 10 & 12 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 12 & -46 \\ 6 & 0 & -4 & -3 & -1 & 0 & 20 \\ 6 & 8 & 78 & 12 & 6 & 7 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 5 & 6 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5. Si canviem una fila d'una matriu per ella mateixa més un múltiple d'una altre, el determinant no canvia. Conseqüència dels punts 1, 2 i 4. Per exemple, si sumem a la segona fila de la matriu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

un múltiple de la primera tenim

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b \\ c+\lambda a & d+\lambda b \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

6. $\det A = \det A^t$. La notació A^t vol dir la matriu transposta de la matriu A. La matriu transposta d'una matriu donada és la que s'obté en canviar files per columnes.

   Per exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   llavors

$$A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

   Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 88 & 99 & 100 \end{pmatrix}$$

   llavors

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 88 \\ 3 & 4 & 99 \\ 5 & 6 & 100 \end{pmatrix}$$

7. Tot el que s'ha dit fins aquí per a files val per columnes. Només cal observar que les files de A són les columnes de A^t i recíprocament.

8. El determinant d'una matriu esglaonada és el producte dels pivots. Això es veu evident desenvolupant per columnes. Així, per exemple

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 50 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 23 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 23 = 345.$$

9. $\det(AB) = \det A \det B$. El determinant del producte és el producte de determinants. Comprovem-ho per a matrius 2×2.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

Prenent determinants,

$$\begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ae & af \\ ce & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ae & bh \\ ce & dh \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & af \\ dg & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & bh \\ dg & dh \end{vmatrix}$$

La primera i la quarta tenen files proporcionals i per tant el seu determinant és zero. El segon determinant val $eh(ad-bc)$ i el tercer $-fg(ad-bc)$. Per tant la suma val

$$eh(ad-bc) - fg(ad-bc) = (ad-bc)(eh-fg)$$

com volíem veure.

10. Una matriu A és invertible si i només si $\det A \neq 0$. Que si és invertible, el determinant és diferent de zero, és conseqüència del punt anterior. En efecte, que A sigui invertible vol dir que hi ha una matriu A^{-1} tal que $A^{-1}A = I$. Prenent determinants tenim,

$$\det A^{-1} \cdot \det A = \det I = 1,$$

i per tant ha de ser $\det A \neq 0$. El recíproc també és cert, però no el demostrem.

Segon mètode per calcular la inversa d'una matriu

De fet, un dels mètodes típics per calcular inverses de matrius implica dividir pel determinant, cosa que només podem fer si aquest és diferent de zero.

Recordem, sense justificar-lo, aquest mètode.x

Segon mètode per calcular la inversa d'una matriu.

1. Canviem files per columnes (i.e. transposem).

2. Canviem cada element pel seu adjunt.

3. Apliquem la regla dels signes (vegeu la matriu de signes (3.1)).

4. Dividim pel determinant.

Exercici 3.4.2 *Calculeu la matriu inversa de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solució.

1. Canviem files per columnes (i.e. transposem).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Canviem cada element pel seu adjunt.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Apliquem la regla dels signes.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Dividim pel determinant.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Així, doncs, per resoldre per exemple el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 3x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

només hem de posar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix},$$

és a dr, la solució és $x = -2, y = 3/2$.

Exercici 3.4.3 *Calculeu la matriu inversa de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució.

1. Canviem files per columnes (i.e. transposem).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Canviem cada element pel seu adjunt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Apliquem la regla dels signes.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Dividim pel determinant.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Així, doncs, per resoldre per exemple el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ 3x + 4y &= 1 \\ 2x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

només hem de posar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

és a dir, $x = 1, y = -1/2, z = -1$.

3.5 Sistemes amb tantes equacions com incògnites

Que el sistema $AX = B$ tingui tantes equacions com incògnites vol dir que la matriu A és una matriu quadrada i té sentit, doncs, parlar del seu determinant.

Si esglaonem una matriu quadrada el seu determinant pot quedar multiplicat per algun pivot, però com els pivots són per definició diferents de zero, el fet de que el determinant s'anul·li o no s'anul·li no varia al llarg del procés de esglaonament. És a dir, si A' és la matriu esglaonada trobada a partir d'una matriu A, llavors $\det A \neq 0$ si i només si $\det A' \neq 0$.

Si A és una matriu $n \times n$ i r el número de pivots que apareixen quan A ja ha sigut esglaonada pot passar que

- $r < n$. Llavors $\det(A) = 0$. Per Rouché-Frobenius el sistema pot ser compatible indeterminat amb $n - r$ graus de llibertat o incompatible.

  Per exemple, el sistema $AX = B$ amb

  $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  $(r = 2, n = 3)$ és incompatible, i el sistema $AX = B$ amb

  $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $(r = 2, n = 3)$ és compatible indeterminat.

- $r = n$. Llavors $\det(A) \neq 0$ i el sistema és compatible determinat (és a dir, té una única solució.)

Tenim doncs una versió de Rouché-Frobenius en termes de determinants.

Mètode de Cramer

El sistema $AX = B$ es diu de Cramer quan A és una matriu quadrada amb $\det A \neq 0$.

Denotem per A_i la columna i de A. Llavors

$$AX = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k A_k = B.$$

Aquesta igualtat s'expressa dient que la matriu columna B és *combinació lineal* de les columnes de A, ja que s'expressa com una suma d'aquestes columnes multiplicades per uns certs números x_i. En aquest cas aquests números x_i, anomenats també *coeficients* de la combinació lineal, són justament una solució del sistema.

Considerem

$$\det(A_1, \ldots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \ldots, A_n)$$

és a dir el determinant de la matriu que s'obté en substituir en A la seva i-èssima columna A_i per B.

$$\det(A_1, \ldots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k A_k, A_{i+1}, \ldots, A_n)$$

Però com que el determinant és lineal sobre les columnes i el determinant de matrius que tenen dues columnes iguals és zero, tenim

$$\begin{aligned} \det(A_1, \ldots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \ldots, A_n) &= x_i \det(A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n) \\ &= x_i \det(A) \end{aligned}$$

O, equivalentment

$$\boxed{x_i = \frac{\det(A_1, \ldots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \ldots, A_n)}{\det(A)}}$$

Exercici 3.5.1 *Resoleu el sistema*

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ x - y &= 10 \end{aligned}$$

Solució.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 28/5, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -22/5.$$

Observem que aquest sistema es pot escriure com

$$x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

En particular

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & 3x+2y \\ 1 & x-y \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3 & 3x \\ 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2y \\ 1 & -y \end{vmatrix} \\
&= x\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= y\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Si ara aïllem la y obtenim la fórmula de Cramer.

També

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3x+2y & 2 \\ x-y & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3x & 2 \\ x & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2y & 2 \\ -y & -1 \end{vmatrix} \\
&= x\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= x\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Si ara aïllem la x obtenim la fórmula de Cramer.

Capítol 4

L'espai vectorial $\mathbb{R}^n$

L'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ és el conjunt

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n); a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

amb la suma donada per

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

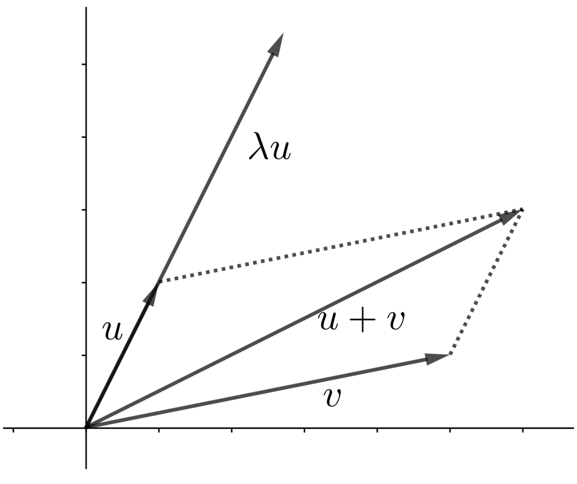
i el producte per escalars donat per

$$\lambda(a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

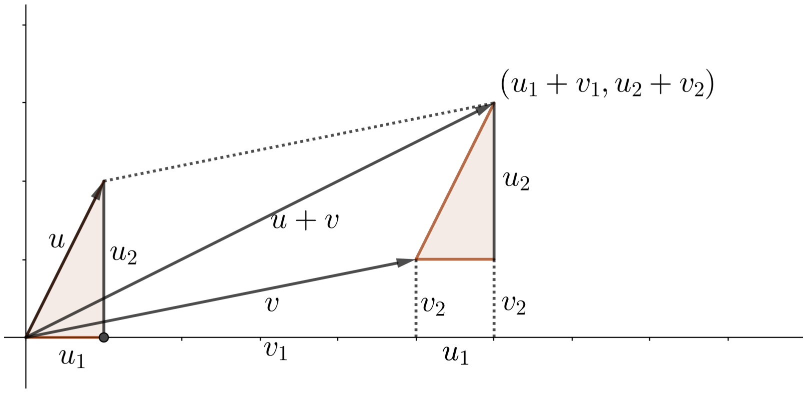
Es diu que $\mathbb{R}^n$ amb aquestes operacions és un *espai vectorial* sobre els reals. Els elements de l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ es diuen *vectors*, i els elements de $\mathbb{R}$ són els *escalars* de l'espai vectorial. El vector $(0, \ldots, 0)$ es diu *vector zero*. El vector $(-a_1, \ldots, -a_n)$ que s'obté en multiplicar $(a_1, \ldots, a_n)$ per $\lambda = -1$ és el *vector oposat* de $(a_1, \ldots, a_n)$; també escriurem $-(a_1, \ldots, a_n) = (-a_1, \ldots, -a_n)$. Si u, v són vectors de $\mathbb{R}^n$, la seva diferència $u - v$ és per definició $u - v = u + (-v)$.

Té sentit doncs escriure expressions com $Q-P$, quan $P, Q \in \mathbb{R}^n$, i com $Q-P$ torna a ser un element de $\mathbb{R}^n$ també té sentit escriure $\lambda(Q-P)$, i en general expressions que es puguin formar amb les dues operacions de suma i producte per escalars anteriors.

Podem visualitzar aquestes operacions quan $n = 2$ en la figura següent. Multiplicar per λ és simplement allargar o escurçar el vector u (segons λ sigui més gran o més petita que 1) i la suma s'obté per l'anomenada llei del paral·lelogram: $u + v$ és la diagonal del paral·lelogram determinat per u i v.



Per veure que la suma es realitza efectivament a partir de a llei del paral·lelogram observem la figura següent. Volem sumar els vectors $u = (u_1, u_2)$ i $v = (v_1, v_2)$. Els triangles ombrejats són iguals (costats paral·lels i mateixa hipotenusa). Per tant l'extrem del vector $u + v$ és efectivament el punt $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$.



En problemes de geometria convé sovint distingir els *punts* de $\mathbb{R}^n$ amb els *vectors* de $\mathbb{R}^n$. Per exemple, si $n = 2$ i posem $P = (1, 2)$, ens referim al punt de $\mathbb{R}^2$ de coordenades $(1, 2)$, però si parlem del vector $v = (1, 2)$ convé pensar-lo com una fletxa que comença al punt $(0, 0)$ i acaba en el punt $(1, 2)$.

A cada parell ordenat de punts (P, Q) de $\mathbb{R}^n$ li associem el vector $Q - P$, que denotarem per $\overrightarrow{PQ}$, és a dir,

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P.$$

Per tant, si $P = (p_1, \ldots, p_n)$ i $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, tenim

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, \ldots, q_n - p_n).$$

Així com dos punts determinen un vector, tal com acabem de veure, un vector $v \in \mathbb{R}^n$ no determina pas dos punts. De fet, tenim que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ si i només si $S - R = Q - P$.

Per exemple, si $n = 2$, el vector $v = (3, 3)$ es pot determinar pels punts $P = (1, 2), Q = (4, 5)$, o pels punts $R = (3, 4), S = (6, 7)$ ja que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (3, 3).$$

4.1 Subespais vectorials

Definició 4.1.1 *Un subconjunt E de $\mathbb{R}^n$ és un* subespai vectorial *de $\mathbb{R}^n$ si és tancat per la suma i el producte per escalars, és a dir, compleix que*

(1) Si $u, v \in E$ llavors $u + v \in E$.

(2) Si $u \in E$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, llavors $\lambda \cdot u \in E$.

Proposició 4.1.2 *Un subconjunt E de $\mathbb{R}^n$ és subespai vectorial si i només si per a tot $u, v \in E$ i per a tot $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ es compleix*

$$\alpha u + \mu v \in E.$$

Demostració. Es deixa al lector. □

Exemples

1. El propi espai vectorial $\mathbb{R}^n$ i el conjunt format únicament pel vector zero $\{\overrightarrow{0}\}$ són dos exemples trivials de subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$.

2. Sigui $E = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$. És clar que si sumem vectors de $\mathbb{R}^3$ amb tercer component nul obtenim un vector de $\mathbb{R}^3$ amb tercer component nul; i que si multipliquem per un escalar un vector amb tercer component nul obtenim un vector de $\mathbb{R}^3$ amb tercer component nul. Per tant E és subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$. D'aquesta manera, identificant E amb $\mathbb{R}^2$, podem pensar $\mathbb{R}^2$ com a subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

3. *Les solucions d'un sistema homogeni.* Considerem una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Sigui
$$E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$
Llavors E és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. En efecte, si $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \in E$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, i denotem
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$
tenim
$$A(X + Y) = AX + AY = O + O = O, \quad A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda O = O,$$
és a dir, $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \in E$ i $\lambda(x_1, \ldots, x_n) \in E$, i per tant E és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$.

   Si $m = 1$ el sistema té una sola equació. L'espai de solucions es diu *hiperplà per l'origen* de $\mathbb{R}^n$; si $n = 2$ es parla de rectes per l'origen i si $n = 3$ es parla de plans per l'origen. Per exemple, a $\mathbb{R}^2$, l'equació $2x + 35y = 0$, que amb la notació matricial anterior s'escriu com
$$\begin{pmatrix} 2 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$
representa[1] una recta per l'origen de $\mathbb{R}^2$ i $x + y + z = 0$ és un pla per l'origen de $\mathbb{R}^3$.

   Si tallem dos plans de $\mathbb{R}^3$ obtenim una recta de $\mathbb{R}^3$. Per exemple, les solucions del sistema homogeni
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - 3y - 76z &= 0 \end{aligned}$$

[1] La mateixa equació $2x + 35y = 0$ considerada a $\mathbb{R}^3$ representa un pla.

formen una recta per l'origen de $\mathbb{R}^3$. Matricialment s'escriu com

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -76 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. *Les matrius.* Podem identificar el conjunt de totes les matrius $m \times n$ i coeficients reals amb $\mathbb{R}^{m \cdot n}$. Simplement a cada matriu (a_{ij}) $i = 1, \ldots, m$, $n = 1, \ldots, n$ li associem el vector de $\mathbb{R}^{n \cdot m}$

$$(a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}),$$

obtingut posant una fila a continuació de l'altra.

5. *Les matrius simètriques.* Considerem

$$E = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A = A^t\}.$$

Llavors E és un subespai vectorial de l'espai vectorial de les matrius $n \times n$, identificant $M_n(\mathbb{R})$ amb $\mathbb{R}^{n^2}$.

En efecte, si $A, B \in F$ llavors

$$(A + B)^t = A^t + B^t = A + B, \quad (\lambda \cdot A)^t = \lambda A^t = \lambda A,$$

és a dir, $A + B \in E$ i $\lambda A \in E$ i per tant E és subespai vectorial.

Si $n = 2$, i identifiquem les matrius 2×2 amb $\mathbb{R}^4$ posant una fila a continuació de l'altre, les matrius simètriques s'identifiquen amb

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y = z\},$$

ja que són de la forma

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

Si $n = 3$, i identifiquem les matrius 3×3 amb $\mathbb{R}^9$ posant una fila a continuació de l'altre, les matrius simètriques s'identifiquen amb

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) \in \mathbb{R}^9; x_4 = x_2, x_7 = x_3, x_8 = x_6\},$$

ja que són de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_5 & x_6 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{pmatrix}$$

4.2 Combinacions lineals

Definició 4.2.1 *Siguin* $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$*. Una* combinació lineal *dels vectors* $u_1, \ldots u_r$ *és una expressió de la forma*

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r$$

amb $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$.

Es diu també que el vector

$$w = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r$$

és una combinació lineal de $u_1, \ldots, u_r$.

Donat un conjunt de vectors $u_1, \ldots, u_r$ denotarem per $\langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ el conjunt de totes les combinacions lineals d'aquests vectors:

$$\boxed{\langle u_1, \ldots, u_r \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r; \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}\}}$$

Exemples

1. Estudiem el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ generat per $(1,2,0)$ i $(-1,2,0)$. Tenim que

$$\begin{aligned} \langle (1,2,0), (-1,2,0) \rangle &= \{\lambda(1,2,0) + \mu(-1,2,0); \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda - \mu, 2\lambda + 2\mu, 0); \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   Però, per a tot (x, y) el sistema

$$\begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \end{cases}$$

   té solució única, de manera que

$$\begin{aligned} E = \langle (1,2,0), (-1,2,0) \rangle &= \{(\lambda - \mu, 2\lambda + 2\mu, 0); \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}. \end{aligned}$$

   Diem que $z = 0$ és l'*equació cartesiana* de E, ja que aquesta condició caracteritza els elements de E.

2. Estudiem el subespai vectorial E de $\mathbb{R}^3$ generat per $(1,-1,2)$, $(0,1,1)$ i $(1,1,4)$. Un vector $(x,y,z) \in E$ si i només si

$$(x, y, z) = \lambda(1,-1,2) + \mu(0,1,1) + \nu(1,1,4),$$

   per a certs $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. És a dir

$$\begin{cases} x = \lambda + \nu \\ y = -\lambda + \mu + \nu \\ z = 2\lambda + \mu + 4\nu \end{cases}$$

La pregunta que ens estem fent és doncs si donat $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (un punt fixat, ara x, y, z no són variables!) existeixen $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ que satisfacin el sistema.

Per estudiar aquest sistema, on les variables són λ, μ, ν, esglaonem la seva matriu ampliada:[2]

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 1 & x \\ -1 & 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & 4 & z \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & 2 & z-2x \end{array}\right),$$

on hem fet les transformacions $F_2 \to F_2 + F_1, F_3 \to F_3 - 2F_1$. A continuació,

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & 2 & z-2x \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & z-3x-y \end{array}\right),$$

on hem fet la transformació $F_3 \to F_3 - F_2$. El sistema és compatible si i només si

$$z - 3x - y = 0.$$

(A més, en aquest cas és compatible determinat amb un grau de llibertat: $\lambda = x - \nu, \mu = x + y - 2\nu$.)

Per tant

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z - 3x - y = 0\} = \{(x, y, 3x + y) \in \mathbb{R}^3; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Observem que

$$(x, y, 3x + y) = x(1, 0, 3) + y(0, 1, 1)$$

de manera que també

$$E = \langle (1, 0, 3), (0, 1, 1) \rangle.$$

Diem que $z - 3x - y = 0$ és l'*equació cartesiana* de E, ja que aquesta condició caracteritza els elements de E.

3. Estudiem el subespai vectorial E de $\mathbb{R}^4$ generat per $(1, -1, 2, 0)$, $(5, 0, 1, 1)$. Un vector $(x, y, z, t) \in E$ si i només si

$$(x, y, z, t) = \lambda(1, -1, 2, 0) + \mu(5, 0, 1, 1).$$

És a dir

$$\left\{\begin{array}{l} x = \lambda + 5\mu \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda + \mu \\ t = \mu \end{array}\right.$$

Per estudiar aquest sistema esglaonem la seva matriu ampliada:

[2] Observeu que les columnes són les components dels tres vectors donats.

$$\left(\begin{array}{rr|l} 1 & 5 & x \\ -1 & 0 & y \\ 2 & 1 & z \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{lr|l} 1 & 5 & x \\ 0 & 5 & x+y \\ 0 & -9 & z-2x \\ 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

on hem fet les transformacions $F_2 \to F_2 + F_1, F_3 \to F_3 - 2F_1$. A continuació,

$$\left(\begin{array}{lr|l} 1 & 5 & x \\ 0 & 5 & x+y \\ 0 & -9 & z-2x \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ll|l} 1 & 5 & x \\ 0 & 5 & x+y \\ 0 & 0 & -x+9y+5z \\ 0 & 0 & -x-y+5t \end{array}\right)$$

on hem fet la transformació $F_3 \to 5F_3 + 9F_2, F_4 \to 5F_4 - F_2$. El sistema és doncs compatible si i només si

$$\left\{ \begin{array}{r} -x+9y+5z=0 \\ -x-y+5t=0 \end{array} \right.$$

Per tant

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; -x+9y+5z=0, -x-y+5t=0\} \\ &= \left\{ \left(x, y, \frac{x-9y}{5}, \frac{x+y}{5}\right) \in \mathbb{R}^4; x, y \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Observem que

$$\left(x, y, \frac{x-9y}{5}, \frac{x+y}{5}\right) = x\left(1, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) + y\left(0, 1, \frac{-9}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

de manera que també

$$E = \left\langle \left(1, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(0, 1, \frac{-9}{5}, \frac{1}{5}\right) \right\rangle.$$

Diem que el sistema d'equacions $-x+9y+5z=0, -x-y+5t=0$ són les *equacions cartesianes* de E, ja que aquestes condicions caracteritzen els elements de E. $\square$

4.3 Dependència i independència lineal

Definició 4.3.1 *Direm que els vectors $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ són* linealment independents *si i només si cap d'ells és combinació lineal dels altres.*

En cas contrari, és a dir, quan almenys un d'aquests vectors és combinació lineal dels altres, es diu que $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ són *linealment dependents.*

Dit d'una altra manera, $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ són linealment independents si i només si no hi ha cap combinació lineal d'ells igual a zero (llevat de la trivial, en la que tots els escalars són zero). En efecte, tenim el resultat següent.

Proposició 4.3.2 *Els vectors* $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ *són* linealment independents *si i només si* $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = \overrightarrow{0}$ *amb* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ *implica* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.

Demostració. Suposem primerament que són linealment independents. És a dir, que cap d'ells és combinació lineal dels altres, i escrivim $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$. Si alguna λ_j fos diferent de zero el corresponent vector v_j seria combinació lineal dels altres

$$v_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \cdots \widehat{j} \cdots - \frac{\lambda_r}{\lambda_j} v_r$$

en contra de la hipòtesi. La notació $\widehat{j}$ vol dir que el terme j-èsim no hi és. Per tant, per a tot $j = 1, \ldots, r$ ha de ser $\lambda_j = 0$ i els vectors són linealment independents.

Recíprocament, si un d'ells, per exemple el primer, fos combinació lineal dels altres tindríem

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r$$

i per tant

$$v_1 - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_r v_r = \overrightarrow{0}$$

seria una combinació lineal dels $v_1, \ldots, v_r$ igual a zero amb no tots els escalars iguals a zero (el coeficient de v_1 és 1), en contra de la hipòtesi que estem fent. □

Exercici 4.3.3 *Demostreu que tres (o més) vectors a* $\mathbb{R}^2$ *són linealment dependents.*

Solució. Siguin $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^2$. Escrivim les seves coordenades

$$\begin{aligned} u_1 &= (a_{11}, a_{21}) \\ u_2 &= (a_{12}, a_{22}) \\ u_3 &= (a_{13}, a_{23}) \end{aligned}$$

Suposem que tenim una combinació lineal d'ells igual a zero,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \vec{0}. \tag{4.1}$$

Substituint els u_i pels seus valors, tenim

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \lambda_3 a_{13} &= 0, \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Pel corol·lati 3.2.6 aquest sistema és compatible indeterminat amb $3 - r$ graus de llibertat, on r és el número de pivots. Com r només pot ser 1 o 2 tenim 1 o 2 graus de llibertat. Per tant, hi ha solució no trivial[3] de (4.1) i u_1, u_2, u_3 són linealment dependents.□

Nota 4.3.4 *De la mateixa manera es demostra que* m *vectors de* $\mathbb{R}^n$*, amb* $m > n$*, són linealment dependents.*

[3]No trivial vol dir diferent de la solució evident $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Exemples

1. Els vectors

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

són linealment independents. En efecte

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \overrightarrow{0} = (0, \ldots, 0)$$

implica clarament que $\lambda_i = 0$, per a $i = 1, \ldots, n$.

4. Els vectors $(1, -1, 2), (0, 1, 1), (1, 1, 4)$ de $\mathbb{R}^3$ són linealment dependents. En efecte,

$$\lambda(1, -1, 2) + \mu(0, 1, 1) + \nu(1, 1, 4) = (0, 0, 0)$$

implica

$$\begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ -\lambda + \mu + \nu = 0 \\ 2\lambda + \mu + 4\nu = 0 \end{cases}$$

i aquest sistema admet la solució no trivial $\lambda = -\nu, \mu = -2\nu$. És a dir que l'equació anterior no implica $\lambda = \mu = \nu = 0$ sinó que, per exemple, podem agafar $\lambda = 1, \mu = 2, \nu = -1$ i tenir

$$1(1, -1, 2) + 2(0, 1, 1) - 1(1, 1, 4) = (0, 0, 0)$$

5. Els vectors $(1, 2), (3, 4), (-1, -8)$ de $\mathbb{R}^2$ són linealment dependents. És conseqüència de la nota 4.3.4. De tota manera, si plantegem el sistema

$$x(3, 4) + y(-1, -8) = (1, 2)$$

obtenim $x = 3/10$ i $y = -1/10$.

Així, un és combinació lineal dels altres, o equivalentment hi ha una combinació lineal de ells no trivial igual a zero: Concretament

$$\frac{3}{10}(3, 4) - \frac{1}{10}(-1, -8) - (1, 2) = (0, 0).$$

4.4 Base i dimensió

Definició 4.4.1 (Generadors) *Direm que els vectors $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ són un* sistema de generadors *del subespai vectorial E de $\mathbb{R}^n$ si i només si $E = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.*

És a dir, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ són un sistema de generadors de E si i només si tot vector de E és combinació lineal dels vectors $v_1, \ldots, v_m$.

Definició 4.4.2 (Base) *Direm que els vectors $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ són una* base *del subespai vectorial E de $\mathbb{R}^n$ si i només si són un sistema de generadors de E i a més són linealment independents.*

Exemples

1. Els vectors

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

   són un sistema de generadors de $\mathbb{R}^n$. En efecte, tot vector $v = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ es pot escriure com

$$v = a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \cdots + a_n(0, \dots, 0, 1).$$

2. Els vectors $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ són un sistema de generadors de $\mathbb{R}^2$. En efecte, tot vector $(a_1, a_2) \in R^2$ es pot escriure com

$$(a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) + 0(1, 1).$$

3. A l'espai vectorial de matrius $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, les matrius e_{ij} definides com aquelles matrius que tenen tots els seus components nuls llevat del que ocupa el lloc (i, j) (fila i, columna j) que val 1, són un sistema de generadors (de $m \times n$ elements). En efecte, tota matriu $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es pot escriure com

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_{ij}.$$

   Amb la identificació de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ amb $\mathbb{R}^{m+n}$ aquestes matrius corresponen als vectors $\mathbb{R}^{m+n}$,

$$\begin{array}{rcl} e_{11} & = & (1, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ e_{12} & = & (0, 1, 0, \dots, 0, 0) \\ & \vdots & \\ e_{mn} & = & (0, 0, 0, \dots, 0, 1) \end{array}$$

4. $\mathcal{B}$=((1,0), (0,1)) és una base de $\mathbb{R}^2$. En efecte, com que tot vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ s'escriu com

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

   són un sistema de generadors. A més, és clar que són linealment independents ja que

$$\lambda(1, 0) + \mu(0, 1) = (0, 0)$$

   implica $\lambda = \mu = 0$.

5. Generalitzant l'exemple anterior, tenim que

$$\mathcal{B} = ((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$$

   és una base de $\mathbb{R}^n$. Ja hem vist a l'exemple 1 que són un sistema de generadors i a l'exemple 1 de la pàgina 47 que són linealment independents. D'aquesta base se'n diu *base canònica*.

6. $\mathcal{B}$=((1,2), (3,4)) és una base de $\mathbb{R}^2$. En efecte, tot vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ s'escriu com
$$(a,b) = x(1,2) + y(3,4)$$
ja que el sistema
$$\begin{array}{rcl} a & = & x + 3y \\ b & = & 2x + 4y \end{array}$$
és compatible determinat ($x = -2a + \frac{3b}{2}, y = a - \frac{b}{2}$). Per tant els vectors $(1,2), (3,4)$ són un sistema de generadors. A més, és clar que són linealment independents ja que
$$\lambda(1,2) + \mu(3,4) = (0,0)$$
implica $\lambda = \mu = 0$.

7. A l'espai vectorial de matrius $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, les matrius e_{ij} definides a l'exemple 3 de la pàgina 48 són una base. Ja hem vist allà mateix que són un sistema de generadors i és fàcil veure que són linealment independents. $\square$

Com tot subespai vectorial E de $\mathbb{R}^n$ és de la forma $E = \langle u_1, \ldots, u_k\rangle$ amb $u_1, \ldots, u_k$ linealment independents[4], podem dir que *tot subespai vectorial admet una base.* Aquest resultat es coneix com *teorema de la base.*

Exercici 4.4.3 *Trobeu una base de*
$$E = \langle(1,2,3), (0,2,5), (2,10,21)\rangle$$

Solució. Posant
$$(2,10,21) = x(1,2,3) + y(0,2,5)$$
obtenim $x = 2$ i $y = 3$ per tant aquest tercer vector és combinació lineal dels altres dos, que són linealment independents. Així
$$E = \langle(1,2,3), (0,2,5)\rangle. \quad \square$$

Exercici 4.4.4 *Extragueu una base de $\mathbb{R}^2$ del sistema de generadors $u = (1,2), v = (3,4), w = (-1,-6)$.*

Solució. Sabem per la nota 4.3.4 que aquest vectors són linealment dependents. Ho podem veure directament posant
$$(1,2) = x(3,4) + y(-1,-6)$$
obtenim $x = 2/7$, $y = -1/7$, per tant u és combinació lineal de v i w. Com que v i w són linealment independents, ja tenim la base que buscavem. $\square$

Es pot demostrar fàcilment que *dues bases d'un mateix subespai tenen el mateix número d'elements.* Aquest número comú es diu *dimensió* del subespai E i es denota per $\dim E$.

[4]Si un u_i depèn dels altres simplement el traiem del sistema de generadors.

Definició 4.4.5 (Dimensió) *La* dimensió *d'un subespai vectorial E de $\mathbb{R}^n$ és el número de vectors d'una base.*

És a dir, $\dim E = n$ si i només si $E = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ amb $u_1, \dots, u_n$ linealment independents. Per exemple,

- $\mathbb{R}^n$ té dimensió n (exemple 5 de la pàgina 48);
- $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ té dimensió $m \times n$ (exemple 6 de la pàgina 49);

Exercici 4.4.6 *Trobeu la dimensió del subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$*

$$F = \langle (1,2,3,4), (7,10,13,16), (5,6,7,8), (14,16,18,20) \rangle$$

Solució. Posem els vectors com files d'una matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 10 & 13 & 16 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 14 & 16 & 18 & 20 \end{pmatrix}$$

i esglaonem.

Obtenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com que el procés d'esglaonament consisteix essencialment en fer combinacions lineals de les files, aquest procés no canvia el subespai generat per les noves files de la matriu. De manera que podem dir que

$$F = \langle (1,2,3,4), (0,-4,-8,-12) \rangle$$

i, com que aquests dos vectors són clarament linealment independents, $\dim F = 2$. □

Exercici 4.4.7 *Trobeu la dimensió i una base del subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ que té per equacions cartesianes*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

Solució. La segona equació ens diu directament $x = \frac{z}{2}$. I de la primera deduïm $y = -z - x = -z - \frac{z}{2} = -\frac{3z}{2}$. La solució dels sistema és doncs

$$(\frac{z}{2}, -\frac{3z}{2}, z) = z(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1).$$

Per tant, $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1)$ (o qualsevol múltiple no nul d'ell) és la base buscada. La dimensió és, doncs, 1. □

4.5 Rang d'una matriu

Definició 4.5.1 *Sigui $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. El* rang *de A és la dimensió del subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ generat per les files de A.*

Equivalentment, el rang de A *és el màxim nombre de files linealment independents* de la matriu A.

Observeu que estem pensant els n elements d'una fila $\begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ com un element $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ de $\mathbb{R}^n$. Així, si denotem per $F_i, i = 1, \dots, m$ les files de A tenim que el rang de A és

$$r(A) = \dim\langle F_1, \dots, F_m\rangle.$$

Per exemple, el *rang* de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

és 2, ja que

$$\dim\langle(1,2,3),(4,5,6),(5,7,9)\rangle = 2.$$

Observem que r vectors $v_1, \dots, v_r$ de $\mathbb{R}^n$ són linealment independents si i només si rang $A = r$, on A és la matriu que té per files les components d'aquests r vectors.

Si una matriu està esglaonada, és clar que les seves files no nul·les són linealment independents (ara veurem un exemple), de manera que tenim

Proposició 4.5.2 *Sigui $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriu esglaonada. El* rang *de A és el número de files no nul·les de A.*

Exercici 4.5.3 *Comproveu que el rang de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és 4.

Solució. Hem de veure que els vectors $(1,2,3,4),(0,1,2,3),(0,0,1,2)$, $(0,0,0,1)$ són linealment independents. Plantegem

$$\lambda_1(1,2,3,4) + \lambda_2(0,1,2,3) + \lambda_3(0,0,1,2) + \lambda_4(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

i obtenim el sistema

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 &= 0, \end{aligned}$$

d'on $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. $\square$

Exercici 4.5.4 *Comproveu que el rang de la matriu*

$$\begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

amb a, b, c diferents de zero[5]*, és tres.*

Solució. Hem de veure que els vectors $(a, *, *), (0, b, *), (0, 0, c)$ són linealment independents. Plantegem

$$\lambda(a, *, *) + \mu(0, b, *) + \nu(0, 0, c) = (0, 0, 0).$$

En igualar la primera coordenada obtenim $\lambda a = 0$, i per tant $\lambda = 0$. En igualar la segona coordenada (sabent ja que $\lambda = 0$) obtenim $\mu b = 0$, i per tant $\mu = 0$. En igualar la tercera coordenada (sabent ja que $\lambda = \mu = 0$) obtenim $\mu c = 0$, i per tant $\mu = 0$. □

La Proposició 4.5.2 es demostra de manera similar als anteriors exemples.

Teorema 4.5.5 *El rang d'una matriu no varia durant el procés d'esglaonament. És a dir, el rang de A és igual al número de files no nul·les de la matriu que obtenim en esglaonar A.*

Demostració. En el procés d'esglaonament per files (és a dir, quan apliquem el mètode del pivot) la única cosa que fem és substituir files per elles mateixes (o múltiples) més combinacions lineals d'altres files, i això no canvia la dimensió de l'espai generat per les files. □

Exercici 4.5.6 *Demostreu que els vectors $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (0, 1, 3, 6)$, $w = (5, 3, 2, 1)$ de $\mathbb{R}^4$ són linealment independents.*

Solució. Esglaonant la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenim

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 23 \end{pmatrix}$$

que té rang 3. Per tant les files són linealment independents. □

Exercici 4.5.7 *Demostreu que els vectors $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (0, 1, 3, 6)$, $w = (2, 7, 15, 26)$ de $\mathbb{R}^4$ no són linealment independents.*

[5] Com sempre, el signe $*$ vol dir que en aquella posició pot haver-hi qualsevol element.

Solució. Esglaonant la matriu

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 15 & 26 \end{pmatrix}$$

obtenim

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant el rang és 2 i els vectors són linealment dependents □

Corol·lari 4.5.8 *n vectors de $\mathbb{R}^n$ són base de $\mathbb{R}^n$ si i només si $\det A \neq 0$, on A és la matriu que té per files les components*[6] *d'aquests n vectors.*

Demostració. Sigui A la matriu que té per files aquests n vectors. Com són linealment independents, rang $A = n$. Però rang A = rang A' on A' és A esglaonada, i si aquest rang és n vol dir que hi ha n pivots. Com el determinant és el producte d'aquests n pivots (que són diferents de zero per definició de pivot) $\det A' \neq 0$, que implica (vegeu pàgina 35) $\det A \neq 0$. Anàlogament es demostra el recíproc.□

Per exemple, els vectors $u = (1, 2, 3), v = (0, 5, 1), w = (1, 2, 0)$ són base de $\mathbb{R}^3$ ja que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -15 \neq 0.$$

Nota 4.5.9 (Rang per columnes) *També es pot definir rang d'una matriu A com el màxim nombre de columnes linealment independents de A, ja que es pot provar (no ho farem) que les dues definicions (màxim nombre de files linealment independents o màxim nombre de columnes linealment independents) coincideixen.*

Exercici 4.5.10 *Trobeu les equacions cartesianes del subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ generat per $u = (1, 2, 3, 4)$ i $v = (5, 6, 7, 8)$.*

Solució.[7] Si (x, y, z, t) pertany a aquest ssubespai, el rang de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & x \\ 2 & 6 & y \\ 3 & 7 & z \\ 4 & 8 & t \end{pmatrix}$$

ha de ser 2, ja que la tercera columna és combinació lineal de les dues primeres. Esglaonant tenim primerament

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & x \\ 0 & -4 & y - 2x \\ 0 & -8 & z - 3x \\ 0 & 12 & t - 4x \end{pmatrix}$$

[6] Respecte de qualsevol base.

[7] Vegeu els exemple 2 i 3 de la secció 4.2.

i a continuació
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & x \\ 0 & -4 & y-2x \\ 0 & 0 & -4x+8y-4z \\ 0 & 0 & -8x+12y-4t \end{pmatrix}$$
Com que les dues files d'aquesta matrius són linealment independents les dues últimes han de ser zero (perquè el rang sigui 2). Per tant, les equacions cartesianes buscades són
$$\begin{aligned} -4x+8y-4z &= 0 \\ -8x+12y-4t &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

4.6 Teorema de Rouché-Frobenius

Revisitem el teorema de Rouché-Frobenius (pàgina 21) en llenguatge d'espais vectorials.

Teorema 4.6.1 (Rouché-Frobenius homogeni) *Considerem el sistema homogeni $AX = O$ on $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i*
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Llavors el conjunt de solucions d'aquest sistema de m equacions i n incògnites és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensió $d = n - r$ on $r = r(A)$.

Demostració. Ja hem vist a la pàgina 41 que el conjunt de solucions d'un sistema homogeni és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. Mirem la dimensió.

Sigui A' la matriu que obtenim en esglaonar A. Té el mateix rang r que A. Per tant té r files no nul·les (que són automàticament linealment independents), i per tant r pivots. Per tant, pel que hem vist a la pàgina 21, tenim $d = n - r$ graus de llibertat.

Per no escriure tant continuem la demostració suposant $n = 4$ i $r = 2$ (l'argument és exactament el mateix per a n i r arbitrari).

Llavors tenim $d = 4 - 2 = 2$ graus de llibertat. Suposem que les variables lliures són z, t. Això vol dir que x i y depenen linealment de z i t. Per tant tota solució és de la forma
$$(az + bt, cz + dt, z, t) = z(a, c, 1, 0) + t(b, d, 0, 1).$$
Per tant l'espai de solucions està generat pels dos vectors linealment independents $\langle(a, c, 1, 0), (b, d, 0, 1)\rangle$. $\square$

Exercici 4.6.2 *Trobeu la solució del sistema*
$$\begin{aligned} x+t+2u+9w &= 0 \\ y+3t+u+v+5w &= 0 \\ z+3t+v+2w &= 0 \\ 3t+7u+9w &= 0 \end{aligned}$$

Solució. En aquest cas $n = 7$, ja que les variables són x, y, z, t, u, v, w, i $r = 4$ ja que la matriu del sistema

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

està esglaonada, i per tant les 4 files són linealment independents. Pel teorema de Rouché-Frobenius, sabem que la dimensió del subespai de solucions és $n-r = 7-4 = 3$. Però anem a trobar-lo explícitament.

La última fila correspon a l'equació

$$3t + 7u + 0v + 9w = 0,$$

i per tant

$$t = -(7/3)u - 3w.$$

Les tres variables u, v, w queden lliures.

De la tercera fila obtenim

$$z = -3t - v - 2w = 7u - v + 7w.$$

De la segona fila obtenim

$$y = -3t - u - v - 5w = 6u - v + 4w.$$

De la primera fila obtenim

$$x = -t - 2u - 9w = (1/3)u - 6w.$$

La solució és doncs qualsevol punt de la forma

$$((1/3)u - 6w, 6u - v + 4w, 7u - v + 7w, -(7/3)u - 3w, u, v, w),$$

que podem escriure com

$$u(1/3, 6, 7, -7/3, 1, 0, 0) + v(0, -1, -1, 0, 0, 1, 0) + w(-6, 4, 7, -3, 0, 0, 1)$$

Per tant, el conjunt de solucions del sistema és el subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$,

$$\langle (1/3, 6, 7, -7/3, 1, 0, 0), (0, -1, -1, 0, 0, 1, 0), (-6, 4, 7, -3, 0, 0, 1) \rangle,$$

que, tal com sabíem per Rouché-Frobenius, té dimensió 3. $\square$

Teorema 4.6.3 (Rouché-Frobenius, cas general) *Considerem el sistema $AX = B$, on $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

El sistema té solució si i només si $r(A) = r(A|B)$. En aquest cas tota solució Z és de la forma

$$Z = X_0 + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i X_i, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

on X_0 és una solució particular de $AX = B$ i $X_i, i = 1, \dots, n-r$ és una base de l'espai de solucions del sistema homogeni $AX = O$.

Demostració. Que el sistema té solució si i només si $r(A) = r(A|B)$ és conseqüència del teorema 3.2.5 i la invariància del rang en el procés d'esglaonament.

La segona part és només la observació de que si X_0 i Z són solució del sistema $AX = B$, llavors $Z - X_0$ és solució del sistema homogeni $AX = 0$, ja que

$$A(Z - X_0) = AZ - AX_0 = B - B = 0.$$

Per tant, $Z - X_0$ és combinació lineal d'una base de l'espai de solucions del sistema homogeni.□

Exercici 4.6.4 *Trobeu la solució del sistema $AX = B$ amb*

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 0 & 9 & 40 \end{array}\right)$$

Solució. La solució del sistema homogeni $AX = 0$ està donada a l'exemple anterior 4.6.2. Per trobar una solució particular del no homogeni podem fer, per exemple, $u = v = w = 0$ i obtenim (començant per la darrera fila),

$$\begin{aligned} t &= 40/3 \\ z &= -10 \\ y &= -20 \\ x &= -10/3 \end{aligned}$$

De manera que la solució general de $AX = B$ és

$$\begin{aligned} Z &= (-10/3, -20, -10, 40/3, 0, 0, 0) + \lambda(1/3, 6, 7, -7/3, 1, 0, 0) \\ &+ \mu(0, -1, -1, 0, 0, 1, 0) + \nu(-6, 4, 7, -3, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

podent prendre, λ, μ, ν qualsevol valor real. □

Exercici 4.6.5 *Demostreu que els vectors $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (0, 1, 3, 6)$, $w = (2, 7, 15, 26)$ de $\mathbb{R}^4$ no són linealment independents.*

Solució. Esglaonant la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 15 & 26 \end{pmatrix}$$

obtenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant el rang és 2 i els vectors són linealment dependents □

Capítol 5

Diagonalització de matrius. Vectors propis

Quan operem amb matrius veiem de seguida que els càlculs es simplifiquen molt si treballem amb matrius diagonals. Recordem que una matriu es diu *diagonal* quan tots els termes fora de la diagonal són zero.

Per exemple, les matrius

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

són diagonals. A vegades, tot i que la matriu donada no és diagonal es pot diagonalitzar. Concretament tenim la definició següent.

Definició 5.0.1 *Diem que una matriu A és* diagonalitzable *si existeix una matriu invertible C tal que la matriu $D = C^{-1}AC$ és diagonal.*

Com C ha de ser una matriu quadrada, ja que té inversa, A també ho ha de ser per tal de que tingui sentit escriure $C^{-1}AC$.

Aquesta operació de multiplicar una matriu A per una altra matriu invertible C per la dreta i per l'esquerra per C^{-1}, $C^{-1}AC$, es diu *conjugació* o inclús *conjugació de A per C*, i apareix de manera natural en moltes i diverses situacions.

Veurem a continuació com el fet de que una matriu sigui diagonalitzable està lligat al fet de que tingui suficients *vectors propis* (vegeu la definició a la pàgina següent). Tot i que els matemàtics tracten aquests temes en tota generalitat nosaltres ens restringirem als casos senzills de matrius 2×2 i 3×3.

Diagonalització de matrius 2×2

Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

definim:

- *Traça* de A= Suma dels elements de la diagonal de A.

  Tindrem, doncs,
$$\text{traça}(A) = a + d.$$

- *Determinant* de A= Producte dels elements de la diagonal menys producte dels elements de la diagonal secundària.

  Tindrem, docs,
$$\det(A) = ad - bc.$$

- *Polinomi característic* de A= $p_A(x)$ =det $\begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$.

  Tindrem, doncs,
$$p_A(x) = x^2 - (\text{traça}A)x + \det A = x^2 - px + q,$$
  amb $p = a + d$ i $q = ad - bc$.

- *Valors propis.* Les arrels dels polinomi característic $p_A(x)$ es diuen *valors propis* de A. Per tant, els valors propis λ i μ de A són
$$\lambda = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad \mu = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$
  Si,
$$\begin{array}{rcll} p^2 - 4q & > & 0 & \text{tenim dos valors propis reals diferents,} \\ p^2 - 4q & = & 0 & \text{tenim un únic valor propi,} \\ p^2 - 4q & < & 0 & \text{tenim dos valors propis complexos conjugats.} \end{array}$$

- Observem que la suma dels valors propis de A és la traça de A i que el producte dels valors propis és el determinant.
$$\begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & p = \text{traça}(A) \\ \lambda \cdot \mu & = & q = \det(A) \end{array}$$

- *Vectors propis.* Es diu que el vector $u = (u_1, u_2)$, $u \neq \vec{0}$, és un vector propi de A, de valor propi λ, si $Au = \lambda u$.

  Equivalentment $(A - \lambda I)u = \vec{0}$, on I és la matriu identitat, és a dir,
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
  Així, doncs, per trobar u tan sols hem de resoldre el sistema (compatible indeterminat)

$$\boxed{\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \tag{5.1}$$

Per que aquest sistema homogeni tingui solució diferent de la trivial (és a dir, diferent de la solució $u_1 = u_2 = 0$) ha de ser

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

és a dir λ ha de ser una arrel del polinomi característic, o equivalentment, un valor propi.

Per això a la pràctica quan hem de calcular vectors propis *calculem primer els valors propis trobant les arrels del característic i després resolem el sistema* (5.1) per a cadascun dels valors propis λ.

Les dues equacions a que dóna lloc el sistema (5.1) són equivalents, i per tant, només cal considerar-ne una d'elles, de manera que podem dir que el vector propi de valor propi λ està determinat (llevat d'un escalar) per l'equació

$$(a-\lambda)u_1 + bu_2 = 0.$$

Per tant, podem agafar com vector propi de valor propi λ

$$u = (b, \lambda - a)$$

Proposició 5.0.2 *Vectors propis de valors propis diferents són linealment independents.*

Demostració. Suposem $Au = \lambda u$ i $Av = \mu v$ amb $\lambda \neq \mu$. Si tenim una combinació lineal d'ells igual a zero:

$$au + bv = 0, \quad a, b, 0 \in \mathbb{R}(\text{o } \mathbb{C})$$

llavors, aplicant A a aquesta igualtat tenim

$$a\lambda u + b\mu v = 0.$$

Resolent el sistema

$$\begin{aligned} au + bv &= 0 \\ a\lambda u + b\mu v &= 0 \end{aligned}$$

obtenim $(\mu - \lambda)bv = 0$, i per tant $b = 0$. Això implica $a = 0$, i per tant u i v són linealment independents. □

Teorema 5.0.3 *Una matriu 2×2 és diagonalitzable si i només si té dos vectors propis linealment independents.*

Demostració. Suposem primerament que la matriu A te dos vectors propis linealment independents, $Au = \lambda u, Av = \mu v$. Llavors A és diagonalitzable ja que es compleix la igualtat matricial

$$\boxed{C^{-1}AC = D} \tag{5.2}$$

on

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

és la matriu diagonal formada pels valors propis i

$$C = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

és la matriu que té per columnes les components dels vectors propis u i v.

Com les columnes de C són linealment independents el determinant és diferent de 0 i C és invertible.

Per demostrar la igualtat (5.2) tant sols hem d'observar que

$$AC = CD$$

ja que les columnes de la matriu producte de l'esquerra són

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad i \quad A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

i les columnes de la matriu producte de la dreta són

$$\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad i \quad \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

que són iguals respectivament a les columnes de l'esquerra per ser u i v vectors propis.

El recíproc també és cert: Si una matriu A és diagonalitzable es compleix $AC = CD$ amb C invertible i el mateixos càlculs anteriors mostren que A té dos vectors propis (les columnes de C) que són linealment independents per ser (per ser C invertible). □

Exercici 5.0.4 *Trobeu els vectors propis de*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

És diagonalitzable?

Solució. Traça de A: $3 + 7 = 10$.

Determinant de A: 26.

Polinomi característic: $x^2 - 10x + 26$.

Valors propis: $\lambda = 5 + i$, $\mu = 5 - i$.

Vector propi de valor propi λ: Resolem

$$\begin{pmatrix} 3-5-i & 5 \\ -1 & 7-5-i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $u = (5, 2+i)$ (o qualsevol múltiple d'aquest).

Vector propi de valor propi μ: Resolem

$$\begin{pmatrix} 3-5+i & 5 \\ -1 & 7-5+i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim $v = (5, 2-i)$ (o qualsevol múltiple d'aquest).

Per tant es compleix que

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+i & 0 \\ 0 & 5-i \end{pmatrix}$$

Com veieu, aquesta matriu no diagonalitza sobre els reals, hem hagut de passar als complexos. $\square$

Exercici 5.0.5 *Donada*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 24 & -7 \end{pmatrix}$$

calculeu A^{1000}.

Solució. Si fem A^2 veiem que $A^2 = Id$, per tant $A^{1000} = Id$.

No obstant, com exercici, podem utilitzar la diagonalització. Els valors propis són $1, -1$ i els vectors propis corresponents són $u = (1,3), v = (1,4)$. Per tant,

$$C^{-1}AC = D$$

amb

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per tant, $A = CDC^{-1}$ i

$$A^{1000} = CD^{1000}C^{-1} = C \cdot Id \cdot C^{-1} = Id. \qquad \square$$

Exercici 5.0.6 *Donada*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

trobeu A^{17}

Solució. Calculem els valors propis. El polinomi característic és $p(x) = x^2 - 3x + 2$ que té arrels $x = 1$ i $x = 2$.

Vector propi de valor propi $\lambda = 1$: $u = (1,2)$

Vector propi de valor propi $\mu = 2$: $v = (1,3)$

Per tant

$$C^{-1}AC = D$$

amb

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Així

$$\begin{aligned} A^{17} &= CD^{17}C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 - 2^{18} & -1 + 2^{17} \\ 6 - 3 \cdot 2^{18} & -2 + 3 \cdot 2^{17} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -262141 & 131071 \\ -786426 & 393214 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Exercici 5.0.7 *Diagonalitzeu la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solució. Característic: $x^2 - 5x - 2$.

Arrels del característic (valors propis): $\lambda = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$, $\mu = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$

Vector propi de valor propi λ: $u = (1, \frac{3+\sqrt{33}}{4})$.

Vector propi de valor propi μ: $v = (1, \frac{3-\sqrt{33}}{4})$.

Per tant, si prenem

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3+\sqrt{33}}{4} & \frac{3-\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix}$$

tenim

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Exercici 5.0.8 *Diagonalitzeu la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solució. L'únic valor propi d'aquesta matriu és $\lambda = 2$, ja que el polinomi característic és $(2 - x)^2$. Per calcular el vector o vectors propis associats al valor propi $\lambda = 2$ posem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'aquí deduïm que l'únic vector propi és $u = (0, 1)$ (i, com sempre, qualsevol múltiple d'aquest). Per tant no podem construir la matriu P invertible formada per dos vectors propis de A. Això vol dir que A no diagonalitza (ni sobre els reals, ni sobre els complexos).[1] $\square$

[1] Demostreu directament, sense recorre a vectors i valors propis, que no hi ha cap matriu invertible P tal que $AP = PD$ amb D diagonal (A la matriu de l'exemple).

Diagonalització de matrius 3×3

Tot funciona essencialment igual que en el cas 2×2. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

definim:

- *Traça* de A= Suma dels elements de la diagonal de A.

  Tindrem, doncs,
  $$\text{traça}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

- *Suma de menors* centrats a la diagonal. És a dir,

  $$\sigma(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- *Determinant* de A= Producte dels elements de les diagonals principals menys producte dels elements de les diagonals secundàries.

  Tindrem, docs,

  $$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

- *Polinomi característic* de A= $p_A(x)$ =det $\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - x \end{vmatrix}$.

  Tindrem, doncs,

  $$p_A(x) = -x^3 + (\text{traça}A)x^2 - \sigma(A)x + \det A.$$

- *Valors propis*. Les arrels del polinomi característic $p_A(x)$ es diuen *valors propis* de A. Resoldre l'equació de tercer grau pot ser complicat. Es poden donar només dos casos:

  1) que tinguem tres valors propis reals,
  2) que tinguem un valor propi real i dos valors propis complexos conjugats.

- Observem que la suma dels tres valors propis de A és la traça de A, la suma dels productes d'aquests tres valors propis agafats de dos en dos és $\sigma(A)$ i el producte dels tres és el determinant. En el cas 2×2 hem vist directament que la suma dels dos valors propis de A és la traça de A, i el producte dels dos és el determinant. En el cas 3×3 seria difícil fer-ho directament, però es dedueix fàcilment si suposem A diagonalitzable:

  $$p_A(x) = \det(A - xI) = \det C^{-1}(A - xI)C = \det(C^{-1}AC - xC^{-1}C) = \det(D - xI)$$

  i ara, per ser D diagonal, el resultat és obvi.

- *Vectors propis.* Es diu que el vector $u = (u_1, u_2, u_3)$, $u \neq \vec{0}$, és un vector propi de A, de valor propi λ, si $Au = \lambda u$.

  Equivalentment $(A - \lambda I)u = \vec{0}$, on

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Així, doncs, per trobar u tan sols hem de resoldre el sistema (compatible indeterminat)

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad (5.3)$$

  Per que aquest sistema homogeni tingui solució diferent de la trivial (és a dir, diferent de la solució $u_1 = u_2 = u_3 = 0$) ha de ser

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

  és a dir λ ha de ser una arrel del polinomi característic, o equivalentment, un valor propi.

  Com en el cas 2×2 per calcular els vectors propis calcularem primer els valors propis i resoldrem els sistemes corresponents.

  Les tres equacions a que dóna lloc el sistema (5.3) són dependents, i per tant, només cal considerar-ne dues d'elles.

Proposició 5.0.9 *Vectors propis de valors propis diferents són linealment independents.*

Demostració. Suposem $Au = \lambda u, Av = \mu v$ i $Aw = \nu w$, amb $\lambda \neq \mu, \lambda \neq \nu, \mu \neq \nu$. Suposem que tenim una combinació lineal d'ells igual a zero:

$$au + bv + cw = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Aplicant A a aquesta igualtat tenim

$$a\lambda u + b\mu v + \nu cw = 0.$$

Resolent el sistema

$$\begin{aligned} au + bv + cw &= 0 \\ a\lambda u + b\mu v + c\nu w &= 0 \end{aligned}$$

(multiplicant la primera fila per λ i restant la segona) obtenim

$$(\mu - \lambda)bv + (\nu - \lambda)cw = 0.$$

Aplicant novament A tenim

$$(\mu - \lambda)b\mu v + (\nu - \lambda)c\nu w = 0.$$

Resolent el sistema

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda)bv + (\nu - \lambda)cw &= 0 \\ (\mu - \lambda)b\mu v + (\nu - \lambda)c\nu w &= 0 \end{aligned}$$

obtenim

$$c(\nu - \lambda)(\nu - \mu)w = 0$$

i per tant $c = 0$. Això implica fàcilment que $a = b = 0$, i per tant u i v són linealment independents. $\square$

Teorema 5.0.10 *Una matriu 3×3 és diagonalitzable si i només si té tres vectors propis linealment independents.*

Demostració. La demostració és exactament igual que en el cas 2×2 però la repetim per a més comoditat del lector.

Si la matriu A té tres vectors propis linealment independents $Au = \lambda u, Av = \mu v, Aw = \nu w$ es compleix la igualtat matricial

$$\boxed{C^{-1}AC = D} \tag{5.4}$$

on

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

és la matriu diagonal formada pels valors propis i

$$C = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

és la matriu que té per columnes les components dels vectors propis u, v i w.

Com les columnes de C són linealment independents el seu determinant és diferent de 0 i per tant C és invertible.

Per demostrar la igualtat (5.4) tant sols hem d'observar que

$$AC = CD$$

ja que les columnes de la matriu producte de l'esquerra són

$$A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

i les columnes de la matriu producte de la dreta són

$$\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \nu \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

que són iguals respectivament a les columnes de l'esquerra per ser u, v i w vectors propis.

El recíproc també és cert: Si una matriu A és diagonalitzable es compleix $AC = CD$ amb C invertible i el mateixos càlculs anteriors mostren que A té tres vectors propis (les columnes de C) que són linealment independents per ser (per ser C invertible). □

Exercici 5.0.11 *És diagonalitzable la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

Solució. Mirem si hi ha tres vectors propis linealment independent. El polinomi característic és $(1-x)^3$ que té únicament l'arrel $x = 1$. Per trobar els vectors propis de valor propi 1 resolem el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $x = y = 0$, i per tant només hi ha un vector propi $u = (0, 0, 1)$ (i els seus múltiples). Així doncs aquesta matriu no diagonalitza.

Exercici 5.0.12 *Trobeu els vectors propis de*

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 & 1/3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -10/3 & 8/3 & 8/3 \end{pmatrix}.$$

Solució. Traça de A: $1/3 + 3 + 8/3 = 6$.

Suma de menors: $\sigma(A) = 11$

Determinant de A: 6.

Polinomi característic: $-x^3 + 6x^2 - 11x + 6$.

Valors propis: $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\nu = 3$.

Vector propi de valor propi λ: Resolem

$$\begin{pmatrix} 1/3 - 1 & 4/3 & 1/3 \\ -2 & 3 - 1 & 1 \\ -10/3 & 8/3 & 8/3 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $u = (1, 0, 2)$ (o qualsevol múltiple d'aquest).

Vector propi de valor propi μ: Resolem

$$\begin{pmatrix} 1/3-2 & 4/3 & 1/3 \\ -2 & 3-2 & 1 \\ -10/3 & 8/3 & 8/3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $v = (1, 1, 1)$ (o qualsevol múltiple d'aquest).

Vector propi de valor propi ν: Resolem

$$\begin{pmatrix} 1/3-3 & 4/3 & 1/3 \\ -2 & 3-3 & 1 \\ -10/3 & 8/3 & 8/3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $w = (2, 3, 4)$ (o qualsevol múltiple d'aquest).

Per tant es compleix que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 & 1/3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -10/3 & 8/3 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Exercici 5.0.13 *Trobeu A^m quan*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Solució. El polinomi característic és

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & -2 \\ 2 & 5-x & -4 \\ 3 & 3 & -3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 6x^2 - 9x = -x(x-3)^2.$$

Els valors propis són doncs 0 i 3 (doble).

Per calcular els vectors propis de valor propi 0 hem de resoldre el sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $u = (1, 2, 3)$ (o qualsevol múltiple) com a vector propi de valor propi 0.

Per calcular els vectors propis de valor propi 3 hem de resoldre el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $v = (-1, 1, -0), w = (2, 0, 1)$ (o qualsevol múltiple d'ells) com a vectors propis de valor propi 3.

Per tant, posant

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tenim que

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per tant

$$\begin{aligned}
A^m &= C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^m C^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} 3^{m-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= 3^{m-1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 3^{m-1}A. \qquad \square
\end{aligned}$$

Diagonalitzar també és útil per resoldre sistemes. En efecte, per resoldre el sistema $AX = B$, amb A matriu quadrada, podem diagonalitzar A, és a dir, trobar una matriu C invertible tal que $C^{-1}AC = D$ amb D diagonal i resoldre el sistema (senzill)

$$DY = C^{-1}B,$$

llavors la solució buscada és

$$X = CY.$$

En efecte

$$AX = ACY = CDY = B.$$

Exercici 5.0.14 *Resoleu el sistema*

$$\begin{aligned}
x + 4y + z &= 0 \\
-6x + 9y + 3z &= 1 \\
-10x + 8y + 8z &= 5
\end{aligned}$$

Solució. Hem de diagonalitzar la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -6 & 9 & 3 \\ -10 & 8 & 8 \end{pmatrix},$$

cosa que hem fet a l'exercici 5.0.12. Sabem doncs que

$$C^{-1}AC = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

amb

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Resolem doncs $DY = C^{-1}B$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} 3y_1 \\ 6y_2 \\ 9y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

que dóna

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -5/6 \\ 2/9 \end{pmatrix}$$

Per tant, la solució buscada és

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = CY = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix},$$

és a dir, $x = -1/18, y = -1/6, z = 18/13$.

Capítol 6

Producte escalar, angle i distància

Conceptes tan propis de la geometria com els de distància i angle depenen del producte escalar. Encara que en aquest apunts només estudiarem geometria del pla $\mathbb{R}^2$ i de l'espai $\mathbb{R}^3$ donem la definició de producte escalar a $\mathbb{R}^n$, de manera que no tinguem que repetir el mateix pel pla i l'espai (tan sols canviar n per 2 o per 3). De passada estem preparats per estudiar geometria a $\mathbb{R}^n$ quan convingui.

Definició 6.0.1 (Producte escalar) *Siguin* $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *i* $v = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *dos vectors de* $\mathbb{R}^n$*. El producte escalar de* u *i* v *és*

$$u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

El mòdul del vector u *és*

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Es considera sempre el signe positiu de l'arrel quadrada de manera que $|u| \geq 0$.

A partir d'aquesta definició, és molt fàcil comprovar les propietats següents del producte escalar:

(1) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ per a tot $u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

(2) $u \cdot v = v \cdot u$ per a tot $u, v \in \mathbb{R}^n$.

(3) $u \cdot u \geq 0$ per a tot $u \in \mathbb{R}^n$.

(4) $u \cdot u = 0$ si i només si $u = (0, \ldots, 0)$.

La propietat (1) es coneix com propietat *associativa*, la (2) com propietat *commutativa*, la (3) diu que el producte escalar és *definit positiu* i la (4) que és *no degenerat.*

Proposició 6.0.2 (Desigualtat de Cauchy-Schwarz) *Per a tot* $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$(u \cdot v)^2 \leq |u|^2 \cdot |v|^2.$$

Demostració. Per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$, $|u + \lambda v|^2 = (u + \lambda v) \cdot (u + \lambda v) \geq 0$. Això equival a dir que el discriminant de l'equació de segon grau $\lambda^2 |v|^2 + 2\lambda\, u \cdot v + |u|^2$ és negatiu. Però aquest discriminat és $4(u \cdot v)^2 - 4|u|^2 |v|^2$ i hem acabat. □

Definició 6.0.3 (Angle) *Definim el* cosinus de l'angle *entre dos vectors no nuls u i v com*

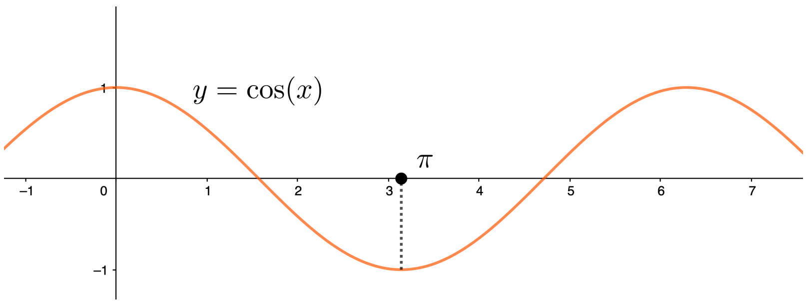
$$\cos(u, v) = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}.$$

Observem que el punt '$\cdot$' del numerador fa referència al producte escalar de vectors mentre que el punt '$\cdot$' del denominador és el producte de nombres reals.

Observem també que aquesta definició té sentit degut a la desigualtat de Cauchy-Schwarz, ja que aquesta ens diu que

$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} \leq 1$$

i per tant aquest número es pot interpretar com el cosinus d'un angle. Recordem que el cosinus d'un angle està sempre entre -1 i 1 i que hi ha un únic angle entre 0i π radians amb un cosinus determinat.



Definició 6.0.4 *Diem que dos vectors u i v de $\mathbb{R}^n$ són* ortogonals *si $u \cdot v = 0$, és a dir, si el cosinus de l'angle entre ells és zero.*

Exercici 6.0.5 *Calculeu l'angle entre els vectors $(1, \sqrt{3})$ i $v = (\sqrt{3}, 1)$ de $\mathbb{R}^2$.*

Solució.

$$\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Per tant $\alpha = \pi/6$. □

En general necessitarem la calculadora per passar del coneixement de $\cos\alpha$ al coneixement de α. L'expressió general és complicada:

$$\cos\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}$$

La majoria de calculadores porten incorporada la funció arccos.

Definició 6.0.6 (Distància) *La* distància *entre dos punts P i Q de $\mathbb{R}^n$ és el nombre $d(P, Q)$ donat per*

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|.$$

Veiem ara algunes propietats de la distància.

Proposició 6.0.7 *Per a tot $P, Q, R \in \mathbb{R}^n$ es compleixen les propietats següents:*

(i) $d(P, Q) \geq 0$,

(ii) $d(P, Q) = 0$ *si i només si* $P = Q$,

(iii) $d(P, Q) = d(Q, P)$,

(iv) la desigualtat triangular*:*

$$d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R).$$

Demostració. Les propietats (i), (ii) i (iii) són trivials a partir de la definició de distància.

Demostrem la propietat (iv). Siguin $u = \overrightarrow{PQ}$ i $v = \overrightarrow{QR}$. Llavors $\overrightarrow{PR} = R - P = R - Q + Q - P = u + v$. Ara, usant les propietats del producte escalar, tenim

$$|u + v|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = u \cdot u + v \cdot v + 2u \cdot v,$$

i per la desigualtat de Cauchy-Schwarz,

$$|u + v|^2 \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u| \cdot |v| = (|u| + |v|)^2.$$

Per tant,

$$|u + v| \leq |u| + |v|,$$

i així

$$\mathrm{d}(P, R) = |u + v| \leq |u| + |v| = \mathrm{d}(P, Q) + \mathrm{d}(Q, R). \qquad \square$$

Capítol 7

El pla $\mathbb{R}^2$

7.1 Introducció

Tota teoria matemàtica es fonamenta en uns objectes no definits i unes propietats entre ells que es prenen com a certes: els axiomes. Usant els axiomes i raonaments lògics, s'obtenen noves propietats dels objectes (teoremes) i es defineixen nous conceptes. Així, cada teorema nou de la teoria s'ha de deduir, mitjançant raonaments lògics, dels axiomes i teoremes demostrats anteriorment, i cada definició nova es fa en termes de conceptes i propietats introduïdes abans.

Moltes vegades les teories matemàtiques són models de coses reals. En aquest cas, els objectes no definits de la teoria matemàtica són abstraccions de coses reals, i els axiomes són abstraccions de propietats fonamentals d'aquestes coses reals, comprovades experimentalment.

La geometria és la part de la matemàtica que modelitza l'espai on vivim. Es pot desenvolupar la geometria partint dels punts, rectes i plans, com a objectes no definits, i uns quants axiomes.

Això és el que va fer Euclides, uns tres-cents anys abans de Crist. Al primer llibre dels *Elements*, Euclides, partint de la descripció d'uns quants objectes i de cinc axiomes, que ell anomena postulats, va demostrant proposicions o teoremes de la geometria del pla usant raonaments lògics. L'últim teorema d'aquest llibre és el teorema de Pitàgores.

Molt més tard, Descartes (1596-1650) i Fermat (1601-1665) crearen independentment la geometria analítica, introduint coordenades en el pla. Això va permetre solucionar més fàcilment molts problemes de geometria.

Nosaltres desenvoluparem la geometria del pla usant com a model del pla el conjunt $\mathbb{R}^2$ de tots els parells ordenats de nombres reals. D'aquesta manera cada punt del pla ja té incorporades unes coordenades que fan més fàcil la descripció dels objectes geomètrics i la demostració de les seves propietats.

7.2 Punts i rectes del pla $\mathbb{R}^2$

En aquesta secció estudiarem els elements bàsics de la geometria del pla $\mathbb{R}^2$. Recordem que $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, és a dir, $\mathbb{R}^2$ és el conjunt de tots els parells ordenats (x, y) de nombres reals.

Definició 7.2.1 (Punt i recta) *Cada element* (a, b) *de* $\mathbb{R}^2$ *és un* punt *del pla. Una* recta *del pla és un subconjunt* r *de* $\mathbb{R}^2$ *de la forma següent:*

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\},$$

on a, b *i* c *són nombres reals fixats i* $(a, b) \neq (0, 0)$.

L'equació $ax + by = c$ es diu *equació implícita* o *cartesiana* de la recta r. Per abús de llenguatge, també es diu que r és la recta $ax + by = c$. Si $P \in r$, direm que P és un punt de la recta r, o també, que la recta r passa pel punt P.

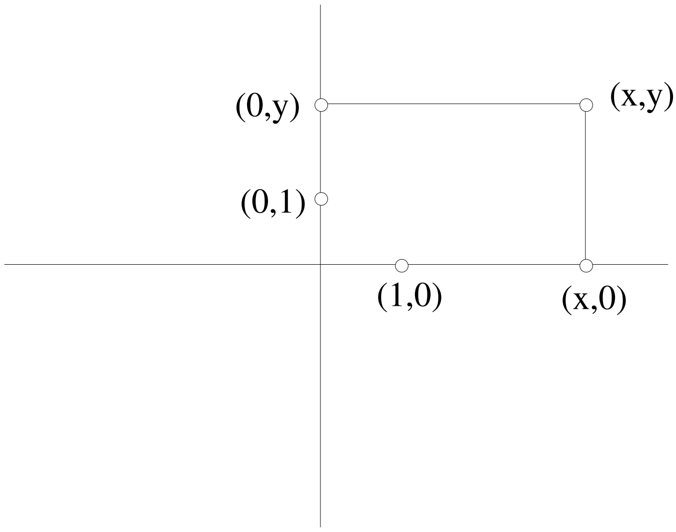
Cada recta $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$ divideix el pla en dos *semiplans*:

$$\pi_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by \geq c\},$$
$$\pi_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by \leq c\}.$$

Nota 7.2.2 *Per facilitar la comprensió d'aquests conceptes, convé tenir-ne una imatge física. Tots sabem distingir, d'entre els objectes que ens envolten, quins tenen una superfície plana, per exemple una taula, una paret, etc. El pla* $\mathbb{R}^2$ *representa qualsevol superfície plana estesa indefinidament. Així, en qualsevol superfície plana d'un objecte dels que ens envolten tenim la possibilitat de veure una imatge d'un tros de* $\mathbb{R}^2$*. També sabem distingir quines línies determinades per objectes que ens envolten o dibuixades en alguna superfície són rectes. I ens adonem que tota línia recta està sobre alguna superfície plana. També tenim una idea clara de què representa un punt. Això ens permet representar gràficament un tros de* $\mathbb{R}^2$ *i punts i trossos de rectes en aquest tros de* $\mathbb{R}^2$*. De fet, quan dibuixem una recta, tothom sap que el que dibuixem és només un tros de recta.*

Sabem que els nombres reals es poden representar sobre una recta de la manera següent. Dibuixem una recta i marquem un punt de la recta que representarà el nombre 0*. Fixant una unitat de longitud, podem graduar la recta associant a cada punt de la recta la distància de* x *unitats de longitud entre el punt i el punt* 0*. Finalment triem una de les semirectes que comencen al punt* 0 *com a semirecta dels reals positius, i associem el real positiu* x *al punt que està a distància* x *unitats de longitud sobre aquesta semirecta, i* $-x$*, al punt de distància* x *unitats de longitud sobre l'altra semirecta. Normalment, si dibuixem una recta horitzontal, la semirecta de la part dreta del punt* 0 *és la dels positius. I si la recta és vertical, la semirecta de damunt del punt* 0 *és la dels positius.*

Per representar $\mathbb{R}^2$*, dibuixem dues rectes, una d'horitzontal i una de vertical. Representem els reals sobre aquestes rectes agafant, com a punt* 0 *de les dues, el punt on es tallen i graduant les rectes amb la mateixa unitat de longitud. La recta horitzontal es diu* eix d'abscisses*, i la vertical,* eix d'ordenades*. El punt* (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$ *es representa al punt on es tallen la recta vertical que passa pel punt* x *de l'eix d'abscisses i la recta horitzontal que passa pel punt* y *de l'eix d'ordenades.*



Els punts (x, y), amb $x > 0$, $y > 0$, es diu que són al primer quadrant*; si $x < 0$, $y > 0$, es diu que són al segon quadrant; si $x < 0$, $y < 0$, es diu que són al tercer quadrant, i si $x > 0$, $y < 0$, es diu que són al quart quadrant.* $\diamondsuit$

Teorema 7.2.3 *Siguin r_1, r_2 dues rectes diferents del pla $\mathbb{R}^2$. Llavors o bé tenen un únic punt en comú, o bé no en tenen cap.*

Demostració. Siguin $a_1x + b_1y = c_1$ i $a_2x + b_2y = c_2$ les equacions de les rectes r_1 i r_2 respectivament. Llavors

$$r_1 \cap r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1x + b_1y = c_1 \text{ i } a_2x + b_2y = c_2\}$$

és el conjunt de totes les solucions del sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right\}$$

Pel teorema de Rocuhé-Frobenius si

$$rang \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq rang \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

el sistema és incompatible, i les rectes no tenen cap punt en comú.

Si

$$rang \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & {}_2 \end{pmatrix} = 2$$

la solució es única ja que $n - r = 2 - 2 = 0$ (recordem que l'espai de solucions té dimensió $n - r$ on n és el número d'incògnites i r el rang).

Finalment si

$$rang \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & {}_2 \end{pmatrix} = 1$$

vol dir que les dues files de la matriu ampliada són una múltiple de l'altre i per tant les equacions $a_1x + b_1y = c_1$ i $a_2x + b_2y = c_2$ representen la mateixa recta $(a_2 = \lambda a_1, b_2 = \lambda b_1, c_2 = \lambda c_1)$. $\square$

Direm que dues rectes r_1 i r_2 es tallen en un punt P si r_1 i r_2 passen per P. Direm que r_1 i r_2 no es tallen, si no tenen cap punt en comú.

Definició 7.2.4 *Diem que dues rectes diferents r_1 i r_2 de $\mathbb{R}^2$ són* paral·leles *si no es tallen.*

Observació 7.2.5 Observem que les rectes $r_1 : a_1x + b_1y = c_1$ i $r_2 : a_2x + b_2y = c_2$ són paral·leles si i només si

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0.$$

En efecte, si aquest determinant fos diferent de zero el rang de les dues matrius seria 2 i es tallarien.

Aquesta igualtat és equivalent a

$$a_2 = \lambda a_1, \quad b_2 = \lambda b_1,$$

per a un cert $\lambda \in \mathbb{R}$ diferent de zero. És a dir, r_1 i r_2 són paral·leles si i només si

$$\begin{aligned} r_1 :& \quad a_1x + b_1y = c_1 \\ r_2 :& \quad a_1x + b_1y = c_3, \end{aligned}$$

$(c_3 = c_2/\lambda)$. $\diamondsuit$

Teorema 7.2.6 (*I* postulat d'Euclides) *Per dos punts diferents de $\mathbb{R}^2$ passa una única recta.*

Demostració. Siguin $P = (p_1, p_2)$ i $Q = (q_1, q_2)$ dos punts diferents de $\mathbb{R}^2$. Busquem una recta r de $\mathbb{R}^2$ que passi per aquests punts. Sigui $ax + by = c$ l'equació de la recta r. Llavors s'ha de complir que

$$ap_1 + bp_2 = c \quad \text{i} \quad aq_1 + bq_2 = c,$$

i per tant

$$ap_1 + bp_2 = aq_1 + bq_2,$$

és a dir,

$$a(p_1 - q_1) = b(q_2 - p_2).$$

Agafant $a = q_2 - p_2$, $b = p_1 - q_1$ i $c = p_1q_2 - p_2q_1$ obtenim una recta

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (q_2 - p_2)x + (p_1 - q_1)y = p_1q_2 - p_2q_1\}$$

que passa pels punts $P = (p_1, p_2)$ i $Q = (q_1, q_2)$. Pel teorema 7.2.3, r és l'única que passa per aquests punts. $\square$

L'única recta que passa per dos punts A i B diferents es diu que és la recta AB.

Teorema 7.2.7 (*V* **postulat d'Euclides)** *Donats un punt P i una recta r_1 de $\mathbb{R}^2$, amb $P \notin r$, hi ha una única recta r_2 paral·lela a r_1 que passa per P.*

Demostració. Sigui $P = (p_1, p_2)$ i sigui $a_1x + b_1y = c_1$ l'equació de la recta r_1. Llavors la recta r_2 amb equació $a_1x + b_1y = a_1p_1 + b_1p_2$ és una recta que passa per P i, per l'observació 7.2.5, r_1 i r_2 són paral·leles.

I no n'hi pot haver cap més. En efecte, per l'observació 7.2.5, qualsevol altra recta r_3 paral·lela a r_1 ha de ser de la forma $a_1x + b_1y = c_3$ però per passar per P ha de ser $a_1p_1 + b_1p_2 = c_3$ i es tracta doncs de r_2. □

Nota 7.2.8 *Hem recuperat així el primer i el cinquè dels cinc postulats d'Euclides. El segon postulat diu que les rectes es poden prolongar indefinidament, el tercer postulat diu que es poden traçar circumferències de centre i radi arbitraris, i el quart postulat diu que els angles rectes són iguals.* ♢

7.3 Equacions vectorial, paramètrica i contínua de la recta

Definició 7.3.1 (Direcció) *La* direcció *de la recta r donada per $ax + by = c$ és el vector $u = (-b, a)$ o qualsevol dels seus múltiples, λu, $\lambda \neq 0$.*

Proposició 7.3.2 *Si P, Q són dos punts arbitraris de la recta r donada per $ax+by = c$ llavors*

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda(-b, a)$$

Demostració. Si $P = (p_1, p_2)$ i $Q = (q_1, q_2)$ tenim que $\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ i

$$a(q_1 - p_1) + b(q_2 - p_2) = aq_1 + bq_2 - (ap_1 + bp_2) = c - c = 0.$$

Aquesta equació es pot escriure com

$$-\frac{q_1 - p_1}{b} = \frac{q_2 - p_2}{a} = \lambda$$

i per tant $q_1 - p_1 = -\lambda b$, $q_2 - p_2 = \lambda a$ com volíem. □

Proposició 7.3.3 *Dues rectes del pla $\mathbb{R}^2$ són paral·leles si i només si tenen la mateixa direcció.*

Demostració. Recordem que les rectes paral·leles a $r : ax + by = c$ tenen equacions de la forma $s : ax + by = d$. Per tant, tant r com s tenen direcció el vector $(-b, a)$ o qualsevol múltiple d'ell, $\lambda(-b, a)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ diferent de zero.

Equació vectorial

De la proposició 7.3.2 es dedueix que si P és un punt d'una recta r amb vector director u llavors

$$r = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid Q = P + \lambda u\}.$$

L' equació

$$X = P + \lambda u \tag{7.1}$$

es diu *equació vectorial* de la recta r.

Resumint, l'equació $ax+by+c=0$ representa una recta de vector director $(-b,a)$ i la seva equació vectorial és

$$X = (p_1, p_2) + \lambda(-b, a)$$

on $P = (p_1, p_2)$ és qualsevol punt de la recta, és a dir, un punt que compleixi $ap_1 + bp_2 + c = 0$.

Aquesta manera vectorial d'escriure la recta permet definir fàcilment *semirecta* i *segment*. Concretament donada la recta $X = P + \lambda u$ tenim dues semirectes

$$\begin{aligned} r_1(P) &= \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid Q = P + \lambda u, \text{ amb } \lambda \geq 0\}, \\ r_2(P) &= \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid Q = P + \lambda u, \text{ amb } \lambda \leq 0\}. \end{aligned}$$

El *segment* entre dos punts diferents P i Q del pla és el conjunt

$$PQ = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid X = P + \lambda \overrightarrow{PQ}, \text{ amb } 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Equació paramètrica i contínua

Posant $X = (x, y)$ i $u = (u_1, u_2)$, l'equació vectorial (7.1) dóna lloc a les dues equacions

$$\left.\begin{aligned} x &= p_1 + \lambda u_1 \\ y &= p_2 + \lambda u_2 \end{aligned}\right\} \text{ amb } \lambda \in \mathbb{R},$$

que són les *equacions paramètriques* de la recta r (per a cada valor del paràmetre λ obtenim un punt de r).

Observem que, si u_1 i u_2 són no nuls, llavors

$$\lambda = \frac{x - p_1}{u_1} = \frac{y - p_2}{u_2}.$$

L'equació

$$\frac{x - p_1}{u_1} = \frac{y - p_2}{u_2}$$

es diu que és *l'equació contínua* de la recta r.

A partir d'aquesta expressió podem recuperar l'equació cartesiana de la recta simplement multiplicant mitjos i extrems; obtenim

$$ax + by + c = 0,$$

amb

$$\begin{aligned} a &= u_2, \\ b &= -u_1, \\ c &= p_2u_1 - p_1u_2. \end{aligned}$$

Exercici 7.3.4 *Trobeu l'equació vectorial de la recta $3x + 2y - 8 = 0$.*

Solució. Trobem una solució d'aquesta equació, posant per exemple $x = 1$. Això dóna $3 + 2y - 8 = 0$, és a dir $y = 5/2$. És a dir, el punt $(1, 5/2)$ pertany a la recta. Per tant, l'equació vectorial és

$$X = (1, 5/2) + \lambda(-2, 3).$$

Exercici 7.3.5 *Trobeu l'equació cartesiana de la recta $X = (1, 2) + \lambda(5, 1)$.*

Solució. En coordenades tenim

$$\begin{aligned} x &= 1 + 5\lambda \\ y &= 2 + \lambda \end{aligned}$$

i eliminant λ,

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{1}$$

per tant $x - 1 = 5y - 10$, és a dir

$$x - 5y + 9 = 0.$$

Angle entre rectes

Així com l'angle entre dos vectors està perfectament definit l'angle entre dues rectes que es tallen no. Sembla natural definir l'angle entre dues rectes que es tallen com l'angle entre els seus vectors directors, però com el vector director d'una recta no està determinat sinó que es pot canviar per qualsevol múltiple d'ell aquest angle podria canviar.

En efecte, si les rectes r, s tenen un punt en comú P es poden escriure com

$$\begin{aligned} r &: P + \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ s &: P + \mu v, \quad \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

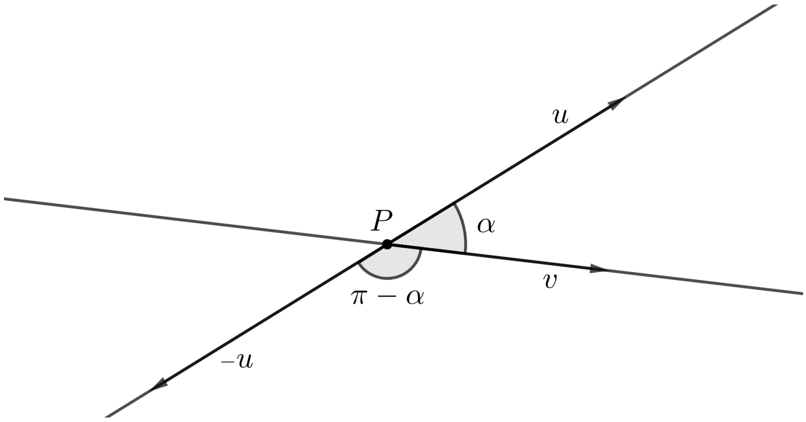
per certs vectors directors u, v.

Com u es pot canviar per tu amb $t \in \mathbb{R}$ i v es pot canviar per sv amb $s \in \mathbb{R}$ per que tingués sentit definir l'angle entre les rectes com l'angle entre els seus vectors directors hauria de ser que l'angle entre tu i sv no depengués ni de t ni de s. Però, per calcular aquest angle faríem

$$\cos(\alpha) = \frac{t\,u \cdot sv}{|tu| \cdot |sv|} = \frac{t\,s}{|t||s|} \cdot \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \pm\frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$$

segons que t, s tinguin o no el mateix signe.

Per tant, segons quins vectors prenem com vectors directors de les rectes obtindrem un angle α o un angle $\pi - \alpha$ (angles amb cosinus oposats).



L'ùnic cas en que aquest angle està ben definit és quan $u \cdot v = 0$ ja que llavors l'anterior signe no té importància i s'obté un únic angle $\alpha = \pi/2$. Es diu que les rectes són perpendiculars.

7.4 Distància d'un punt a una recta

Definició 7.4.1 *Si $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ són subconjunts no buits de $\mathbb{R}^2$, definim la distància entre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ com*

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf\{d(P, Q) \mid P \in \mathcal{A} \ \ i \ \ Q \in \mathcal{B}\}.$$

En el cas en que $\mathcal{A}$ és un punt P i $\mathcal{B}$ una recta $r = \{X \mid X = Q + \lambda u\}$ aquesta distància és

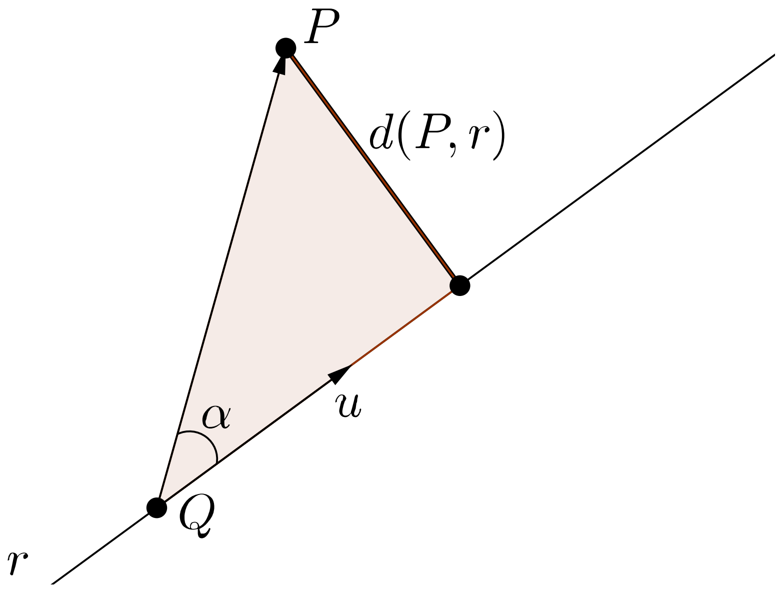
$$d(P, r) = \inf\{d(P, X) \mid X \in r\}.$$

Pel teorema de Pitàgores aquest ínfim s'gafa quan la recta PX és perpendicular a r. Degut a això és clar a partir de la figura que

$$d(P, r) = |\overrightarrow{QP}| \cdot |\sin \alpha|$$

on α és l'angle entre els vectors $\overrightarrow{QP}$ i el vector director de la recta u, és a dir, és l'angle caracteritzat per l'equació

$$\cos \alpha \quad = \quad \frac{\overrightarrow{QP} \cdot u}{|\overrightarrow{QP}| \cdot |u|}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$



Així

$$\begin{aligned} d(P,r)^2 &= |\overrightarrow{QP}|^2 \cdot (1-\cos^2\alpha) \\ &= |\overrightarrow{QP}|^2 \cdot (1-(\frac{\overrightarrow{QP}\cdot u}{|\overrightarrow{QP}|\cdot|u|})^2) \\ &= \frac{1}{|u|^2}(|\overrightarrow{QP}|^2\cdot|u|^2-(\overrightarrow{QP}\cdot u)^2) \end{aligned}$$

Si tenim l precaució de prendre el vector director unitari, $|u|^2 = 1$, la fórmula de la distància entre punt i recta és

$$d(P,r)^2 = |\overrightarrow{QP}|^2 - (\overrightarrow{QP}\cdot u)^2$$

que no és més que el teorema de Pitàgores en el triangle rectangle de la figura.

Si la recta està donada per $ax + by + c = 0$, sabem que el seu vector director unitari és

$$u = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-b, a)$$

que substituint a la fórmula anterior dóna

$$\begin{aligned} d(P,r)^2 &= (q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2-\left[(q_1-p_1)\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}+(q_2-p_2)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]^2 \\ &= (q_1-p_1)^2\frac{a^2}{a^2+b^2}+(q_2-p_2)^2\frac{b^2}{a^2+b^2}+2(q_1-p_1)(q_2-p_2)\frac{ab}{a^2+b^2} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\left[(q_1-p_1)a+(q_2-p_2)b\right]^2 \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\left[ap_1+bp_2+c\right]^2 \end{aligned}$$

ja que $aq_1 + bq_2 + c = 0$.

Per tant,

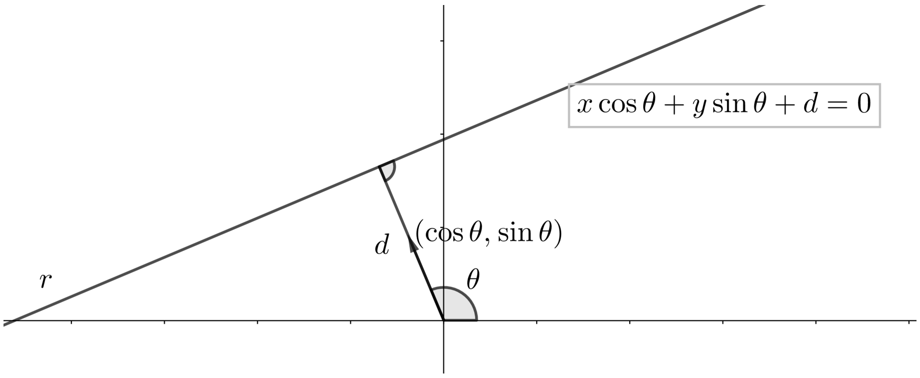
$$\boxed{d(P,r) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.} \tag{7.2}$$

Si tenim la precaució de prendre $a^2+b^2=1$, i $c \geq 0$[1], cosa que vol dir que existeix un angle θ tal que $a = \cos\theta, b = \sin\theta$ la distància a l'origen $O=(0,0)$ és

$$d = d(O,r) = |C| = C$$

de manera que l'equació de la recta és

$$x\cos\theta + y\sin\theta + d = 0.$$



7.5 Teorema de Tales

Ara que ja hem introduït el concepte de distància, podem demostrar un dels resultats clàssics de la geometria.

Teorema 7.5.1 (Teorema de Tales) *Siguin r_1 i r_2 dues rectes diferents que es tallen en un punt O. Siguin s_1 i s_2 dues rectes paral·leles diferents que tallen la recta r_1 en els punts A_1 i A_2 respectivament, i la recta r_2 en els punts B_1 i B_2 respectivament. Llavors*[2]

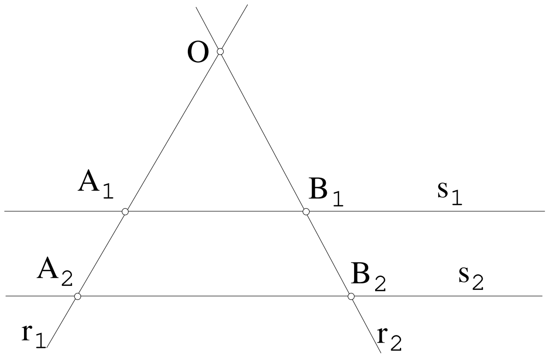
$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}.$$

Demostració. Com que O, A_1 i A_2 estan alineats, existeix $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{OA_1} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_2}. \tag{7.3}$$

[1]Les equacions $ax+by+c=0$ i $-ax-by-c=0$ representen la mateixa recta de manera que sempre podem suposar la recta donada amb $c \geq 0$.

[2]Per simplificar la notació posem $OA_1 = |\overrightarrow{OA_1}| = d(O, A_1)$, i el mateix per als altres termes de la igualtat.



Com que O, B_1 i B_2 estan alineats, existeix $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{OB_1} = \lambda_2 \overrightarrow{OB_2}. \tag{7.4}$$

Com que les rectes s_1 i s_2 són paral·leles, existeix $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda_3 \overrightarrow{A_2B_2}. \tag{7.5}$$

Ara tenim

$$\lambda_3 \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OB_1} = -\lambda_1 \overrightarrow{OA_2} + \lambda_2 \overrightarrow{OB_2}.$$

Així,

$$\lambda_3 \overrightarrow{A_2O} + \lambda_3 \overrightarrow{OB_2} = -\lambda_1 \overrightarrow{OA_2} + \lambda_2 \overrightarrow{OB_2},$$

és a dir,

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\overrightarrow{A_2O} = (\lambda_2 - \lambda_3)\overrightarrow{OB_2}.$$

Com que les rectes r_1 i r_2 tenen direccions diferents,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

Prenent mòduls a les igualtats (7.3), (7.4), (7.5) anteriors, obtenim el resultat. □

7.6 Triangles

Un conveni de notació útil quan tractem amb triangles és denotar amb la mateixa lletra majúscula el vèrtex i l'angle (i la seva mesura) i amb la mateixa lletra, però minúscula, el costat oposat (i la seva longitud). Així, el triangle $\triangle ABC$, té angles $A = \angle CAB$, $B = \angle ABC$, $C = \angle BCA$, i costats $a = BC = |\overrightarrow{BC}|$, $b = AC = |\overrightarrow{AC}|$, $c = AB = |\overrightarrow{AB}|$.

Teorema 7.6.1 (Pitàgores) *Si $\triangle ABC$ és un triangle rectangle en A ($\angle A = \pi/2$) llavors*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Demostració. Per definició d'angle

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

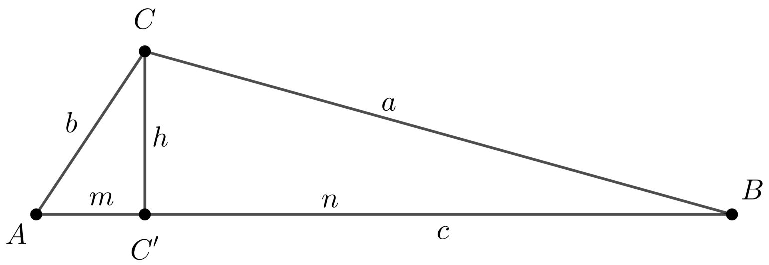
per tant

$$a^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}|^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = b^2 + c^2. \quad \square$$

Teorema 7.6.2 (Teorema de cosinus) *En tot triangle $\triangle ABC$ es compleix que*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

Demostració. Denotem $m = AC'$, $n = BC' = c - m$.



Pel teorema de Pitàgores

$$h^2 = b^2 - m^2 = a^2 - n^2,$$

per tant,

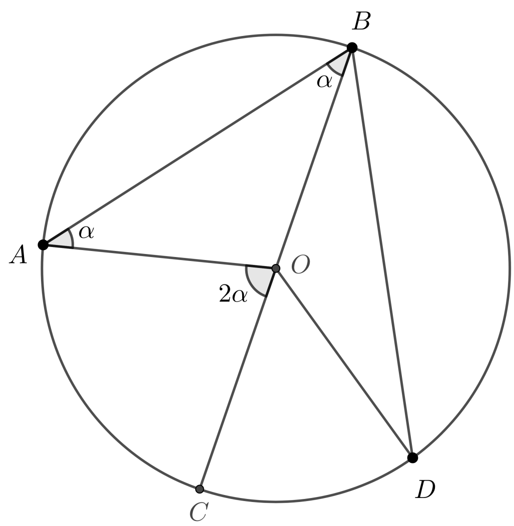
$$a^2 = b^2 - m^2 + n^2 = b^2 - m^2 + (c-m)^2 = b^2 + c^2 - 2cm = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A),$$

ja que $\cos(A) = m/b$.

Teorema 7.6.3 (Angle inscrit) *Un angle inscrit en una circumferència val la meitat de l'angle central que abraça el mateix arc de circumferència.*

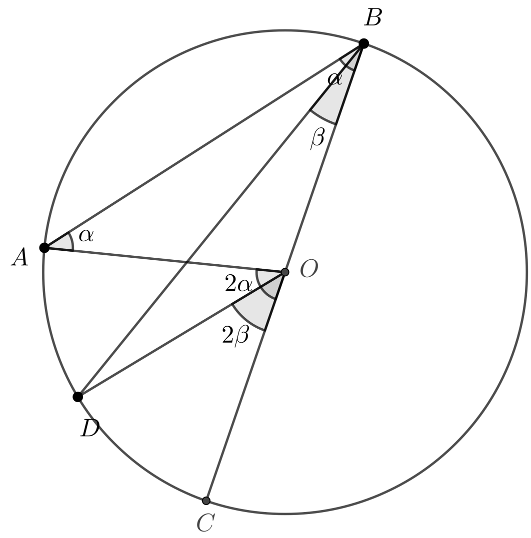
Demostració. Donat l'angle $\angle ABD$ tracem la recta pel centre O de la circumferència BOC. Veurem que si $\angle ABC = \alpha$ llavors $\angle AOC = 2\alpha$. El mateix argument demostraria que $\angle COD = 2\angle CBD$, i per tant

$$\angle AOD = \angle AOC + \angle COD = 2\angle ABC + 2\angle CBD = 2\angle ABD.$$



Per demostrar que si $\angle ABC = \alpha$ llavors $\angle AOC = 2\alpha$ observem que el triangle $\triangle ABO$ és isòsceles i per tant $\angle OAB = \alpha$. Per tant, com la suma dels tres angles d'un triangle és π radians, $\angle AOB = \pi - 2\alpha$ i per tant $\angle AOC = 2\alpha$.

Si el centre O de la circumferència no és interior a l'angle donat l'argument és similar a l'anterior canviant suma d'angles per diferència d'angles.



En efecte, amb la notació de la figura l'angle central que abraça el mateix que $\angle ABD$ és $\angle AOD$ i

$$\angle AOD = \angle AOC - \angle DOC = 2\alpha - 2\beta = 2(\alpha - \beta) = 2\angle ABD. \quad \square$$

Teorema 7.6.4 (Teorema del sinus) *En tot triangle ABC es compleix que*

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = d$$

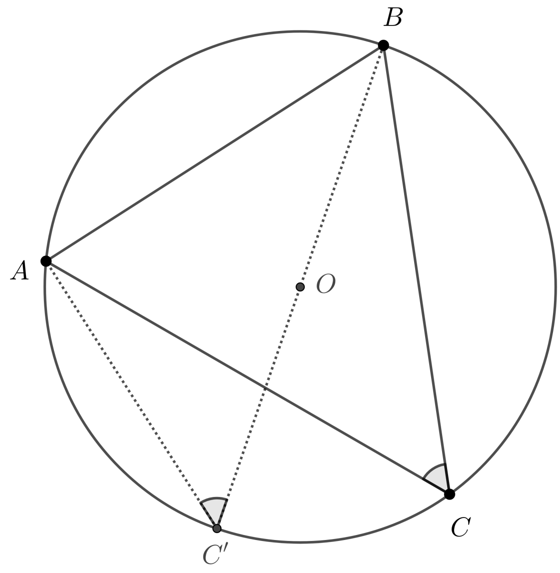
on d és el diàmetre de la circumferència circumscrita.

Demostració. Sigui C' el punt en que el diàmetre per B talla la circumferència circumscrita[3] Pel teorema de l'angle inscrit, $\angle C = \angle C'$. Però com l'angle $\angle C'AB$ abraça mitja circumferència, pel teorema de l'angle inscrit , és un angle recte. Per tant,

$$\sin(C') = \frac{c}{d}$$

on $d = BC'$ és el diàmetre de la circumferència circumscrita.

[3]Tot triangle està inscrit en una circumferència. El centre es el punt d'intersecció de les mediatrius dels costats.

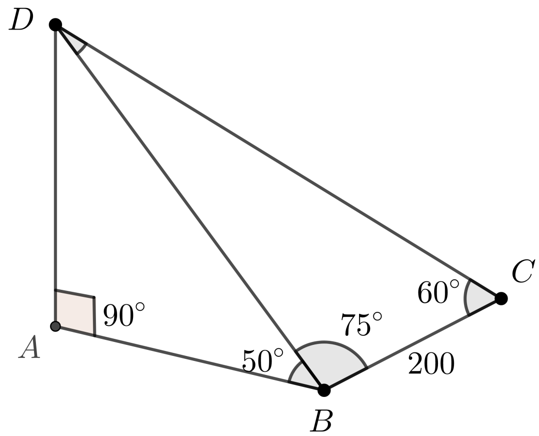


Per tant,

$$d = \frac{c}{\sin(C)}.$$

Com el paper jugat pel vèrtex B el podem repetir pels vèrtexs A i C el teorema queda demostrat. $\square$

Exercici 7.6.5 [4] *Trobeu l'altura de la muntanya AD de la figura sabent que $BC = 200$ metres, i que $\angle ABD = 50°$, $\angle DBC = 75°$, $\angle BCD = 60°$ (angles mesurables fàcilment amb teodolit).*



Solució. Clarament $\angle BDC = 45°$ ja que els tres angles del triangle BCD ha de sumar $180°$. Aplicant el teorema del sinus tenim

$$\frac{BD}{\sin(60°)} = \frac{200}{\sin(45°)}$$

[4]Aquest exercici i el segünen són de https://www.vadenumeros.es/primero/trigonometria-resolver-triangulos.htm

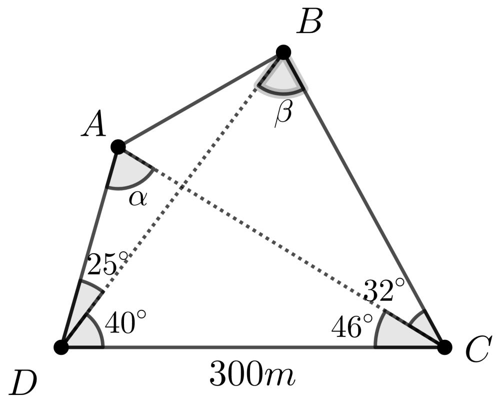
i per tant $BD = 244.9512\ldots$ metres. Com $\angle BAD = 90°$ tenim que

$$\sin(50°) = \frac{AD}{244.9512\ldots}$$

i per tant $AD = 187.6435\ldots$ metres.

Exercici 7.6.6 *Es tracta de calcular la distància entre dos punts inaccessibles A i B. Fixem dos punts D, C separats $300\,m$ com indica la figura, i mesurem amb el teodolit els angles $\angle ADB = 25°, \angle BDC = 40°, \angle DCA = 46°, \angle ACB = 32°$ A partir d'aquí calculeu AB.*

Solució. Clarament ha de ser $\alpha = 69°$ i $\beta = 62°$.



Pel teorema del sinus

$$\frac{300}{\sin(69°)} = \frac{AC}{\sin(65°)}, \qquad \frac{300}{\sin(62°)} = \frac{BC}{\sin(40°)}.$$

Per tant,

$$AC = 291,2\ldots, BC = 218,4\ldots$$

Pel teorema del cosinus

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot CB \cdot \cos(32) = 84797,44.. + 47698,56.. - 127196,16.. \cdot 0,848 = 24633,65\ldots$$

per tant

$$AB = 156,95\ldots$$

7.7 Moviments del pla

Un moviment del pla $\mathbb{R}^2$ és una aplicació $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que conserva les distàncies.

No hi ha gaires moviments en el pla. Es caracteritzen essencialment per si tenen o no punts fixos i per si tenen o no rectes fixes o invariants (fixes però no de punts fixos). Donem a continuació, sense demostració, la llista de tots aquests moviments.

1. **Gir.** Si l'origen de coordenades és el centre de gir les equacions son

$$\begin{aligned} x' &= x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ y' &= x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{aligned}$$

   Un únic punt fix.

2. **Translació**. Translació en la direcció d'una certa recta és el moviment que, prenent aquesta recta com eix de les x, s'escriu com

$$\begin{aligned} x' &= x + d, \quad d > 0 \\ y' &= y \end{aligned}$$

   Cap punt fix. Infinites rectes invariants.

3. **Lliscament**. Consisteix en fer una simetria respecte una recta i una translació en la direcció d'aquesta recta. Si aquesta recta és l'eix de les x les equacions són

$$\begin{aligned} x' &= x + d, \quad d > 0 \\ y' &= -y \end{aligned}$$

   Cap punt fix. Una única recta invariant. Si $d = 0$ tenim simplement una **simetria**.

Exercici 7.7.1 *Trobeu les equacions d'un* **gir** *d'angle α al voltant del punt $P = (a, b)$.*

Solució. El resoldrem per un mètode que posa de manifest que l'operació de conjugació que haviem introduit en capítols anteriors és molt natural de considerar.

Com sabem, per la taula classificatòria anterior, quines equacions tenen els girs al voltant de l'origen $O = (0, 0)$ farem una translació que ens porti el nostre punt P a l'origen, allà farem un gir d'angle α, i a continuació farem una translació que porti O a P (la inversa de l'anterior).

El gir $G_{P,\alpha}$ que ens demanen, és igual a la composició dels tres moviments anteriors.

$$G_{P,\alpha} = T_{(a,b)} \circ G_{O,\alpha} \circ T_{-(a,b)}$$

Aquesta igualtat és clara mirant la taula i observant que el terme de la dreta té P com punt fix. És doncs un gir.

Si posem

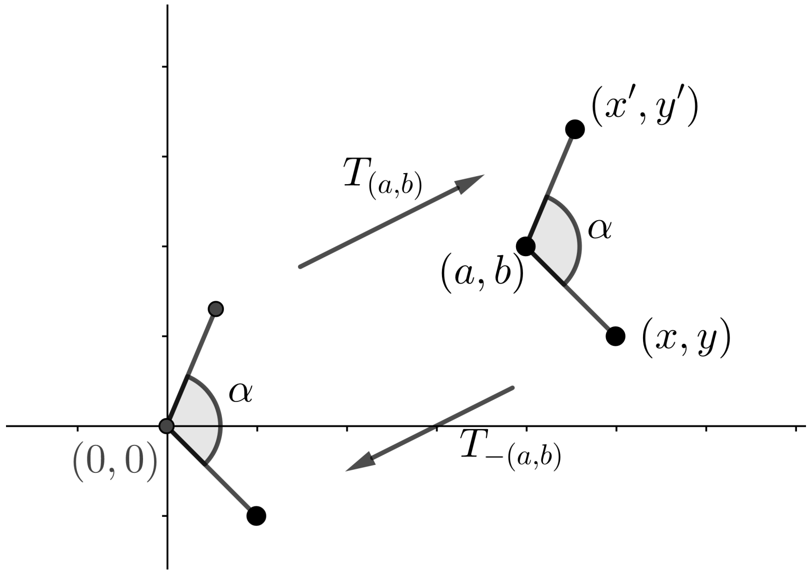
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = G_{P,\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tenim

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= T_{(a,b)} \circ G_{O,\alpha} \circ T_{-(a,b)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= T_{(a,b)} \circ G_{O,\alpha} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \\ &= T_{(a,b)} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

És a dir, el punt de coordenades (x, y), quan el girem al voltant del punt (a, b) un angle α es transforma en el punt (x', y') amb x' i y' donades per

$$\begin{aligned} x' &= a + (x-a)\cos(\alpha) - (y-b)\sin(\alpha) \\ y' &= b + (x-a)\sin(\alpha) + (y-b)\cos(\alpha) \end{aligned}$$

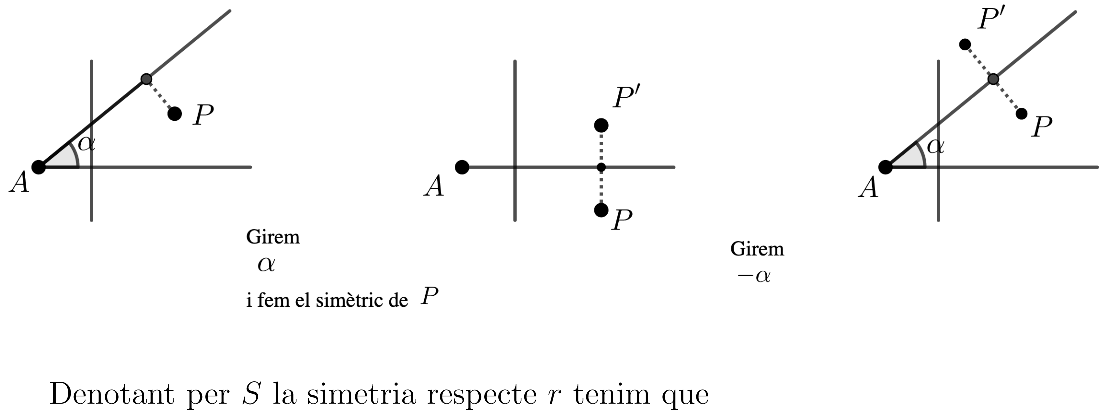


□

Exercici 7.7.2 *Trobeu les equacions de la* **simetria** *respecte la recta r d'equació $y = mx + n$.*

Solució. Procedirem de manera anàloga a l'exercici anterior. Observem primerament que la recta r talla l'eix de les x en el punt $A = (a, 0)$ amb $a = -n/m = -n\cot(\alpha)$, on α és l'angle de r amb l'eix de les x ($m = \tan(\alpha)$).

Farem primerament un gir de centre A i angle $-\alpha$ de manera que r vagi a parar sobre l'eix de les x. A continuació farem la simetria respecte aquest eix i desfarem el moviment aplicant un gir de centre A i angle α, com indica la figura.



Denotant per S la simetria respecte r tenim que

$$S = G_{A,\alpha} \circ S_x \circ G_{A,-\alpha}$$

on S_x és la simetria respecte l'eix de les x, és a dir, l'aplicació que envia el punt (x, y) al punt $(x, -y)$.

Si posem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tenim (utilitzem les equacions d'un gir obtingudes a l'exercici anterior tant per calcular $G_{A,\alpha}$ com $G_{A,-\alpha}$)

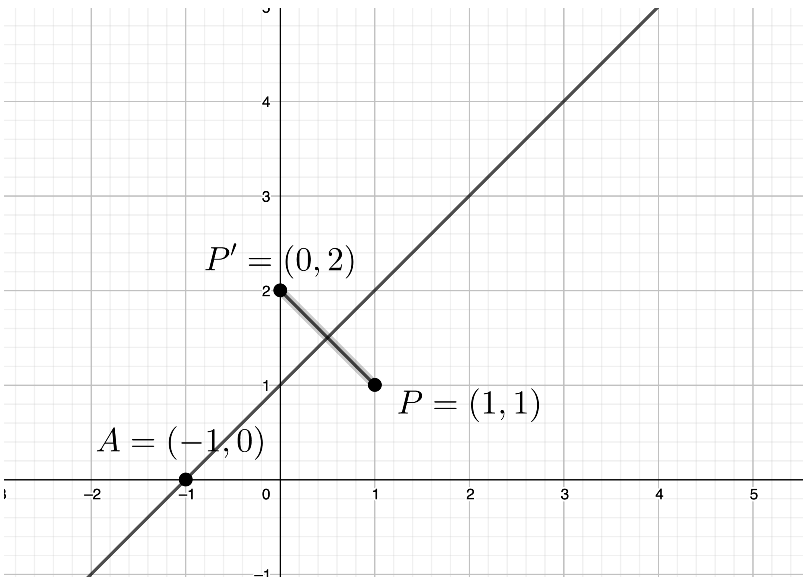
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= G_{A,\alpha} \circ S_x \circ G_{A,-\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= G_{A,\alpha} \circ S_x \begin{pmatrix} a + (x-a)\cos(\alpha) + y\sin(\alpha) \\ -(x-a)\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= G_{A,\alpha} \begin{pmatrix} a + (x-a)\cos(\alpha) + y\sin(\alpha) \\ (x-a)\sin(\alpha) - y\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x-a)\cos(\alpha) + y\sin(\alpha) \\ (x-a)\sin(\alpha) - y\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a + (x-a)\cos(2\alpha) \\ (x-a)\sin(2\alpha) - y\cos(2\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

És a dir, el simètric del punt (x, y) respecte una recta de pendent $m = \tan(\alpha)$ que talla l'eix de les x emn el punt $(a, 0)$, és el punt (x', y') amb x' i y' donades per

$$\begin{aligned}
x' &= a + (x-a)\cos(2\alpha) + y\sin(2\alpha) \\
y' &= (x-a)\sin(2\alpha) - y\cos(2\alpha)
\end{aligned}$$

Per exemple el simètric del punt $P = (1, 1)$ respecte de la recta $y = x + 1$ $(\alpha = \pi/4)$ és el punt $P' = (0, 2)$ ja que substituint aquests valors a l'anterior fórmula tenim

$$\begin{aligned}
x' &= -1 + 1 = 0 \\
y' &= (1 - (-1)) = 2
\end{aligned}$$



Capítol 8

L'espai $\mathbb{R}^3$

Introduïm a continuació dos conceptes importants que ens facilitaran la posterior comprensió d'aquest capítol: el producte vectorial de dos vectors i el producte mixt de tres vectors.

8.1 Producte vectorial i producte mixt

Definició 8.1.1 (Producte vectorial) *Siguin $u = (u_1, u_2, u_3)$ i $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectors de $\mathbb{R}^3$. El producte vectorial de u i v (amb aquest ordre) és el vector*

$$u \wedge v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Per recordar aquesta fórmula escriurem

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

de manera que en desenvolupar per la primera fila i substituir $i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)$ obtenim la fórmula anterior.

Es pot veure que

$$(u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = (u \cdot u) \cdot (v \cdot v) - (u \cdot v)^2.$$

En efecte,[1]

$$\begin{array}{rcl} (u \wedge v) \cdot (u \wedge v) & = & (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\ & = & u_1^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + u_2^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + u_3^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ & - & (u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^3v_3^2) - 2u_2v_2u_3v_3 - 2u_3v_3u_1v_1 - 2u_1v_1u_2v_2 \\ & = & (u_1^2 + u_2^2 + u_3^3)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^3) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\ & = & (u \cdot u) \cdot (v \cdot v) - (u \cdot v)^2. \end{array}$$

[1]La igualtat anterior és conseqüència de la fórmula de Lagrange

$$(a \wedge b) \cdot (c \wedge d) = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d) - (a \cdot d) \cdot (b, c)$$

que és quasi trivial per ser lineal en a, b, c i d cosa que fa que només s'hagi de veure quan a, b, c, d són vectors de la base canònica.

Així

$$|u \wedge v|^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 - |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot \cos^2 \alpha$$

on α és l'angle entre u i v. Per tant,

$$|u \wedge v| = |u| \cdot |v| \cdot |\sin \alpha|$$

Com $\|v\| \cdot |\sin \alpha|$ és l'altura del paral·llogram determinat per u i v resulta que $\|u \wedge v\|$ és l'àrea del paral·llogram determinat per u i v.

Definició 8.1.2 (Producte mixt) *El producte mixt dels vectors u, v, w de $\mathbb{R}^3$ es defineix com*

$$u \cdot (v \wedge w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

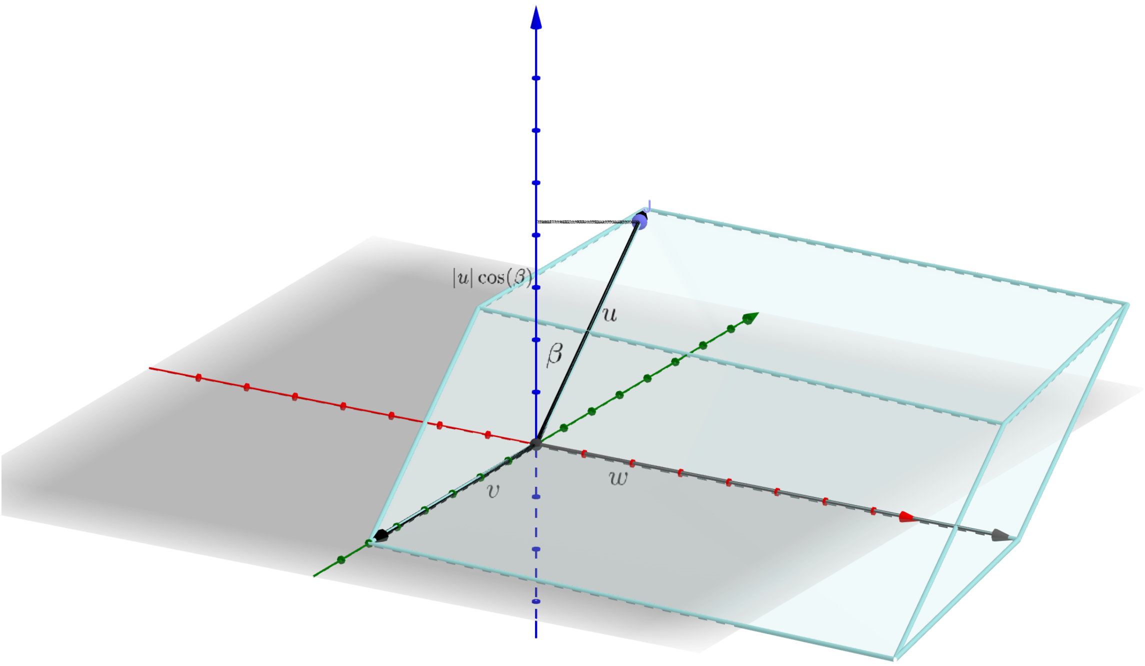
En particular $u \cdot (u \wedge v) = v \cdot (u \wedge v) = 0$ ja que tindríem un determinant amb dues files iguals. És a dir, *el producte vectorial de dos vectors és un vector ortogonal a tots dos.*

Per definició d'angle tenim doncs

$$u \cdot (v \wedge w) = |u| \cdot |v \wedge w| \cdot \cos \beta$$

on β és l'angle entre u i $v \wedge w$.

Com $\|v \wedge w\|$ és l'àrea del paral·lelogram de costats v i w, queda clar que *el producte mixt és el volum del paral·llepíped de costats* u, v, w (L'alçada d'aquest paral·lelepíped és $\|u\| \cos \beta$).



8.2 Equació vectorial del pla

Un pla de l'espai $\mathbb{R}^3$ és el conjunt

$$\Pi = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$$

amb la condició $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

L'equació $ax + by + cz = d$ es diu *equació implícita* o *cartesiana* del pla Π. Per abús de llenguatge, també es diu que Π és el pla $ax + by + cz = d$. Si $P \in \Pi$, direm que P és un punt del pla Π.

Cada pla Π divideix l'espai en dos *semiespais* :

$$\Pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz \geq d\},$$
$$\Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz \leq d\}.$$

Proposició 8.2.1 (Equació vectorial del pla) *Sigui P un punt d'un pla Π de $\mathbb{R}^3$ d'equació $ax + by + cz = d$. Llavors existeixen vectors $u, v \in \mathbb{R}^3$, linealment independents, tals que*

$$\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3; X = P + \lambda u + \mu v; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Demostració. Observem primerament que $ax + by + cz = d$ es pot escriure com

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0 \tag{8.1}$$

on $P = (x_0, y_0, z_0)$ és qualsevol punt que compleixi l'anterior equació, és a dir

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

El pla Π és doncs el conjunt de punts $X \in \mathbb{R}^3$ tals que

$$\overrightarrow{PX} \cdot (a, b, c) = 0.$$

Es diu que (a, b, c) (i qualsevol dels seus múltiples) és el vector *normal* al pla.

Ara només hem d'observar que si $b \neq 0$[2] els vectors $u = (b, -a, 0)$ i $v = (0, c, -b)$, són ortogonals a (a, b, c) i lineament independents, de manera que tot vector ortogonal a (a, b, c) és combinació lineal de u i v. En efecte, els vectors (x, y, z) ortogonals a (a, b, c) compleixen

$$ax + by + cz = 0.$$

Resolent aquesta equació obtenim

$$y = -\frac{c}{b}z - \frac{a}{b}x$$

és a dir

$$(x, y, z) = (x, -\frac{c}{b}z - \frac{a}{b}x, z) = x(1, -\frac{a}{b}, 0) + z(0, -\frac{c}{b}, 1),$$

que ens diu que tot vector ortogonal a (a, b, c) és combinació lineal dels vectors $u = (b, -a, 0)$ i $v = (0, -c, b)$. Notem que $u \wedge v = b(a, b, c)$.

[2]Si són a o c les que son diferents de zero el raonament és similar.

Per tant,

$$\overrightarrow{PX} = \lambda u + \mu v$$

o el que és el mateix,

$$X = P + \lambda u + \mu v$$

com volíem demostrar. $\square$

Per passar de l'equació vectorial a l'equació cartesiana observem que l'expressió $\overrightarrow{PX} = \lambda u + \mu v$ diu que els vectors $\overrightarrow{PX}, u, v$ són linealment dependents i per tant el determinant format per les seves components és zero, és a dir,

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{8.2}$$

on $P = (p_1, p_2, p_3)$

Desenvolupant per la primera fila arribarem a una equació del tipus $ax + by + cz + d = 0$.

Quan expressem en coordenades l'equació vectorial $X = P + \lambda u + \mu v$ obtenim

$$\begin{aligned} x &= p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y &= p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z &= p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{aligned}$$

que es coneixen com *equacions paramètriques del pla.*

Exercici 8.2.2 *Trobeu una equació paramètrica del pla 3x+2y-z=6.*

Solució. Trobem una solució particular d'aquesta equació, posant per exemple, per simplficar càlculs, $x = y = 0$. Veiem que el punt $P = (0, 0, -6)$ és un punt del pla. El vector normal al pla és $(3, 2, -1)$ i dos vectors ortogonals a aquest i linealment independents són $u = (2, -3, 0)$, $v = (0, -1, -2)$. Les equacions paramètriques (que no són úniques ja que podem canviar P, u, v de moltes maneres) són

$$\begin{aligned} x &= 2\lambda \\ y &= -3\lambda - \mu \\ z &= -6 - 2\mu \end{aligned}$$

Exercici 8.2.3 *Trobeu l'equació cartesiana del pla que passa pel punt $P = (1, 2, -1)$ i té espai director generat pels vectors $u = (0, 1, 2)$ $v = (1, 0, 3)$.*

Solució. Només hem de desenvolupar el determinant

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

i obtenim $3x + 2y - z - 8 = 0$.

8.3 Rectes de l'espai

Definició 8.3.1 (Recta) *Sigui P un punt de $\mathbb{R}^3$ i v un vector de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$. La recta que passa per P i té direcció v és el subconjunt r de $\mathbb{R}^3$ donat per*

$$r = \{X \in \mathbb{R}^3; X = P + \lambda v; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

La igualtat $X = P + \lambda v$ rep el nom d'*equació vectorial* de la recta i si l'escrivim en coordenades amb $X = (x, y, z), P = (p_1, p_2, p_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ tenim

$$\begin{aligned} x - p_1 &= \lambda v_1 \\ y - p_2 &= \lambda v_2 \\ z - p_3 &= \lambda v_3 \end{aligned}$$

equacions que reben el nom d'*equacions paramètriques* de la recta.

Podem eliminar λ observant que les dues primeres equacions ens diuen que els vectors de $\mathbb{R}^2$ $(x - p_1, y - p_2)$ i (v_1, v_2) són linealment dependents i anàlogament $(x - p_1, z - p_3)$ i (v_1, v_3). Això es pot escriure com

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x - p_1 & z - p_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Una manera ràpida de recordar aquestes equacions és escriure l'equació de la recta com

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3},$$

expressió vàlida encara que alguna de les v_i sigui zero. Aquesta manera d'escriure les equacions de la recta rep el nom d'*equació contínua* de la recta.

Desenvolupant aquests determinants obtindríem expressions del tipus

$$\begin{aligned} v_2 x - v_1 y &= a \\ v_3 x - v_1 z &= b \end{aligned}$$

que correspon a dir que la recta donada és la intersecció d'aquests dos plans. En particular el producte vectorial dels vectors normals a aquests plans té la direcció de la recta donada, és a dir,

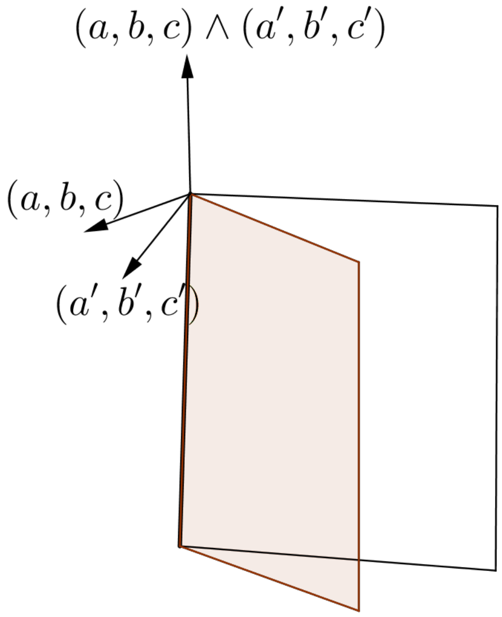
$$(v_2, -v_1, 0) \wedge (v_3, 0, -v_1) = v_1(v_1, v_2, v_3)$$

Recíprocament, la intersecció dels plans

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \end{aligned} \tag{8.3}$$

és la recta que passa per un punt $P = (p_1, p_2, p_3)$ tal que (p_1, p_2, p_3) sigui solució del sistema anterior, amb espai vectorial director

$$u = (a, b, c) \wedge (a', b', c').$$



En efecte, el teorema de Rouché-Frobenius 4.6.3 diu que la solució general del sistema (8.3) està formada pels punts de la forma $X = P + \lambda u$ amb P solució particular d'aquest sistema i u solució del sistema homogeni associat,

$$\begin{aligned} ax+by+cz &= 0 \\ a'x+b'y+c'z &= 0 \end{aligned}$$

Observem que aquestes equacions es poden escriure com

$$\begin{aligned} \langle (a,b,c),(x,y,z)\rangle = 0 \\ \langle (a',b',c'),(x,y,z)\rangle = 0 \end{aligned}$$

de manera que la solució $u=(x,y,z)$ és ortogonal a (a,b,c) i $(a',b'c')$, és a dir, té la direcció de $(a,b,c)\wedge(a',b',c')$.

Resumint, *el vector director de la recta donada com intersecció de dos plans és el producte vectorial dels vectors normals a aquests plans.*

Exercici 8.3.2 *Doneu les equacions cartesianes i paramètriques de la recta que passa per $P=(1,2,3)$ amb vector director $v=(0,3,7)$.*

Solució. La igualtat $X = P+\lambda v$ es pot escriure com

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2+3\lambda \\ z &= 3+7\lambda \end{aligned}$$

que són les equacions paramètriques de la recta. Eliminant el paràmetre λ tenim les equacions contínues de la recta (que s'hagèssin pogut escriure directament)

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{7}$$

En aquest context es permet dividir per zero, ja que aquestes equacions es manipulen fent "producte d'exrems igual a producte de mitjos" que dona lloc a

$$\begin{aligned} 3(x-1) &= 0 \\ 7(y-2) &= 3(z-3) \end{aligned}$$

és a dir,

$$\begin{aligned} x-1 &= 0 \\ 7y-3z-5 &= 0 \end{aligned}$$

Exercici 8.3.3 *Doneu les equacions paramètriques de la recta determinada per la intersecció dels plans*

$$\begin{aligned} x-y+2z &= 3 \\ 2x+3y &= 5 \end{aligned}$$

Solució. El vector director de la recta és

$$v = (1,-1,2) \wedge (2,3,0) = (-6,4,5).$$

Ara hem de trobar un punt qualsevol que sigui solució del sistema. Posem per simplificar $x = 0$. Obtenim immediatament $y = 5/3$, i per tant $z = 7/3$. Per tant, l'equació vectorial de la recta és

$$X = (0, 5/3, 7/3) + \lambda(-6,4,5)$$

i les equacions paramètriques

$$\begin{aligned} x &= -6\lambda \\ y &= 5/3 + 4\lambda \\ z &= 7/3 + 5\lambda \end{aligned}$$

8.4 Distància

La distància entre subconjunt $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ de l'espai $\mathbb{R}^3$ es defineix exactament igual que la distància entre subconjunts de $\mathbb{R}^2$, definició 7.4.1, és a dir com l'ínfim de les distàncies entre punts d'un i altre conjunt.

En el cas en que $\mathcal{A}$ és un punt P i $\mathcal{B}$ una recta o un pla aquest ínfim s'gafa, pel teorema de Pitàgores, quan la recta PX, amb $X \in \mathcal{B}$, és perpendicular a $\mathcal{B}$.

.

8.4.1 Distància d'un punt a un pla

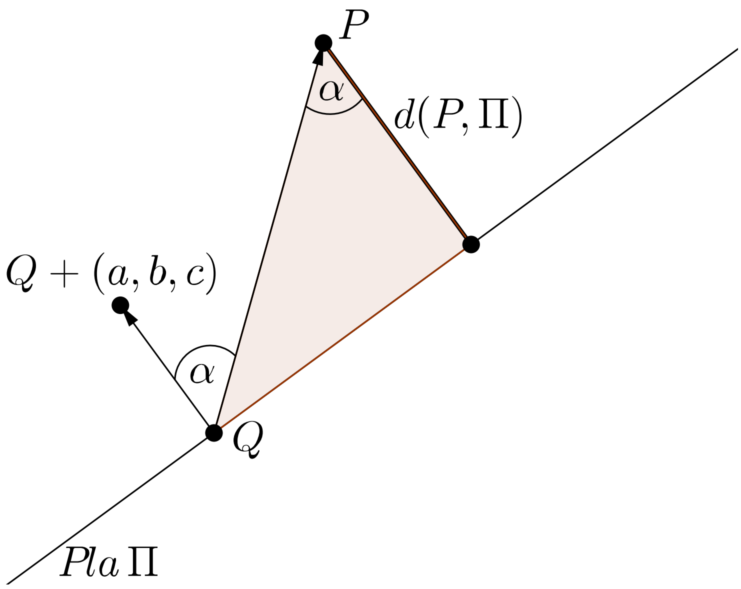
Considerem el punt $P = (p_1, p_2, p_3)$ i el pla Π d'equació $ax+by+cz+d = 0$. Prenem un punt qualsevol del pla, $Q = (q_1, q_2, q_3)$.

Com la distància entre P i Π ve donada per la longitud de la perpendicular al pla Π des de P, és clar que

$$d(P,\Pi) = |\overrightarrow{QP}| \cdot |\cos\alpha|$$

on α és l'angle entre els vectors $\overrightarrow{QP}$ i (a,b,c), és a dir, és l'angle caracteritzat per l'equació

$$\cos\alpha \quad = \quad \frac{\overrightarrow{QP} \cdot (a,b,c)}{|\overrightarrow{QP}| \cdot |(a,b,c)|}, \quad 0 \le \alpha \le \pi.$$



Per tant,

$$d(P,\Pi) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot (a,b,c)|}{|(a,b,c)|} = \frac{|a(p_1-q_1)+b(p_2-q_2)+c(p_3-q_3)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\boxed{d(P,\Pi) = \frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Per això és útil pensar que els plans estan donats de la forma

$$ax+by+cz+d=0, \quad \text{amb} \quad a^2+b^2+c^2=1$$

(només hem de dividir l'equació donada per $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, cosa que no canvia res) d'aquesta manera per calcular la distància d'un punt al pla només hem de substituir a l'equació del pla x, y, z per les coordenades del punt (i agafar el valor absolut).

Exercici 8.4.1 *Calculeu la distància del punt $P(6,0,1)$ al pla $x-y-z-2=0$.*

Soució.

$$d = \frac{|6-0-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

8.4.2 Distància d'un punt a una recta

Considerem el punt $P = (p_1, p_2, p_3)$ i la recta

$$r = \{X = Q + \lambda u\}.$$

Com la distància entre P i r ve donada per la longitud de la perpendicular a la recta r des de P, és clar (vegeu la figura de la pàgina 82) que

$$d(P, r) = |\overrightarrow{QP}| \cdot |\sin\alpha|$$

on α és l'angle entre els vectors $\overrightarrow{QP}$ i el vector director de la recta u, és a dir, és l'angle caracteritzat per l'equació

$$\cos\alpha \;=\; \frac{\overrightarrow{QP} \cdot u}{\|\overrightarrow{QP}\| \cdot |u|}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Però sabem (pàgina 94) que

$$|\overrightarrow{QP} \wedge u| = |\overrightarrow{QP}| \cdot |u| \cdot |\sin\alpha|.$$

Per tant,

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \wedge u|}{|u|}}$$

Exercici 8.4.2 *Calculeu la distància del punt $P(6, 0, 1)$ a la recta $x - y - z - 2 = 0, x + z = 0$.*

El vector director de la recta és

$$u = (1, -1, -1) \wedge (1, 0, 1) = (-1, -2, 1).$$

Resolent el sistema obtenim un punt de la recta, per exemple, $Q = (1, 0, -1)$, de manera que

$$d(P, r) = \frac{|(5, 0, 2) \wedge (-1, -2, 1)|}{\sqrt{6}} = \frac{|(4, -7, -10)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{165}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{55}{2}}$$

8.4.3 Distància d'un punt a una recta en el pla

Si ens donen una recta i un punt del pla $\mathbb{R}^2$ podem calcular la seva distància simplement pensant que estem en el pla $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$. Obtindrem els mateixos resultats, però mes còmodament, que a la secció 7.4.

Així la distància entre el punt $P = (p_1, p_2)$ i la recta que passa pel punt $Q = (q_1, q_2)$ amb vector director $u = (u_1, u_2)$ és la distància entre el punt $P = (p_1, p_2, 0)$ i la recta que passa pel punt $Q = (q_1, q_2, 0)$ amb vector director $u = (u_1, u_2, 0)$.

Llavors

$$\overrightarrow{QP} \wedge u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, ((q_1 - p_1)u_2 - (q_2 - p_2)u_1)).$$

Per tant

$$|\overrightarrow{QP} \wedge u| = \begin{vmatrix} q_1 - p_1 & q_2 - p_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}$$

Evidentment ens referim al valor absolut d'aquest determinant, que no posem per no recarregar la notació.

Per tant,

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\begin{vmatrix} q_1 - p_1 & q_2 - p_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}}{|u|}}$$

Si la recta la tenim en la forma $r : Ax+By+C$, el vector director és $u = (-B, A)$ i com $Aq_1 + Bq_2 + C = 0$ l'anterior fórmula esdevé (compareu amb (7.2))

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}.$$

Exercici 8.4.3 *Calculeu la distància del punt $P = (3,4)$ a la recta r que passa pel punt $Q = (1,1)$ i té vector director $v = (1,5)$.*

Solució. La recta és de la forma $Ax + By + C = 0$ amb $(A, B) = (5, -1)$. És a dir, $5x - y + C = 0$. Com ha de passar per Q $5 \cdot 1 - 1 + C = 0$. Per tant la recta és $5x - y - 4 = 0$. Així,

$$d = \frac{|5 \cdot 3 - 4 - 4|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{26}.}$$

També directament amb la fórmula del valor absolut del determinant,

$$d = \frac{\begin{vmatrix} 1-3 & 1-4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\sqrt{26}} = \frac{7}{\sqrt{26}}.$$

8.4.4 Distància d'una recta a un pla

Una recta r i un pla Π de $\mathbb{R}^3$, si no es tallen, són paral·lels. En aquest cas, prenem un punt Q qualsevol de la recta, $Q \in r$, i tenim

$$\boxed{d(r,\Pi) = d(Q,\Pi)}$$

8.4.5 Distància entre dos plans

Dos plans Π_1, Π_2 de $\mathbb{R}^3$, si no es tallen, són paral·lels. En aquest cas, prenem un punt Q qualsevol de Π_1, $Q \in \Pi_1$, i tenim

$$\boxed{d(\Pi_1,\Pi_2) = d(Q,\Pi_2)}$$

8.4.6 Distància entre dues rectes

Siguin r i s dues rectes de $\mathbb{R}^3$. Si r i s són paral·leles, llavors $d(r,s) = d(P,s)$, on P és qualsevol punt de la recta r. I ja sabem calcular la distancia d'un punt a una recta.

Si r i s no són paral·leles, llavors

$$r = \{P + \lambda u; \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ i } s = \{Q + \mu v; \lambda \in \mathbb{R}\},$$

amb u, v linealment independents. Sigui Π el pla

$$\Pi = \{Q + \lambda u + \mu v\}$$

Llavors

$$\boxed{d(r,s) = d(r,\Pi) = d(P,\Pi)}$$

i aquestes dues darreres distàncies ja les sabem calcular.

Exercici 8.4.4 *Calculeu la distància entre les rectes*

$$\begin{aligned} r &: (0,2,3) + \lambda(1,2,3) \\ s &: (8,0,1) + \mu(2,0,5) \end{aligned}$$

Solució. Considerem el pla Π

$$(8,0,1) + \lambda(1,2,3) + \mu(2,0,5)$$

El vector normal és $(1,2,3) \wedge (2,0,5) = (10,1,-4)$ per tant

$$\Pi : 10(x-8) + (y-0) + (-4)(z-1) = 0$$

és a dir

$$10x + y - z - 76 = 0.$$

Per tant,

$$d(r,s) = d((0,2,3),\Pi) = \frac{|10 \cdot 0 + 2 - 3 - 76|}{\sqrt{10^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{77}{\sqrt{12}}.$$

8.5 Moviments de l'espai

Un moviment de l'espai $\mathbb{R}^3$ és una aplicació $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que conserva les distàncies.

Es caracteritzen essencialment per si tenen o no punts, rectes o plans fixos o invariants.

Donem a continuació, sense demostració, la llista de tots els moviments possibles.

1. **Moviment helicoïdal**. Consisteix en girar al voltant d'una recta i traslladar-se després en la direcció d'aquesta recta. Si agafem aquesta recta com eix de les x les equacions són

$$\begin{aligned} x' &= x + d, \quad d > 0 \\ y' &= y\cos(\alpha) - z\sin(\alpha) \\ z' &= y\sin(\alpha) + z\cos(\alpha), \quad \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

Cap punt fix. Una recta invariant.

Si $d = 0$ i $\alpha \neq 0$ es diu que tenim un **Gir**. Una recta fixa.

Si $\alpha = \pi$ tenim una **simetria axial**.

Si $\alpha = 0$ tenim una **translació**. Cap punt fix.

Observem que aquests moviments també es poden escriure com

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. **Antirotacions.** Consisteixen en girar i fer simetria respecte el pla perpendicular a l'eix de gir.

   Si agafem aquesta recta com eix de les x les equacions són

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y\cos(\alpha) - z\sin(\alpha) \\ z' &= y\sin(\alpha) + z\cos(\alpha), \quad \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

   Una recta invariant.

3. **Lliscament** . Consisteix en fer una simetria respecte un pla i a continuació una translació en una direcció paral·lela a aquest pla.

   Si fem la simetria respecte el pla $z = 0$ i agafem l'eix de les x en la direcció de la translació les equacions són

$$\begin{aligned} x' &= x + d \\ y' &= y \\ z' &= -z \end{aligned}$$

   Infinites rectes invariants.

   Si $d = 0$ es parla simplement de **simetria especular**.

Exercici 8.5.1 *Considerem l'aplicació de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ donada per*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-7\sqrt{2} & 6-(5/2)\sqrt{2} & 9-13\sqrt{2} \\ 2-4\sqrt{2} & 4-\sqrt{2} & 6-7\sqrt{2} \\ -2+5\sqrt{2} & -4+(3/2)\sqrt{2} & -6+9\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Això vol dir que tenim una aplicació $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que porta el punt de coordenades (x, y, z) al punt de coordenades (x', y', z') donades per l'anterior equació.

Argumenteu sense fer cap càlcul que aquest moviment és un gir al voltant d'un eix.

Trobeu, usant Wolfram Alpha o similar, l'eix de gir.

Solució. El polinomi característic té l'arrel real $x = 1$ i dues complexes. Només heu d'escriure, si useu Wolfram Alpha,

$$\text{solve } \det(A - x\, Id) = 0$$

on A és la matriu donada. Ja hem comentat a la pàgina 24 com s'introdueixen les matrius amb Wolfram Alpha.

El vector propi de valor propi 1 és $(3, 2, -1)$ (i, com sempre, els seus múltiples). Només heu d'escriure

$$\text{solve}(2-7\sqrt{2})x+(6-5\sqrt{2}/2)y+(9-13\sqrt{2})z = 0, (2-4\sqrt{2})x+(3-\sqrt{2})y+(6-7\sqrt{2})z = 0.$$

Aquesta és doncs la direcció de l'eix de gir. □

Exercici 8.5.2 *Trobeu les equacions del transformat del pla* $\Pi : 3x + 5y - z = 4$ *pel moviment*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solució. Escrivim el pla com

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4$$

i el moviment com

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

on A és l'anterior matriu. Simplement substituint tenim

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 4.$$

Calculant la inversa tenim

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 4,$$

és a dir, $3x' + 3\sqrt{2}y' + 2\sqrt{2}z' = 4$.

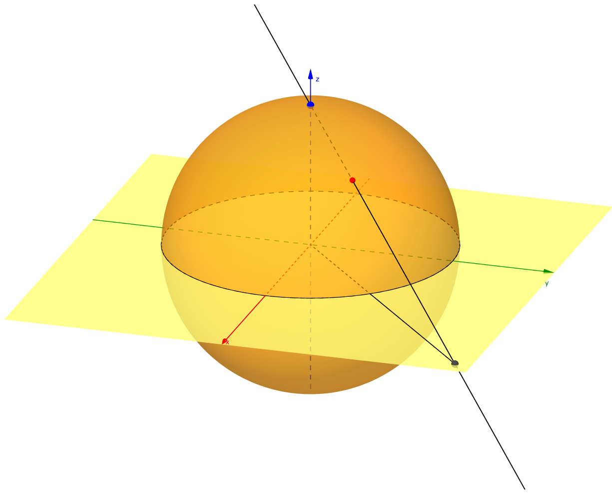
Per tant, el transformat del pla Π és el pla

$$\Pi' : 3x + 3\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}z = 4.$$

8.6 Projecció estereogràfica

A Cristal·lografia utilitzareu molt la projecció estereogràfica.

Considerem l'aplicació $F : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de l'esfera unitat de centre l'origen de $\mathbb{R}^3$, que denotem S^2, sobre el pla $\mathbb{R}^2$, pensat com el pla $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$, donada per $F(p) = q \in S^2$, on q és el punt d'intersecció amb el pla $z = 0$ de la recta que passa per p i el *pol nord* $(0, 0, 1)$ *de l'esfera unitat* tal i com es representa en l'esquema següent



És clar que F és una bijecció entre el pla $z = 0$ i S^2 menys el pol nord. Bijecció vol dir que a cada punt de S^2, excepte el pol nord, li correspon un i només un punt del pla $\mathbb{R}^2$ i recíprocament.

Anem a calcular l'expressió de F. Considerem, doncs, un punt qualsevol $p = (x, y, z)$ de l'esfera unitat, diferent del $(0, 0, 1)$. En particular $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

La recta que passa per aquest punt i el pol nord de l'esfera $(0, 0, 1)$ es pot parametritzar com

$$(0, 0, 1) + \lambda\,(x, y, z - 1)$$

i el punt on aquesta recta talla el pla $z = 0$ correspon al valor de λ tal que $1 + \lambda(z - 1) = 0$, és a dir, $\lambda = \frac{1}{1-z}$. Podem dividir per $1 - z$ justament perquè hem exclòs el pol nord.

Per tant,

$$F(x, y, z) = (\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}, 0).$$

Si volem passar del pla a l'esfera, en lloc de l'esfera al pla com acabem de fer, podem procedir així.

Prenem un punt $(u, v, 0)$ del pla $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$. Unim aquest punt amb el pol nord. L'equació d'aquesta recta és

$$(0, 0, 1) + \lambda(u, v, -1) = (\lambda u, \lambda v, 1 - \lambda)$$

Per imposar que aquesta recta talli a l'esfera unitat escrivim

$$(\lambda\, u)^2 + (\lambda\, v)^2 + (1 - \lambda)^2 = 1,$$

que equival a

$$\lambda^2\,(u^2+v^2+1) - 2\,\lambda = 0\,.$$

Si es descarta la solució $\lambda = 0$ que correspon al pol nord ha de ser $\lambda = \dfrac{2}{u^2+v^2+1}$.

Per tant, el punt que estem buscant és

$$F^{-1}(u,v) = \left(\frac{2\,u}{u^2+v^2+1}, \frac{2\,v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$$

(Noteu que F^{-1} està definida en tot el pla i que quan (u,v) va cap ∞ és quan els seus valors tendeixen al pol nord $(0,0,1)$.

8.7 Poliedres regulars

Un poliedre regular és una figura geomètrica formada per polígons regulars plans, tots iguals, units per les arestes (cada aresta comú a dos polígons) i tal que en cada vèrtex concorren el mateix nombre d'arestes.

Només hi ha 5 poliedres regulars i tots apareixen a la natura, com la pirita de la portada d'aquests apunts.

Per veure que només hi ha cinc poliedres regulars només hem de saber la fórmula coneguda com *característica d'Euler*. Aquesta fórmula diu que en tot poliedre (que es pugui deformar amb continuïtat a una esfera) es compleix que

$$c + v - a = 2,$$

on a = número de cares, v = número de vèrtexs, c = número de cares.

Si el polígons regulars que formen el poliedre tenen m costats i en cada vèrtex del poliedre concorren n arestes tenim que

$$\begin{aligned} m\cdot c &= 2a, \\ n\cdot v &= 2a. \end{aligned}$$

Aquestes igualtats es dedueixen trivialment pensant que cada aresta és comú a dues cares i cada aresta té dos vèrtexs. Així els productes de l'esquerra conten el númeo¡ro total d'arestes dues vegades.

Substituint aquest valors a la característica d'Euler obtenim

$$\frac{2a}{m} + \frac{2a}{n} = a + 2,$$

o, equivalentment,

$$\left(\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1\right)a = 2$$

Com $n \geq 3$, per tal de que el parèntesi sigui positiu ha de ser $m < 6$.

Mirem quins valors poden prendre m i n.

m	n	a	v	c	
3	3	6	4	4	tetraedre
3	4	12	6	8	octaedre
3	5	20	12	20	icosaedre
4	3	12	8	6	cub
5	3	30	20	12	dodecaedre

Sòlids arquimedians

Els sòlids Arquimedians són poliedres formats per polígons regulars (possiblement diferents entre ells) tals que tots els vèrtexs són iguals. Això vol dir que si en un vèrtex hi concorren els polígons $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$, en aquest ordre, llavors a tots els vèrtexs hi concorren els mateixos polígons en el mateix ordre o en ordre oposat.

Només observar que en aquest cas conèixer el nombre de cares, vèrtexs i arestes no classifica. Per exemple, el dodecaedre truncat i l'icosaedre truncat tenen $c = 32, v = 60, a = 90$ i no són iguals. Feu una ullada a wikipedia `https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_solid`

Els dos poliedres no isomètrics que coincideixen en (V,C,A) són:

- rombicuboctàedre (també anomenat petit rombicuboctàedre)

- pseudorombicuboctàedre (també anomenat Sòlid de Sommerville o Sòlid de Miller)