Geometría no euclidiana

De la geometría clásica a la geometría diferencial

8-12 Setiembre 2008

II Encuentro Nacional de Matemáticas y su Enseñanza,

Universidad Tecnológica de Pereira

AGUSTÍ REVENTÓS & CARLOS J. RODRÍGUEZ

Cuadratura del círculo

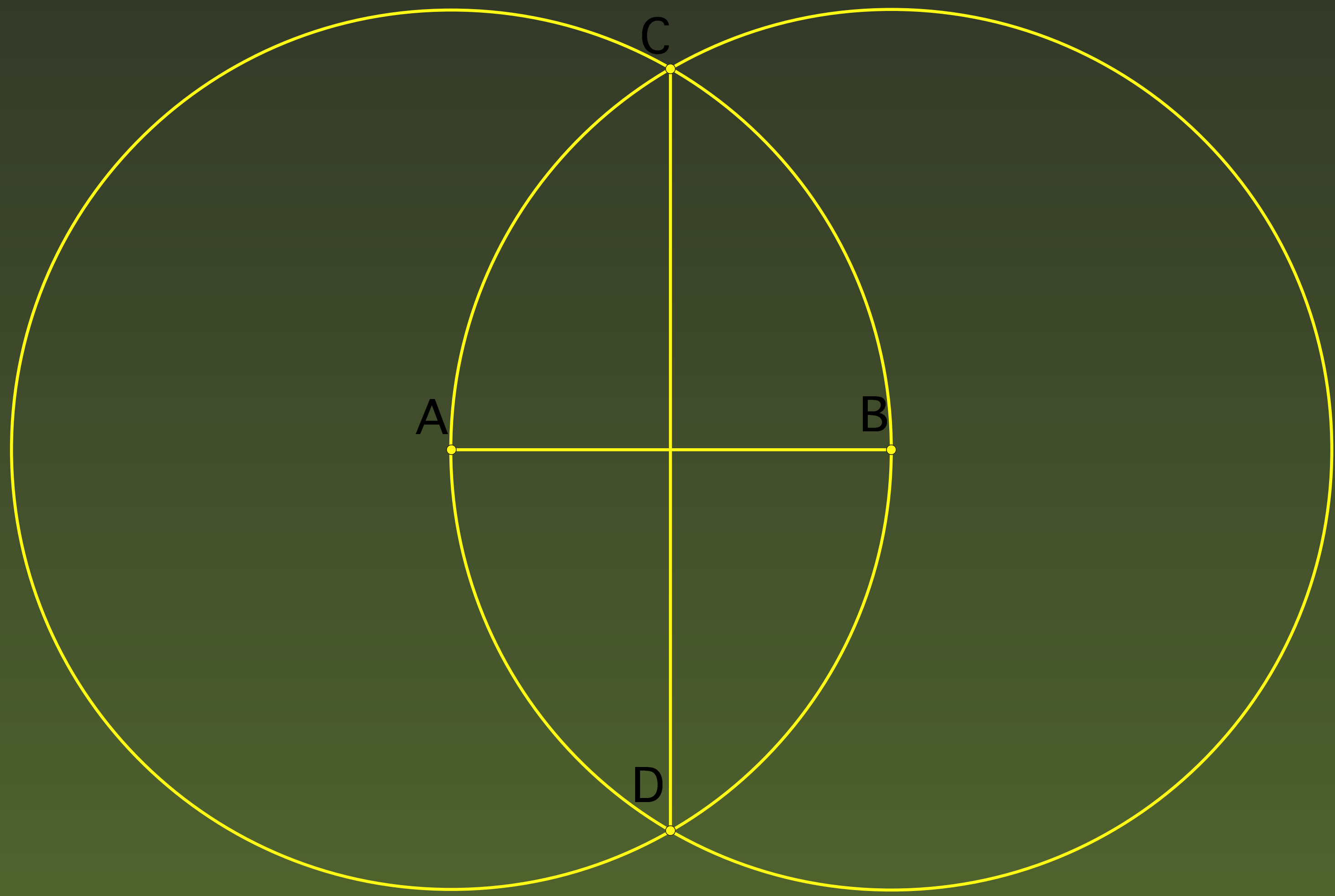
Construcciones con regla y compás

Regla y compás

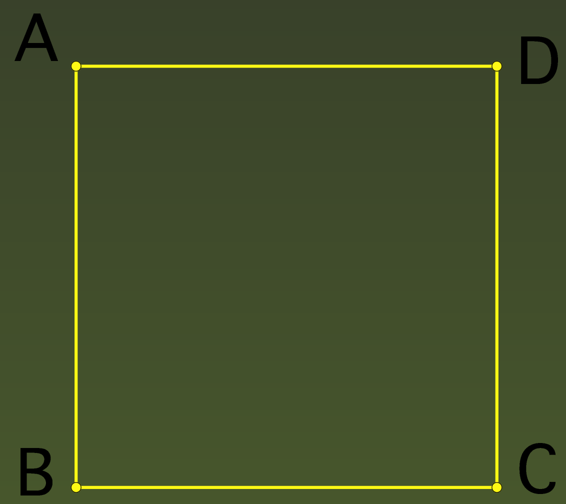
Regla y compás

- Punto construido $\longleftrightarrow$ *Intersección* de rectas i/o circunferencias ya construidas

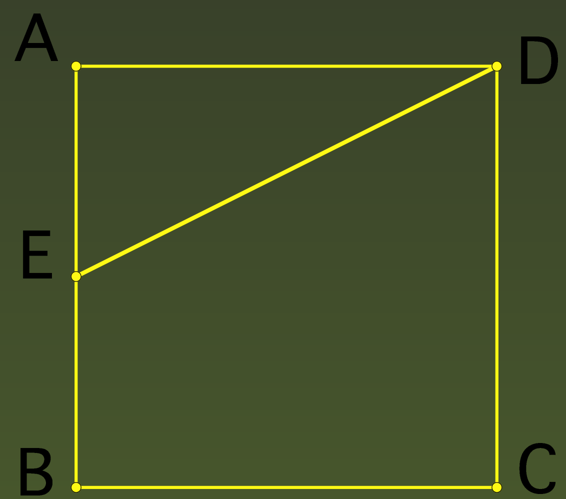
Mediatriz



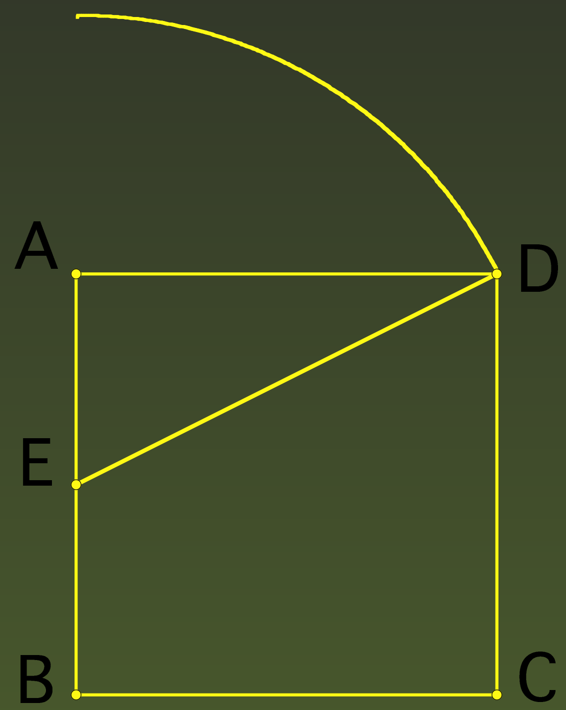
Rectángulo áureo



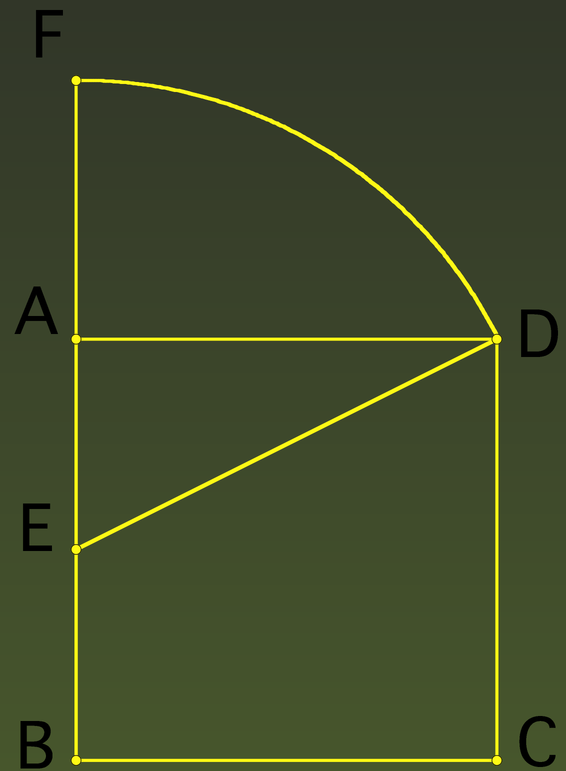
Rectángulo áureo



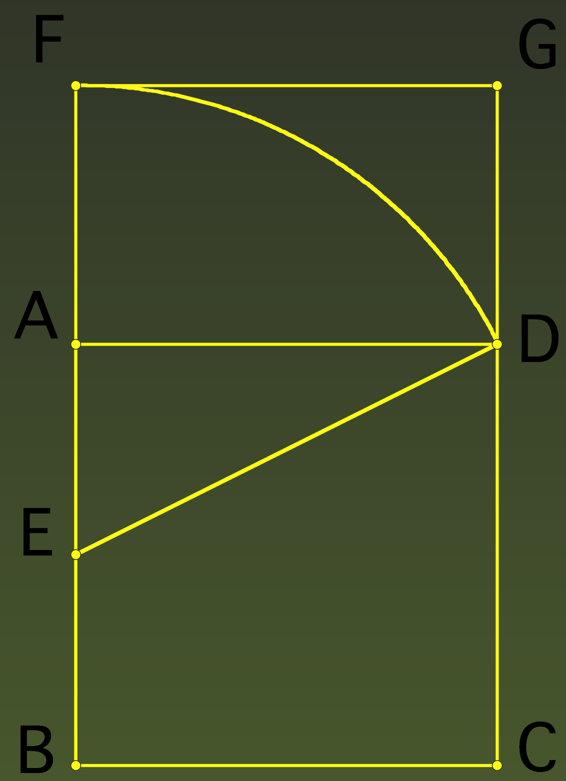
Rectángulo áureo



Rectángulo áureo

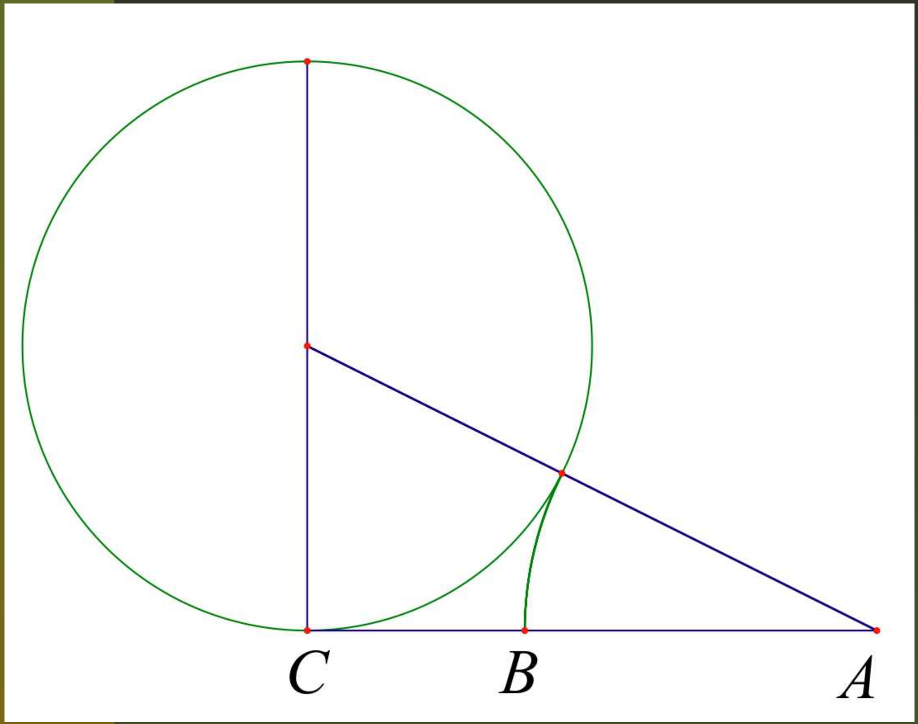


Rectángulo áureo



- $BF/BC = \Phi$

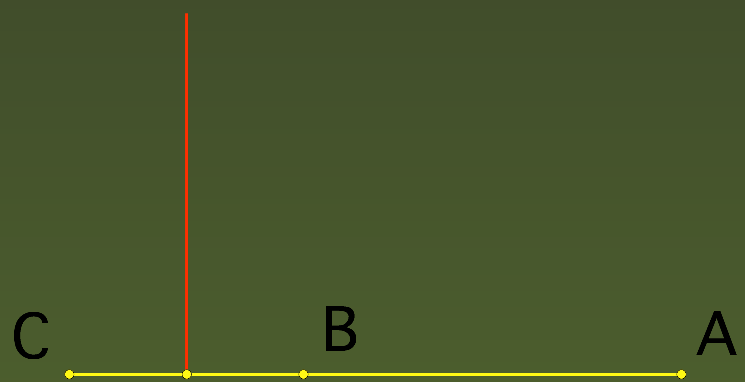
Media y extrema razón



- *El total es a la parte grande cómo la parte grande es a la pequeña.*
- $\left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1 + \left(\frac{AC}{AB}\right) \implies \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{CB} = \Phi$

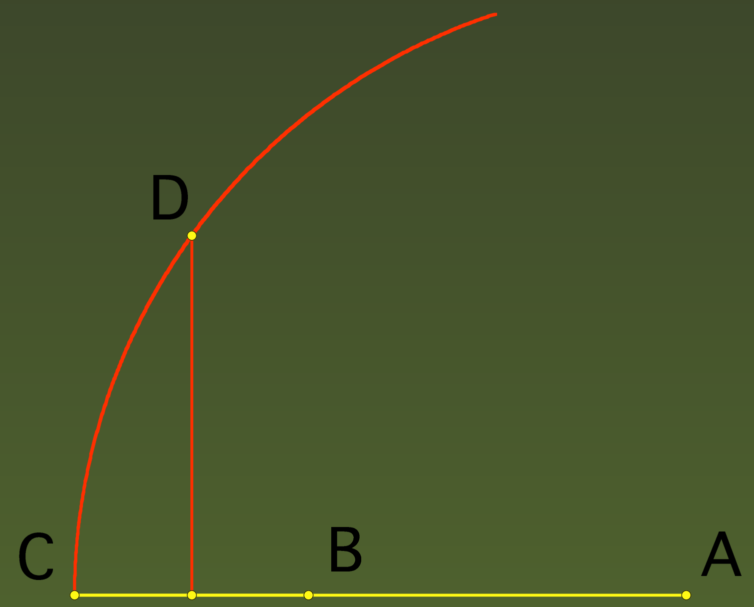
Triángulo áureo

- $\frac{AC}{AB} = \Phi.$
- Construimos la mediatriz de BC.



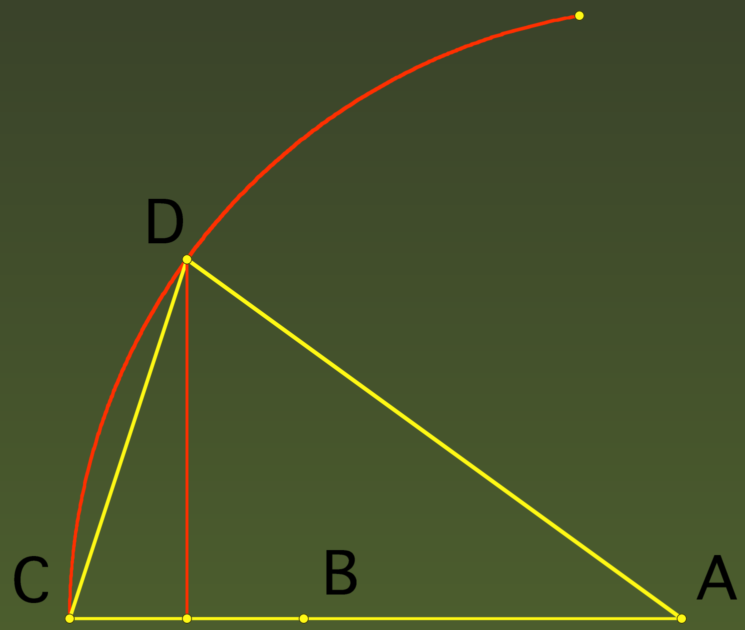
Triángulo áureo

- $\frac{AC}{AB} = \Phi$.
- Cortamos con la circunferencia de centro A y radio AC.



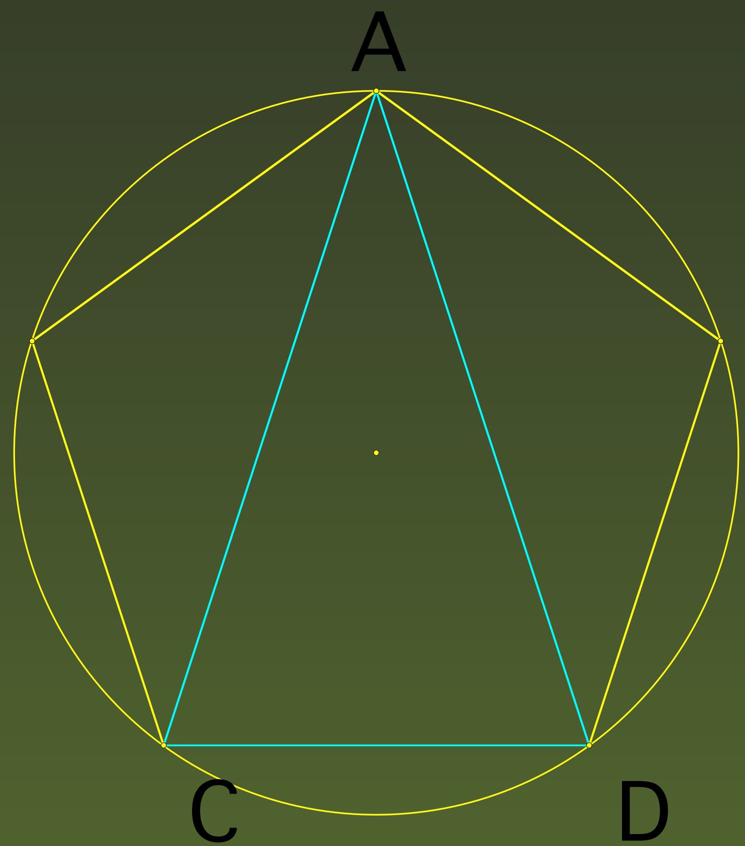
Triángulo áureo

- El $\triangle ACD$ es áureo, ya que $CD = BD = BA$.



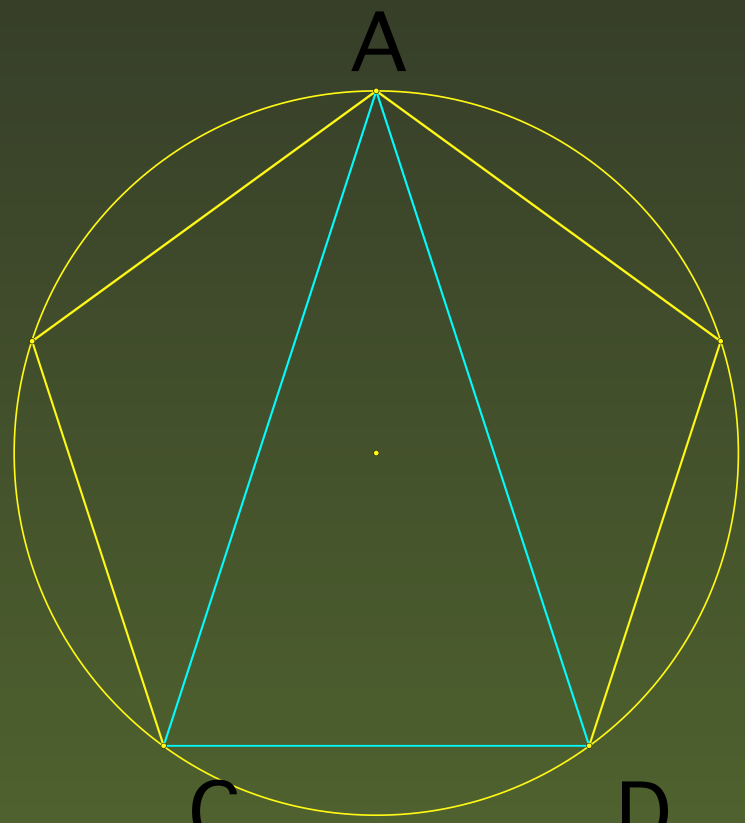
Pentágono y razón áurea

$$\triangle ACD = 72°, 72°, 36°.$$



Pentágono y razón áurea

$$\triangle ACD = 72^\circ, 72^\circ, 36^\circ.$$



$$\frac{AC}{CD} = \Phi$$

Leda Atómica. **Dalí** 1949

Leda Atómica. Dalí 1949

Leda Atómica. Dalí 1949

Polígonos regulares

- TEOREMA(Gauss 1801) *El polígono regular de n lados se puede construir con regla y compás si y sólo si n tiene una descomposición en factores primos de la forma*

$$n = 2^{\alpha}(2^{2^{\alpha_1}} + 1) \cdot (2^{2^{\alpha_2}} + 1) \cdots (2^{2^{\alpha_k}} + 1)$$

on $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ són enteros diferentes entre ellos.

Polígonos regulares

- TEOREMA(Gauss 1801) *El polígono regular de n lados se puede construir con regla y compás si y sólo si n tiene una descomposición en factores primos de la forma*

$$n = 2^{\alpha}(2^{2^{\alpha_1}} + 1) \cdot (2^{2^{\alpha_2}} + 1) \cdots (2^{2^{\alpha_k}} + 1)$$

on $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ *són enteros diferentes entre ellos.*

- $3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17,$

Polígonos regulares

- TEOREMA(Gauss 1801) *El polígono regular de n lados se puede construir con regla y compás si y sólo si* n *tiene una descomposición en factores primos de la forma*

$$n = 2^{\alpha}(2^{2^{\alpha_1}} + 1) \cdot (2^{2^{\alpha_2}} + 1) \cdots (2^{2^{\alpha_k}} + 1)$$

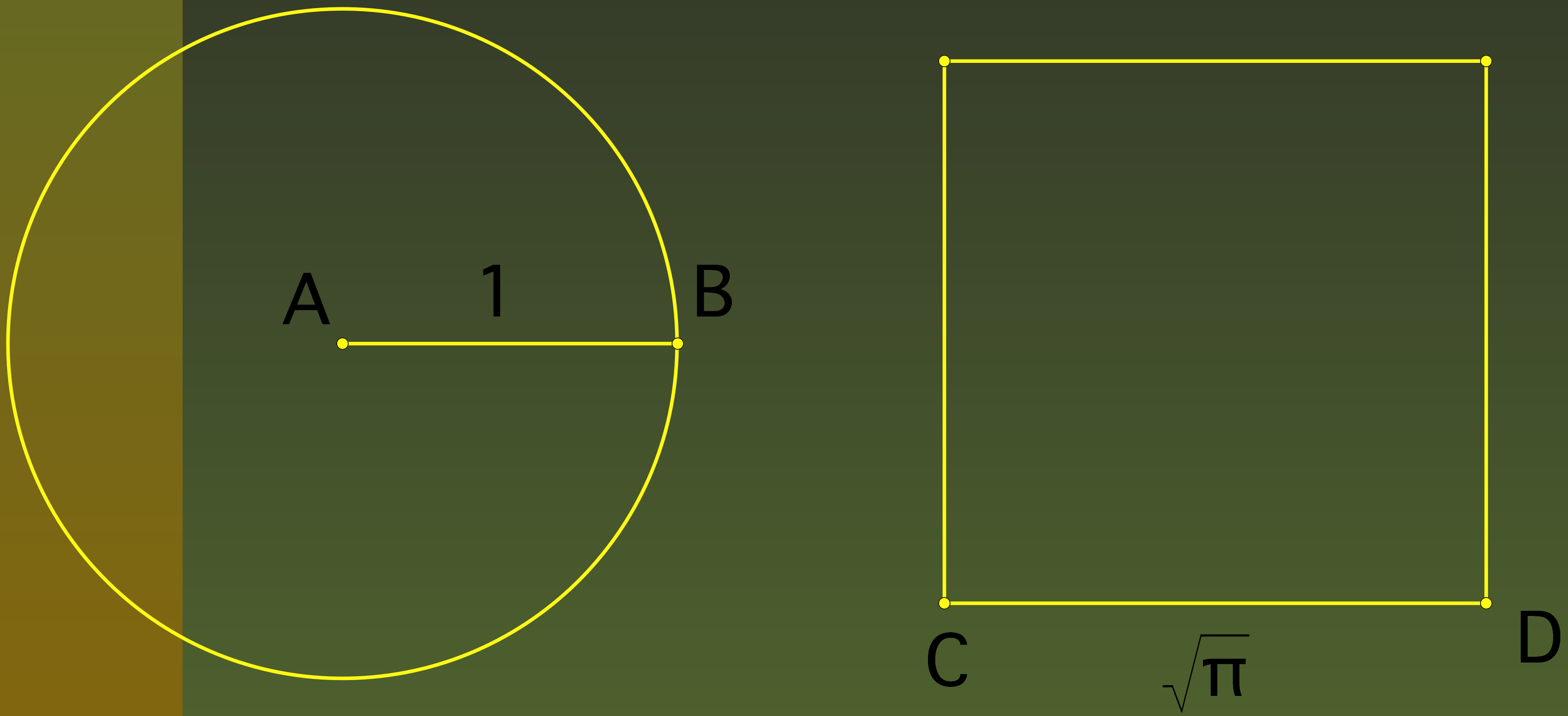
on $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ *són enteros diferentes entre ellos.*

- $3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17,$

- Primos de Fermat $(2^{2^a} + 1)$= $3, 5, 17, 257, 65537, ..$

Cuadratura del círculo euclidiano

Cuadratura del círculo



Cuadratura del círculo

- Anaxágoras $499 - 428$ aC.
- Aristófanes se burla en *Los pájaros*, 414 aC.

Cuadratura del círculo

- TEOREMA[P. L. Wantzel, 1837] Los números reales construibles con regla y compás son raíces de polinomios que tienen por coeficients números racionales.

Cuadratura del círculo

- TEOREMA[P. L. Wantzel, 1837] Los números reales construibles con regla y compás son raíces de polinomios que tienen por coeficients números racionales.

- Ejemplo: $a = \sqrt{2}, \quad a^2 - 2 = 0.$

Cuadratura del círculo

- TEOREMA[F. Lindemann, 1882] El número π no es raíz de ningún polinomio a coeficientes racionales.

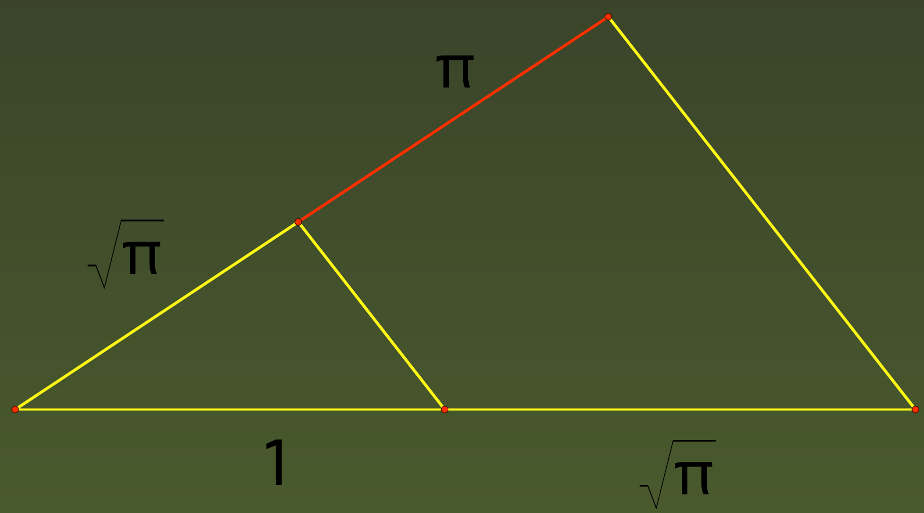
L. F. von Lindemann, $1852 - 1939$

Cuadratura del círculo

Si pudiésemos construir $\sqrt{\pi}$ (cuadrar el círculo), podríamos construir π.

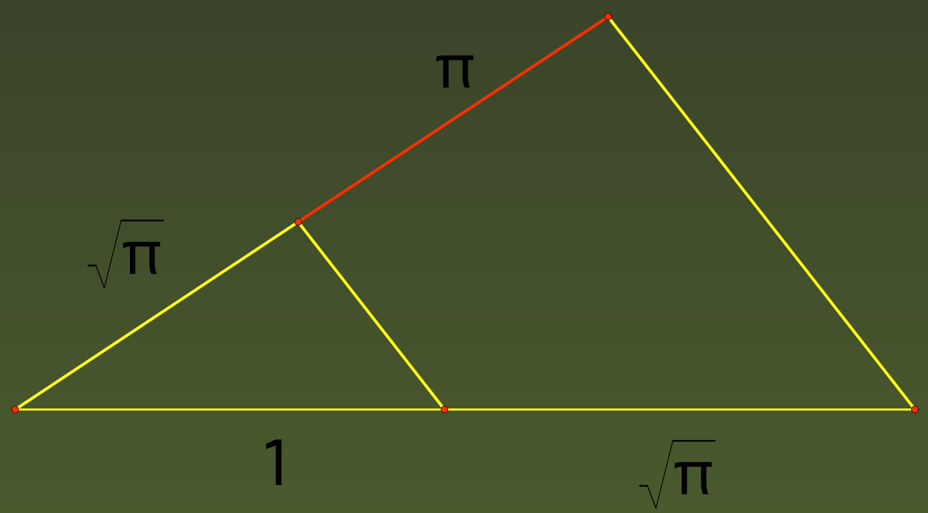
Cuadratura del círculo

Si pudiésemos construir $\sqrt{\pi}$ (cuadrar el círculo), podríamos construir π.



Cuadratura del círculo

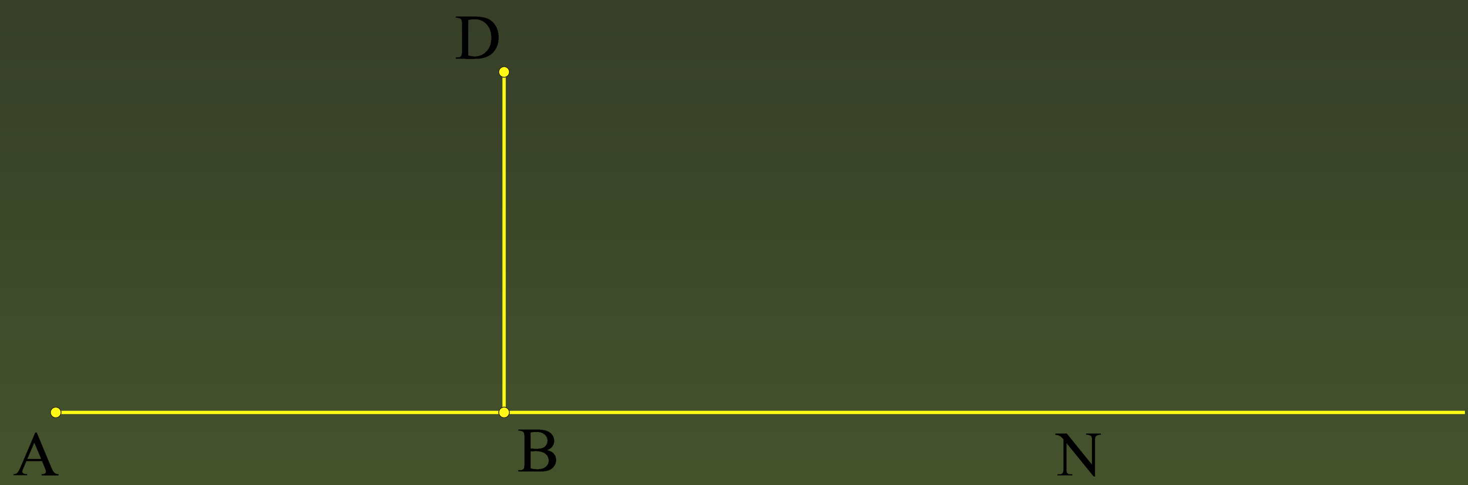
Si pudiésemos construir $\sqrt{\pi}$ (cuadrar el círculo), podríamos construir π.



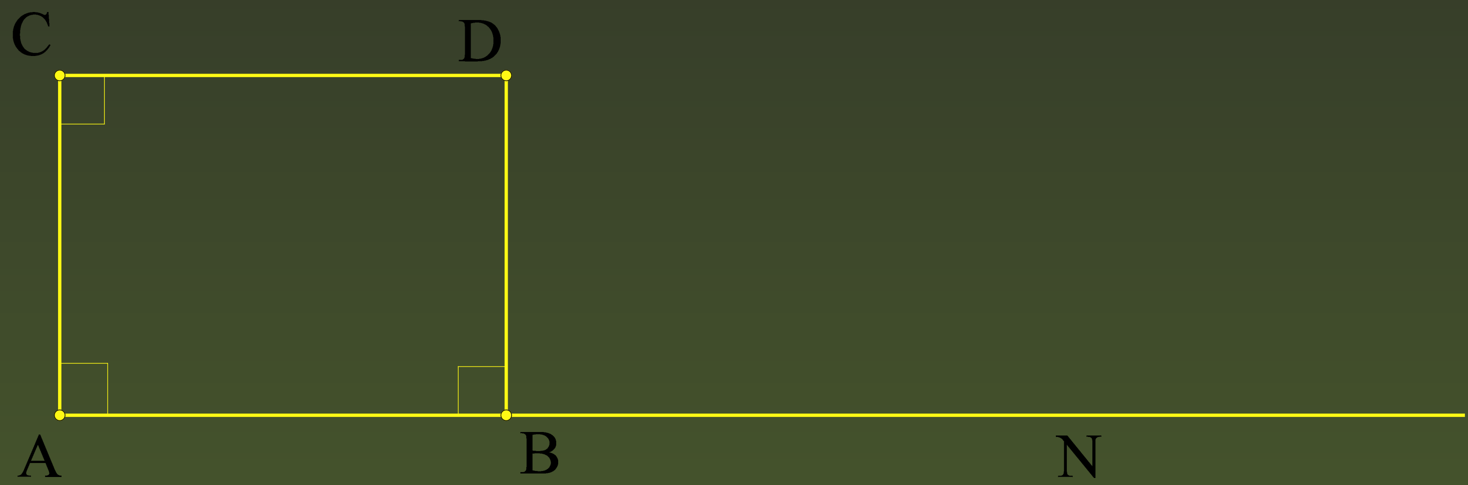
Contradicción.

Cuadratura del círculo hiperbólico

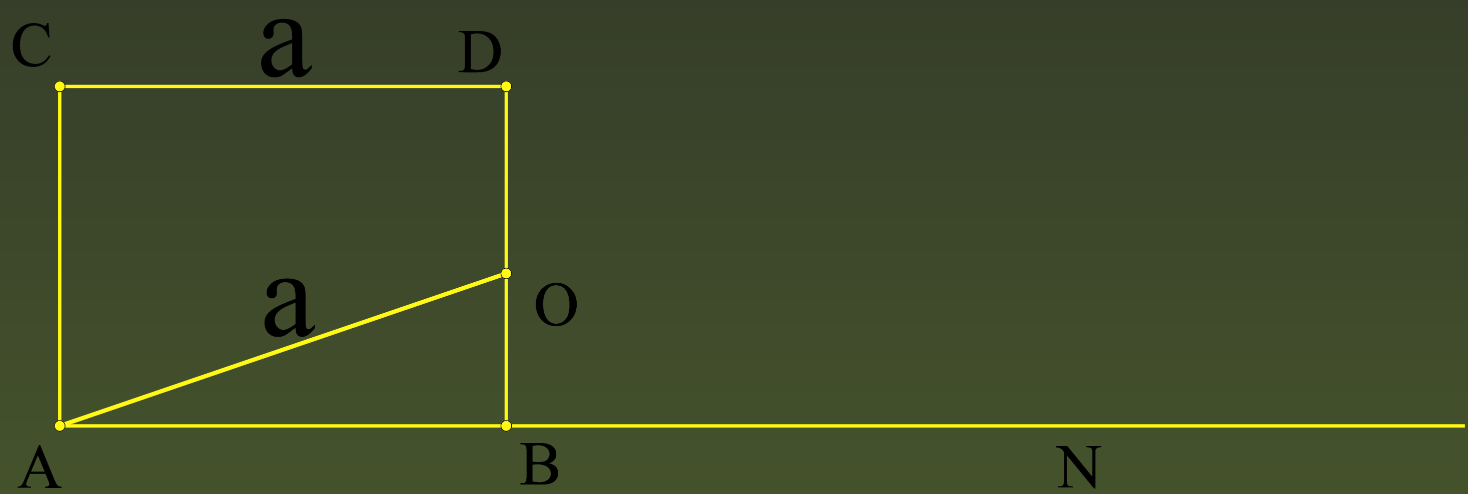
Angulo de paralelismo



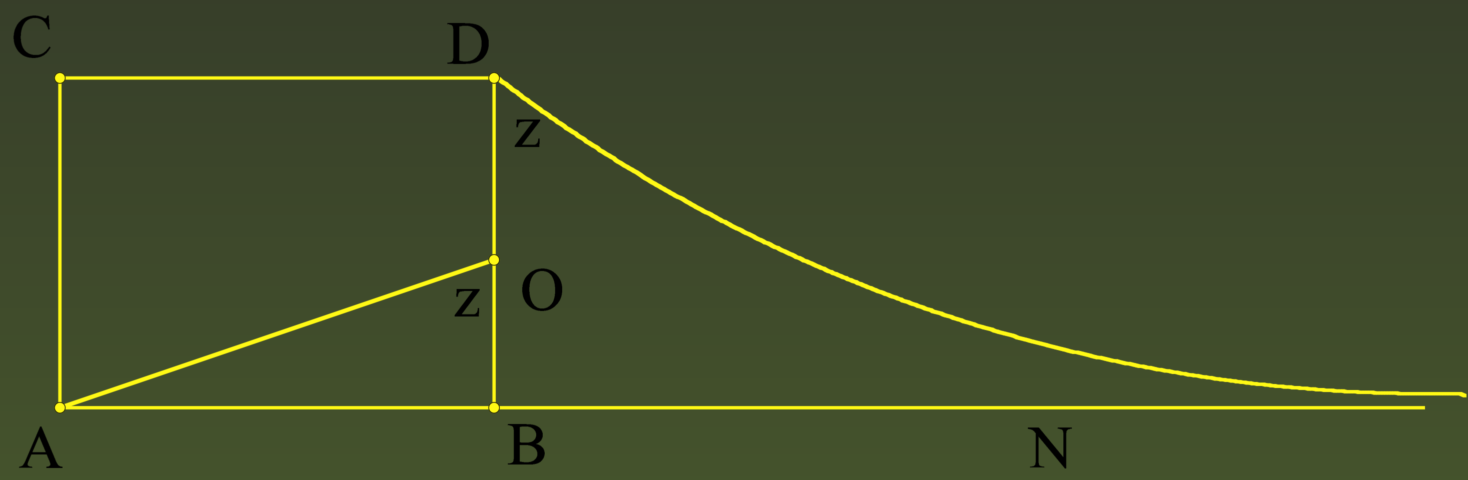
Angulo de paralelismo



Angulo de paralelismo



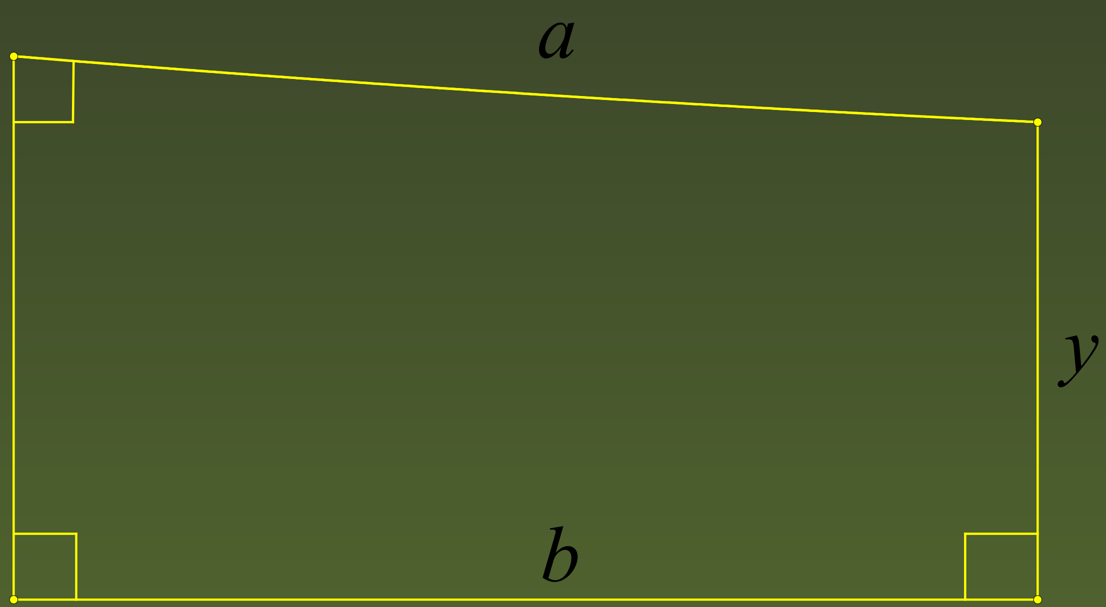
Angulo de paralelismo



Justificación

Trigonometría de un “Lambert”

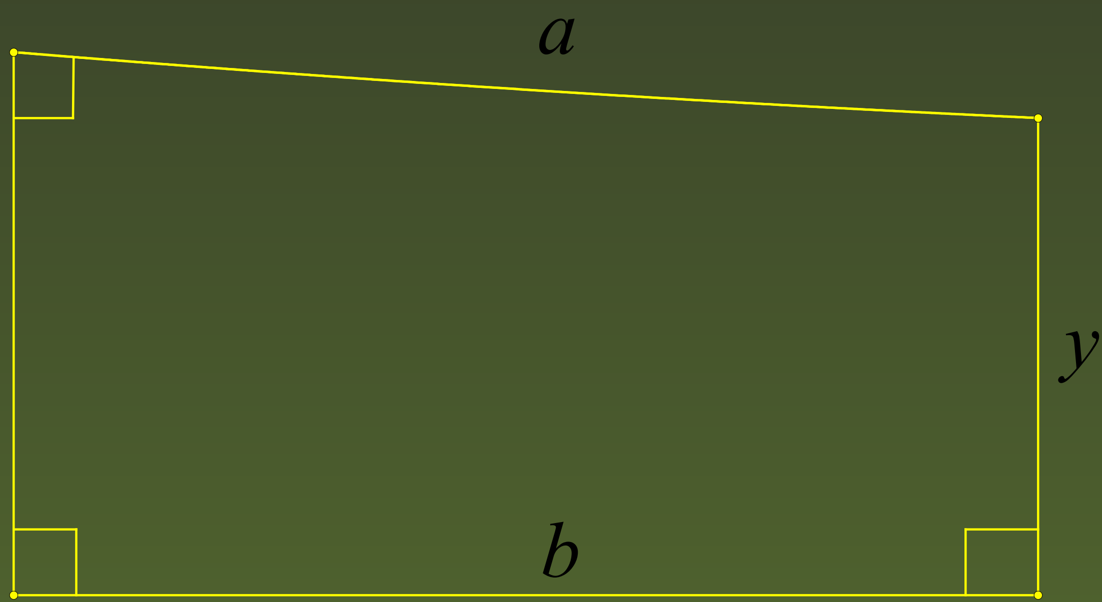
$$\cosh \frac{y}{R} = \frac{\sinh \frac{a}{R}}{\sinh \frac{b}{R}}$$



Justificación

Trigonometría de un “Lambert”

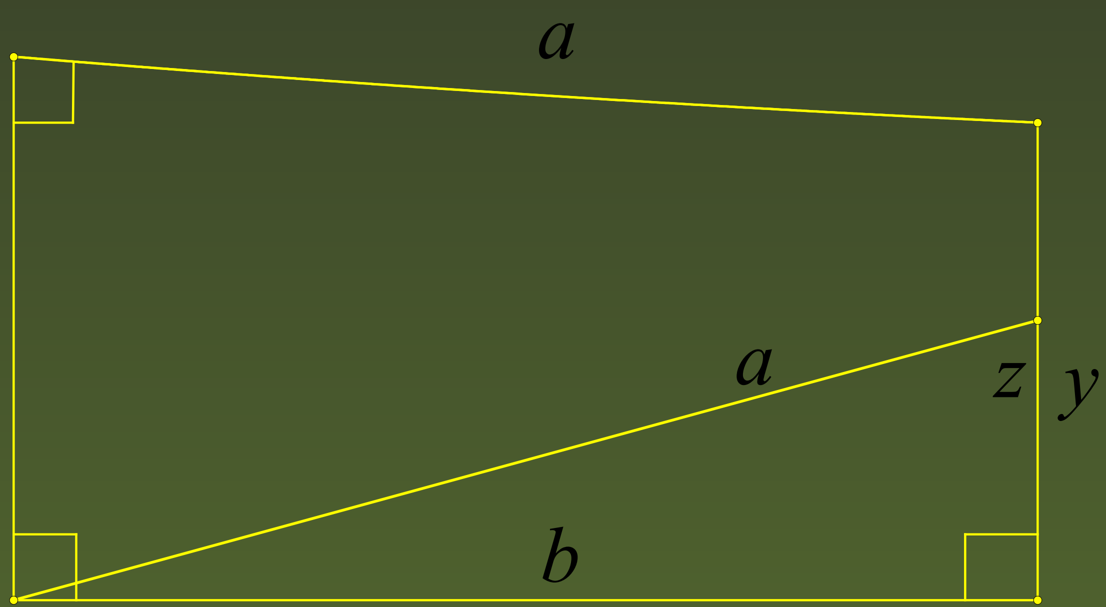
$$\cosh\frac{y}{R}=\frac{\sinh\frac{a}{R}}{\sinh\frac{b}{R}}=\frac{1}{\sin\Pi(y)}$$



Justificación

Trigonometría de un “Lambert”

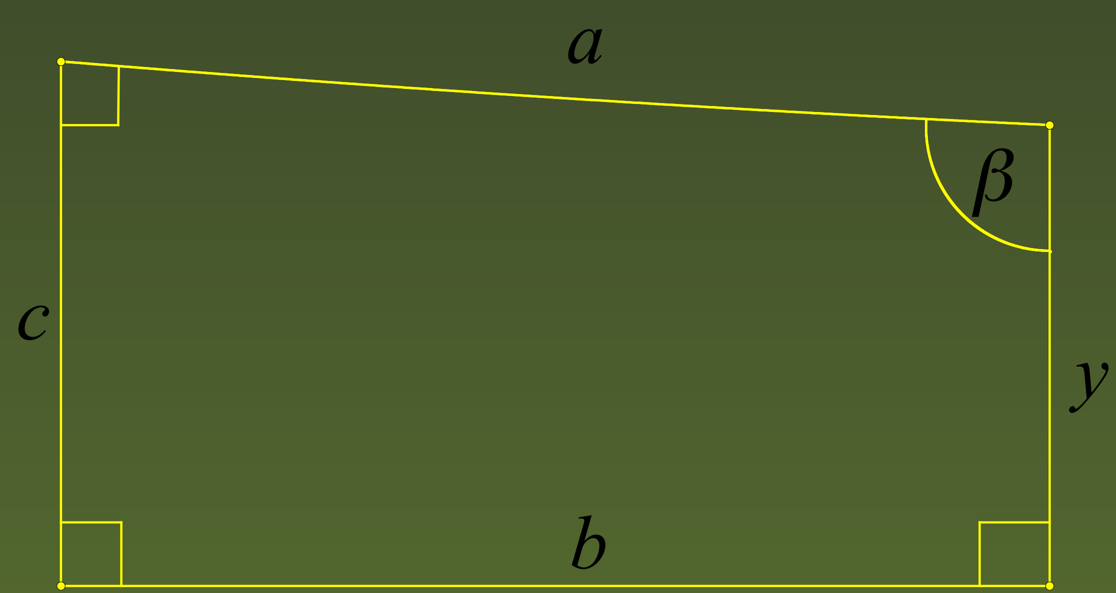
$$\cosh\frac{y}{R} = \frac{\sinh\frac{a}{R}}{\sinh\frac{b}{R}} = \frac{1}{\sin\Pi(y)} = \frac{1}{\sin z}$$



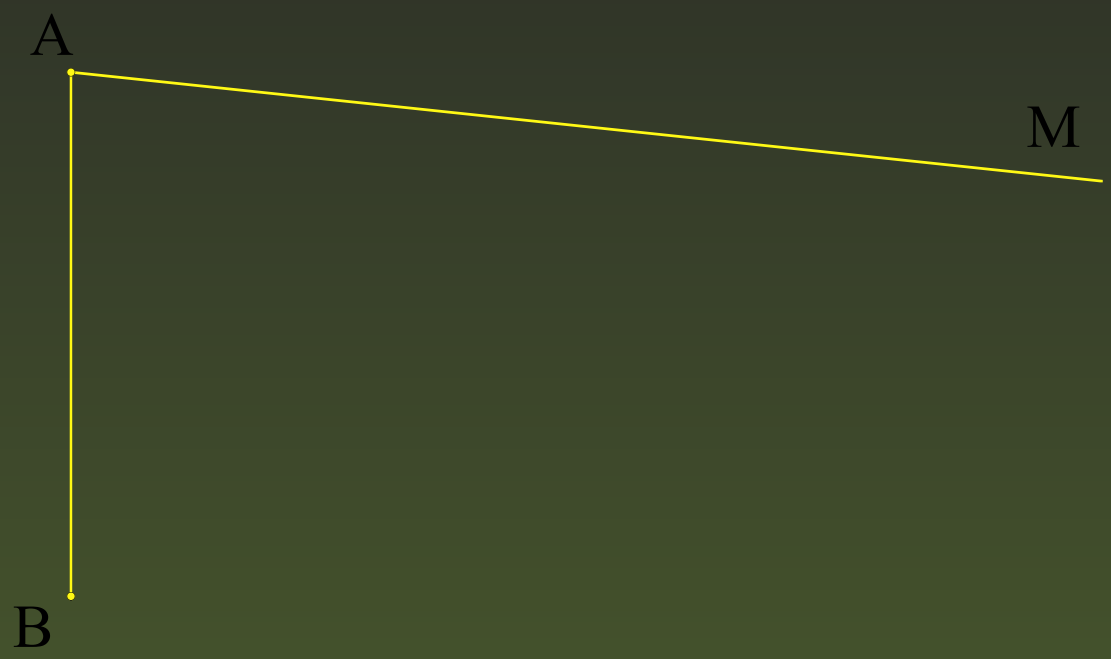
Ejercicio

$$\cos\beta = \sinh\frac{b}{R}\sinh\frac{c}{R}$$

$$\sin\beta = \frac{\cosh\frac{b}{R}}{\cosh\frac{a}{R}}$$

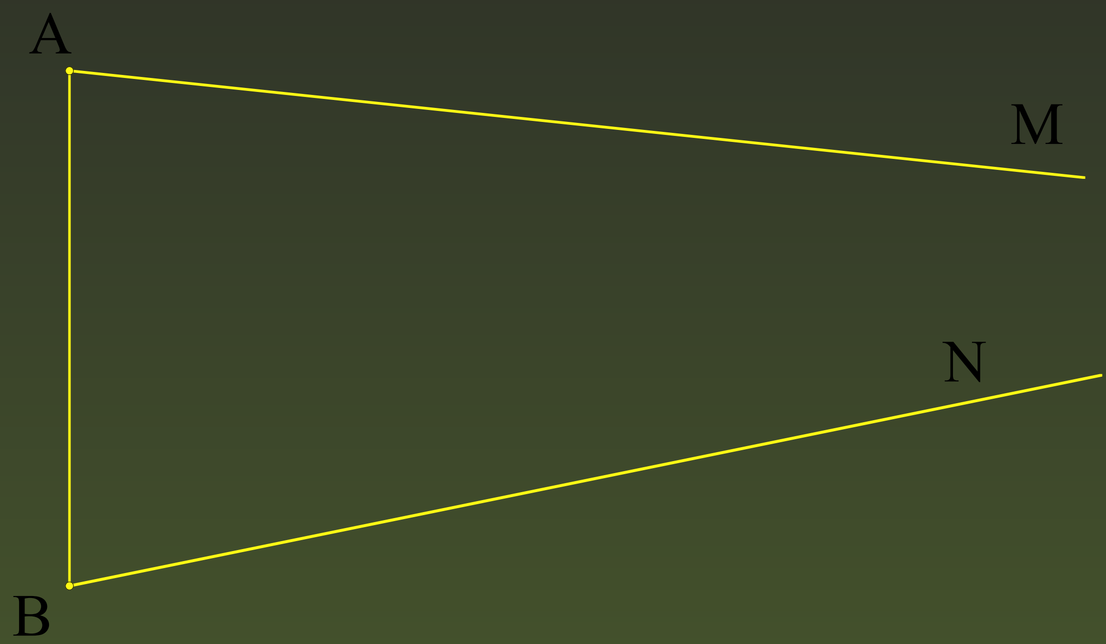


Segmento de paralelismo



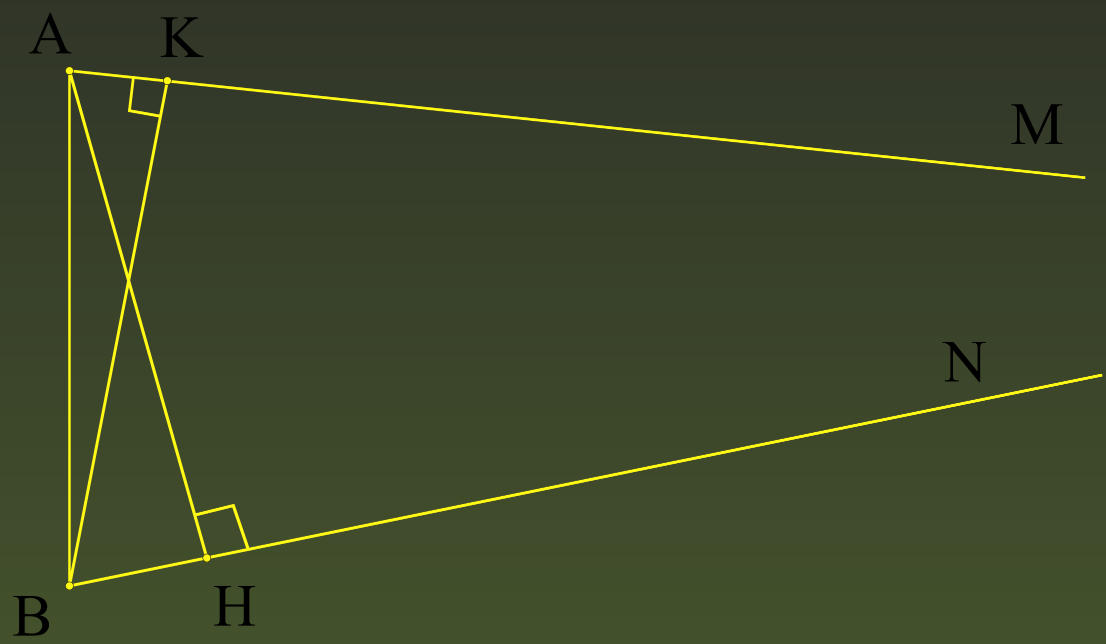
- Dado $\alpha = BAM$, buscamos x con $\Pi(x) = \alpha$.

Segmento de paralelismo



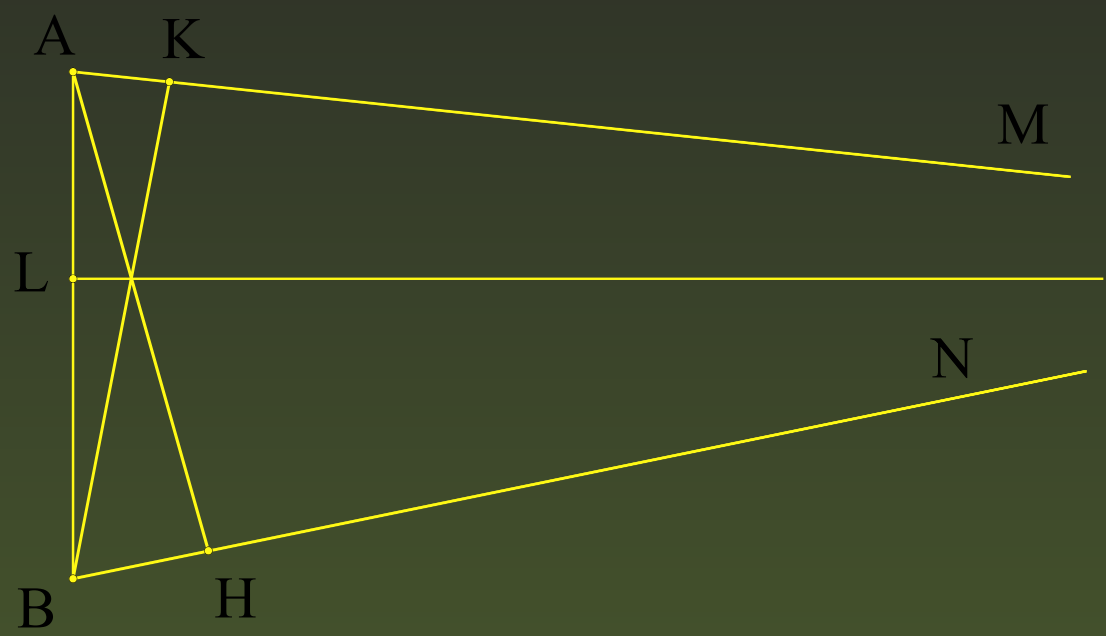
- Trazamos la paralela.

Segmento de paralelismo



- Trazamos las perpendiculares.

Segmento de paralelismo

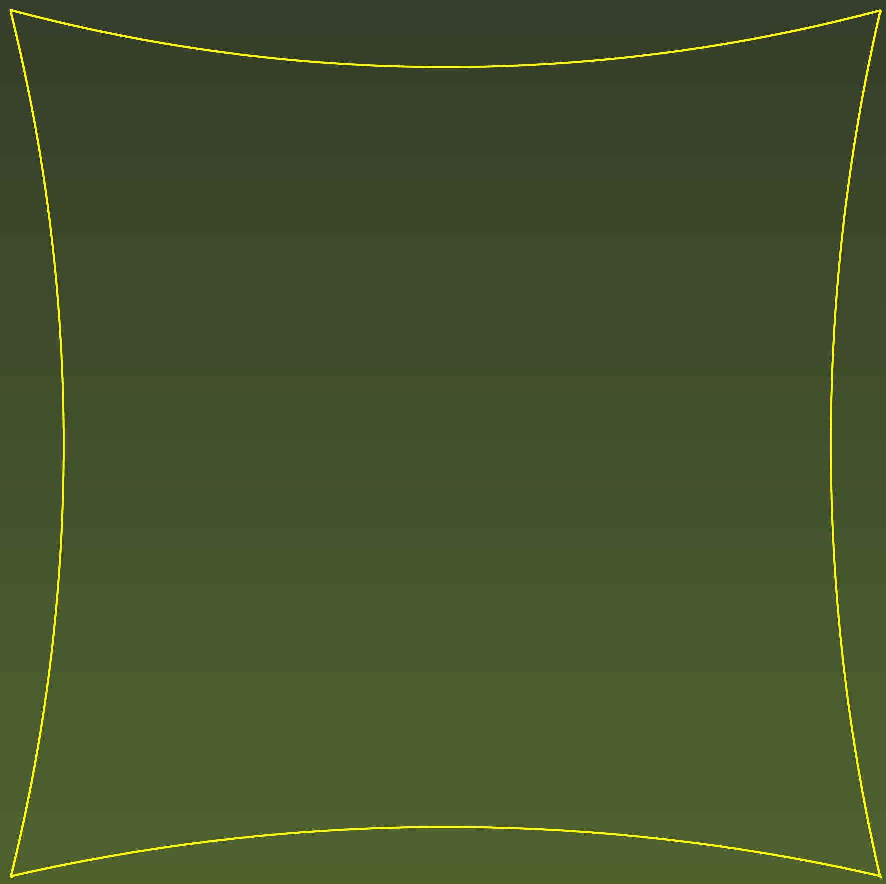


- Hemos construido un segmento AL tal que

$$\Pi(AL) = \alpha$$

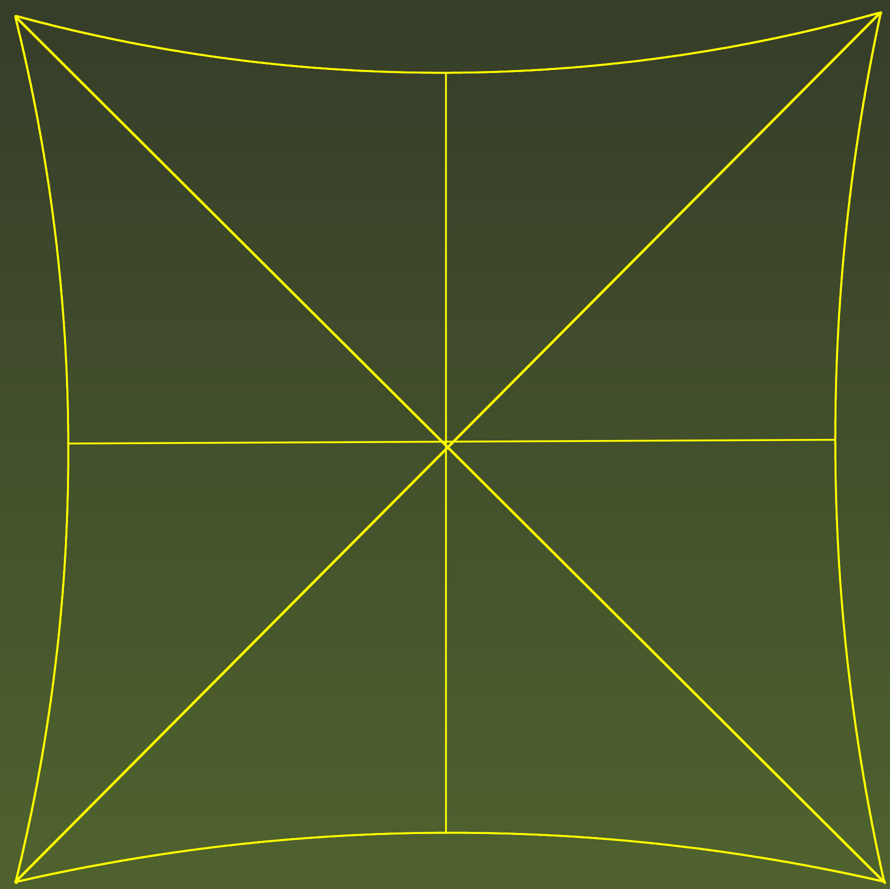
Cuadrado

Queremos construir un “cuadrado” de área πR^2.

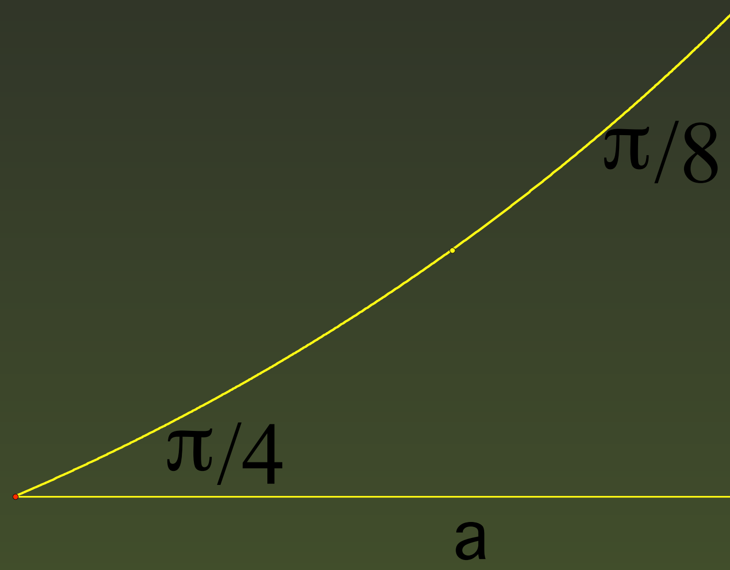


Cuadrado

Queremos construir un “cuadrado” de área πR^2.



Triángulo de área $\pi R^2/8$



- Area $= R^2(\pi - (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8})) = R^2\pi/8.$

Triángulo de área $\pi R^2/8$

$$\cosh\frac{a}{R} = \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

Triángulo de área $\pi R^2/8$

$$\cosh\frac{a}{R} = \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} \qquad 1 = \sin\Pi(x)\cosh(\frac{x}{R})$$

Triángulo de área $\pi R^2/8$

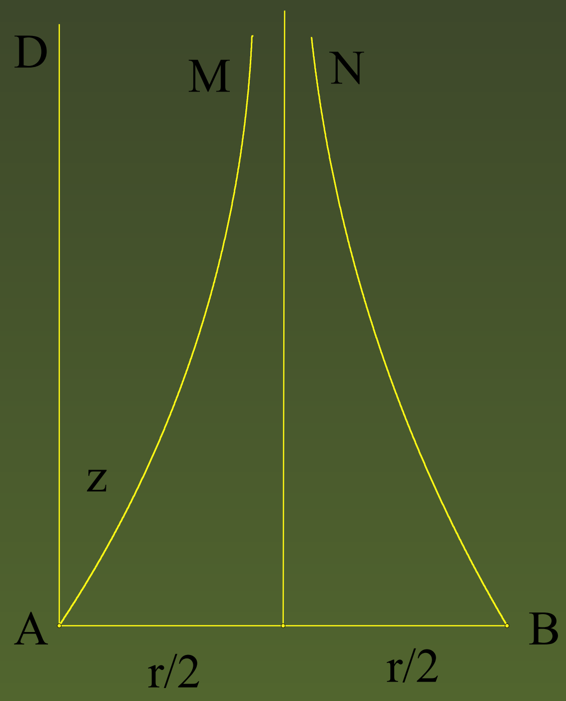
$$\cosh\frac{a}{R} = \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} \qquad 1 = \sin\Pi(x)\cosh(\frac{x}{R})$$

$$= \frac{\cosh\frac{c}{R}}{\cosh\frac{b}{R}}; \qquad \Pi(\frac{b}{R}) = 3\pi/8,\ \Pi(\frac{c}{R}) = \pi/4$$

- a es el cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa c y el otro cateto b y por lo tanto construible.

Círculo de área πR^2

- Area círculo $= \pi(2R\sinh\frac{r}{2R})^2 = \pi(2R\tan z)^2$.
- z es el complementario del ángulo de paralelismo de $r/2$.



Círculo de área πR^2

- Basta construir z con $\tan^2 z = \frac{1}{4}$ y r a partir de $\Pi(r/2) = \pi/2 - z.$

- Esto acaba la cuadratura del círculo hiperbólico, con la advertencia de que no todo círculo hiperbólico se puede cuadrar! Cuales se pueden?