Matemàtiques a Geologia / Càlcul

Agustí Reventós

2021-22

Índex

Capítol 1

Programa de l'assignatura

Donem una distribució aproximada de les 15 hores de teoria del mòdul de Càlcul.

1. Funcions reals de variable real.
2. Composició de funcions.
3. Funció exponencial. Funcions trigonomètriques.
4. Límit d'una funció en un punt.
5. Funcions contínues. Teorema de Bolzano.
6. **Derivació**. Definició i primeres propietats.
7. Regla de la cadena i teorema de la funció inversa.
8. Màxims i mínims. Teorema del valor mitjà.
9. Aplicacions del mètode de càlcul de màxims i mínims.
10. **Integració**. Primitives d'algunes funcions. Mètode del canvi de variable.
11. Altres mètodes per calcular primitives.
12. Sumes de Riemann. Fórmula del Trapezi.
13. Teorema fonamental del càlcul. Principi de Cavalieri.
14. Àrees i volums de superfícies de revolució.
15. Longitud de corbes.

Capítol 2

Funcions reals de variable real

2.1 Primeres definicions

Quan[1] donat un nombre real tenim una manera determinada (o llei) d'obtenir-ne un altre, únic, diem que tenim una aplicació o funció de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. També es diu que tenim una funció real de variable real.

Per exemple, si a cada $x \in \mathbb{R}$ li associem $x^2 \in \mathbb{R}$ tenim una manera determinada, elevar al quadrat, de passar d'un nombre real a un altre.

En aquest cas escriurem

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

o bé simplement $y = f(x) = x^2$, i direm que tenim una funció de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que associa a cada nombre real x el nombre real x^2.

En general, les funcions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definides per

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, n$$

es diuen *funcions polinòmiques*.

Per exemple $y = 3x$, $y = 4$, $y = x^6 - 3x$ són funcions polinòmiques.

Altres funcions serien, $y = \sin(x), y = \tan(x), y = \frac{1}{1+x^2}$, etc. En canvi, hem d'anar en compte en escriure coses com ara $y = \sqrt{x}$ ja que aquesta expressió només té sentit si $x \geq 0$, i a més, encara que $x \geq 0$, l'arrel quadrada admet sempre dues solucions, i no sabríem quina agafar.

També hem d'anar en compte en escriure $y = f(x) = 1/x$, ja que això només té sentit si $x \neq 0$, o $y = f(x) = \ln(x)$ ja que això només té sentit si $x > 0$.

Quan la llei donada (logaritme, invers, arrel quadrada, etc.) no està definida per a tot $x \in \mathbb{R}$ però sí que té sentit per a un cert subconjunt $A \subset \mathbb{R}$ diem que tenim una funció de A a $\mathbb{R}$ i escrivim $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o simplement $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Resumint

[1] Notes basades en els apunts de Ferran Cedó.

Definició 2.1 *Sigui $A \subseteq \mathbb{R}$. Una funció $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ és una llei que associa a cada element $x \in A$ un únic element $y = f(x)$ de $\mathbb{R}$.*

Es diu que A és el domini *de la funció i que el conjunt*

$$Im(f) = \{f(a); a \in A\}$$

és la imatge *de la funció.*

Per exemple, el domini de $f(x) = 1/x$ és $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (tots els nombres reals excepte el 0) ja que podem dividir per qualsevol nombre real excepte el 0, i la imatge és també $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja que donat $y \in A$ existeix $x \in A$ (concretament $x = 1/y$) tal que $y = f(x)$ i per tant $y \in \text{Im}(f)$; i recíprocament tot element de $\text{Im}(f)$ és de A.

Si $f(x) = 3$, el domini és $\mathbb{R}$ i la imatge és $\{3\}$.

El domini de[2] $f(x) = \ln(x)$ és $A = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ ja que la funció logaritme està definida només per als nombres reals estrictament positius, i la imatge de $f(x) = \ln(x)$ és $\mathbb{R}$ ja que tot nombre real y és el logaritme d'algun altra número real x, només cal agafar $x = e^y$ ja que $y = ln(e^y)$.

Exercici 1 *Determineu el domini de definició de la funció $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$*

Solució. L'expressió $x^2 - 5x + 6$ que apareix sota el signe radical a de ser positiva o zero. Posem $x^2 - 5x + 6 = 0$ i veiem que les arrels són $x = 2$ i $x = 3$. De fet tenim la descomposició del polinomi com

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Aquest producte és positiu o bé quan els dos factors són positius (és a dir, $x \geq 3$) o bé quan els dos factors són negatius (és a dir, $x \leq 2$).

Per tant el domini de definició de la funció $f(x)$ és el conjunt[3]

$$A = (-\infty, 2] \cup [3, \infty].$$

Definició 2.2 (Gràfica) *Sigui $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció real de variable real. La* gràfica *de f és el subconjunt de $\mathbb{R}^2$*

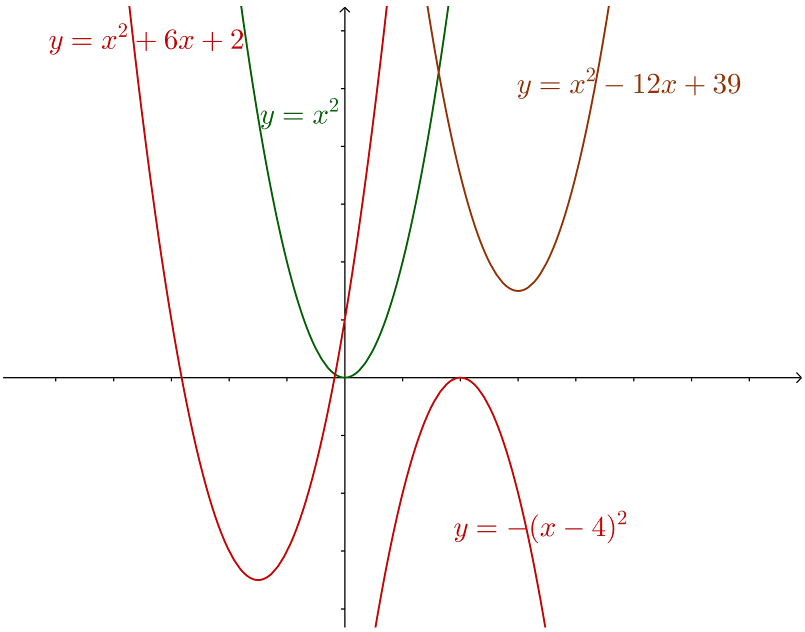
$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in A\}.$$

[2] A la pàgina 18 recordem la definició de logaritme.

[3] Recordem que

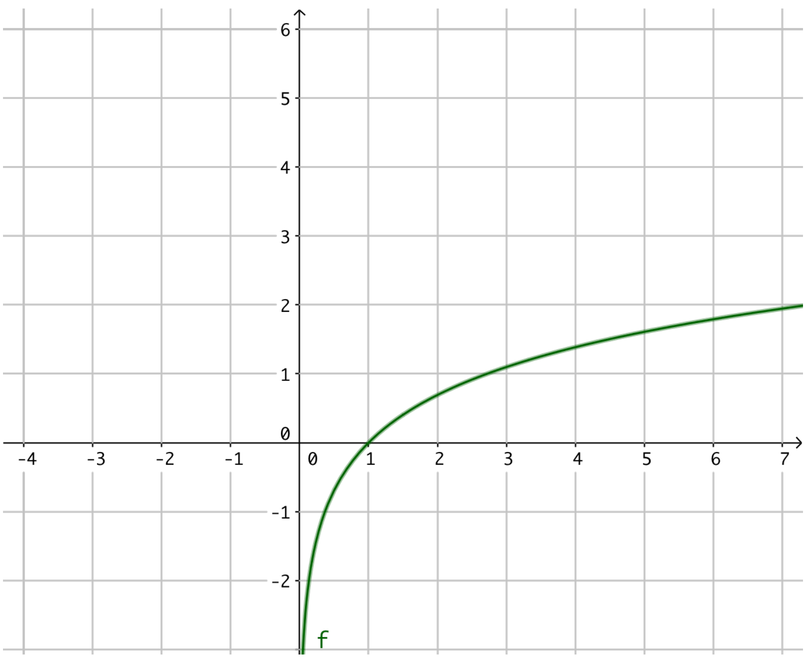
$$\begin{aligned}
x \in (a, b) &\iff a < x < b \\
x \in (a, b] &\iff a < x \leq b \\
x \in [a, b) &\iff a \leq x < b \\
x \in [a, b] &\iff a \leq x \leq b \\
x \in (-\infty, b] &\iff x \leq b \\
x \in (a, \infty) &\iff x > a
\end{aligned}$$

Per exemple, la gràfica de la funció $f(x) = 3x + 1$ és el conjunt de punts del pla de la forma $(x, 3x + 1)$, o equivalentment la recta $y = 3x + 1$ (recta que passa per $(0, 1)$ amb pendent 3). La gràfica de les funcions polinòmiques de grau 2 són paràboles d'eix paral·lel a l'eix de les $y's$.



Gràfica de diverses paràboles

La següent figura representa la gràfica de la funció logaritme.



Gràfica de la funció $y = ln(x)$

Exercici 2 *Trobeu el domini, la imatge i la gràfica de la funció $f(x) = +\sqrt{1 - x^2}$.*

Solució. Observem que hem posat el digne $+$ davant l'arrel quadrada per evitar el problema del signe i que, així, $f(x)$ sigui una vertadera funció

Per altra banda, perquè tingui sentit escriure l'arrel quadrada, ha de ser

$$1 - x^2 \geq 0,$$

que equival a $-1 \leq x \leq 1$, és a dir, el domini de f és l'interval $[-1, 1]$.

Per estudiar la imatge observem que sempre

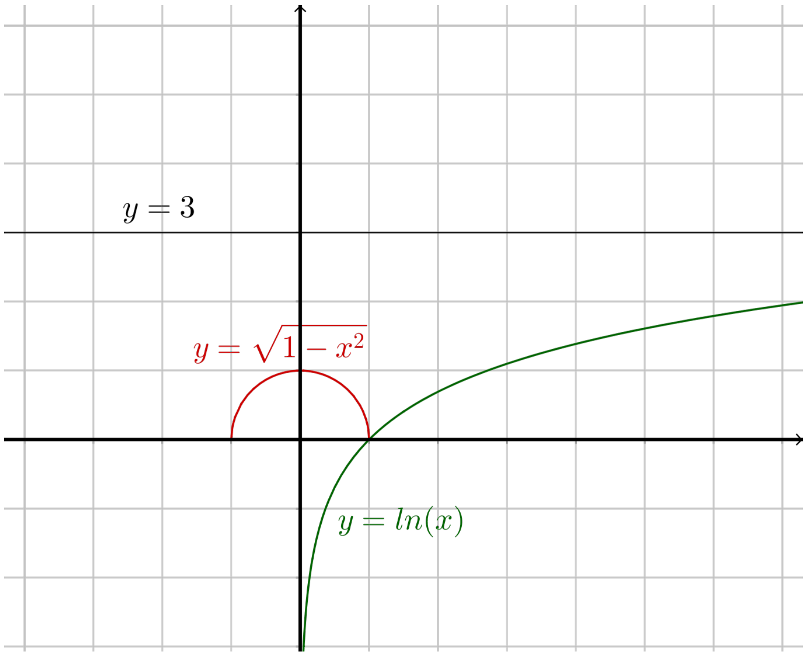
$$0 \leq +\sqrt{1 - x^2} \leq 1,$$

de manera que el recorregut està contingut a l'interval $[0, 1]$. Però és que també tenim que qualsevol $y \in [0, 1]$ és de la forma $y = +\sqrt{1 - x^2}$ per a algun $x \in [-1, 1]$ (només hem d'agafar $x = +\sqrt{1 - y^2}$). Per tant, el domini de f és tot l'interval $[0, 1]$.

La gràfica és el conjunt

$$G(f) = \{(x, \sqrt{1 - x^2}); x \in [-1, 1]\}.$$

Si posem $y = +\sqrt{1 - x^2}$ veiem que $x^2 + y^2 = 1$, de manera que la gràfica és un semicercle de radi 1 i centre l'origen.



Gràfica de les funcions $y = 3, y = \sqrt{1 - x^2}, y = ln(x)$.

Exercici 3 *Trobeu el domini, la imatge i la gràfica de la funció* $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

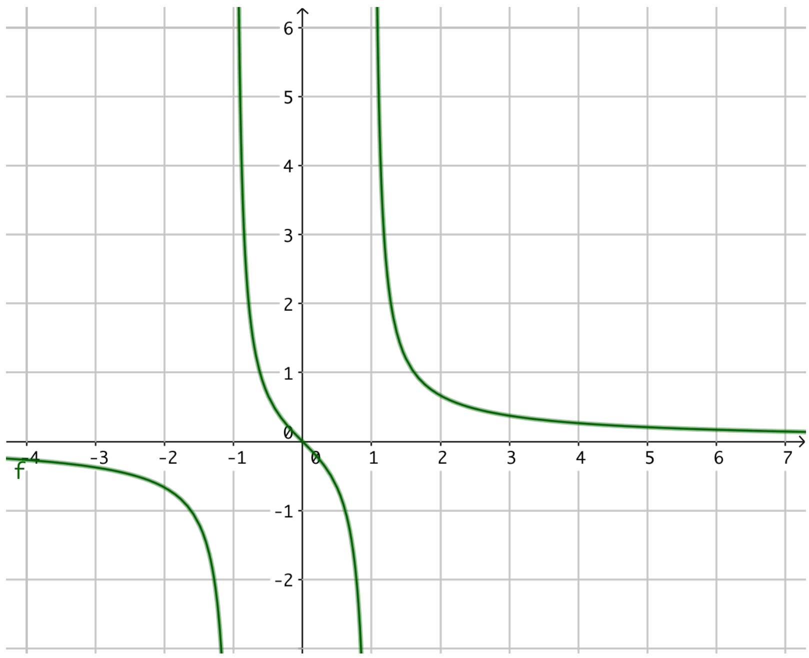
Solució. Per que l'expressió $\frac{x}{x^2-1}$ tingui sentit ha de ser $x \neq \pm 1$ de manera que el domini de la funció $y = f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ és $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Mirant la gràfica és veu que tota recta horitzontal talla la gràfica en dos punts (excepte la recta $y = 0$ que talla només en un). Això vol dir que donat $y \neq 0$ (el pensem com el punt$(0, y)$ de la gràfica) existeixen dos valors de x tals que $f(x) = y$.

De fet els podem trobar fàcilment resolent l'equació de segon grau $y = \frac{x}{x^2-1}$, és a dir $yx^2 - x - y = 0$ que dóna

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y^2}}{2y}.$$

Si $y = 0$ prenem $x = 0$ i $f(0) = 0$. Resumint la imatge de f és $\mathbb{R}$.



Gràfica de la funció $y = \frac{x}{x^2-1}$.

2.2 Operacions amb funcions

Les operacions de $\mathbb{R}$, suma, producte, divisions, etc. es traslladen de manera natural a les funcions. Per exemple, si $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definim

$$\begin{aligned} f+g : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} &\qquad \text{per } (f+g)(x) = f(x) + g(x), \\ f \cdot g : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} &\qquad \text{per } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \\ f/g : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} &\qquad \text{per } (f/g)(x) = f(x)/g(x) \text{ (només té sentit si } g(x) \neq 0). \end{aligned}$$

Si f i g estiguessin definides en dominis diferents A i B respectivament, les operacions anteriors també es defineixen, en el benentès que el domini de definició de $f+g, f \cdot g, f/g$ és $A \cap B$. En el cas de que $A \cap B = \emptyset$ aquestes operacions no tindrien sentit.

En el cas particular en que les funcions $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ compleixin que la imatge de g estigui continguda en el domini de f (és a dir, $g(B) \subseteq A$) podem definir la *composició*

$$f \circ g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

per la fórmula

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Per exemple, si $f(x) = x^2$ i $g(x) = 3x + 1$, (en aquest cas $A = B = \mathbb{R}$) tenim

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = (3x+1)^2 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

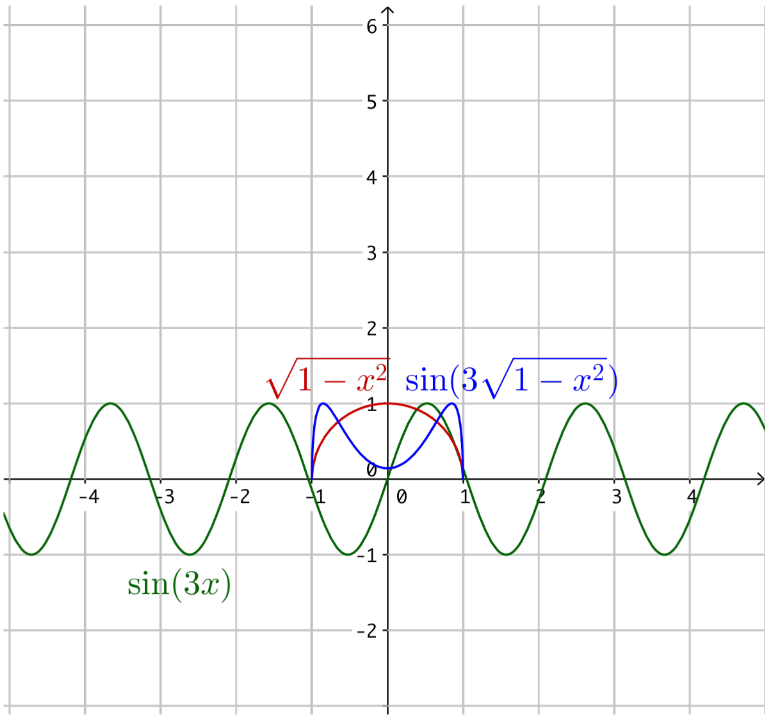
Observem doncs, de passada, que la composició de funcions no és una operació commutativa.

Exercici 4 *Trobeu $f \circ g$ quan $f(x) = \sin(3x)$ i $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.*

Solució. Per poder fer la composició $f \circ g$ cal que $\operatorname{Imatge} g \subseteq \operatorname{Domini} f$ però això passa sempre ja que $\operatorname{Domini} f = \mathbb{R}$. Llavors

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{1-x^2}) = \sin(3\sqrt{1-x^2}).$$

Observem que el domini de $f \circ g$ coincideix, en aquest cas, amb el domini de g que és l'interval $[-1, 1]$.



Estudieu $g \circ f$. □

Inversa d'una funció

Definició 2.3 *Sigui $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diem que f és* injectiva *quan elements diferents de A tenen imatges diferents per f. És a dir,*

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y, \quad \forall x, y \in A.$$

Per exemple, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per $f(x) = 3x + 1$ és injectiva. En efecte, si $f(x) = f(y)$ tenim $3x + 1 = 3y + 1$ i per tant $x = y$.

En canvi l'aplicació $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ donada per $f(x)=x^2$ no ho és, ja que hi ha elements diferents de $\mathbb{R}$, per exemple $x=1$ i $x=-1$ que tenen la mateixa imatge. Si restringim el domini d'aquesta darrera aplicació sí que podem tenir una aplicació injectiva, concretament $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ donada per $f(x)=x^2$ és injectiva, ja que si $x^2=y^2$ i tant x com y són positius ha de ser $x=y$.

Quan $f:A\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ és injectiva podem definir sobre el conjunt $B=Im(f)$, una aplicació $f^{-1}:B\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow A$ anomenada aplicació *inversa* de f de la manera següent.

Definició 2.4 *Sigui $f:A\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ injectiva i sigui $B=Im(f)$. L'aplicació inversa de f és l'aplicació*

$$f^{-1}:B\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow A$$

donada per la condició

$$f^{-1}(b)=a\Longleftrightarrow b=f(a),\quad \forall b\in B.$$

Gràcies a la injectivitat, donat b hi ha un únic $a\in\mathbb{R}$ tal que $f(a)=b$, és a dir, a està unívocament determinat i la definició que acabem de donar de f^{-1} és correcta.

Observem que per a tot $x\in A$ es compleix $(f^{-1}\circ f)(x)=x$, és a dir, $f^{-1}\circ f$ és l'aplicació identitat[4] de A. També es compleix que per a tot $y\in B$, $(f\circ f^{-1})(y)=y$, és a dir, $f\circ f^{-1}$ és l'aplicació identitat de B.

Posarem

$$f\circ f^{-1}=id_B,\qquad f^{-1}\circ f=id_A.$$

Les gràfiques de $y=f(x)$ i $y=f^{-1}(x)$ són, allà on estan definides, *simètriques* respecte de la diagonal del primer quadrant.

En efecte, els punts de la gràfica de $y=f(x)$ són de la forma $(x,f(x))$ i els de la gràfica de $y=f^{-1}(x)$ són de la forma $(f(x),x)$. Això vol dir que la recta que determinen té vector director $(1,-1)$ ja que $(f(x)-x,x-f(x))=(f(x)-x)(1,-1)$ i el vector $(1,-1)$ és perpendicular al vector director de la bisectriu del primer quadrant que és $(1,1)$. Recordeu que aquesta recta té equació $y=x$ que vol dir que els seus punts són de la forma (x,x), i.e. tenen les dues coordenades iguals. A més, el punt mitjà pertany a aquesta bisectriu ja que[5]

$$(\frac{x+f(x)}{2},\frac{f(x)+x}{2}).$$

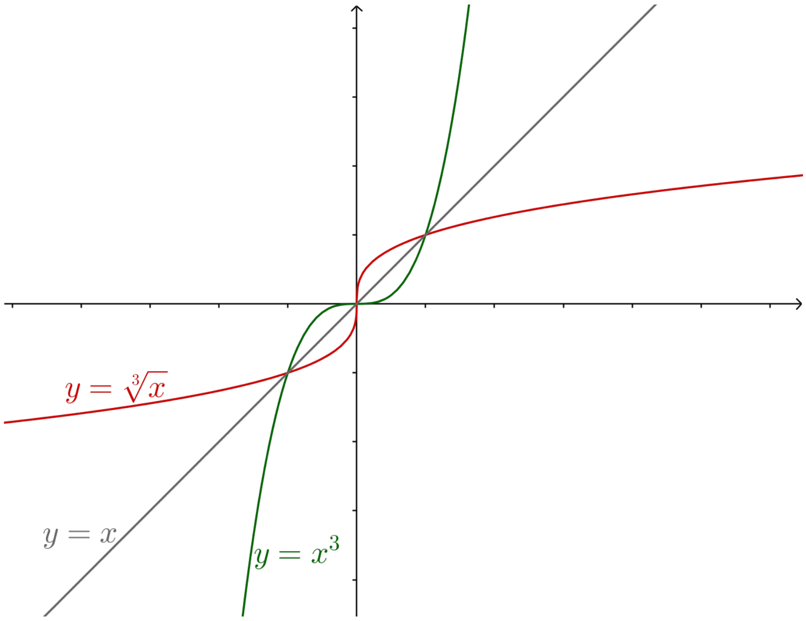
Exemple 2.2.1 *Clarament les funcions $y=x^3$ i $y=\sqrt[3]{x}$ són inverses una de l'altra. Les seves gràfiques són*

[4] L'aplicació identitat de A és l'aplicació $id_A:A\longrightarrow A$ donada per $id_A(x)=x$ per a tot $x\in A$.

[5] Comproveu que donats els punts $A=(a,b)$, $B=(c,d)$ el punt $C=(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2})$ pertany a la recta AB i $d(A,C)=d(C,B)$, és a dir, C és el punt mitjà entre A i B. De manera anàloga es defineix el *baricentre* de tres punts no alineats $A=(a_1,a_2),B=(b_1,b_2),C=(c_1,c_2)$ com el punt

$$G=(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3})$$

Comproveu que les rectes que uneixen un vèrtex d'un triangle amb el punt mitjà del costat oposat es tallen en el baricentre (centre de gravetat).



Elevar al cub i treure arrel cúbica

A la pràctica, per trobar la funció inversa de $y = f(x)$ només hem d'aïllar x en funció de y i canviar llavors les $x's$ per les $y's$ i les $y's$ per les $x's$. Veiem alguns exemples.

Exercici 5 *Trobeu la funció inversa de la funció* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *donada per* $f(x) = 3x + 1$.

Solució. Posem $y = 3x + 1$ i aïllem x. Trobem

$$x = \frac{y-1}{3}.$$

Permutant els papers de $x's$ i $y's$ tenim

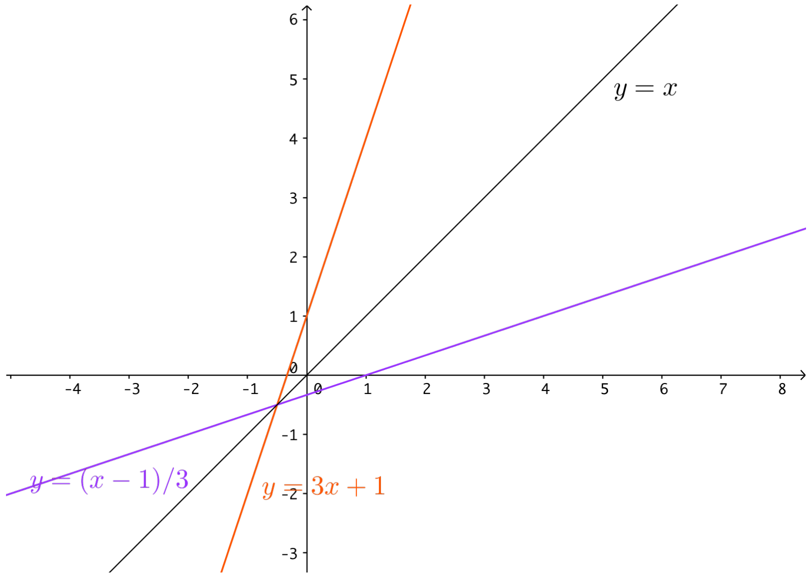
$$y = \frac{x-1}{3}.$$

Això vol dir que $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$.
Comprovem que la composta és la identitat.

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(\frac{x-1}{3}) = 3(\frac{x-1}{3}) + 1 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(3x+1) = (\frac{3x+1-1}{3}) = x$$

Les gràfiques són simètriques respecte la recta $y = x$.



Gràfiques simètriques

Exercici 6 *Trobeu la inversa de la funció* $y = f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$.

Solució. Aïllem x en funció de y. Tenim

$$yx^3 + y - 1 = 0$$

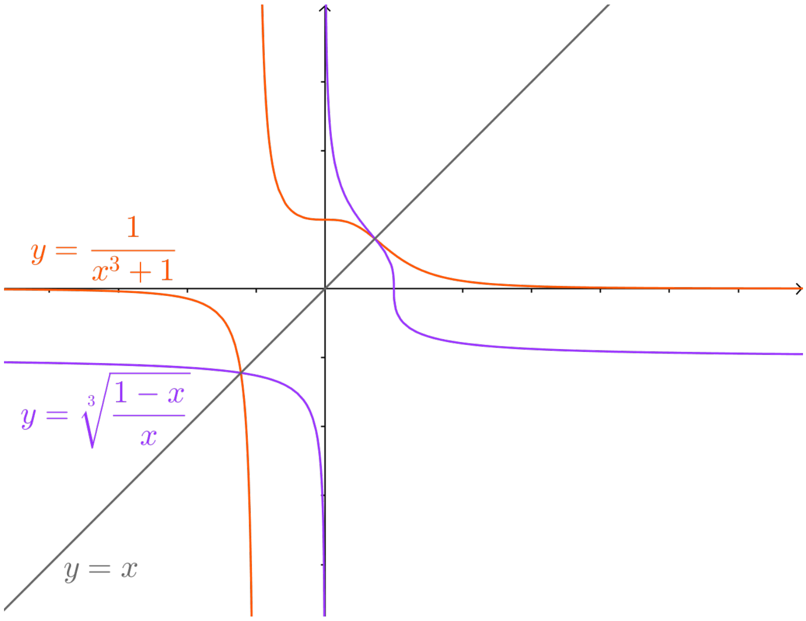
d'on

$$x = \sqrt[3]{\frac{1-y}{y}}$$

Ara canviem x per y i obtenim que la fnció inversa de la funció dnada és

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$$

que, com es veu, només està definida a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, cosa que era d'esperar ja que la imatge de f és justament $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. El domini de $f(x)$ (que coincideix amb la imatge de $f^{-1}(x)$) és $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ i el domini de $f^{-1}(x)$ (que coincideix amb la imatge de $f(x)$) és $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Gràfiques simètriques

La funció exponencial

Ja hem comentat, quan parlàvem a l'inici de curs de nombres reals, que per tot nombre real $a > 0$ té sentit calcular a^x amb $x \in \mathbb{R}$.

Per tant, té sentit considerar la funció *exponencial* de base $a > 0$ com la funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$f(x) = a^x.$$

La funció logaritme

Si $a \neq 1$, aplicació exponencial $f(x) = a^x$ és bijectiva quan es considera com aplicació de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$ (nombres reals estrictament positius).[6]

Que a^x és injectiva sobre els naturals és evident ja que si $a^m = a^n$ amb $m > n$, tindríem (dividint per a^n) $a^{m-n} = 1$ que implica $m = n$. De manera similar es raona sobre els racionals i s'ha de passar al límit per exponents reals. Ometem els detalls que ens portarien a la definició de nombres reals per intervals encaixats que hem comentat només de passada en el capítol de nombres reals.

Per tant té inversa que s'anomena funció *logaritme* de base a, definida a $\mathbb{R}^+$, i es denota per

$$f^{-1}(x) = \log_a(x).$$

També podem escriure

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Per ser inversa de la funcio exponencial tenim que

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a(a^x) = x.$$

[6] $f : A \longrightarrow B$ és bijectiva quan és injectiva i $f(A) = B$. En aquest cas existeix la funció inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$.

La primera igualtat serveix com definició de $\log_a x$: *el logaritme en base a de x és el número al que s'ha d'elevar a per que dóni x.*

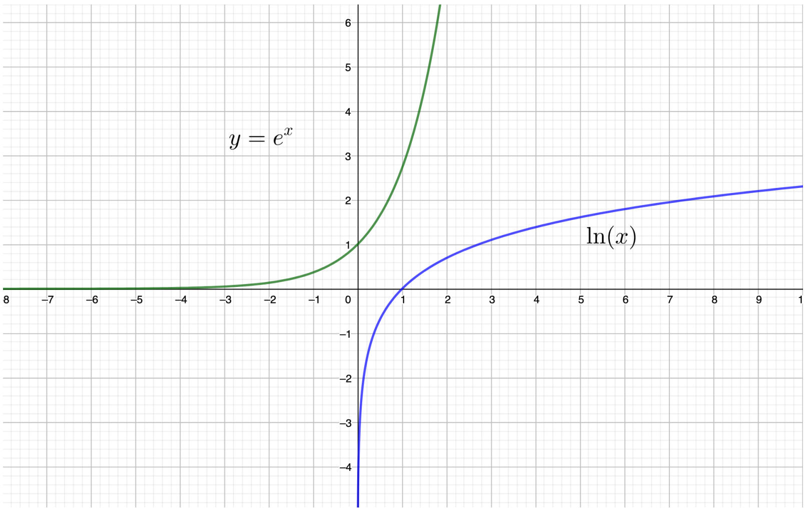
Quan $a = e$, no escrivim $\log_e$ sinó simplement ln i parlem del *logaritme neperià*. Recordem que el número $e = 2,718281\cdots$ és una de les constants més importants en matemàtiques, i es pot caracteritzar de diverses maneres.

Per exemple

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n.$$

Tindrem doncs

$$e^{\ln(x)} = x, \quad \ln(e^x) = x.$$



Exercici 7 *Demostreu que*

$$\ln(a^b) = b\ln(a).$$

Solució. L'exponencial amb base e del primer membre és

$$e^{\ln(a^b)} = a^b$$

i l'exponencial amb base e del segon membre és

$$e^{b\ln(a)} = \left(e^{\ln(a)}\right)^b = a^b.$$

Com l'aplicació exponencial és injectiva ha de ser $\ln(a^b) = b\ln(a)$ com volíem veure. $\square$

Exercici 8 *Demostreu que*

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b), \quad a, b \in \mathbb{R}^+,$$

Solució. L'exponencial amb base e del primer membre és

$$e^{\ln(ab)} = ab$$

i l'exponencial amb base e del segon membre és

$$e^{(\ln(a)+\ln(b))} = e^{\ln(a)}e^{\ln(b)} = ab.$$

Com l'aplicació exponencial és injectiva hem acabat. El cas del quocient és similar.

Exercici 9 *Trobeu la funció inversa de*

$$y = f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Solució. Observem que la imatge de f és $[1, \infty)$. En efecte $\frac{e^{2x}+1}{2e^x} > 1$ ja que $e^{2x} + 1 - 2e^x = (e^x - 1)^2 > 0$. Per tant la inversa està definida a $[1, \infty)$.

A més, per tal que $y = \cosh(x)$ sigui injectiva ha de ser $x \geq 0$ (o, equivalentment $x \leq 0$) ja que si no posem aquesta condició tindríem $f(x) = f(-x)$ i la funció no seria injectiva.

Per trobar-la explícitament aïllem x en funció de y. Per a això posem

$$2y = t + \frac{1}{t}, \qquad t = e^x$$

És a dir,

$$t^2 - 2ty + 1 = 0,$$

d'on

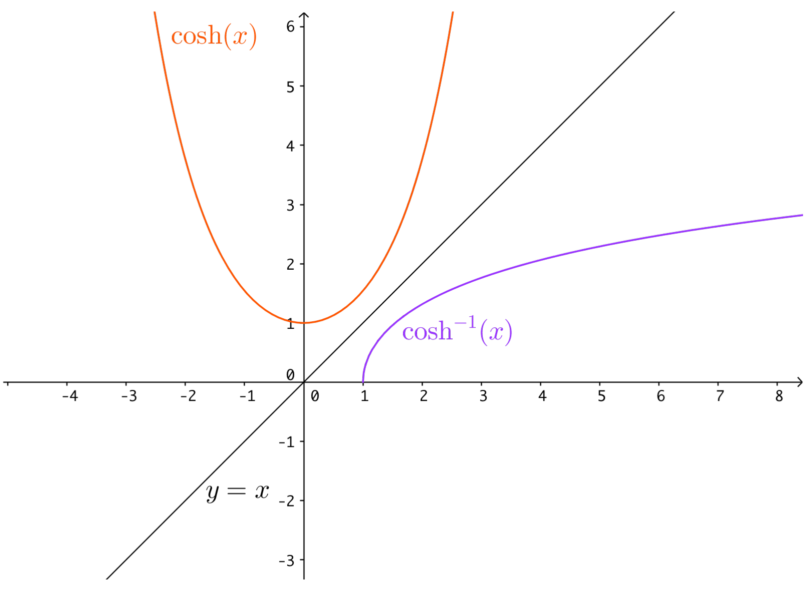
$$e^x = t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2}$$

(com $t = e^x \geq 1$ per ser $x \geq 0$, hem d'agafar el signe $+$ a l'arrel) d'on

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

I ara canviem x per y;

$$y = \text{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad x \geq 1.$$

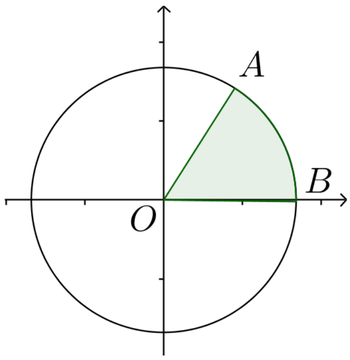


Cosinus hiperbòlic (penseu $x \geq 0$) i la seva inversa .

Funcions trigonomètriques

Quan escrivim $f(x) = \sin(x)$, o $f(x) = \cos(x)$ volem dir que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és la funció que associa a cada angle de x radians respectivament el seu sinus o el seu cosinus.

Recordem que un radian és un angle $\angle AOB$ com el de la figura (és a dir, format pel centre d'una circumferència i dos punts sobre ella) tal que la longitud del segment de circumferència entre els punts A i B és igual al radi $OA = OB$ de la circumferència. Es pot veure que la longitud de la circumferència és $2\pi = 6.28...$ radians



Un radian.

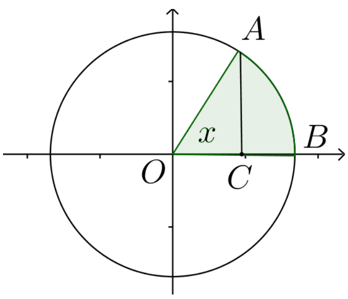
Recordem també que una manera simple de definir sinus és a partir d'un cordill i de la circumferència unitat, que és la circumferència de centre l'origen i radi 1 (en una certa unitat de mesura). Llavors, donat x amb $0 \le x \le 2\pi$, mesurem sobre la circumferència unitat a partir del punt $(1,0)$ i en sentit contrarellotge, la longitud x (amb la mateixa mesura en que hem mesurat el radi de la circumferència). És a dir, desenrotllem el cordill per sobre la circumferència. L'extrem del cordill, com és un punt de la circumferència unitat, és de la forma $P = (a,b)$ amb $a^2 + b^2 = 1$. Llavors es defineixen el sinus i el cosinus de x per[7]

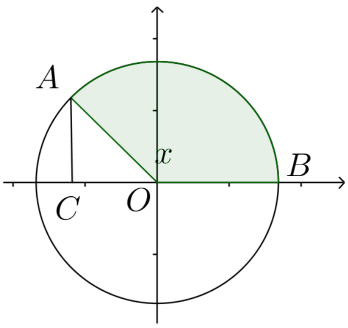
$$\cos(x) = a, \quad \sin(x) = b.$$

Amb la notació de la figura, si $OA = OB = 1$, i $\angle AOB = x$ radians,

$$\cos(x) = OC, \qquad \sin(x) = AC,$$

si $0 \le x \le \pi/2$ (situació de la figura).





[7]No penseu mai que $\sin(x)$ vol dir sinus d'un angle de x graus! Sempre mesurem en radians.

Sinus i cosinus d'un angle de x radians a la circumferència de radi 1.

Si B resta fix i A va girant per sobre la circumferència, quan A està en el segon quadrant el cosinus és negatiu i el sinus positiu, quan està al tercer quadrant ambdós són negatius i quan està al quart quadrant el cosinus és positiu i el sinus negatiu.

Així quan A està en el segon quadrant $\cos(x) = -OC$, $\sin(x) = AC$, (s'entén que OC i AC són quantitats positives perquè representen la distància entre aquests punts).

La tangent de x es defineix per la fórmula

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Quan pensem aquestes funcions com funcions definides a tot $\mathbb{R}$ és perquè les estenem mòdul 2π, és a dir, si $x \in \mathbb{R}$ l'escrivim de la forma

$$x = 2k\pi + y, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq y < 2\pi,$$

i posem

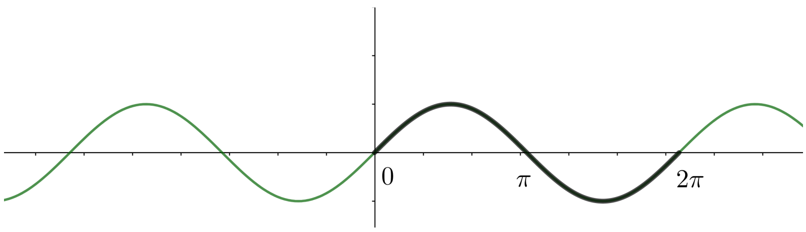
$$\sin(x) = \sin(y).$$

Observeu que $2k\pi \leq x < 2(k+1)\pi$.

Per exemple, si $x = 10$ el sinus de 10 radians val

$$\sin(10) = \sin(y), \quad 10 = 2\pi + y,$$

és a dir $\sin(10) = \sin(3.716814....)$. Observeu que $2\pi < 10 < 3\pi$ i per això agafem $y = 10 - 2\pi$. La part fosca de la gràfica adjunta és l'angle com l'hem definit a la circumferència anteriorment, i per tant entre 0 i 2π, i aquest període és el que es va repetint.



La fórmula explícita per al $\sin(x)$, sense utilitzar el mètode del cordill, és molt apreciada pels matemàtics però s'aparta dels coneixements d'aquest curs

$$\sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Funcions trigonomètriques inverses

Observem que les funcions trigonomètriques no són bijectives. Però, si considerem la funció $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ definida per $f(x) = \sin(x)$ per a tot $x \in$

$[-\pi/2, \pi/2]$, llavors f és bijectiva i la seva inversa $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ és la funció que anomenem *arcsinus*

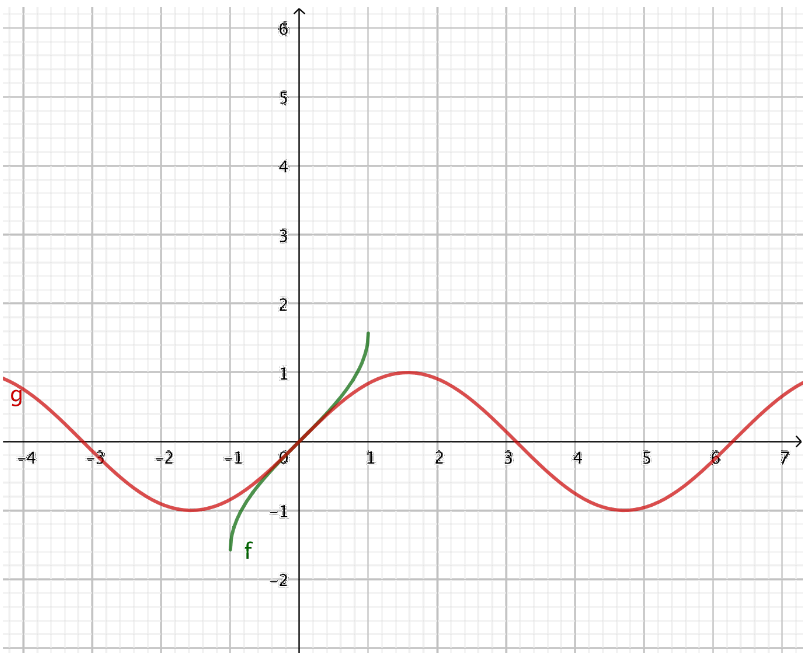
$$f^{-1}(x) = \arcsin(x).$$

La funció $g : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ definida per $g(x) = \cos(x)$ per a tot $x \in [0, \pi]$ també és bijectiva i la seva inversa $g^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ és la funció *arccosinus*

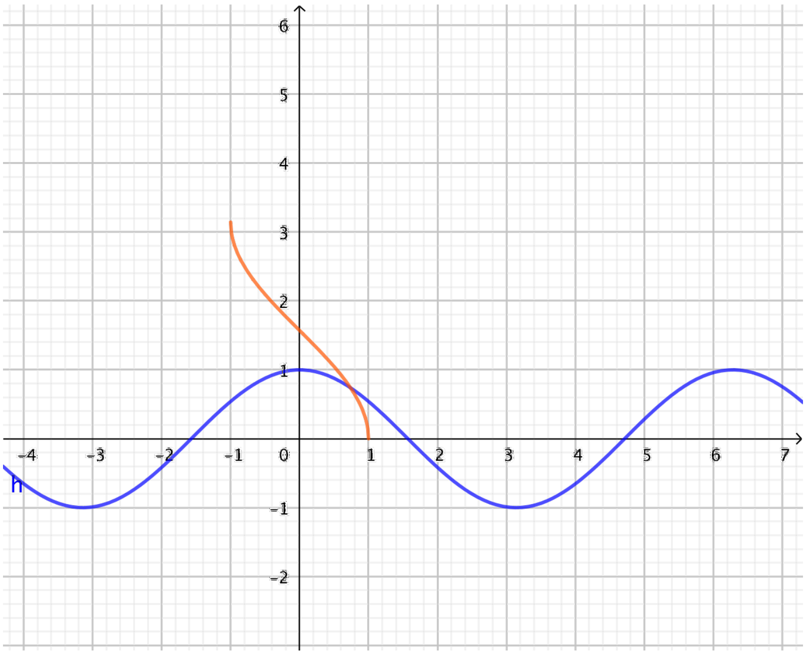
$$g^{-1}(x) = \arccos(x).$$

La funció $h : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $h(x) = \tan(x)$ també és bijectiva i la seva inversa $h^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ és la funció *arctangent*

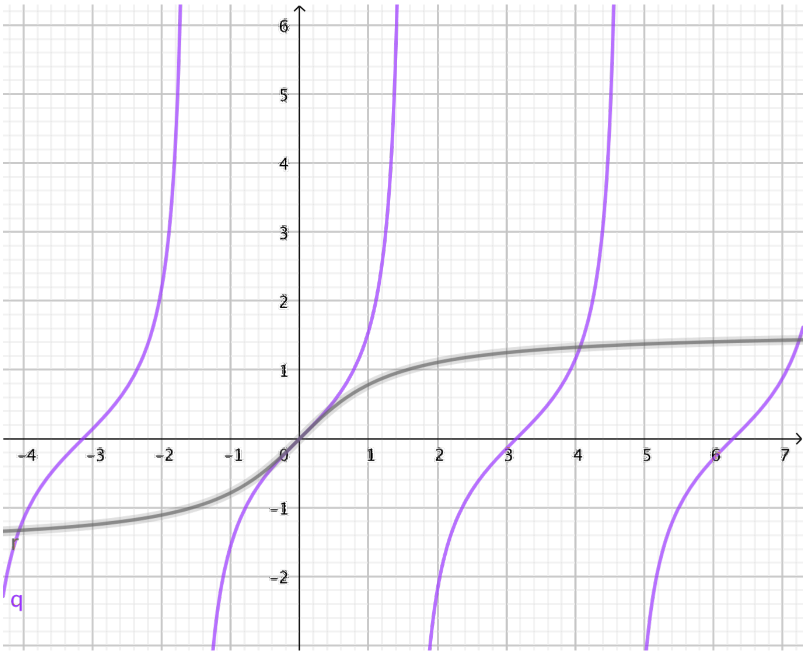
$$h^{-1}(x) = \arctan(x).$$



Funcions sinus i arcsinus



Funcions cosinus i arccosinus



Funcions tangent i arctangent

Capítol 3

Límits i continuïtat

Considerem una funció $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on I és un interval obert[1] de $\mathbb{R}$, i sigui $a \in I$. La notació

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

vol dir que quan x és molt pròxim a a, però diferent de a, $f(x)$ és molt pròxim a L. Més precisament, donat un petit entorn de L, podem agafar un petit entorn de a, tal que la imatge per f dels elements x d'aquest entorn, exceptuant el punt a, pertanyen a l'entorn de L prèviament considerat. Donem la definició més precisa següent.

Definició 3.1 *Sigui $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i sigui $a \in I$. Direm que el límit de $f(x)$ quan x tendeix a a és $L \in \mathbb{R}$, i escriurem*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si i només si per a tot $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Per exemple, si $f(x) = x^2$,

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} x^2 = 9.$$

Si $f(x) = \sin(x)$,

$$\lim_{x \to \pi} f(x) = \lim_{x \to \pi} \sin(x) = 0.$$

En aquests dos exemples L ha coincidit amb $f(a)$ però a vegades $L \neq f(a)$, per exemple

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

En aquest cas

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

[1] Quan diem que I és un interval obert de $\mathbb{R}$ volem dir que I és de la forma $(a, b), (-\infty, b), (a, \infty)$ o $(-\infty, \infty)$.

(observeu la importància de la condició $0 < |x-a|$ a la definició de límit; el punt a no compleix aquesta condició i per tant no diem res sobre la seva imatge).

També considerarem límits a l'infinit. Concretament la notació

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$$

vol dir que a mesura que x es va fent molt gran (o molt petit), $f(x)$ s'acosta a L. Ho precisem amb la definició següent.

Definició 3.2 *Direm que*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

si i només si per a tot $\epsilon > 0$ existeix $k > 0$ tal que

$$x > k \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

I direm que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

si i només si per a tot $\epsilon > 0$ existeix $k > 0$ tal que

$$x < k \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Per calcular límits quasi mai usarem aquesta definició formal ja que donarem mètodes que ens permetran trobar el límit fàcilment.

Calculem però directament $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$. Donant valors a x intuïm que quan x creix $1/x$ decreix, de manera que intuïm que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Per provar aquesta igualtat formalment hem de veure que donat $\epsilon > 0$ existeix $k > 0$ tal que si $x > k$

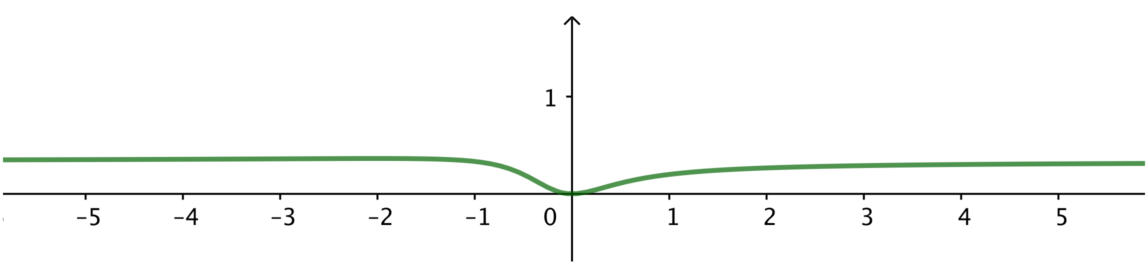
$$|\frac{1}{x}| < \epsilon.$$

Però això és fàcil ja que només hem d'agafar $k = 1/\epsilon$.

Però ja és més difícil veure per exemple que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{3x^2+x+1} = 1/3,$$

com es veu clarament a la gràfica adjunta.



Gràfica de $f(x) = x^2/(3x^2+x+1)$

En efecte, en aquest cas hauríem de veure que donat $\epsilon > 0$ existeix $k > 0$ tal que si $x > k$

$$|\frac{x^2}{3x^2+x+1} - \frac{1}{3}| < \epsilon,$$

és a dir,

$$|\frac{x+1}{3(3x^2+x+1)}| < \epsilon,$$

Això porta a càlculs llargs si volem calcular la k per cada ϵ. No obstant es pot trobar aquest límit usant les propietats dels límits que enunciem sense demostració:

- $\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$
- $\lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}(f(x)g(x))$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ sempre que aquests denominadors no s'anul·lin.

Les tres propietats són vàlides quan $a = \pm\infty$.

D'aquesta manera el límit anterior es calcula sense necessitat d'aplicar directament la definició 3.2. En efecte,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{3x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{3}.$$

Funcions que tendeixen a infinit

La definició de límit es pot adaptar al cas en que $L = \pm\infty$. Concretament diem

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

si per tot $k > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$ llavors $f(x) > k$. Això vol dir que aproximant x a a suficientment la funció es fa tant gran com vulguem.

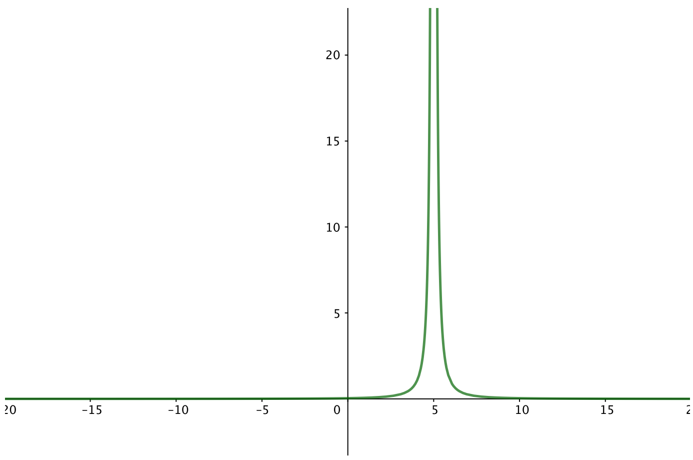
I diem

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

si per tot $k \in \mathbb{R}$ existeix $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$ llavors $f(x) < k$.

Per exemple,

$$\lim_{x\to 5} \frac{1}{(x-5)^2} = \infty$$



$$1/(x-5)^2$$

A vegades no tenim més remei que parlar de límits per la dreta o per l'esquerra. Quan ens acostem al punt a per la dreta posarem

$$\lim_{x\to a^+} f(x),$$

(els punts x que considerem compleixen $x > a$) i quan ens hi acostem per l'esquerra posarem

$$\lim_{x\to a^-} f(x),$$

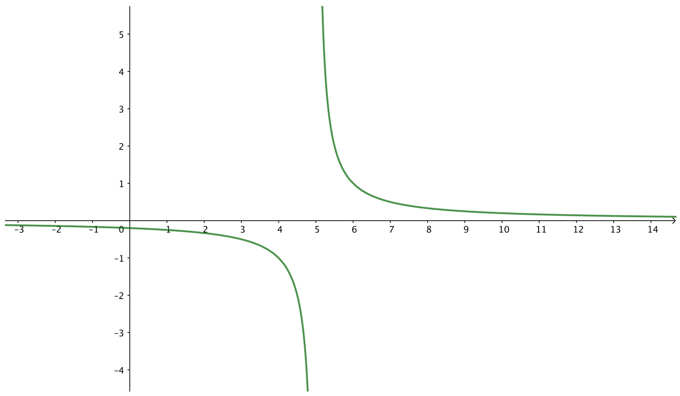
(els punts x que considerem compleixen $x < a$)

I la definició és la mateixa definició 3.1 afegint a la condició $0 < x - a < \delta$ la condició $x > a$ o $x < a$ segons ens acostem per la dreta o per l'esquerra .

Per exemple,

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{1}{x-5} = \infty, \quad \lim_{x\to 5^-} \frac{1}{x-5} = -\infty,$$

com es veu a la figura.



Gràfica de $y = 1/(x-5)$.

Asímptotes

Diem que la gràfica de la funció $y = f(x)$ té una *asímptota vertical* d'equació $x = a$ quan

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a^+} f(x) &= \pm\infty, \\ \lim_{x\to a^-} f(x) &= \pm\infty. \end{aligned}$$

Així, doncs, per l'exemple que acabem de veure, la recta d'equació $x = 5$ és una asímptota vertical de la gràfica de la funció $y = \frac{1}{x-5}$.

Diem que la gràfica de la funció $y = f(x)$ té una *asímptota horitzontal* d'equació $y = b$ quan

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = b$$

Per exemple, la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{3x^2+x+1}$ considerada. a la pàgina 26 té asímptota horitzontal la recta $y = 1/3$.

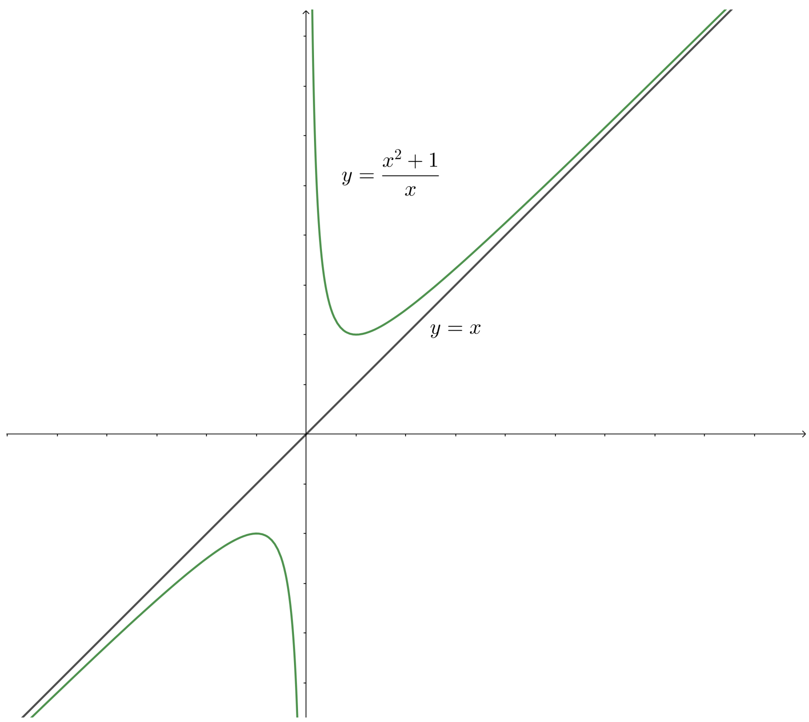
Finalment diem que la recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, és una *asímptota obliqua* de la gràfica de la funció $y = f(x)$ si

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} &= m \\ \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) &= n. \end{aligned}$$

Per exemple, la gràfica de la funció $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ compleix

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} &= 1 \\ \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) &= 0. \end{aligned}$$

i per tant té l'asímptota obliqua $y = x$.



Indeterminacions

Quan en calcular un límit ens trobem amb expressions del tipus

$$\infty - \infty,\ \infty/\infty,\ 0/0,\ 0 \cdot \infty,\ 1^\infty$$

diem[2] que tenim una *indeterminació* ja que el valor d'aquests límits depenen de la velocitat amb que ens acostem a zero o a infinit. De manera que dos límits poden ser tots dos de un dels tipus anteriors i tenir resultats diferents. Veiem alguns exemples.

[2]el 0 i l'1 en aquestes expressions no representen els números 0 i 1 sinó que representen variables que tendeixen a 0 i 1 respectivament.

$[\boldsymbol{\infty - \infty}]$. Els límits

$$\lim_{x\to\infty} [(x+5) - x], \quad \lim_{x\to\infty} (x^2 - x)$$

són tots dos del tipus $\infty - \infty$ però el primer val 5 i el segon ∞.

$[\boldsymbol{\infty/\infty}]$. Els límits

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x+1}{2x-3}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{8x-2}{4x-3}$$

són tots dos del tipus ∞/∞ però el primer val 3 i el segon 2.

$[\mathbf{0} \cdot \boldsymbol{\infty}]$. Els límits

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot x\right), \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2} \cdot x\right)$$

són tots dos del tipus $0 \cdot \infty$ però el primer val 1 i el segon 0.

$[\mathbf{1}^{\boldsymbol{\infty}}]$. El límit que ens dóna el número e

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

és del tipus 1^∞, però el límit

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x^2}$$

també és del tipus 1^∞ i el seu valor és ∞.

De fet, el nombre e es defineix com

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n,$$

però la successió $1/n$ es pot substituir[3] per qualsevol successió que tendeixi a zero, que anomenem infinitèsim, de manera que e és pot pensar com 1 *més un infinitèsim elevat a l'invers d'aquest mateix infinitèsim.*

Exercici 10 *Calculeu* $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{3n})^n$.

Solució. Utilitzarem que 1 més un infinitèssim elevat a l'invers d'aquest mateix infinitèssim és el nombre e.

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{3n})^n = \lim_{n\to\infty} [(1 + \frac{1}{3n})^{3n}]^{1/3} = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}.$$

Exercici 11 *Calculeu* $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n^2})^n$.

Solució. Utilitzarem que 1 més un infinitèssim elevat a l'invers d'aquest mateix infinitèssim és el nombre e.

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n^2})^n = \lim_{n\to\infty} [(1 + \frac{1}{n^2})^{n^2}]^{1/n} = e^{\lim_{n\to\infty} 1/n} = e^0 = 1.$$

Exercici 12 *Calculeu* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$.

[3]Només hem d'acotar $1/x$ entre la seva part entera i la seva part entera $+1$ i fer una petita manipulació.

Solució. Dividim numerador i denominador per x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+x-2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 3.$$

Exercici 13 *Sigui $b > 0, b \neq 1$. Calculeu*

$$\lim_{h\to 0} \frac{b^h-1}{h}$$

Solució. Posem $y = b^h - 1$ de manera que $\ln(y+1) = h\ln(b)$. Així,

$$\lim_{h\to 0} \frac{b^h-1}{h} = \lim_{y\to 0} \frac{y\ln(b)}{\ln(y+1)} = \ln(b) \lim_{y\to 0} \frac{1}{\ln(y+1)^{1/y}} = \ln(b).$$

3.1 Continuïtat d'una funció

Definició 3.3 *Sigui $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció definida sobre un interval obert I de $\mathbb{R}$. Diem que f és contínua en $c \in I$ si i només si*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Diem que és contínua a I si és contínua a tots els punts de I.

Per exemple, la funció definida a l'exemple (3.1), pàgina 25, no és contínua en $x = 0$. En canvi les funcions, $x^2, \sin(x), e^x$ són contínues en qualsevol punt.

Com

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = f(\lim_{x\to c} x)$$

hi ha qui diu que f és contínua quan commuta amb el pas al límit.

Per manipular funcions contínues acceptarem sense demostració que les funcions més conegudes, com *les funcions polinòmiques, exponencials, logaritmes, potencials, sinus i cosinus són contínues.*

I acceptarem les regles que diuen que *la suma, producte, divisió (denominador no nul) i composta de funcions contínues és contínua.*

Per exemple, les funcions següents són contínues.

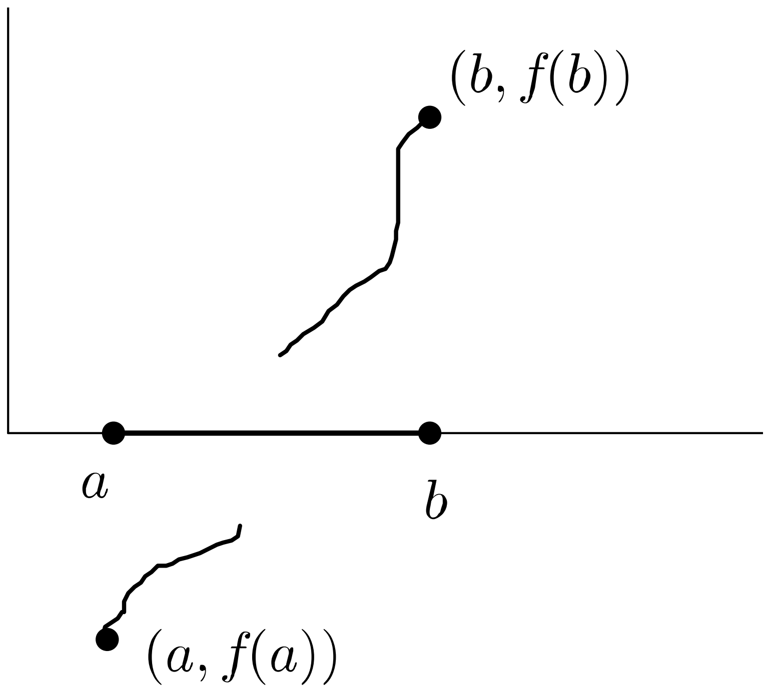
$$x^2 + \sin(x)$$
$$\ln(x^2+1) + 3^x$$
$$\frac{x+1}{x^2+1}$$
$$x \cdot 3^x \cdot \sin(\sqrt{x^2+1})$$

La idea intuïtiva de funció contínua és que es pot dibuixar la seva gràfica sense aixecar el llapis del paper. Per això l'anomenat teorema de Bolzano és obvi.[4]

[4] S'ha de veure que el model matemàtic de la realitat, en aquest cas del dibuix, és un bon model, el que passa a la realitat passa en el model.

Teorema 3.1.1 (Bolzano) *Sigui $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua. Si $f(a)$ i $f(b)$ són de signes oposats llavors existeix $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

És a dir, que quan volem unir els punts $(a, f(a))$ amb $(b, f(b))$ amb la gràfica de la funció, aquesta gràfica travessa l'eix de les $x's$ entre a i b.



Exercici 14 *Demostreu que donada una funció contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ i donat $d \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < d < f(b)$, existeix $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Solució. Apliquem Bolzano a $g(x) = f(x) - d$. □

Exercici 15 *Demostreu que el polinomi $f(x) = x^4 - x^3 + 2x - 3$ té almenys una arrel més petita que -1 i una altra més gran que 1.*

Solució. Com $f(-2) = 17$ i $f(-1) = -3$ hi ha una arrel a l'interval $(-2, -1)$. Com $f(1) = -1$ i $f(2) = 9$ hi ha una arrel a l'interval $(1, 2)$.

Exercici 16 *Demostreu que l'equació $e^x = x + 10$ té almenys una arrel positiva i una negativa.*

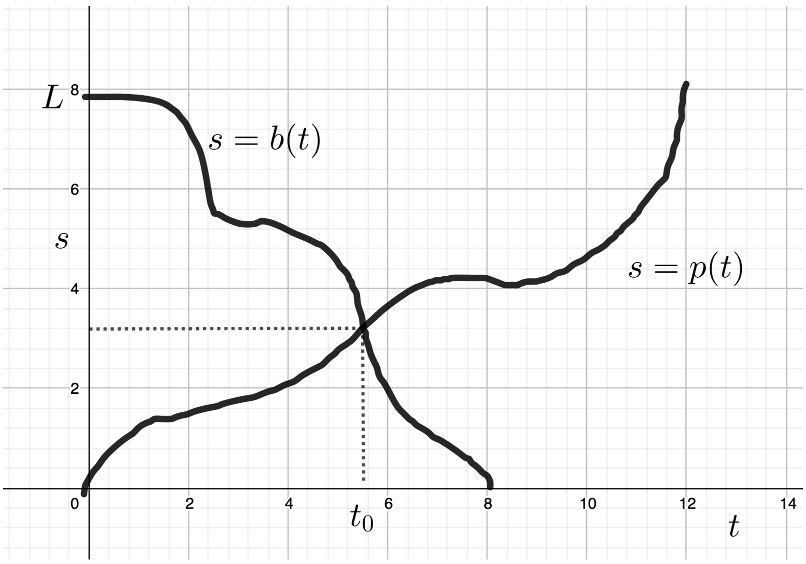
Solució. Considerem $f(x) = e^x - x - 10$. Com $f(-10) = e^{-10} > 0$ i $f(0) = -9$ hi ha una arrel a l'interval $(-10, 0)$. Com $f(4) = e^4 - 14 > 0$ hi ha una arrel a l'interval $(0, 4)$.

Exercici 17 *Demostreu que l'equació $x^2 = 18 \ln(x)$ té almenys una arrel real.*

Solució. Només cal observar que la funció $f(x) = x^2 - 18 \ln(x)$ compleix que $f(1) = 1 > 0$ i $f(e) = e^2 - 18 < 0$, per tant a l'interval $[1, e]$ hi ha *almenys* una arrel.

Exercici 18 *Un lama tibetà puja fins al seu monestir per un camí a la muntanya. Un dia a les 8 del matí surt d'un punt A situat en el pla, on comença l¡estret camí de pujada, i arriba al monestir a les 8 del vespre. Ha anat a estones ràpid a estones lent o parant a descansar de tant en tant, però suposem que no torna mai al punt de partida. L'endemà a les vuit del matí surt del monestir i fa el mateix camí de baixada, una mica més ràpid, arribant al punt A a les 4 de la tarda. Demostreu que hi ha una hora del dia en la que estava exactament en el mateix punt del camí, tant quan pujava om quan baixava.*

*Solució.*Representem en un gràfic la funció $p(t)$ que dóna la distància al punt A en el moment t quan pujava; i la funció $b(t)$ que dóna la distància al punt A en el moment t quan baixava. Diguem L a la longitud el camí de manera que $p(12) = L$ (està dotze hores pujant). També $p(0) = 0$ ja que surt del punt A i posem l'inici del temps a les vuit del matí. L'endemà tenim $b(0) = L$ (a les 8 del mati està al monestir) i $b(8) = 0$ (està vuit hores baixant).



Considerem la funció $h(t) = p(t) - b(t)$ que és una funció contínua definida a $[0, 8]$. Com $h(0) = p(0) - b(0) = -L$ i $h(8) = p(8) > 0$. Pel teorema de Bolzano hi ha un instant t_0, amb $0 < t_0 < 8$, on $h(t_0) = 0$, i per tant $p(t_0) = b(t_0)$, que vol dir que a les t_0 hores de cadascun dels dies de pujada i baixada estava a la mateixa distància del punt A, és a dir, en el mateix punt del camí.

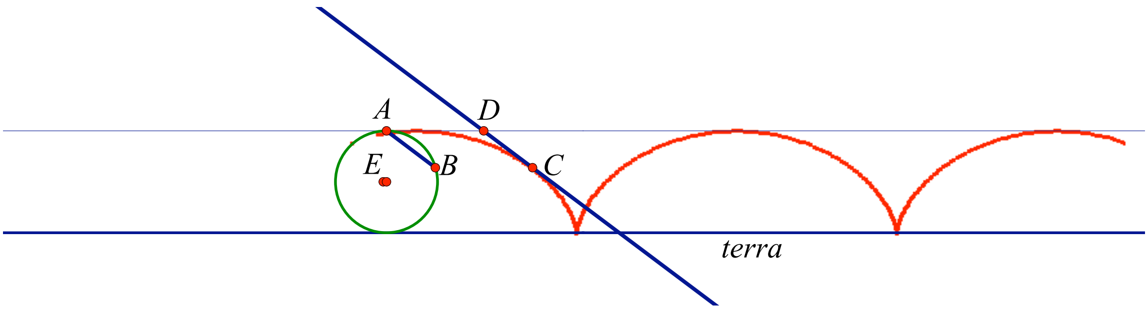
Capítol 4

Derivades

4.1 Introducció

Un dels problemes fonamentals que va donar lloc al naixement del càlcul diferencial va ser el càlcul de tangents a diverses corbes. La més fonamental va ser la cicloide, és a dir la corba descrita per un punt d'una roda quan aquesta gira sobre un terra pla. Per exemple la trajectòria descrita per la vàlvula d'una roda de bicicleta.

Per exemple, molt abans dels creadors del càlcul diferencial (Newton i Leibnitz), se sabia (Wren 1670) que la tangent a la cicloide en el punt C es traçava de la manera següent: Tracem la paral·lela al terra per C. Aquesta talla la roda (en la seva posició inicial) en el punt B. A continuació unim el punt més alt de la roda, A, amb B. Doncs bé, la tangent a la cicloide per C és la recta per C paral·lela a AB.



També van ser capaços de demostrar, sense derivades ni integrals, que la longitud de la cicloide entre els punts A i C és justament $2DC$. Això implica que la longitud d'un arc de cicloide és $8R$ on R és el radi de la roda.

Aquests dos resultats tan elegants i sorprenents ja fan veure que els matemàtics pre-Newtonians havien treballat a fons la cicloide. Però els mètodes usats per a la cicloide no els ajudaven gaire per a resoldre el mateix tipus de problema sobre una altra corba.

La gràcia del càlcul diferencial va ser, entre d'altres, la unificació de problemes aparentment diferents en un sol problema: el càlcul de derivades (o integrals).

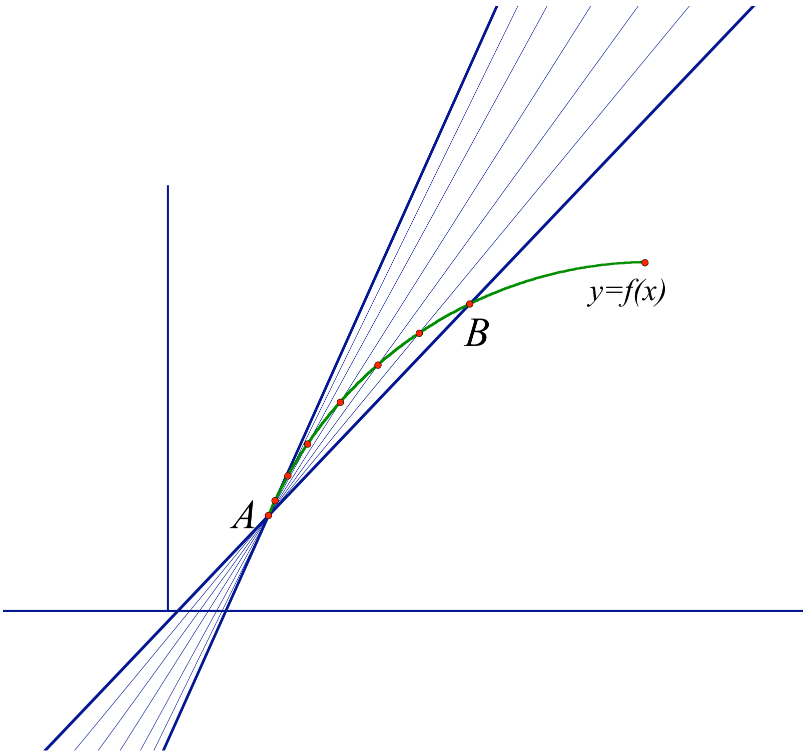
Això va simplificar de tal manera els problemes que va fer que qualsevol matemàtic podés resoldre problemes que abans tan sols podien resoldre els grans matemàtics: es va democratitzar el Càlcul.

És un procés semblant al que va passar amb la introducció de coordenades a la geometria: es va posar la geometria sintètica a l'abast de tothom.

Però es va pagar un preu: cap matemàtic actual[1] coneix les corbes una per una com les coneixien els nostres precursors!. Derivar i integrar és com usar un mena de caixa negra en la que entra un problema i surt la solució, però si no s'analitza detalladament, no se saps molt bé què ha passat. L'exemple anterior de la cicloide és paradigmàtic: avui tothom sap calcular la longitud AC però quasi ningú s'adona que el resultat numèric que obté integrant és $2DC$.

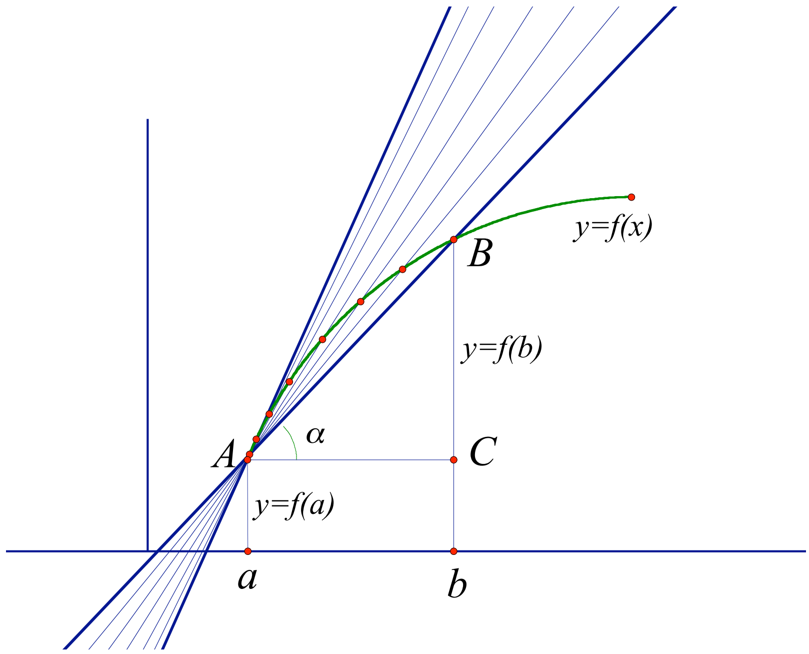
4.2 Tangent a una gràfica

La tangent a la gràfica de la funció $y = f(x)$ en el punt A és la recta que s'obté com posició límit de les rectes AB, on B és un punt sobre la corba que es va apropant a A.



Si denotem per a l'abscissa del punt A, i per b l'abscissa del punt B, és a dir $A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$, el pendent de la recta AB val

[1]Potser exagero una mica, però no massa.



$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Per tant, el pendent de la tangent a la gràfica en el punt A val

$$f'(a) = \lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Es diu que $f'(a)$ és la derivada de la funció $y = f(x)$ en el punt A. I coincideix doncs amb el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$.

També és usual denotar $h = b - a$ de manera que també tenim

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Exercici 19 *Trobeu l'equació de la recta tangent a la paràbola $y = x^2$ en el punt $P = (3, 9)$.*

Solució. El pendent m d'aquesta recta és la derivada en $x = 3$ (abscissa de P) de la funció $f(x) = x^2$. Per tant,

$$m = f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = 6.$$

Per tant l'equació demanada és $y - 9 = 6(x - 3)$.

4.3 Velocitat mitjana

Si ens desplacem en cotxe entre dues ciutats distants entre si 100 km i triguem 1 hora, diem que la nostra velocitat mitjana ha estat de 100 km/h. Estem usant la definició de velocitat que ens diu

$$\text{velocitat} = \frac{\text{espai}}{\text{temps}}$$

Denotem per $s(t)$ l'espai recorregut pel cotxe quan fa t hores que ha sortit de la primera ciutat. Així $s(0) = 0$ i $s(1) = 100$.

Quina velocitat mitjana hem portat entre els instants t_0 i $t_1 = t_0 + h$?

Novament

$$\text{velocitat} = \frac{\text{espai}}{\text{temps}} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

A quina velocitat anàvem justament quant $t = t_0$? Aquest és el concepte de *velocitat instantània*. La idea és que la velocitat instantània en $t = t_0$ és la velocitat mitjana entre $t = t_0$ i $t = t_1$ quan t_1 és molt i molt pròxim a t_0.

Escriurem

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Equivalentment

$$\boxed{v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}}$$

Així doncs, la *velocitat instantània és la derivada de l'espai respecte del temps.*

Tenim definida dons una funció t, $v(t)$, anomenada velocitat instantània o simplement velocitat, donada per

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}.$$

Exercici 20 *Uns ciclistes van del punt A al punt B a una velocitat mitjana de* 24 *Km/h, un cop a B donen mitja volta i arriben al punt de partida A a una velocitat mitjana global (tot el trajecte d'anada i tornada) de* 28 *Km/h. Quina ha estat la velocitat mitjana de tornada?*

Solució: Sigui a la velocitat mitjana d'anada. Sigui b la velocitat mitjana final. Sigui c la velocitat mitjana de tornada.

Volem trobar una fórmula que ens doni c en funció de a i b. Es a dir que ens permeti conèixer la velocitat mitjana de tornada a partir de la velocitat mitjana d'anada i la velocitat mitjana final.

Tenim, per definició de velocitat mitjana, que

$$a = \frac{e}{t}$$

on e és l'espai recorregut a l'anada i t és el temps emprat en el trajecte d'anada.

També per definició tenim

$$b = \frac{2e}{t + T}$$

on $2e = e + e$ és l'espai recorregut a l'anada i a la tornada, i T és el temps de tornada. Així $t + T$ és el temps total invertit en el recorregut. Observem també que aïllant T tenim

$$T = \frac{2e - bt}{b.}$$

Per tant,
$$c = \frac{e}{T} = \frac{abt}{2e - bt}$$
que simplificant dóna la fòrmula que buscàvem, concretament
$$\boxed{c = \frac{ab}{2a - b}}$$
En el cas particular anterior en que la velocitat mitjana d'anada, a, era 24 Km/h i la velocitat mitjana final, b, era de 28 Km/h, la velocitat mitjana de tornada,c, val concretament.
$$c = \frac{ab}{2a - b} = \frac{24 \cdot 28}{2 \cdot 24 - 28} = 33.6 Km/h$$

Exercici 21 *Uns ciclistes van del punt A al punt B a una velocitat mitjana de* 24 *Km/h, un cop a B donen mitja volta i tornen a A amb una velocitat mitjana de tornada es* 26 *Km/h. Quina és la velocitat mitjana final?*

Solució. Sigui a la velocitat mitjana d'anada. Sigui b la velocitat mitjana final. Sigui c la velocitat mitjana de tornada.

Volem trobar una fórmula que ens doni b en funció de a i c. Es a dir que ens permeti conèixer la velocitat mitjana final a partir de la velocitat mitjana d'anada i la velocitat mitjana de tornada.

Tenim, com abans, que
$$a = \frac{e}{t}$$
on e és l'espai recorregut a l'anada i t és el temps emprat en el trajecte d'anada.

i que
$$b = \frac{2e}{t + T}$$
on $2e = e + e$ és l'espai recorregut a l'anada **i** a la tornada, i T és el temps de tornada. Així $t + T$ és el temps total invertit en el recorregut. Finalment
$$c = \frac{e}{T}$$

Per tant tenim
$$b = \frac{2e}{t + T} = \frac{2at}{t + e/c} = \frac{2at}{t + at/c}$$
que simplificant dóna la fòrmula que buscabem, concretament
$$\boxed{b = \frac{2ac}{a + c}}$$
En el cas particular anterior en que la velocitat d'anada, a, era de 24 Km/h i la velocitat mitjana de tornada, c, era de 26 Km/h, la velocitat mitjana final, b, val concretament:
$$b = \frac{2 \cdot 24 \cdot 26}{24 + 26} = 24.9 Km/h.$$

4.4 Derivada d'una funció en un punt

Motivats pels exemples anteriors, tangents a corbes i velocitat mitjana, donem la definició següent.

Definició 4.1 *Sigui $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció definida sobre un interval obert I de $\mathbb{R}$, i sigui $c \in I$. Direm que f és derivable en c si existeix*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

i és finit.

En aquest cas escriurem

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Quan f és derivable en tots els punts de I diem que f és derivable en I. En aquest cas tenim una segona funció $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que es diu *funció derivada* de f i que assigna a cada $x \in I$ el número real $f'(x)$.

A vegades es fa el canvi de variable $x = c + h$ i la definició de derivada s'escriu

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Exemples

(1) Les funcions constants són derivables i la seva derivada és zero.

(2) La funció *potencial* $f(x) = x^n$, n enter positiu, és derivable i la seva derivada és la funció $f'(x) = nx^{n-1}$.

Per exemple, si $n = 2$ tenim

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2x)}{h} = 2x.
\end{aligned}$$

És a dir, la derivada de $f(x) = x^2$ és $f'(x) = 2x$.

I en el cas general, utilitzant la fórmula del binomi, tenim

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} h^j - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} h^{j-1} \\
&= \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}
\end{aligned}$$

És a dir, la derivada de $f(x) = x^n$ és $f'(x) = nx^{n-1}$.

(3) La funció *exponencial* $f(x) = b^x$, $b > 0, b \neq 1$, és derivable i la seva derivada és la funció $f'(x) = b^x \ln(b)$.

En efecte, tenint en compte l'exercici (13), pàgina 31, tenim,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h} = b^x \lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h} = b^x \ln(b)$$

(4) La funció $f(x) = \sin(x)$ és derivable i la seva derivada és la funció $f'(x) = \cos(x)$.

En efecte, tenint en compte la igualtat trigonomètrica

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2})$$

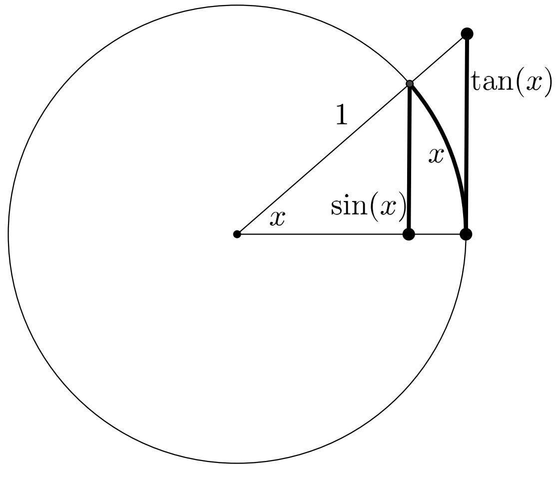
tenim

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cos((2x+h)/2) = \cos(x) \end{aligned}$$

ja que $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$. Aquest darrer límit es veu clar mirant el dibuix següent[2], del que es dedueix que

$$\sin(x) < x < \tan(x).$$

Dividint per $\sin(x)$ tenim el resultat.

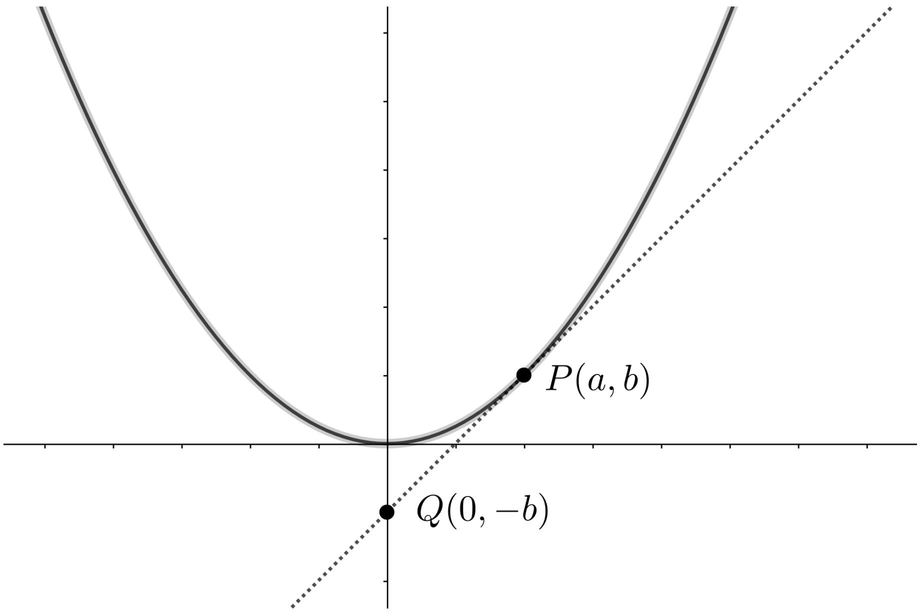


Exercici 22 *Demostreu que per dibuixar la tangent a la paràbola $y = px^2$, on $p \in \mathbb{R}$, en el punt $P = (a, b)$ (i per tant $b = pa^2$) només hem d'unir P amb el punt $Q = (0, -b)$.*

[2]Penseu en les àrees dels dos triangles de base 1 i altures $\sin(x)$ i $\tan(x)$, i del sector circular entre ells. L'àrea del sector circular d'angle α en una circumferència de radi 1 és $\alpha/2$. Tenim $(1/2)\sin(x)\cos(x) \leq x/2 \leq (1/2)\tan(x)$, i ara dividim per $\sin(x)$ i fem el límit.

Solució. L'equació de la recta tangent a la paràbola en P és

$$y - b = 2pa(x - a).$$



Si tallem aquesta recta amb l'eix $x = 0$ obtenim $y - b = -2pa^2$ i per tant

$$y = b - 2pa^2 = -pa^2 = -b,$$

és a dir la recta tangent passa pel punt $(0, -b)$ com volíem.

Propietats de les derivades

Si f i g són funcions derivables definides sobre un cert interval I és fàcil veure que

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\
(f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}, \quad g(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

Per exemple, si $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, tenim

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}$$

Observeu que si acceptem la fórmula del producte i aquest càlcul podem demostrar la fórmula del quocient. En efecte

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)[-\frac{g'(x)}{g(x)^2}] \\
&= \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}$$

La fórmula del producte és immediata ja que (sumant i restant la mateixa quantitat $f(x+h)g(x)$ tenim

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)(g(x+h)-g(x))}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x)(f(x+h)-f(x))}{h}\\
&= f(x)g'(x)+g(x)f'(x).
\end{aligned}$$

Acabem aquesta secció comentant que les funcions derivables són automàticament contínues. El recíproc no és cert, per exemple la funció $y=|x|$ és contínua però no derivable en $x=0$.

Teorema 4.4.1 *Sigui I un interval de $\mathbb{R}$ i $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció. Si f és derivable en $c\in I$, llavors és contínua en c.*

Demostració. Hem de veure que

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Fem el truc

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c}(f(x)-f(c)+f(c))\\
&= \lim_{x\to c}\left((x-c)\frac{f(x)-f(c)}{x-c}+f(c)\right)\\
&= 0\cdot f'(c)+f(c)=f(c).
\end{aligned}$$

4.5 Regla de la cadena

La *regla de la cadena* diu que si tenim una funció d'una variable $z=g(y)$,

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & y & \mapsto & g(y)\end{array}$$

però la variable y depèn al seu torn d'una altre variable x, $y=f(x)$, llavors la derivada de la funció composta $z=g(f(x))$ està donada per

$$\boxed{(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x).}$$

Equivalentment,

$$\frac{d(g\circ f)}{dx}(x)=\frac{dg}{dy}(f(x))\cdot\frac{df}{dx}(x).$$

Abusant de la notació la regla de la cadena s'escriu com[3]

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx},$$

[3]A l'esquerra considerem z com funció de x, $z=f(g(x))$, i escrivim la seva derivada. A la dreta considerem primer z com funció de y, $z=g(y)$ i escrivim la seva derivada, però falta substituir, un cop derivat, y per $f(x)$, i a la última derivada de la dreta s'identifica y amb $f(x)$.

fàcil de recordar ja que només "multipliquem" i "dividim" per dy.

Observem que per poder escriure la composició $f \circ g$ necessitem que la imatge de g estigui continguda en el domini de f, $Im(g) \subseteq Dom(f)$.

Exemples

(1) Suposem coneguda una funció $y = f(x)$ i volem calcular la derivada de la funció $f(x)^n$.

Considerem la funció $g(y) = y^n$ i observem que la funció que volem derivar és $g \circ f$. La derivada de g és $g'(y) = ny^{n-1}$.

Per tant,

$$\frac{d}{dx}(f(x)^n) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = nf(x)^{n-1}f'(x).$$

Equivalentment,

$$\frac{df(x)^n}{dx} = \frac{dy^n}{dy}_{|y=f(x)} \cdot \frac{dy}{dx} = nf(x)^{n-1}f'(x).$$

(2) Suposem coneguda una funció $y = f(x)$ i volem calcular la derivada de $e^{f(x)}$.

Considerem la funció $g(y) = e^y$ i observem que la funció que volem derivar és $g \circ f$. La derivada de g és $g'(y) = e^y$.

Per tant,

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{f(x)}f'(x).$$

Equivalentment,

$$\frac{de^{f(x)}}{dx} = \frac{de^y}{dy}_{|y=f(x)} \cdot \frac{dy}{dx} = e^{f(x)} \cdot f'(x).$$

(3) Suposem coneguda una funció $y = f(x)$ i volem calcular la derivada de $\sin(f(x))$.

Considerem la funció $g(y) = \sin(y)$ i observem que la funció que volem derivar és $g \circ f$. La derivada de g és $g'(y) = \cos(y)$.

Per tant,

$$\frac{d}{dx}\sin(f(x)) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(f(x)) \cdot f'(x).$$

Equivalentment,

$$\frac{d\sin(f(x))}{dx} = \frac{d\sin(y)}{dy}_{|y=f(x)} \cdot \frac{dy}{dx} = \cos f(x) \cdot f'(x).$$

Exercici 23 *Calculeu $f'(x)$ quan $f(x) = \sin^2(x^3 + 3x^2)$.*

Solució. Per la regla de la cadena (vegeu exemple 1)

$$f'(x) = 2\sin(x^3 + 3x^2)\cos(x^3 + 3x^2) \cdot (3x^2 + 6x).$$

Exercici 24 *Calculeu $f'(x)$ quan $f(x) = e^{x^3+3x^2}$.*

Solució. Per la regla de la cadena (vegeu exemple 2)

$$f'(x) = e^{x^3+3x^2} \cdot (3x^2 + 6x).$$

Exercici 25 *Calculeu $f'(x)$ quan $f(x) = \sin(\frac{1}{1+x^2})$.*

Solució. Per la regla de la cadena (vegeu exemple 3)

$$f'(x) = \cos(\frac{1}{1+x^2}) \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Regla de l'Hôpital

Les derivades serveixen també en alguns casos per calcular límits. Per exemple si ens trobem amb una indeterminació del tipus

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

però

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

(L pots ser $\pm\infty$) llavors

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Per exemple,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

Exercici 26 *Calculeu*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{3x}.$$

Solució. Aplicant la regla de l'Hôpital tenim

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{3} = \frac{1}{3}.$$

Exercici 27 *Calculeu*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{x - \sin(x)}$$

Solució. Aplicant tres cops l'Hôpital tenim

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{x - \sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) - 2\cos(2x)}{1 - \cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(x) + 4\sin(2x)}{\sin(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(x) + 8\cos(2x)}{\cos(x)} \\ &= 6. \end{aligned}$$

Exercici 28 *Calculeu*

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{\sin(x)}}$$

Solució. És un límit infeterminat del tipus 1^∞. Posem $y=(1+2x)^{\frac{1}{\sin(x)}}$ i prenem logaritmes.

$$\ln(y)=\frac{\ln(1+2x)}{\sin(x)}$$

i calculem

$$\lim_{x\to 0}\ln(y)$$

aplicant l'Hôpital. Tenim (vegeu més endavant la derivada de la funció logaritme)

$$\lim_{x\to 0}\ln(y)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2/(1+2x)}{\cos(x)}=2.$$

Per tant, com el logaritme commuta amb el pas al límit, tenim

$$\ln\lim_{x\to 0}(y)=2.$$

Així,

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{\sin(x)}}=e^2.$$

4.6 Derivada de la funció inversa

El teorema de la funció inversa diu essencialment que *la derivada de la inversa és la inversa de la derivada.* Concretament tenim

Teorema 4.6.1 (Funció inversa) *Suposem que tenim una funció $f:(a,b)\longrightarrow(c,d)$ i la seva inversa*[4] *$f^{-1}:(c,d)\longrightarrow(a,b)$. Si f és derivable en $x_0\in(a,b)$ amb $f'(x_0)\neq 0$, llavors f^{-1} és derivable en el punt $y_0=f(x_0)$ i*

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Aquesta igualtat es pot escriure també com

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

o, equivalentment,

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}_{|x=f^{-1}(y)}}$$

La notació $\frac{df(x)}{dx}_{|x=f^{-1}(y)}$ vol dir derivar $f(x)$ respecte de x i a continuació substituir x per $f^{-1}(y)$.

Veiem, com exemple, la derivada de l'arcsinus i la derivada del logaritme.

[4] a i c poden ser $-\infty$ i b i d poden ser ∞.

Derivada de l'arcsinus

Donada la funció $f(x) = \sin(x)$ volem trobar la derivada de la seva inversa $f^{-1}(y) = \arcsin(y)$. Pel teorema de la funció inversa tenim

$$\frac{d(\arcsin(y))}{dy} = \frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{d\sin(x)}{dx}_{|x=f^{-1}(y)}} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Derivada del logaritme

Per exemple, anem a calcular la derivada de la funció logaritme. Recordem que $\log_a(x)$ és la funció inversa de la funció exponencial $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$, és a dir, $f^{-1}(x) = \log_a(x)$. I recordem també que

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln(a).$$

Per aplicar la fórmula del teorema anterior és millor canviar x per y i escriure

$$f^{-1}(y) = \log_a(y).$$

Llavors tenim

$$\frac{d(\log_a(y))}{dy} = \frac{d(f^{-1}(y))}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}_{|x=f^{-1}(y)}} = \frac{1}{a^x \ln(a)}_{|x=\log_a(y)} = \frac{1}{y\ln(a)}.$$

Quan $a = e$ tenim

$$\frac{d(\ln(y))}{dy} = \frac{1}{y}.$$

I per tant, per la regla de la cadena, si $y = f(x)$ és una funció estrictament positiva, tenim

$$\frac{d(\ln(f(x)))}{dx} = \frac{d(\ln(y))}{dy}_{|y=f(x)} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Així doncs la derivada del logaritme neperià d'una funció és igual a la *derivada de la funció dividida per la mateix funció.*

Derivada de x^r amb $r \in \mathbb{R}$

Ja hem vist que la derivada de $y = x^n$ amb n enter positiu és $y' = nx^{n-1}$. Però la demostració que hem donat d'aquest fet no funciona quan canviem n per un nombre real. No obstant la fórmula val exactament igual, és a dir

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}.$$

En efecte, prenent logaritmes a $y = x^r$ tenim

$$\ln(y) = \ln(x^r) = r\ln(x),$$

i derivant,

$$\frac{y'}{y} = \frac{r}{x},$$

i per tant

$$y' = r\frac{y}{x} = rx^{r-1}$$

com volíem veure.

Exercici 29 *Trobeu l'angle amb que es tallen les corbes $y = 2\sqrt{x}$, $y = x^2$, en el punt de tall diferent de l'origen.*

Solució. Primerament hem de calcular els punts de tall i el pendent de la tangent en aquests punts.

Per calcular la intersecció posem

$$2\sqrt{x} = x^2,$$

Elevant al quadrat

$$4x = x^4$$

i per tant $4 = x^3$, és a dir, si suposem $x \neq 0$, el punt de tall és el punt

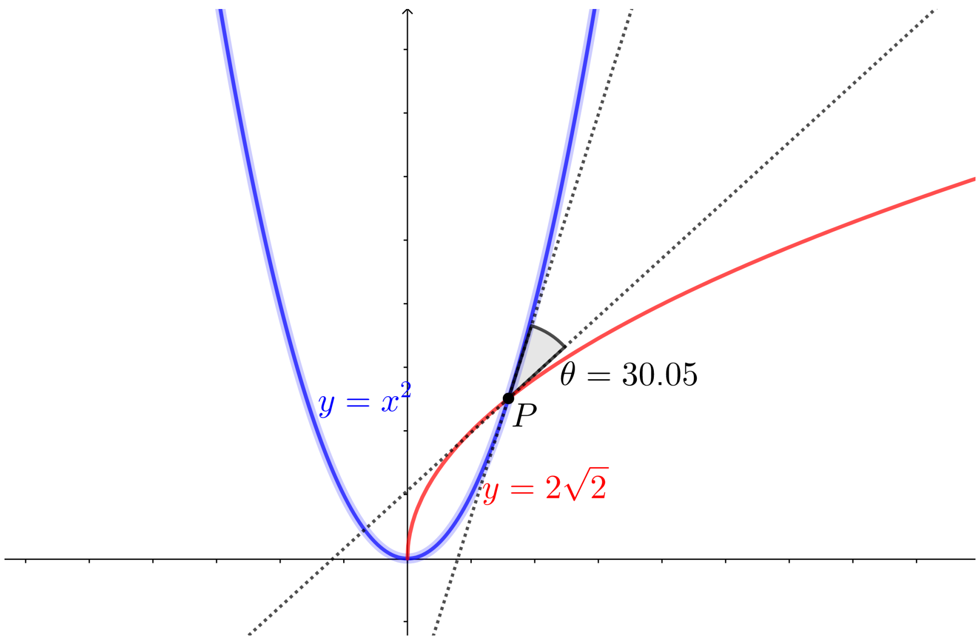
$$P = (\sqrt[3]{4}, (\sqrt[3]{4})^2) = (2^{2/3}, 2^{4/3}).$$

Pendent de la tangent a $y = 2\sqrt{x}$ en $x = 2^{2/3}$. Fem la derivada i obtenim

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

i per tant el pendent de la tangent a la gràfica en P és

$$m_1 = \tan(\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{2^{2/3}}} = \frac{1}{2^{1/3}} = 2^{-1/3}.$$



Pendent de la tangent a $y = x^2$. Fem la derivada i obtenim

$$y'(x) = 2x$$

i per tant és

$$m_2 = \tan(\alpha_2) = 2 \cdot 2^{2/3} = 2^{5/3}.$$

Si θ és l'angle entre les rectes

$$\tan(\theta) = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{2^{5/3} - 2^{-1/3}}{1 + 2^{-1/3}2^{5/3}} = 0.6764\ldots$$

Per tant $\theta = \arctan(0.6764\ldots) = 0.594\ldots$ radians. (Uns 34 graus).

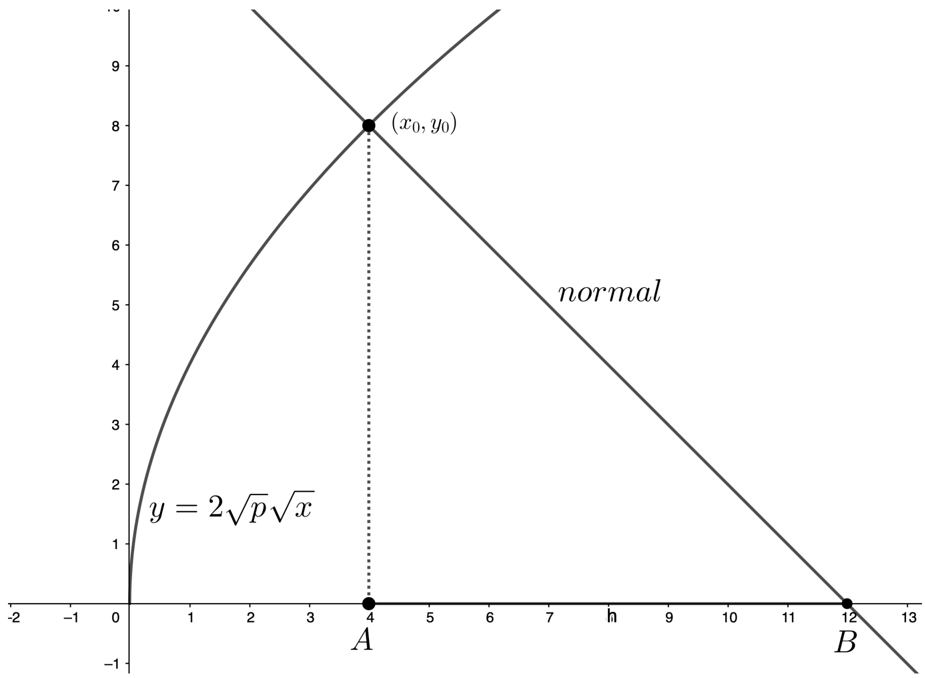
Exercici 30 *Considerem la paràbola $y^2 = 4px$. Demostreu que la projecció sobre l'eix de les x del segment de normal determinat per un punt arbitrari de la paràbola i la intersecció d'aquesta amb l'eix de les x és constant (no depèn del punt) i igual a $2p$.*

Solució. Posem $y = 2\sqrt{p}\sqrt{x}$ de manera que la paràbola donada sigui la gràfica d'aquesta funció. El pendent de la tangent a la gràfica en el punt (x_0, y_0) és $m = y'(x_0) = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{x_0}}$, de manera que el pendent de la normal és

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{\sqrt{x_0}}{\sqrt{p}}$$

i l'equació de la recta normal és

$$y - y_0 = -\frac{\sqrt{x_0}}{\sqrt{p}}(x - x_0).$$



Aquesta recta talla l'eix de les x en $(2p+x_0, 0)$ (només heu de posar $y = 0$ a l'anterior equació). La projecció del segment de norml demanat és el determinat pels punts $A = (x_0, 0)$ i $B = (2p + x_0, 0)$ per tant

$$d(A, B) = 2p.$$

Taula resum

Fem un resum de les derivades de les funcions més habituals.

Funció	Derivada
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Funció	Derivada
$y = f(x)^n$	$y' = nf(x)^{n-1}f'(x)$
$y = e^{f(x)}$	$y' = f'(x)e^{f(x)}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \sin f(x)$	$y' = f'(x)\cos(f(x))$
$y = \cos f(x)$	$y' = -f'(x)\sin f(x)$
$y = \arcsin f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$

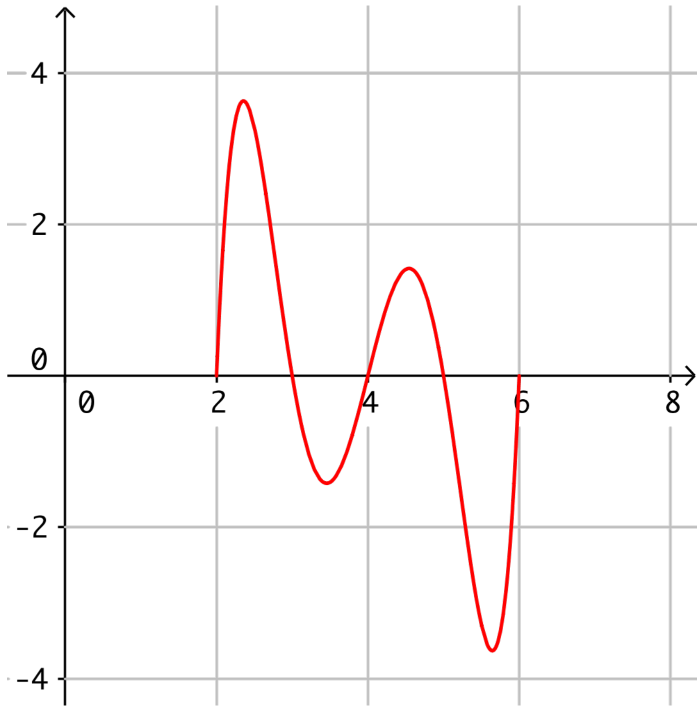
4.7 Màxims i mínims

Donada $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diem que $a \in I$ és un màxim si $f(x) \leq f(a)$ per tot $x \in I$. Correspon a dir que el punt $(a, f(a))$ és el punt més alt de la gràfica de la funció $y = f(x)$.

Anàlogament es defineix mínim.

També tenen importància els màxims i mínims locals, que són màxims o mínims però no sobre tot I sinó només en un petit interval. Concretament, diem que $a \in I$ és un màxim local de $f(x)$ si existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$ per a tot $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

La gràfica mostra una funció definida a l'interval $[2, 6]$ que té un màxim i un mínim globals i un màxim i un mínim locals.



Màxims i mínims locals i globals

Per la interpretació geomètrica de derivada com pendent de la recta tangent a la gràfica queda clar que en *els màxims i mínims locals de la funció la derivada és zero* (la tangent és paral·lela a l'eix de les $x's$).

Demostrem-ho més rigorosament.

Teorema 4.7.1 *Considerem la funció derivable $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i suposem que $a \in I$ és un màxim (resp. mínim) local. Llavors $f'(a) = 0$.*

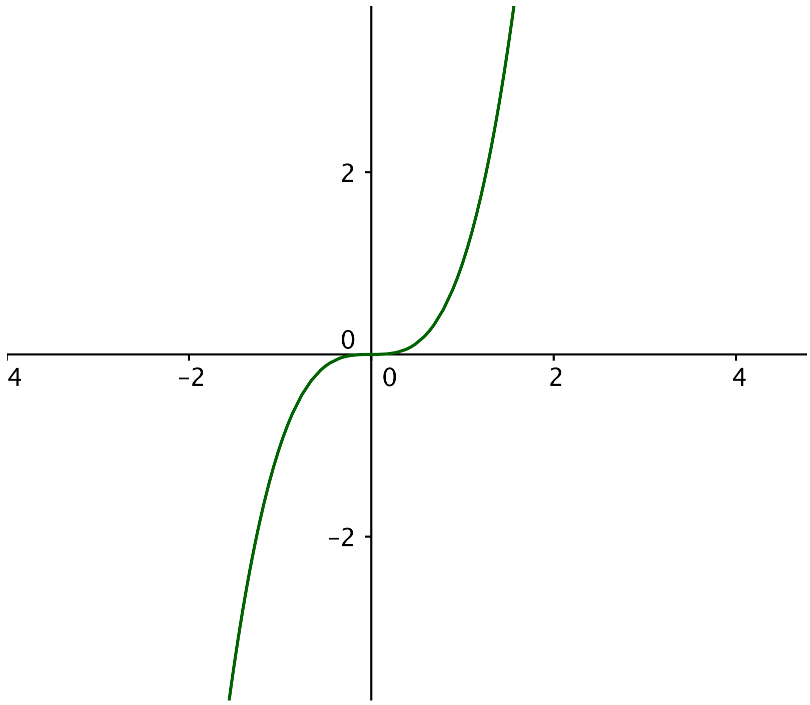
Demostració. El quocient que apareix a la definició de derivada

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

en el cas en que a sigui un màxim local (argument semblant pel mínim) és negatiu si ens acostem a a per la dreta i positiu si ho fem per l'esquerra.[5] Per tant, en el límit ha de ser 0. $\square$

[5] Com que per fer el límit ens acostem a a podem suposar que estem dintre de l'interval $(a-\delta, a+\delta)$ on $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(a) \leq f(x)$) i el numerador és doncs positiu (resp. negatiu).

No obstant la derivada pot ser zero en un punt i aquest punt no ser ni màxim ni mínim, com passa amb la funció $f(x) = x^3$ que té derivada 0 quan $x = 0$ i en canvi el punt $x = 0$ no és ni màxim ni mínim, com es veu de seguida mirant la seva gràfica.



Punt amb derivada zero que no és ni màxim ni mínim

Això fa que a la pràctica per calcular màxims i mínims no n'hi hagi prou calculant els punts on s'anul·la la derivada (aquests són els únics candidats a màxim o mínim) sinó que s'ha de fer un estudi particular de cada problema.

Hi ha alguns criteris senzills, com per exemple el que diu que *si* $f'(c) = 0$ *i* $f''(c) > 0$ *llavors la funció té un mínim a* $x = c$*, i si* $f'(c) = 0$ *i* $f''(c) < 0$ *llavors la funció té un màxim a* $x = c$. Però queda pendent el cas $f'(c) = f''(c) = 0$. Podríem afinar aquest criteri, però en general un estudi de la funció ens resoldrà el problema.

En molts casos es pot determinar si el punt crític (punts c on $f'(c) = 0$) és màxim o mínim sense recorre a la derivada segona, només cal mirar si la derivada primera és positiva a l'esquerra de c i negativa a la dreta de c. Això ja diu, com veurem a la secció següent, Corol·lari 4.8.3, que la funció és creixent fins a c i decreixent a partir de c i per tant c és un màxim.

4.8 Teorema del valor mitjà

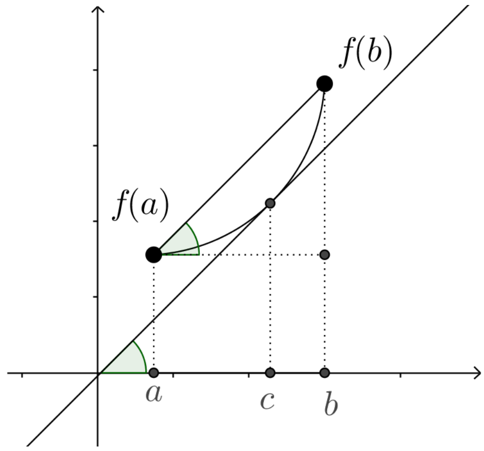
Teorema 4.8.1 (Teorema del valor mitjà) *Sigui* $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funció derivable definida a l'interval obert* I*. Si* $a, b \in I$*, amb* $a < b$*, existeix* $c \in (a, b)$*, tal que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Demostració. Donem només la idea intuïtiva.[6] Una mirada a la figura fa veure que existeix un punt $c \in (a, b)$ on la tangent és paral·lela a la recta que uneix els punts

[6] Des del punt de vista formal és més normal demostrar primer el teorema de Rolle a partir de

$A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$. Només heu d'imaginar aquesta tangent dibuixada en un punt de la gràfica que es va movent de A a B.



Aquestes dues rectes tenen doncs la mateixa tangent, és a dir,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

Corol·lari 4.8.2 (Teorema de Rolle) *Sigui $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable definida a l'interval obert I. Si $a, b \in I$, amb $a < b$, i $f(a) = f(b)$ existeix $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$*

Demostració. Conseqüència immediata del teorema del valor mitjà. $\square$

El teorema del valor mitjà permet relacionar el creixement o decreixement d'una funció amb la seva derivada. En efecte, tenim el resultat següent.

Corol·lari 4.8.3 *Sigui $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable definida a l'interval obert I. Si $f'(x) > 0$ per a tot $x \in I$, llavors la funció és creixent. Si $f'(x) < 0$ per a tot $x \in I$, llavors la funció és decreixent.*

Demostració. Que $f(x)$ sigui creixent vol dir que $x < y$ implica $f(x) < f(y)$ i decreixent vol dir que $x < y$ implica $f(x) > f(y)$. Aplicant el teorema del valor mitjà a l'interval (x, y) hem acabat. $\square$

Exercici 31 *Proveu que la funció $y = \tan(x)$ és creixent a $(-\pi/2, \pi/2)$.*

Solució. Només hem de derivar

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

i observar que aquesta derivada és sempre positiva. $\square$

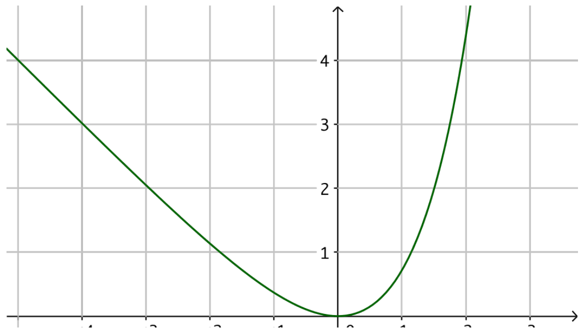
---

la idea de que la derivada s'anul·la en els màxims i mínims i deduir després el teorema del valor mitjà. Per a això només cal considerar la funció

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Exercici 32 *Proveu que l'equació $e^x = x+1$ només admet la solució $x = 0$.*

Solució. Que $x = 0$ és solució és clar. Observem que la funció $f(x) = e^x - x - 1$ és tal que $f(0) = 0$ i $f'(x) = e^x - 1 < 0$ si $x < 0$, i $f'(x) = e^x - 1 > 0$ si $x > 0$.



Gràfica de la funció $y = e^x - x - 1$.

Per tant és decreixent a $(-\infty, 0)$ i creixent a $(0, \infty)$. Per tant ha de ser positiva sobre aquests dos intervals. □

Exercici 33 *Proveu que el polinomi $P(x) = ax^4 + bx + c$, siguin qui siguin a, b, c amb $a \neq 0$, no pot tenir més de dues arrels reals.*

Solució. Pel teorema de Rolle entre dues arrels consecutives $x_1 < x_2$ de $P(x)$ hi ha una arrel ξ del polinomi. En efecte,

$$P(x_1) - P(x_2) = 0 - 0 = 0 = (x_2 - x_1)P'(\xi)$$

Si $P(x)$ tingués tres arrels reals diferents la seva derivada tindria, pel que acabem de dir, com a mínim dues arrels rels diferents. Però $P'(x) = 4ax^3 + b$ de manera que si posem

$$4ax^3 + b = 0$$

obtenim $x = \sqrt[3]{-b/4a}$ i aquesta equació només té una arrel. □

Exercici 34 *Proveu que l'equació $xe^x = 2$ té una única arrel a l'interval* $(0, 1)$

Solució. Considerem la funció $f(x) = xe^x - 2$. Com $f(0) = -2$ és negatiu i $f(1) = e - 2$ aquesta funció té, pel teorema de Bolzano, almenys un zero (i per tant una solució de l'equació donada) en aquest interval $(0, 1)$. A més, com $f'(x) = e^x(x+1)$ podem afirmar que aquesta derivada és positiva a $(0, 1)$. Per tant la funció és creixent i només pot tenir una arrel. □

4.9 Exercicis d'aplicació del càlcul de màxims i mínims

Exercici 35 *Trobeu els màxims i mínims locals de la funció $y = f(x) = x^4 - 4x$.*

Solució. Igualem a zero la derivada primera i obtenim $f'(x) = 4x^3 - 4 = 0$ d'on l'únic candidat a punt crític és $x = 1$. És clar que si $x < 1$ tenim $f'(x) < 0$ i si $x > 1$ tenim $f'(x) > 0$. Per tant la funció decreix fins a $x = 1$ i creix a partir d'aquest punt. Per tant $x = 1$ és un mínim.

El criteri de la derivada segona ens diu directament que $x = 1$ és un mínim ja que $f''(1) = 12 > 0$.

Exercici 36 *Trobeu els màxims i mínims locals de la funció* $y = f(x) = (\ln(x^2 + x + 1))^2$.

Solució. Observeu que per tot x l'expressió $x^2 + x + 1$ és sempre positiva de manera que té sentit calcular el seu logaritme neperià. La derivada val $f'(x) = 2\ln(x^2 + x + 1) \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ que s'anul·la quan $2x + 1 = 0$, o bé quan $x^2 + x + 1 = 1$ (el logaritme neperià de 1 és 0). Això dóna $x = -1/2$, $x = -1$ i $x = 0$.

La derivada segona[7] val

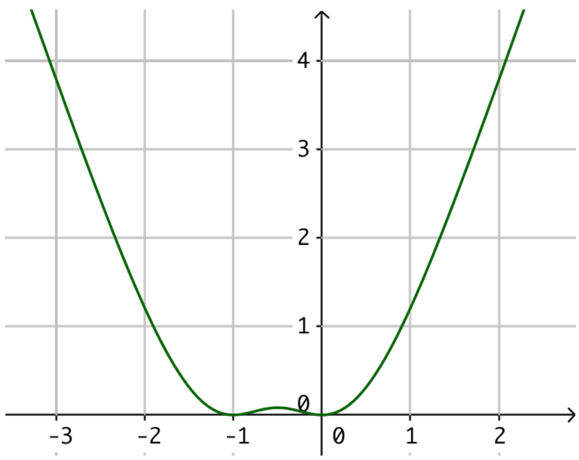
$$f''(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\Big(2(2x+1)^2 + 2\ln(x^2+x+1)(-2x^2-2x+1)\Big)$$

per tant

$$\begin{aligned} f''(-1/2) &= 2\ln(3/4)(\frac{8}{3}) < 0, \qquad x = -1/2 \text{ és màxim,} \\ f''(-1) &= 2 > 0, \qquad x = -1 \text{ és mínim,} \\ f''(0) &= 2 > 0, \qquad x = 0 \text{ és mínim.} \end{aligned}$$

Podeu arribar a la mateixa conclusió sense fer la derivada segona, estudiant el signe de la derivada primera abans i després de cadascun d'aquests tres punts.

Per exemple si volem estudiar $x = 0$ observem que $x^2 + x + 1$ val 1 en el punt $x = 0$ i que és més gran que 1 a partir de $x > 0$ i més petita que 1 si $x < 0$ (observeu que és una paràbola). Llavors $\ln(x^2 + x + 1)$ es positiu si $x > 0$ i negatiu si $x < 0$ (els logaritmes neperians de nombres positius menors que 1 és negatiu). Com el signe de la derivada primera prop de $x = 0$ ve controlat pel signe d'aquest logaritme (la quantitat $(2x + 1)/(x^2 + x + 1)$) és positiva per x pròxima. a zero) la funció és decreixent abans de $x = 0$ i creixent a partir de $x = 0$, per tant $x = 0$ és un mínim.



[7] Aquest exercici és per que veieu que al derivada segona surt complicada i en canvi l'estudi del signe de la derivada primera és relativament senzill.

Exercici 37 *De totes les rectes que passen pel punt $(1,8)$ i tallen les parts estrictament positives del eixos x i y, trobeu la que el segment determinat sobre la recta per aquests eixos sigui de longitud mínima.*

Solució. Observem que l'enunciat és equivalent a demanar quin és el segment més curt d'entre tots els segments que tenen els extrems sobre els eixos de coordenades i passen pel punt $(1,8)$.

Les rectes per $(1,8)$ són $y-8=m(x-1)$ on m és el pendent desconegut que hem de determinar. Aquesta recta talla l'eix x en $A=(1-\frac{8}{m},0)$ i l'eix y en $B=(0,8-m)$. La distància al quadrat és doncs la funció de m

$$f(m)=d^2(A,B)=(1-\frac{8}{m})^2+(8-m)^2.$$

Derivant i igualant a zero tenim

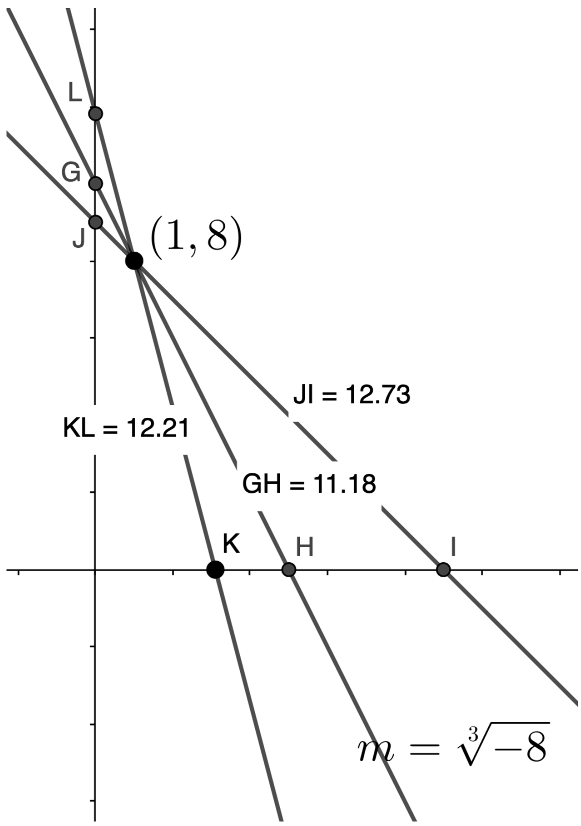
$$f'(m)=2(1-\frac{8}{m})(\frac{8}{m^2})+2(8-m)(-1)=0,$$

que es pot escriure com

$$8(m-8)=(8-m)m^3$$

d'on o bé $m=8$ cas excloem ja que la recta passaria er l'origen o

$$m=\sqrt[3]{-8}=-2.$$



Repetiut l'exercici canviant $P = (1, 8)$ per $P = (a, b)$.

Exercici 38 *Es vol construir un dipòsit d'acer en forma de cilindre circular i semi-esferes en els extrems per emmagatzemar gas propà. El cost per metre quadrat dels extrems esfèrics és el doble que el de la paret cilíndrica. Quines dimensions són les més econòmiques si el volum desitjat és de 10 metres cúbics?*

Solució. Siguin r, h respectivament el radi de la base i l'altura del cilindre mesurats en metres. Ha de ser, doncs,

$$V = 10 = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h.$$

El cost depèn de l'àrea. Si el cost del cilindre és p euros metre quadrat, el cost de l'esfera és $2p$ €$/m^2$, i per tant el cost total és

$$C = 2\pi rhp + 4\pi r^2 2p.$$

Com

$$h = \frac{10 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}$$

la funció a minimitzar és

$$C(r) = 2\pi rp\frac{10 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2} + 8\pi r^2 p = \frac{20p}{r} + \frac{16\pi r^2 p}{3}.$$

L'extrem s'agafa quan

$$\frac{dC}{dr} = \frac{-20p}{r^2} + \frac{32\pi rp}{3} = 0,$$

és a dir,

$$r = \sqrt[3]{\frac{15}{8\pi}}.$$

Substituint a l'expressió de h obtenim

$$h = \frac{30}{\sqrt[3]{225\pi}}.$$

Per justificar que el valor de r trobat és realment el punt on $C(r)$ pren el valor mínim observem que $C(r)$ tendeix a infinit tan quan r tendeix a 0 com quan r tendeix infinit, per tant té un mínim absolut, que ha de ser, doncs, el punt trobat.

Exercici 39 *Un filferro de longitud L es talla en dos trossos, un d'ells per formar un quadrat i l'altre per formar un triangle equilàter. Com s'hauria de tallar el filferro si volem que la suma de les àrees tancades pels dos trossos sigui mínima?*

Solució. Sigui x el costat del quadrat i y el costat del triangle equilàter. Ha de ser, doncs,

$$L = 4x + 3y.$$

La funció a minimitzar és $A = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2$. En funció de x:

$$A(x) = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{L-4x}{3})^2.$$

L'extrem s'agafa quan

$$\frac{dA}{dx} = 2x + \frac{\sqrt{3}}{36}2(L-4x)(-4) = 2x + \frac{2\sqrt{3}}{9}(4x-L) = 0.$$

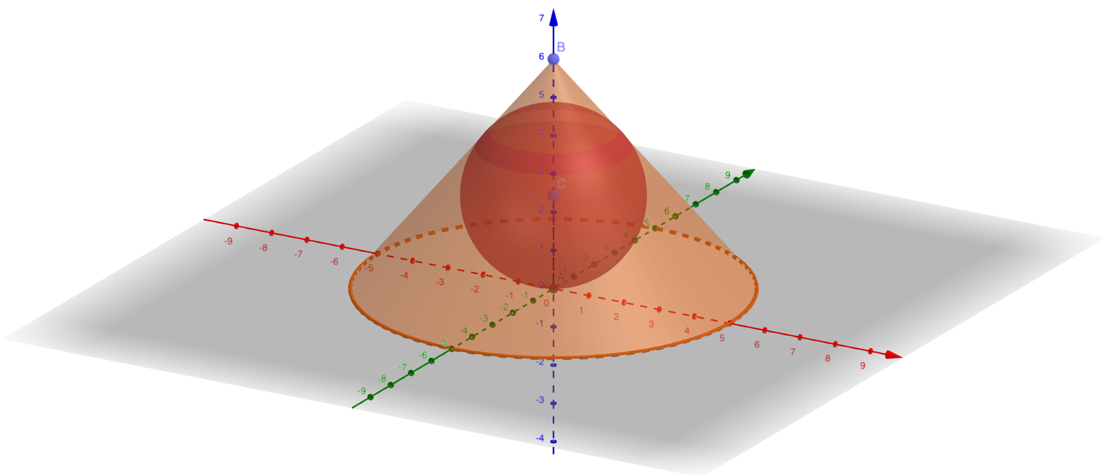
Resolent obtenim

$$x = \frac{\sqrt{3}L}{9+4\sqrt{3}}, \quad y = \frac{3L}{9+4\sqrt{3}}.$$

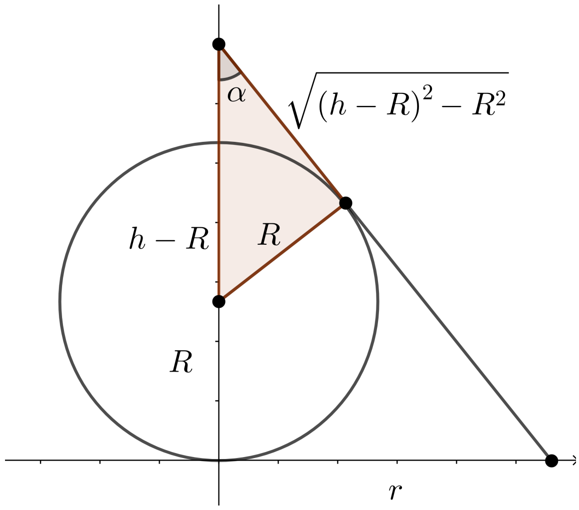
És molt clar que la derivada segona és positiva, per tant estem en un mínim.

Exercici 40 *Demostreu que el con de volum mínim circumscrit a una esfera, com indica la figura (l'esfera és tangent a la base i a les generatrius del con) té volum 2 vegades el de l'esfera.*

Solució. Com el volum del con és $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, on r és el radi de la base i h l'altura del con, només hem de trobar una relació entre r i h a partir de la relació donada amb l'esfera de radi R, per poder escriure el volum com funció d'una variable i poder derivar.



Aquesta relació es dedueix d'estudiar els dos triangles rectangles que es formen. Si calculem la tangent de l'angle α de la figura en el triangle ombrejat i després en el triangle més gran obtenim



$$\tan(\alpha) = \frac{R}{\sqrt{h^2 - 2Rh}} = \frac{r}{h}$$

d'on

$$r = \frac{Rh}{\sqrt{h^2 - 2Rh}}.$$

Ara ja podem escriure el volum del con com funció d'una única variable, l'altura h.

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi R^2}{3}\frac{h^3}{h^2 - 2Rh}$$

Llavors

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{3}\frac{3h^2(h^2 - 2Rh) - h^3(2h - 2R)}{(h^2 - 2Rh)^2} = 0$$

que equival a

$$h^4 - 6Rh^3 + 2h^3R = h^3(h - 4R) = 0$$

i per tant $h = 4R$. Observem que això implica

$$r = \frac{4R}{\sqrt{8}}$$

Així el volum del con és $V(h) = \frac{\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{3}2R^2 4R = \frac{8}{3}\pi R^3$ que és justament el doble del volum de l'esfera de radi R. □

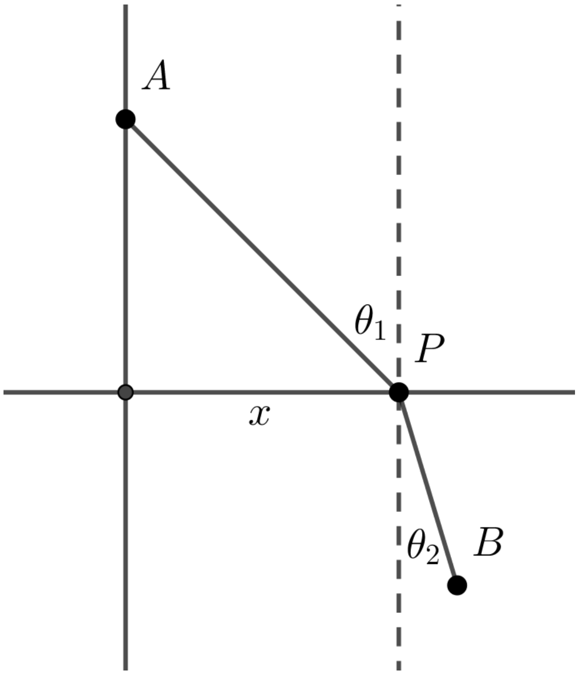
Exercici 41 *Demostreu el principi d'òptica de Fermat.*

Solució. El principi de Fermat diu que si la llum viatge d'un punt A que està en un cert medi (aigua, oli, etc) a un punt B que està en un altra medi, la trajectòria de la llum serà tal que el temps emprat en aquest trajecte sigui mínim.

Això es tradueix en la fórmula

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

on c_1 és la velocitat de la llum en el primer medi i c_2 en el segon, i θ_1, θ_2 són els angles d'incidència de la figura (angles entre la trajectòria de la llum i la normal a la superfície inter-medis.)



Sigui t_1 el temps que triga la llum en anar de $A = (0, a)$ a $P = (x, 0)$ i t_2 el temps que triga la llum en anar de P a B. Tenim

$$c_1 = \frac{AP}{t_1}, \quad c_2 = \frac{PB}{t_2}.$$

El temps total a minimitzar és

$$t = t_1 + t_2 = \frac{AP}{c_1} + \frac{PB}{c_2}.$$

Posem totes les funcions en funció de x on, com acabem de dir, $P = (x, 0)$. Tenim, posant $B = (b_1, b_2)$,

$$AP = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad PB = \sqrt{(b_1 - x)^2 + b_2^2}.$$

Per tant

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{c_1}\frac{d}{dx}(\sqrt{a^2 + x^2}) + \frac{1}{c_2}\frac{d}{dx}(\sqrt{(b_1 - x)^2 + b_2^2}) \\ &= \frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{c_2}\frac{b_1 - x}{\sqrt{(b_1 - x)^2 + b_2^2}}. \end{aligned}$$

Però el dibuix ens diu que

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \sin\theta_2 = \frac{b_1 - x}{\sqrt{(b_1 - x)^2 + b_2^2}}.$$

Per tant, igualant a zero la derivada de t respecte x, ja que busquem un mínim, tenim

$$\frac{1}{c_1}\sin\theta_1 - \frac{1}{c_2}\sin\theta_2 = 0,$$

com volíem.

Observem que trobar x, donats A, B, c_1, c_2, ens porta a resoldre l'equació (de quart grau si traiem arrels, i per tant complicada)

$$\frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{c_2}\frac{b_1 - x}{\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}}.$$

Capítol 5

Càlcul Integral

5.1 Primitiva d'una funció

Definició 5.1 *La* primitiva *(o integral) d'una funció $f(x)$ és una altra funció $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.*

Per exemple, si considerem les taules de la pàgina 50 i les llegim de dreta a esquerra tenim una taula de primitives d'aquelles funcions: la integral de e^x és e^x, la integral del $\cos(x)$ és $\sin(x)$, etc.

La primitiva de $f(x)$ es denota per

$$\int f(x)dx.$$

Potser la notació $\int f(x)$ sembla més adequada en aquest moment, però per diverses raons, entre elles raons històriques, usem la notació anterior que es llegeix *integral de $f(x)$ diferencial de x.*

Com que la derivada de la funció constant és zero la primitiva d'una funció només queda determinada llevat de constants, de manera que sovint escriurem

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

on C és una constant arbitrària.

Per exemple, la primera fila de la taula de la pàgina 50, llegida de dreta a esquerra, diu

$$\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} + C,$$

fórmula vàlida per a tot $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$. Per això (ser $n \neq 0$) la tercera fila de la taula no és un cas particular de la primera, i hem d'escriure

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C.$$

El fet de que una funció tingui una única derivada però moltes primitives jugarà un paper important més endavant en l'estudi de les equacions diferencials.

Hi ha molts mètodes per calcular primitives. Aquí n'estudiarem algun per tal de que us feu una idea de la situació. La majoria es basen en transformar el problema en el càlcul d'alguna de les quatre primitives anteriors.

Exemple 5.1.1 *Trobeu una primitiva de* $\sqrt{2x+1}$.

Solució. Mirant la taula de la pàgina 50 veiem que agafant $f(x) = 2x+1$, i $n = 3/2$ (l'arrel quadrada vol dir elevar a $1/2$ i a la taula apareix l'exponent $n-1$; posant $n-1 = 1/2$ tenim $n = 3/2$) tenim

$$nf(x)^{n-1}f'(x) = 3\sqrt{2x+1}.$$

Per tant,

$$\int \sqrt{2x+1}dx = \int \frac{1}{3}nf(x)^{n-1}f'(x) = \frac{1}{3}f(x)^n = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C. \quad \square$$

Amb *Wolfram Alpha* només heu d'escriure "integrate sqrt(2x+1)".

A continuació donem una manera mecànica per resoldre problemes similars a aquest.

5.2 Mètode del canvi de variable

Observem que podem passar de la taula de la dreta a la taula de l'esquerra de la pàgina 50 de la manera següent: Posem

$$\left.\begin{array}{rcl} f(x) & = & t \\ f'(x)dx & = & dt \end{array}\right\}$$

La segona fila l'hem obtingut derivant els dos membres de la primera igualtat respecte de x:

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \frac{dt}{dx}$$

però que escrivim com $f'(x)dx = dt$, és a dir, manipulem el signe de derivació $\frac{dt}{dx}$ com si fos un quocient. Aquest és el motiu d'usar la notació $\int f(x)\ dx$ en lloc de $\int f(x)$.

Amb aquest canvi de variable transformem la segona taula de la pàgina 50 en la primera.

$$\int nf(x)^{n-1}f'(x)\ dx = \int nt^{n-1}dt = t^n + C = f(x)^n + C$$

$$\int f'(x)e^{f(x)}\ dx = \int e^t\ dt = e^t + C = e^{f(x)} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln f(x) + C$$

$$\int f'(x)\cos f(x)\ dx = \int \cos t\ dt = \sin t + C = \sin f(x) + C$$

Repetim l'exercici 5.1.1 utilitzant ara el mètode del canvi de variable.

Exemple 5.2.1 *Trobeu una primitiva de* $\sqrt{2x+1}$

Solució. Posem

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+1 & = & t \\ 2\,dx & = & dt \end{array}\right\}$$

i substituïm

$$\int (2x+1)^{1/2} dx = \int t^{1/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C.$$

O encara millor, posem

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+1 & = & t^2 \\ 2\,dx & = & 2tdt \end{array}\right\}$$

i substituïm

$$\int (2x+1)^{1/2} dx = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C. \quad \square$$

Exemple 5.2.2 *Trobeu una primitiva de* xe^{x^2}.

Solució. Posem

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 & = & t \\ 2x\,dx & = & dt \end{array}\right\}$$

i substituïm

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C. \quad \square$$

Exemple 5.2.3 *Trobeu una primitiva de* $\tan x$.

Solució. Posem

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos x & = & t \\ -\sin x\,dx & = & dt \end{array}\right\}$$

i substituïm

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t + C = -\ln(\cos x) + C. \quad \square$$

Exemple 5.2.4 *Trobeu una primitiva de* $\cos(3x+1)$.

Solució. Posem

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x+1 & = & t \\ 3\,dx & = & dt \end{array}\right\}$$

i substituïm

$$\int \cos(3x+1)\,dx = \int \cos t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x+1) + C. \quad \square$$

En canvi, petites modificacions de les funcions anteriors, com ara $\sqrt{2x^2+1}$, $\cos(3x^2+1)$, $\tan x^2$, e^{x^2}, donen lloc a funcions difícilment integrables. La última d'elles fa més de cent anys que es va demostrar que la seva integral no és expressable per funcions elementals.

5.3 Integració per parts

Integrant els dos termes de la fórmula de la derivada del producte

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

obtenim l'anomenada *fórmula d'integració per parts*

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx + C$$

útil quan la integral de la dreta és més simple que la de l'esquerra.

Exercici 42 *Calculeu*

$$\int xe^x dx$$

Solució. Posem

$$\left.\begin{array}{rcl} e^x & = & f(x) \\ x & = & g(x) \end{array}\right\}$$

Observeu que com que volem integrar el producte $f'(x) \cdot g(x)$ un cop decidim que $g(x) = x$ ha de ser $f(x) = \int e^x\,dx$.

Llavors

$$\int xe^x dx = \int f'(x)g(x)\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C. \quad \square$$

Exercici 43 *Calculeu*

$$\int x\cos(x)dx$$

Solució. Posem

$$\left.\begin{array}{rcl} \sin(x) & = & f(x) \\ x & = & g(x) \end{array}\right\}$$

Observeu que com que volem integrar el producte $f'(x) \cdot g(x)$ un cop decidim que $g(x) = x$ ha de ser $f(x) = \int \cos(x)\,dx$.

Llavors

$$\int x\cos(x)\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x) + C. \quad \square$$

Exercici 44 *Calculeu*

$$I = \int e^x\cos(x)dx$$

Solució. Posem

$$\left.\begin{array}{rcl} \sin(x) & = & f(x) \\ e^x & = & g(x) \end{array}\right\}$$

Observeu que com que volem integrar el producte $f'(x) \cdot g(x)$ un cop decidim que $g(x) = e^x$ ha de ser $f(x) = \int \cos(x)\, dx$. Llavors

$$I = \int e^x \cos(x)\, dx = \int f'(x) g(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\, dx.$$

Per calculat aquesta darrera integral tornem a fer el mateix. Posem

$$\left.\begin{array}{rcl} -\cos(x) & = & f(x) \\ e^x & = & g(x) \end{array}\right\}$$

Observeu que com que volem integrar el producte $f'(x) \cdot g(x)$ un cop decidim que $g(x) = e^x$ ha de ser $f(x) = \int \sin(x)\, dx$. Llavors

$$\begin{aligned} I &= e^x \sin(x) - \left[-e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)\, dx \right] + C \\ &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - I + C. \end{aligned}$$

Per tant

$$2I = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) + C,$$

és a dir,

$$\int e^x \cos(x)\, dx = \frac{1}{2}(e^x \sin(x) + e^x \cos(x)) + C$$

(com C és una constant arbitrària $C/2$ també i li tornem a dir C).

5.4 Integració de funcions racionals

Per funció racional entenem una funció donada com a quocient de polinomis. Per exemple,

$$f(x) = \frac{x+1}{x+3}, \quad f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3+1}, \quad etc.$$

La fórmula de la divisió euclidiana sobre el conjunt de nombres enters

$$D = dq + r, \quad r < d$$

(dividend igual a divisor per quocient més residu) és vàlida també en el conjunt de plonomis

$$D(x) = d(x)q(x) + r(x), \quad \mathrm{grau}\, r(x) < \mathrm{grau}\, d(x)$$

amb la petita variació de canviar $r < d$ per $\mathrm{grau}\, r(x) < \mathrm{grau}\, d(x)$ (no té sentit dir que un polinomi és més petit que un altra).

Així doncs tenim

$$\frac{D(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \quad \mathrm{grau}\, r(x) < \mathrm{grau}\, d(x)$$

de manera que la integral del terme de l'esquerra d'aquesta igualtat és la integral d'un polinomi, que és trivial, més la integral d'un quocient de polinomis amb el grau del numerador menor que el grau del denominador.

Així doncs per saber fer integrals racionals només cal saber fer integrals racionals en les que el grau del numerador és menor que el grau del denominador.

Només farem, a títol d'exemple, el cas en que el polinomi del numerador té grau 1 i el denominador té grau 2 amb arrels reals diferents.

Per calcular
$$\int \frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)}dx$$
escrivim
$$\frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)} = \frac{M}{x-a} + \frac{N}{x-b} = \frac{M(x-b)+N(x-a)}{(x-a)(x-b)},$$
i determinem M i N resolent el sistema
$$\left.\begin{array}{rcl} M+N &=& A \\ -Mb-Na &=& B \end{array}\right\}$$
i la integral demanada val
$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)}dx &= M\int \frac{dx}{x-a} + N\int \frac{dx}{x-b} \\ &= M\ln(x-a)+N\ln(x-b) = \ln(x-a)^M(x-b)^N. \quad \square \end{aligned}$$

Ja es veu que si $a=b$ (i no arrel del numerador) el sistema anterior no té solució. Hem de modificar lleugerament el mètode. Fem un exemple.

Exercici 45 *Calculeu*
$$\int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx.$$

Solució. Posem
$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{(x-3)^2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A+B(x-3)}{(x-3)^2}$$
i determinem A i B igualant coeficients. Obtenim $B=1, A=3$ Llavors,
$$\int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx = \int \frac{3}{(x-3)^2}\,dx + \int \frac{1}{x-3}\,dx = -\frac{3}{x-3} + \ln(x-3) + C. \quad \square$$

Exercici 46 *Calculeu*
$$\int \frac{x-7}{x^2-x+6}\,dx.$$

Solució. Les arrels del denominador són $x=2$ i $x=3$. Per tant,
$$\frac{x-7}{(x-2)(x-3)} = \frac{M}{x-2} + \frac{N}{x-3} = \frac{M(x-3)+N(x-2)}{(x-2)(x-3)},$$
per tant
$$\begin{array}{rcl} 1 &=& M+N \\ -7 &=& -3M-2N \end{array}$$
d'on $M=5$, $N=-4$. Així
$$\begin{aligned} \int \frac{x-7}{(x-2)(x-3)}dx &= 5\int \frac{dx}{x-2} - 4\int \frac{dx}{x-3} \\ &= 5\ln(x-2)-4\ln(x-3) = \ln(x-2)^5(x-3)^{-4}. \quad \square \end{aligned}$$

Exercici 47 *Calculeu*

$$\int \frac{x^2}{(x-3)^4}\, dx.$$

Solució. Posem

$$\frac{x^2}{(x-3)^4} = \frac{A}{(x-3)^4} + \frac{B}{(x-3)^3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{A + B(x-3) + C(x-3)^2}{(x-3)^4}$$

d'on

$$\begin{aligned} 1 &= C \\ 0 &= B - 6C \\ 0 &= A - 3B + 9C \end{aligned}$$

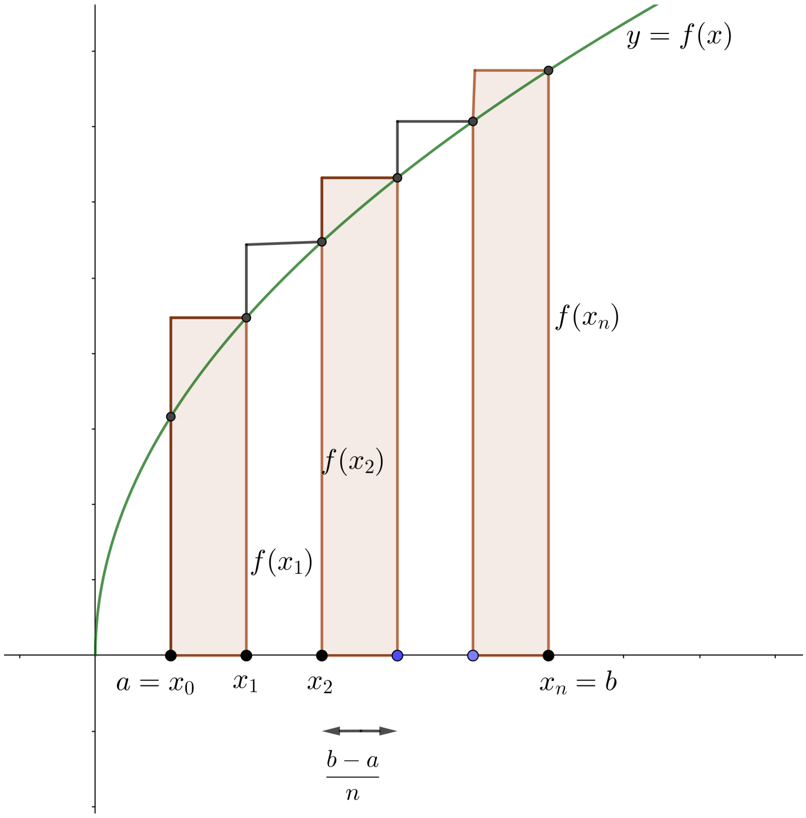
d'on $A = 9, B = 6, C = 1$. Per tant

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x-3)^4}\, dx &= \int \frac{9}{(x-3)^4}\, dx + \int \frac{6}{(x-3)^3}\, dx + \int \frac{1}{(x-3)^2}\, dx \\ &= -\frac{3}{(x-3)^3} - \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{1}{x-3} + ct \\ &= -\frac{x^2 - 3x + 3}{(x-3)^3} + ct. \end{aligned}$$

5.5 Sumes de Riemann

L'àrea d'una regió del pla es pot trobar per exemple dividint-la en petits triangles o rectangles i sumant les àrees d'aquestes figures. Com més petits fem aquests triangles o rectangles més n'hi haurà i més acurat serà el resultat.

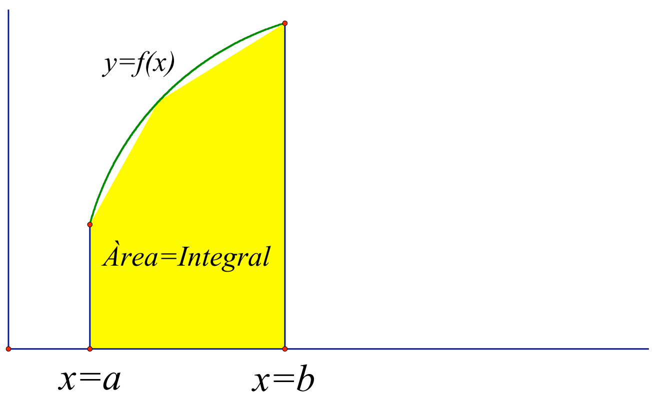
Per exemple, si volem calcular l'àrea sota la gràfica d'una funció $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, podem dividir la regió en petits rectangles de base sobre el segment $[a, b]$ i altura donada per la gràfica de f com indica la figura.



Aquesta àrea es denota per[1]

$$A = \int_a^b f(x)\,dx,$$

i representa, doncs, l'àrea sota la gràfica de la funció $y = f(x)$, entre els punts d'abscisses $x = a$ i $x = b$



Aquesta àrea la podem calcular directament, sense recórrer a derivades, com farem posteriorment. En efecte, dividim l'interval $[a, b]$ en n parts iguals. Cada part

[1]El *teorema fonamental del càlcul*, que veurem a continuació, teorema 5.6.1, justifica aquesta notació: el mateix símbol $\int$ s'utilitza per calcular primitives i per calcular àrees, amb la única diferència de que ara apareixen els límits a, b de l'interval, $\int_a^b$.

tindrà longitud $\dfrac{b-a}{n}$ i aquestes parts estaran delimitades pels punts

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}; \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Observem que $x_0 = a$ i $x_n = b$.

L'àrea que busquem és aproximadament igual a la suma de les àrees dels rectangles de base $\dfrac{b-a}{n}$ i altures respectives $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$

Així

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{n} f(x_1) + \cdots + \frac{b-a}{n} f(x_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k). \tag{5.1}$$

Si la n és molt gran l'error serà molt petit, i tindrem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \tag{5.2}$$

que prendrem com definició d'integral (definida) d'una funció.

Es veu fàcilment que no cal que la divisió que s'ha fet sobre l'interval $[a, b]$ sigui per intervals iguals, de manera que tenim la típica expressió

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k. \tag{5.3}$$

Exercici 48 *Trobeu l'àrea sota la paràbola $y = x^2$ entre $x = 0$ i $x = 1$.*

Solució. Aplicant[2] la formula (5.2) en aquest cas, tenim $x_k = 0 + k\dfrac{1}{n} = \dfrac{k}{n}$. Per tant,

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}. \quad \square$$

Hem usat la coneguda fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

que podeu demostrar per inducció o bé com s'indica a continuació.

Exercici 49 *Demostreu, sense usar inducció, que*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

[2]Aplicant el *el teorema fonamental del càlcul*que veurem a continuació, teorema 5.6.1, aquest exercici és immediat.

Solució. Posem

$$\begin{array}{rcr} 1^3 & = & 1 \\ (1+1)^3 & = & 1^3+3\cdot 1^2+3\cdot 1+1 \\ (2+1)^3 & = & 2^3+3\cdot 2^2+3\cdot 2+1 \\ (3+1)^3 & = & 3^3+3\cdot 3^2+3\cdot 3+1 \\ & \vdots & \\ (n+1)^3 & = & n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1 \end{array}$$

Sumem totes aquestes igualtats i observem que el terme 1^3 de la primera fila a l'esquerra es simplifica amb el terme 1^3 de la segona fila a la dreta; el terme 2^3 de la segona fila a l'esquerra es simplifica amb el terme 2^3 de la tercera fila a la dreta; el terme 3^3 de la tercera fila a l'esquerra es simplifica amb el terme 3^3 de la quarta fila a la dreta; i així successivament.

De tots els termes de l'esquerra només queda sense simplificar l'últim (ja que no té cap més fila per sota). Així tindrem

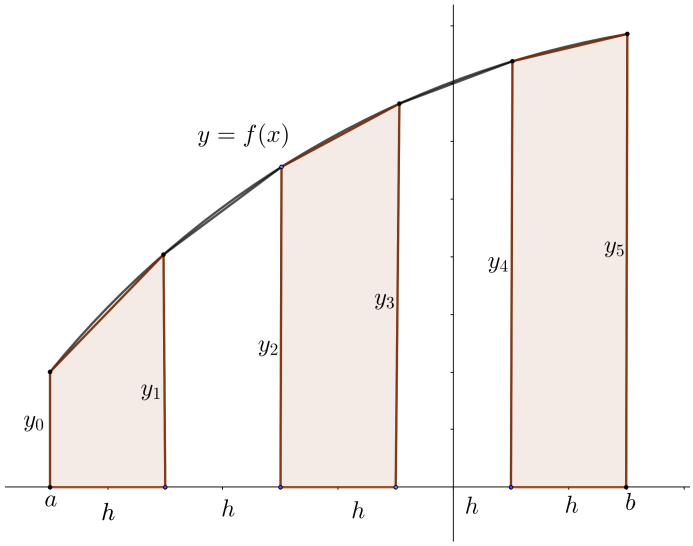
$$(n+1)^3 = 3(\sum_{k=1}^{n} k^2) + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Aïllant

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n+1}{3}((n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2}) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad \square$$

Fórmula del trapezi

Tot i que aquests temes els desenvolupareu a la part de càlcul numèric fem ara un comentari sobre la fómula del trapezi. La idea és molt simple: per aproximar millor l'àrea sota la gràfica d'una funció dividim aquesta zona en trapezis en lloc de en rectangles com havíem fet a la fórmula (5.1). Recordeu que l'àrea d'un trapezi és igual a la suma de la base major més la base menor dividit per 2 i multiplicat per l'altura.



De la gràfica adjunta és dedueix directament que

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\cdots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right),$$

que es pot escriure com

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\cdots+y_{n-1}\right). \tag{5.4}$$

5.6 Teorema fonamental del càlcul

Teorema 5.6.1 (Fonamental del càlcul) *Sigui $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una funció contínua i suposem que $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$, és a dir, $F'(x)=f(x)$. Llavors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

Demostració. Sigui $A:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ la funció àrea, és a dir,

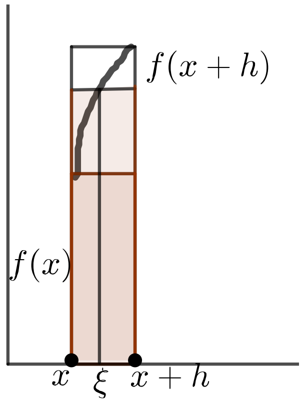
$$A(x)=\int_a^x f(x)dx.$$

Veiem que $A(x)$ és una primitiva de $f(x)$. En efecte,

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(x)\,dx}{h}$$

L'àrea del numerador està compresa entre les àrees dels rectangles de base h i altures $f(x)$ i $f(x+h)$ respectivament com es veu a la figura.

Per tant, si anem augmentant l'altura dels rectangles des de $f(x)$ fins $f(x+h)$ hi haurà, per continuïtat, un rectangle amb l'àrea igual a l'àrea de la figura.



És a dir

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = hf(\xi), \quad x \le \xi \le x+h$$

Per tant,

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(x)\,dx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hf(\xi)}{h} = f(x).$$

Finalment, com

$$A'(x) = F'(x) = f(x)$$

tenim que $A(x) = F(x) + C$ i, com $A(a) = 0$, tenim que $F(a) = -C$, d'on $A(x) = F(x) - F(a)$. En particular

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(b) = F(b) - F(a)$$

com voliem veure. $\square$

Exercici 50 *Trobeu l'àrea del triangle mixtilini format per la gràfica de la paràbola $y = x^2$, l'eix de les x, i la recta $x = 3$.*

Solució. Només hem de calcular

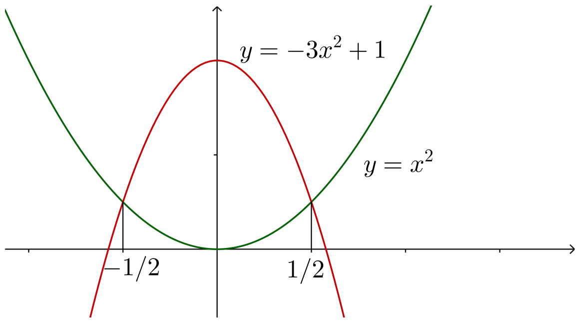
$$\int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9.$$

Exercici 51 *Trobeu l'àrea interceptada per les gràfiques de les funcions $y = x^2$ i $y = -3x^2 + 1$*

Solució. Trobem primer els punts d'intersecció. Igualem

$$x^2 = -3x^2 + 1$$

i tenim $x = \pm\frac{1}{2}$.



L'àrea demanada és l'àrea sota la gràfica de $y = -3x^2 + 1$ menys l'àrea sota la gràfica de $y = x^2$ entre els punts d'abscissa $x = -1/2$ i $x = 1/2$. Per tant

$$A = \int_{-1/2}^{1/2} ((-3x^2 + 1) - x^2)\, dx = \int_{-1/2}^{1/2} (1 - 4x^2)\, dx = \frac{2}{3}.$$

Exercici 52 *Trobeu, pel mètode del trapezi, una aproximació de π a partir de*

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Solució. Pel teorema fonamental sabem que

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Dividint l'interval $[0, 1]$ pels punts $x_0 = 0, x_1 = 1/4, x_2 = 1/2, x_3 = 3/4, x_4 = 1$ veiem que els valors de la funció

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

en aquests punts són respectivament

$$y_0 = 1, y_1 = 0.941, y_2 = 0.8, y_3 = 0.64, y_4 = 1/2.$$

Per la fórmula del trapezi (5.4) (en aquest cas $h = 1/4$)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1 + 1/2}{2} + 0.941 + 0.8 + 0.64\right) = \frac{1}{4} 3.131 \ldots$$

per tant $\pi \simeq 3.131$.

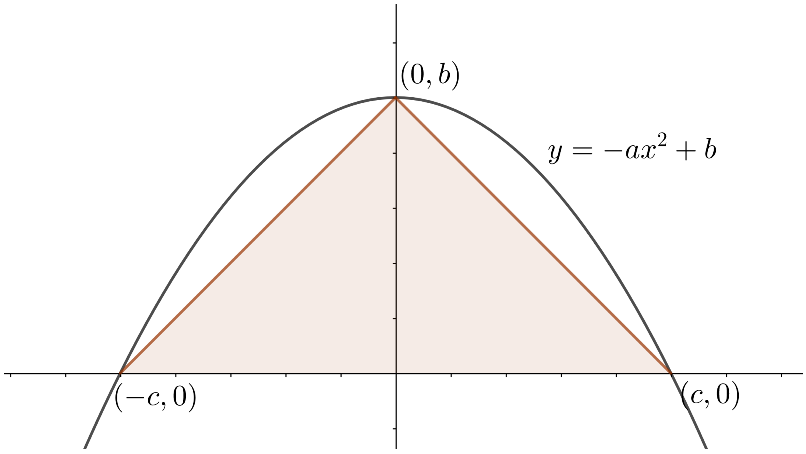
Com més petites fem les subdivisions de l'interval més aproximarem el valor de π. □

Exercici 53 (Arquimedes) [3] *Demostreu que l'àrea sota la paràbola $y = -ax^2 + b$, $a > 0$, i l'eix de les x, és igual a $4/3$ de l'àrea del triangle inscrit amb base l'eix x.*

Demostració. L'àrea demanada val

$$A = \int_{-c}^{c} (-ax^2 + b)\, dx, \quad c = \sqrt{b/a}.$$

[3] Arquimedes ho calcula essencialment amb el que avui anomenem sumes de Riemann.



Així

$$A = -2\frac{ac^3}{3} + 2bc = \frac{4}{3}bc.$$

(Hem usat $c^3 = c\frac{b}{a}$). I com es veu directament a la figura bc és justament l'àrea del triangle inscrit.

5.7 Principi de Cavalieri

La idea d'aquesta secció és demostrar que l'àrea d'un cos pla és la integral de les longituds de les seves seccions rectes, i que el volum d'un cos de l'espai és la integral de les àrees de les seves seccions rectes.

Suposem que volem calcular l'àrea del recinte R limitat per les gràfiques de les funcions $y = f(x)$ i $y = g(x)$ entre els punts $x = a$ i $x = b$, com hem fet a l'exercici 51.

Suposem, només per simplificar l'explicació, que $f(x) > g(x)$ per tot x.

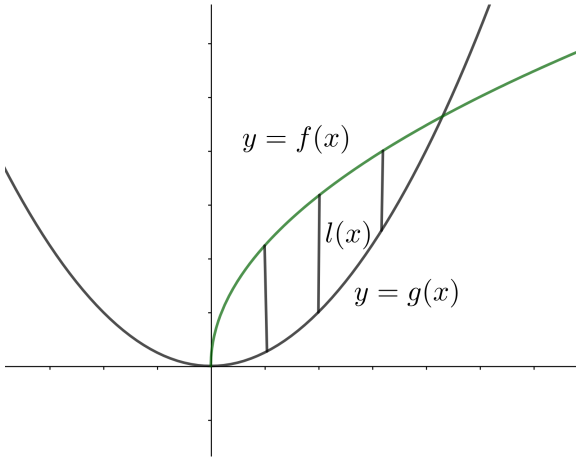
Sabem que

$$\text{Àrea} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Però

$$l(x_0) = f(x_0) - g(x_0)$$

és justament la longitud de la secció que obtenim al tallar el recinte R amb la recta vertical $x = x_0$.



Així,

$$\grave{\text{A}}\text{rea} = \int_a^b l(x)dx = \text{Integral de la longitud de les seccions.}$$

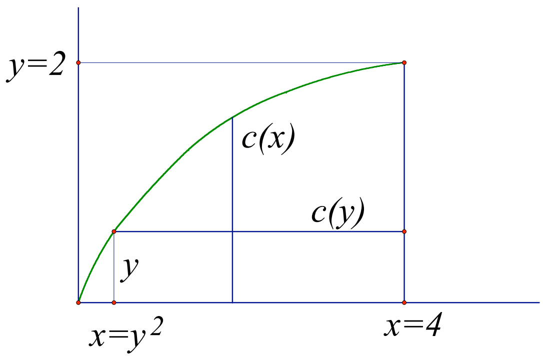
Hem demostrat doncs el resultat següent.

Teorema 5.7.1 (Cavalieri) *L'àrea A d'un cos del pla és igual a la integral de les longituds de les seves seccions rectes.*

Exemple 5.7.2 *Calculeu l'àrea del triangle curvilini format per les rectes $x = 4$, $y = 0$ i la gràfica de la funció $y = +\sqrt{x}$, tallant per $x =$ constant i tallant per $y =$ constant.*

*Solució 1.*Sigui $c(x_0)$ la longitud del segment que obtenim en tallar el triangle curvilini donat amb la recta $x = x_0$.

$$A = \int_0^4 c(x)\,dx = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{16}{3}.$$



Solució 2. Sigui $c(y_0)$ la longitud del segment que obtenim en tallar el triangle curvilini donat amb la recta $y = y_0$.

Llavors

$$A = \int_0^2 c(y)dy = \int_0^2 (4 - y^2)\,dy = \frac{16}{3}.$$

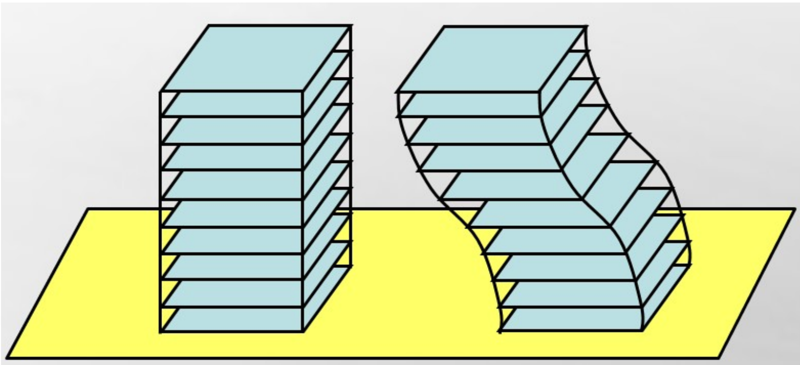
El principi de Cavalier que acabem de demostrar per al càlcul d'àrees val essencialment igual per al càlcul de volums.

Teorema 5.7.3 (Cavalieri) *Donats dos cossos sòlids de la mateixa altura tals que en tallar-los per plans perpendiculars a aquesta altura, donen seccions de la mateixa àrea, llavors els cosos inicials tenen el mateix volum.*

Més concretament, si tenim un sòlid de $\mathbb{R}^3$ *encaixat entre els plans* $x = a$ *i* $x = b$, $a < b$,[4] *i denotem* $A(t)$ *l'àrea de la intersecció del sòlid amb el pla* $x = t$, $a \leq t \leq b$, *tenim*

$$Volum = \int_a^b A(t)dt.$$

Demostració.



Només hem d'aplicar la definició d'integral (5.3). En efecte, si dividim l'altura d'un cos en n parts iguals d'alçada h i descomponem el cos en rodantxes d'altura h, cada rodantxa té per volum l'àrea de la base per l'altura, és a dir,

$$V \simeq \sum_0^n hA(x_k)$$

on $A(x_k)$ es l'àrea de la secció plana que obtenim en tallar el cos per plans perpendiculars a l'altura en punts x_k amb $h = x_{k+1} - x_k$.

Per tant, per definició d'integral,

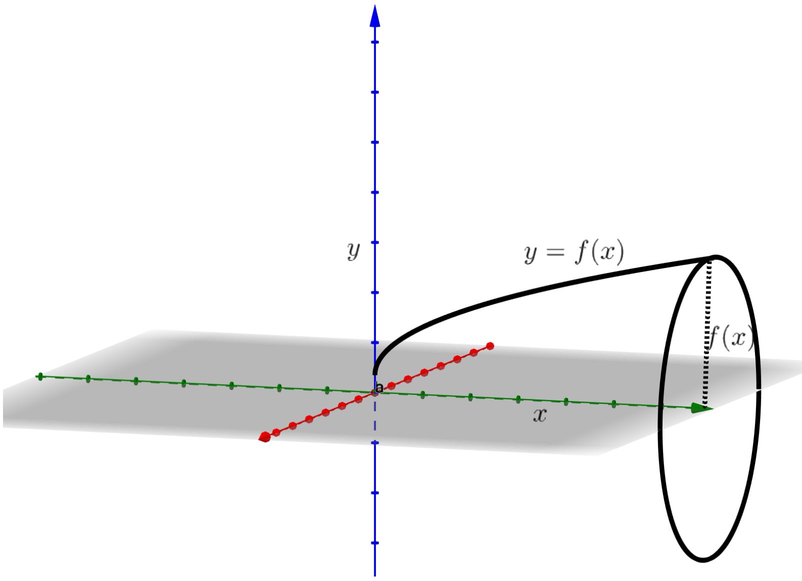
$$V = \lim_{h \to 0} \sum_0^n hA(x_k) = \int_a^b A(t)dt.$$

Volum dels cossos de revolució

En el cas particular dels sòlids de revolució (obtinguts girant la gràfica de $y = f(x)$ al voltant de l'eix de les $x's$ a $\mathbb{R}^3$) es veu clarament que $A(t) = \pi f(t)^2$ de manera que pel principi de Cavalieri

$$Volum = \pi \int_a^b f(t)^2 dt.$$

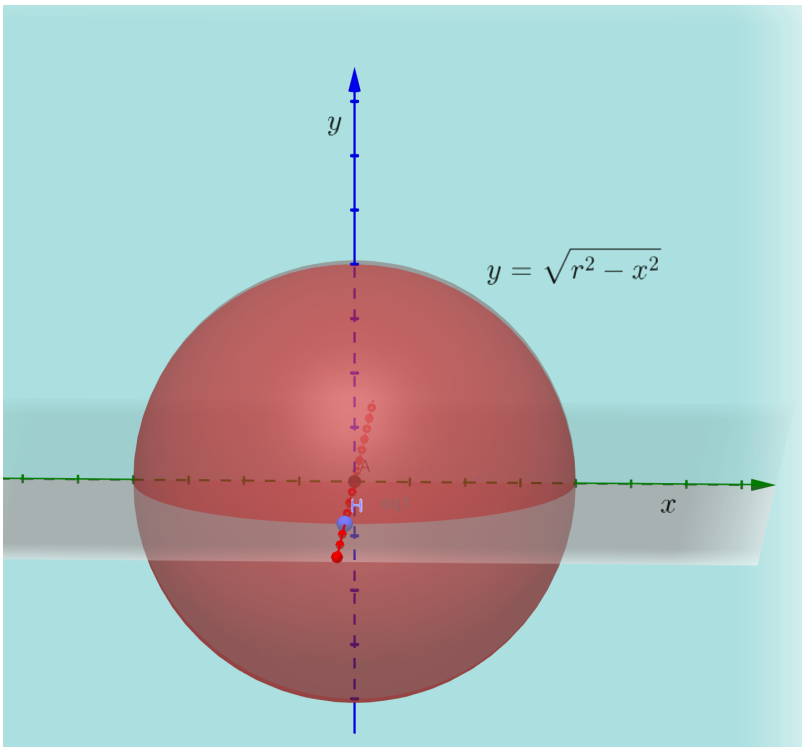
[4]Encaixat vol dir que els plans donats, perpendiculars a l'altura, són tangents al sòlid. La variable x aquí es mou sobre l'altura del sòlid de manera que l'altura és $b - a$.



Exercici 54 *Calculeu el volum de l'esfera.*

Solució. Considerem la funció $f : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

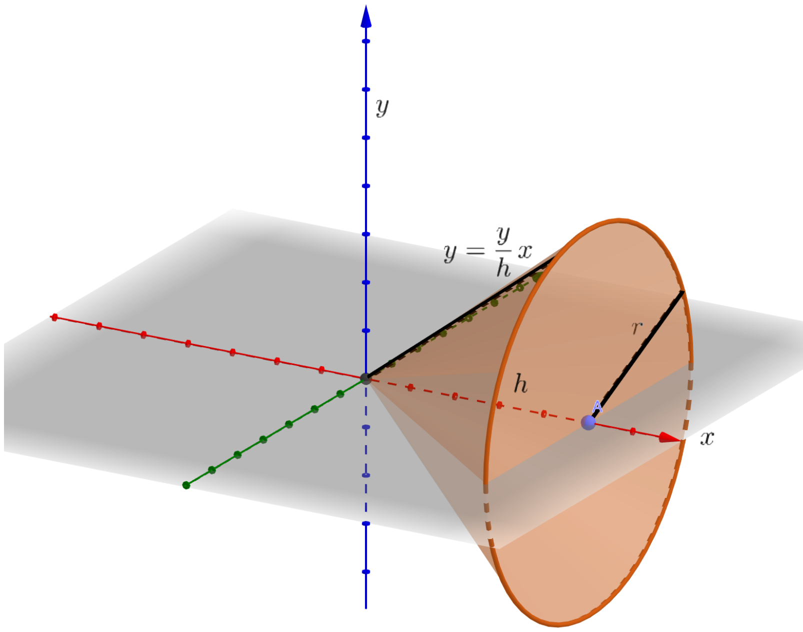


La seva gràfica en el pla x, y és una semicircumferència de centre l'origen i radi r. El cos de revolució que engendra aquesta semicircumferència en girar al voltant de l'eix de les x és l'esfera de radi r. Per tant

$$Volum = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Exercici 55 *Calculeu el volum d'un con circular recte d'altura h i radi de la base r.*

Solució. Podem pensar que és la figura generada per la rotació de la gràfica de $y = \frac{r}{h}x$ amb $0 \leq x \leq h$ al voltant de l'eix de les x.



Així

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2 x^2}{h^2} dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

és a dir, un terç de l'àrea de la base per l'altura.

Exercici 56 *Calculeu el volum d'una piràmide d'altura h i base un triangle equilàter de costat L.*

Solució. No importa si la piràmide és recta o inclinada. Es veurà a continuació que l'argument seria el mateix.

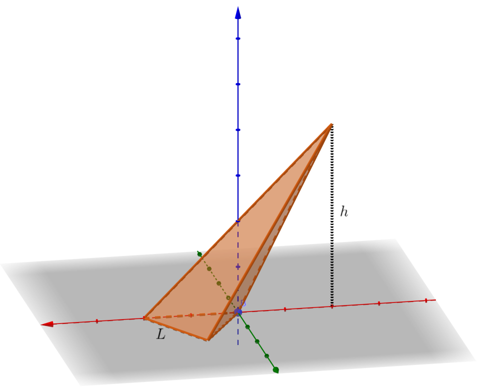
A la figura de la dreta hem dibuixat només una de les cares laterals de la piràmide amb la notació que usarem a continuació.

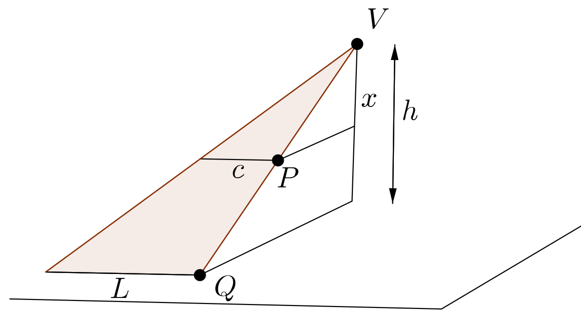
Pel Teorema de Tales, aplicat dos cops, el costat c del triangle que s'obté tallant la piràmide per un pla perpendicular a l'altura a distància x del vèrtex compleix

$$\frac{c}{L} = \frac{VP}{VQ} = \frac{x}{h}.$$

L'àrea d'un triangle equilàter de costat c és

$$\text{Àrea} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{L^2 x^2}{h^2}.$$





Per tant, el volum de la piràmide és

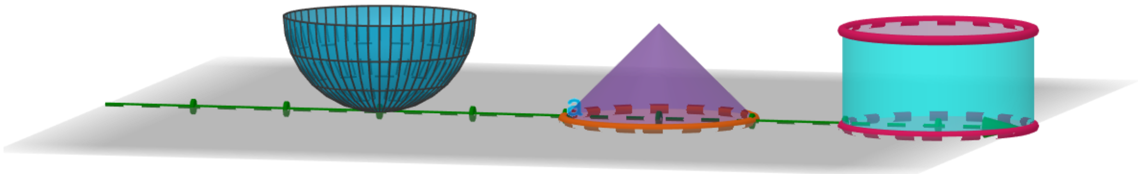
$$V = \int_0^h \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{L^2x^2}{h^2}\,dx = \frac{\sqrt{3}L^2h}{12}.$$

Com l'àrea del triangle equilàter de costat L és

$$a = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$$

tenim que el volum de la piràmide donada és un terç de l'àrea de la base per l'altura.

Nota: Volum de l'esfera a partir del volum del cilindre i el con (Mètode d'Arquimedes)[5]. Considerem la meitat d'una esfera de radi R col·locada sobre el terra de manera que el seu pla equatorial sigui horitzontal, amb l'obertura de la semiesfera mirant cap amunt (figura adjunta). Al costat hi col·loquem un con circular recte amb el radi de la circumferència de la base igual a R i altura igual a R, de manera que es recolzi sobre el terra per la seva base. Al costat hi col·loquem un cilindre recte amb el radi de la circumferència de la base igual a R i altura igual a R, també recolzat a terra. Tallem aquestes tres figures per un pla horitzontal qualsevol. Sigui h la distància del centre de la semiesfera a aquest pla. Calculem les àrees de les interseccions d'aquest pla amb les tres figures.



[5]Redaccció de Joan Girbau.

El radi del cercle intersecció del pla amb la semiesfera serà $\sqrt{R^2 - h^2}$ pel teorema de Pitàgores. Per tant, la seva àrea serà $\pi(R^2 - h^2)$. El radi del cercle intersecció del pla amb el con serà h, i la seva àrea, πh^2. El radi del cercle intersecció del pla amb el cilindre és, òbviament, R i la seva àrea és πR^2. Veiem, doncs, que la suma de les dues primeres àrees (semiesfera i con) és igual a la tercera (cilindre). Aleshores, pel principi de Cavalieri, la suma de volums de la semiesfera i el con és igual al volum del cilindre. És a dir,

$$\text{Volum semiesfera} + \frac{1}{3}\pi R^2 R = \pi R^2 R$$

de la que deduïm que el volum de l'esfera és $4\pi R^3/3$.

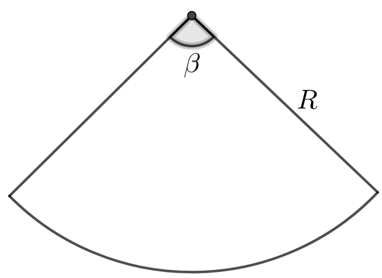
5.8 Àrea d'una superfície de revolució

Sector circular. Recordem primerament que l'àrea d'un *sector circular* d'angle β (radians) i radi R. Només hem de fer una regla de tres: si l'angle en el vèrtex fos 2π l'àrea seria πR^2, per tant tenim

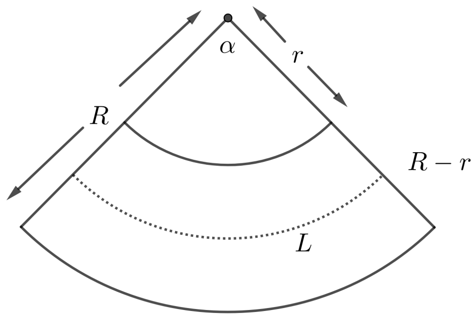
$$\frac{2\pi}{\pi R^2} = \frac{\beta}{x}$$

per tant

$$\text{Àrea sector} = \frac{1}{2}\beta R^2.$$



Corona circular. Recordem a continuació l'àrea d'un *sector de corona circular*. Suposem que l'angle de la corona és α i està compresa entre les circumferències de radis r, R amb $r < R$.



L'àrea del sector és la diferència d'àrees de les corones. Per tant,

$$\text{Àrea sector de corona} = \frac{1}{2}R^2\alpha - \frac{1}{2}r^2\alpha = \frac{1}{2}\alpha(R+r)(R-r).$$

Però obserem que la longitud de la circumferència central és $L = \alpha(r + \frac{R-r}{2}) = \frac{R+r}{2}\alpha$. Per tant,

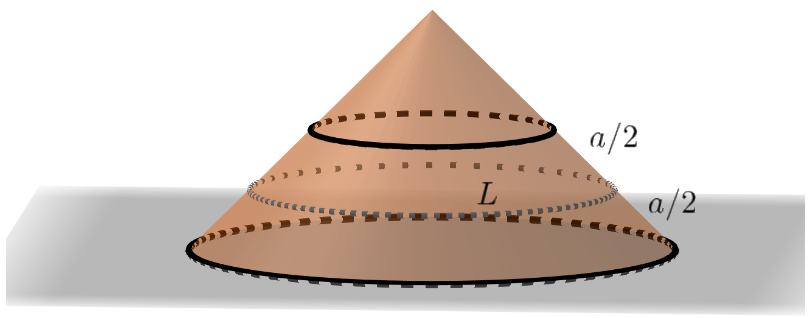
$$\text{Àrea sector de corona} = L(R-r).$$

És a dir, *l'àrea d'un sector de corona circular de costat a és igual a La on L és la longitud de la circumferència intermèdia.*

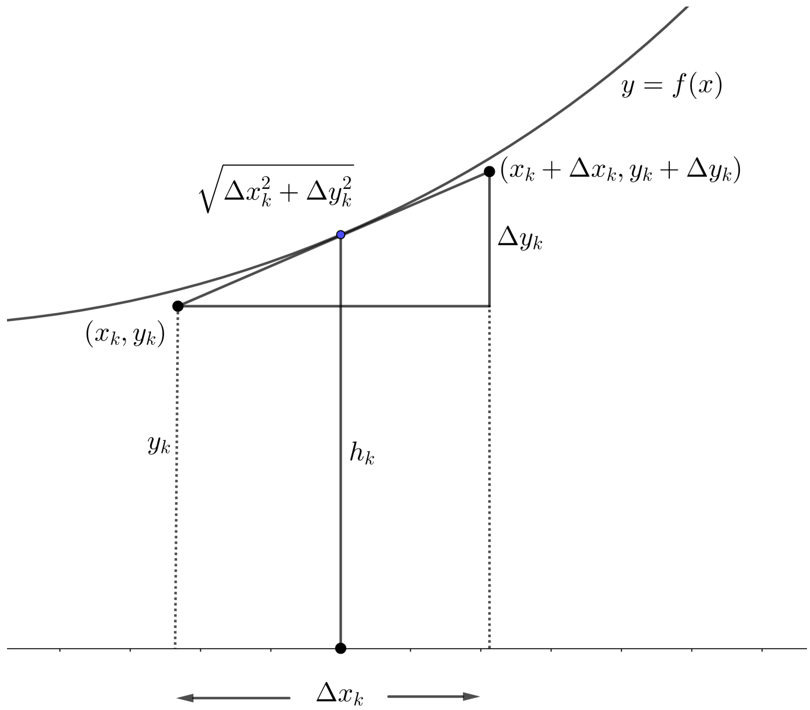
Tronc de con. Com un tronc de con es pot desenvolupar sobre el pla, sense canviar l'àrea, donant lloc a un sector circular tenim

$$\text{Àrea tronc de con} = La$$

on a és la longitud del costat del tronc i L la longitud de la circumferència intermèdia.



Àrea de la superfície de revolució. Quan fem girar la gràfica de $y = f(x)$ al voltant de l'eix de les x (suposada la gràfica dins $\mathbb{R}^3$) obtenim una superfície de revolució. Per calcular la seva àrea només l'hem d'imaginar que l'aproximem per trossos petits de tangents, com indica la figura. Així la superfície de revolució queda aproximada per troncs de con, dels quals sabem la seva àrea. Sumant aquestes àrees infinitesimals i passant al límit obtindrem el resultat.



L'àrea del tronc de con és

$$A_k = 2\pi h_k \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

on h_k és l'ordenada del punt on hem calculat la tangent.

Sumant aquestes àrees obtindrem una aproximació de l'àrea de la superfície de revolució generada per la gràfica i fent tendir aquests increments Δx_k a zero obtindrem el valor exacte. Suposarem la gràfica definida en un interval $[a, b]$, és a dir, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, i dividim l'interval de definició en subintervals $a = x_0 < x_1 < \dots x_k = b$, i denotem $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

$$\text{Àrea} = 2\pi \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} h_k \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

que per poder-la comparar amb la fórmula que ens dóna la definició d'integral (5.3) escrivim multiplicant i dividint per Δx_k,

$$\text{Àrea} = 2\pi \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} h_k \sqrt{1 + \frac{\Delta y_k^2}{\Delta x_k^2}}\, \Delta x_k.$$

Però quan $\Delta x_k \to 0$ veiem (observeu la figura) que $h_k \to y_k = f(x_k)$ i per definició de derivada $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \to y'(x_k)$. Per tant podem posar

$$\text{Àrea} = 2\pi \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} y_k \sqrt{1 + y_k'^2}\, \Delta x_k,$$

que comparant amb la fórmula (5.3) ens dóna la fórmula de l'àrea buscada:

$$\boxed{\text{Àrea} = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.}$$

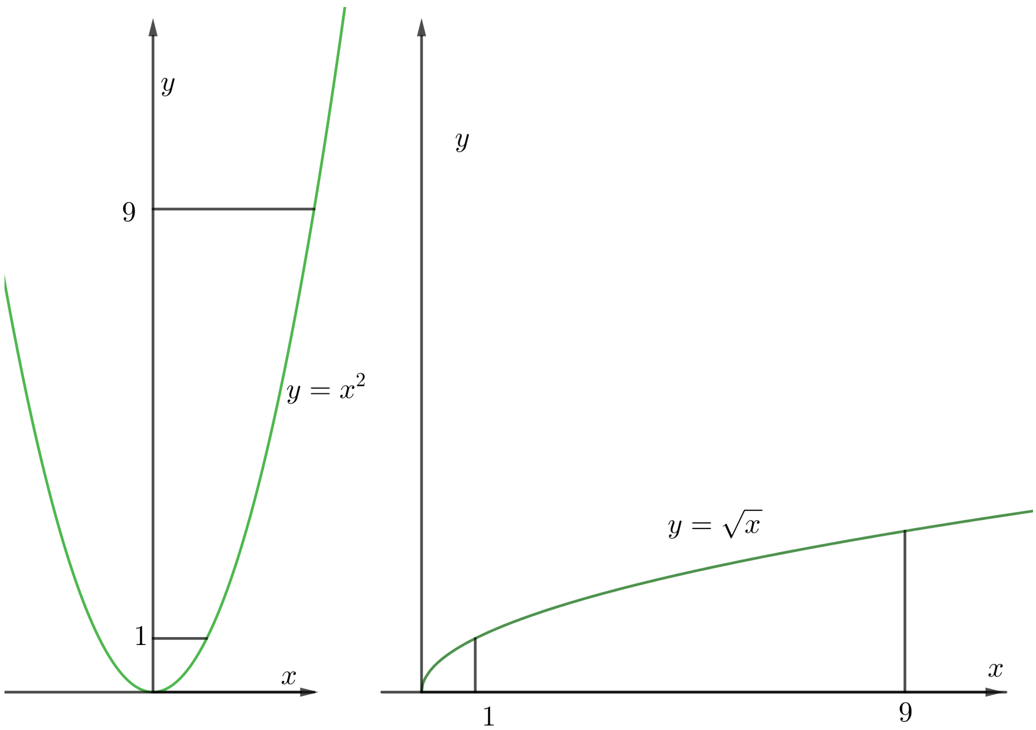
Exercici 57 *Calculeu l'àrea d'una esfera de radi r.*

Solució. Aquesta esfera la podem pensar com la superfície que s'obté en fer girar la gràfica de la funció $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ al voltant de l'eix de les x. Recordeu que l'equació de la circumferència de centre l'origen i radi r és $x^2 + y^2 = r^2$. Com $y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = -x/y$ tenim

$$\text{Àrea} = 2\pi \int_{-r}^{r} y\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\, dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 2\pi r(2r) = 4\pi r^2. \quad \square$$

Exercici 58 *Calculeu l'àrea de la superfície de revolució que obtenim en fer girar la gràfica de la funció $y = x^2$, per $1 \le x \le 3$, al voltant de l'eix de les y.*

Solució. Com la fórmula que tenim es refereix a rotacions al voltant de l'eix de les x, hem de considerar la funció inversa de la donada (observeu la figura). És a dir, hem de calcular l'àrea de la superfície de revolució que obtenim en fer girar la funció $x = \sqrt{y}$, per $1 \le y \le 9$, al voltant de l'eix de les y.



O per adaptar-nos a la notació del teorema, l'àrea de la superfície de revolució que obtenim en fer girar la funció $y = \sqrt{x}$, per $1 \le x \le 9$, al voltant de l'eix de les x.

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_1^9 y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int_1^9 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx \\ &= \pi \int_1^9 \sqrt{4x + 1}\, dx = \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5}) \simeq 35.64\,\pi. \quad \square \end{aligned}$$

Amb *Wolfram Alpha* seria "integrate sqrt(4x+1), x=1..9".

5.9 Longitud de corbes

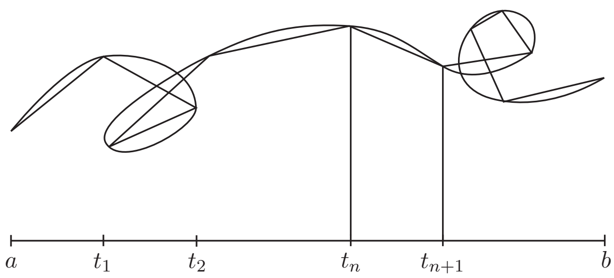
Una corba plana és una aplicació $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Escriurem $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Suposarem que $x(t)$ i $y(t)$ són funcions derivables amb derivada contínua. La longitud d'aquesta corba entre els punts $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ està donada per

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

En el cas particular de que la corba que tractem sigui la gràfica d'una certa funció $f(x)$ podem escriure $\gamma(x) = (x, f(x))$ i aplicar la fórmula anterior. Tindrem

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Aquesta fórmula es justifica, sense entrar en detalls, pel fet de que la corba (en aquest cas la gràfica de $y = f(x)$) s'aproxima per poligonals, com hem fet a la figura de la pàgina 72, de manera que la longitud de la corba és més o menys igual a la longitud de la poligonal, i com més s'aproxima la poligonal a la corba més s'hi aproxima la seva longitud arribant a ser igual a ella en el límit.



Si suposem la gràfica definida en un interval $[a, b]$, és a dir, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, i dividim l'interval de definició en subintervals $a = x_0 < x_1 < \ldots x_k = b$, i denotem $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, i $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ amb $y_k = f(x_k)$ tenim (multiplicant i dividint per Δx_k)

$$L \simeq \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{1 + \frac{\Delta y_k^2}{\Delta x_k^2}} \Delta x_k$$

que passant al límit és justament la definició d'integral de la funció $\sqrt{1 + y'^2}$.

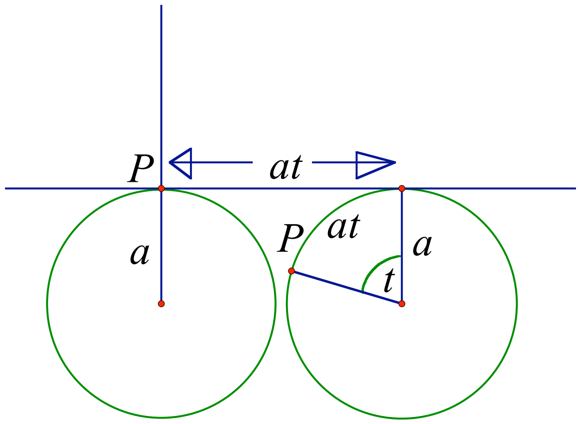
Recordeu que la derivada és el límit dels quocients incrementals

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Exercici 59 *Calculeu la longitud de la cicloide*

$$\gamma(t) = (a(t - \sin(t)), a(1 - \cos(t)))$$

Solució. El dibuix fa veure que les coordenades de P són les donades per $\gamma(t)$, essent t l'angle que ha girat la circumferència.



Com $\gamma'(t) = (a(1-\cos t), a\sin t)$ la longitud d'un arc de cicloide és

$$L = \int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = \int_0^{2\pi} 2a\sin(t/2)\, dt = 8a.$$

(recordeu que $1 - \cos t = 2\sin^2(t/2)$). $\square$

Exercici 60 *Calculeu la longitud de la gràfica de la corba* $y = 2x^{3/2}$ *entre els punts d'abscissa* $x = 0$ *i* $x = 1$.

Solució. Aplicant la fórmula de la longitud d'una gràfica tenim

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (3x^{1/2})^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+9x}\, dx = [\frac{2}{27}(1+9x)^{3/2}]_0^1 = \frac{2}{27}(10^{3/2} - 1).$$

Corbes a l'espai

Hem estudiat la longitud de corbes planes, però els mateixos arguments permeten calcular la longitud de corbes a l'espai. Una corba a l'espai és una aplicació $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Escriurem $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Suposarem que $x(t), y(t)$ i $z(t)$ són funcions derivables amb derivada contínua. La longitud de γ entre dos punts de paràmetre $t = a$, $t = b$, ve donada per

$$L_a^b(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt,$$

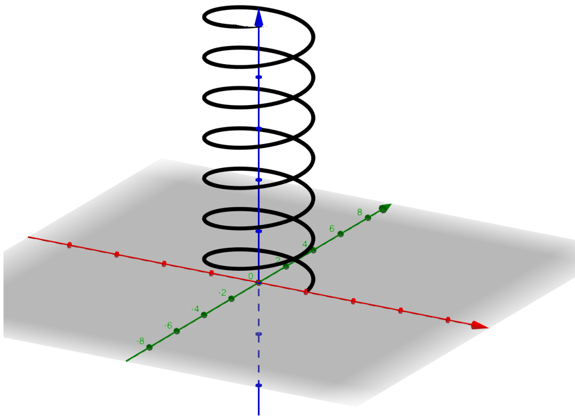
la mateixa expressió formal que en el cas pla.

Exercici 61 *Trobeu la longitud d'una volta d'hèlix.*

Solució. L'hèlix d'amplada a i pas de rosca $2\pi b$ és la corba

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt).$$

Ens demanen la longitud d'aquesta corba entre $\gamma(0)$ i $\gamma(2\pi)$.



Com $\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ tenim que

$$L = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2} dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}. \quad \square$$

Fórmula de Crofton

Donem, sense entrar en la base matemàtica necessària per demostrar-la, que ens endinsaria en el camp de la Geometria Integral, la fórmula de Crofton per aproximar la longitud d'una corba. Prové d'aproximar una certa integral.

Prenem una família de rectes horitzontals separades entre elles una distància r i a continuació les fem girar angles de $\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, obtenint així un enreixat de rectes transversals.

Dibuixem aquest enreixat sobre un paper transparent i el posem a sobre de la corba de la qual volem calcular la seva longitud.

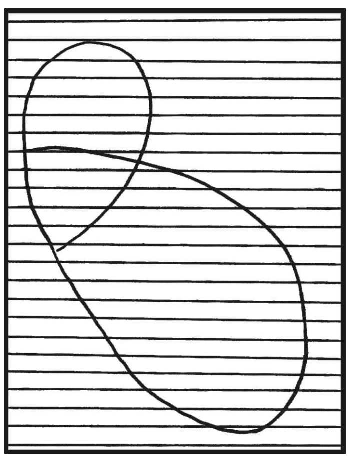
Contem el nombre de talls n de la corba amb l'enreixat.

La longitud de la corba és aproximadament igual a

$$L \simeq nr\frac{\pi}{4}$$

Com més petit és r i més petit l'angle que hem anat girant les rectes, és a dir, com més espés sigui l'enreixat, millor aproximació obtindrem.

La següent corba ha estat dibuixada desenrotllant un cordill de 30 cm. sobre el paper.



Amb un enreixat com l'anterior, construït a partir de rectes horitzontals separades 4 cm. i que ara hauríem de posar sobre la corba, contar els punts de tall, girar el paper transparent 90 graus i tornar. contar, i això quatre vegades, s'obtenen aproximadament 180 punts de tall, de manera que

$$l \sim \frac{1}{2} 180 \cdot 4 \cdot \frac{3.14}{4} = 282.6 \, \mathrm{mm}$$

resultat força aproximat.

Posant aquests enreixats transparents en un microscopi electrònic s'ha aconseguit calcular longituds de molècules de ADN.