Geometría no euclidiana

De la geometría clásica a la geometría diferencial

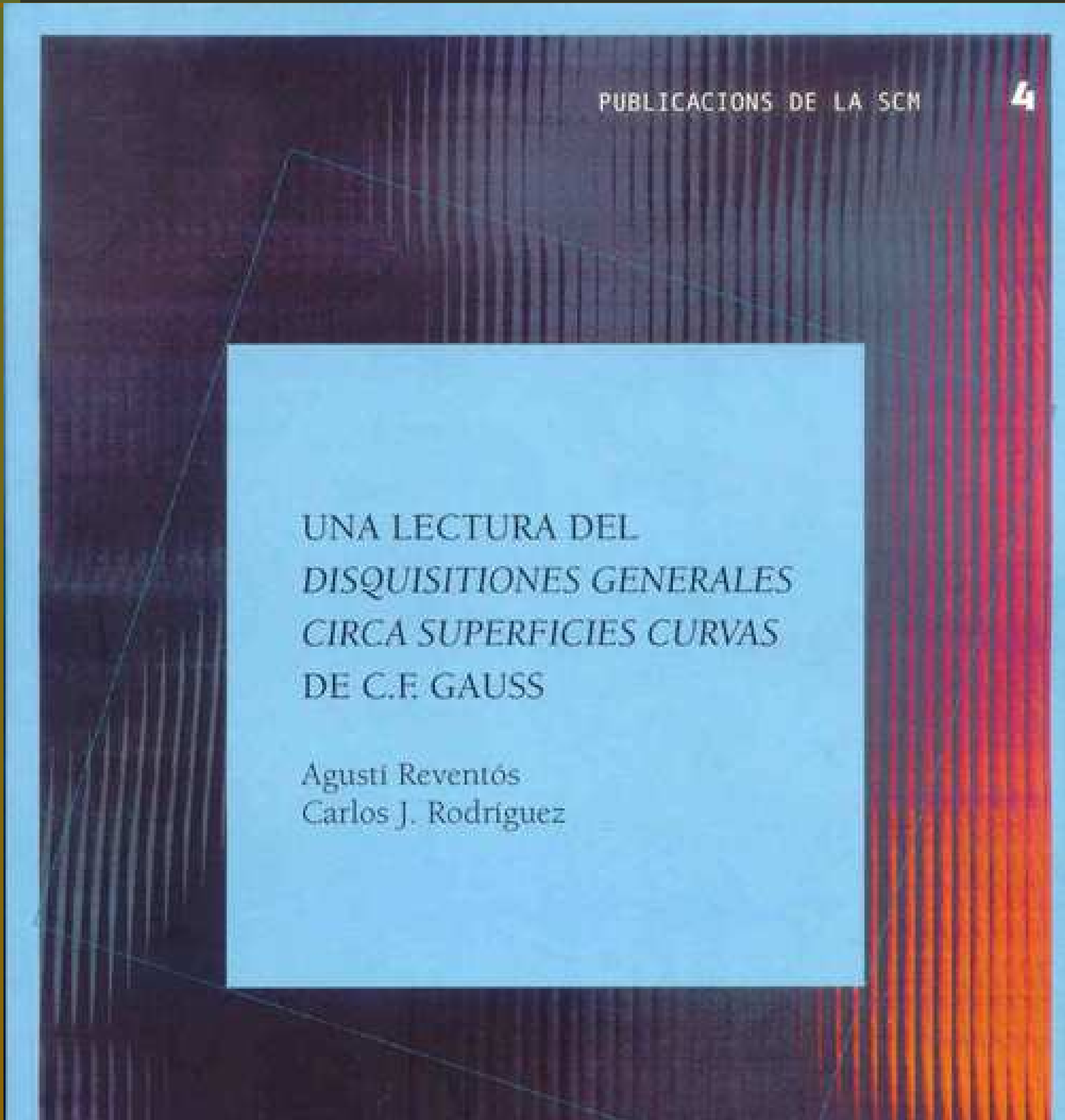
8-12 Setiembre 2008

II Encuentro Nacional de Matemáticas y su Enseñanza,

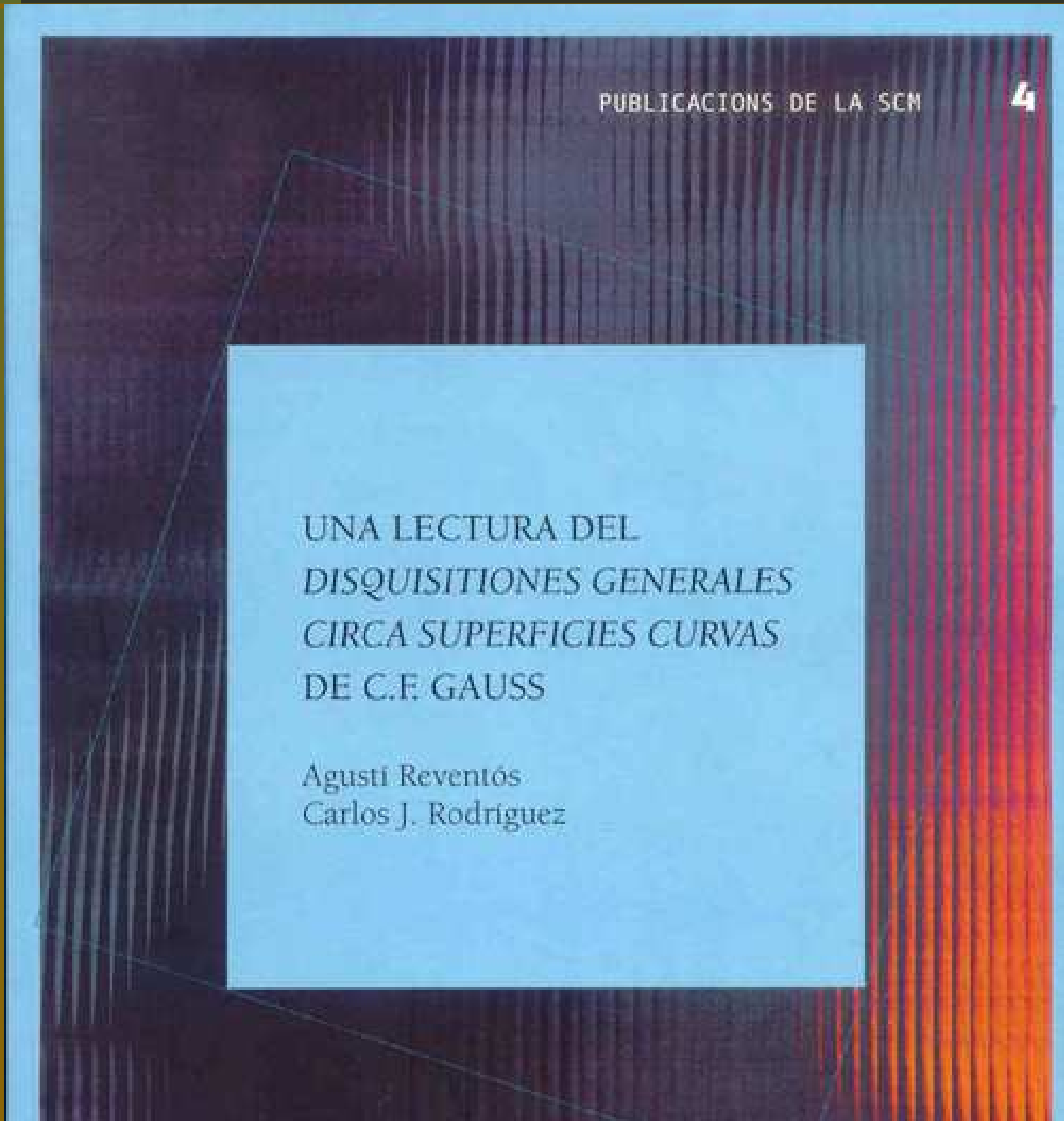
Universidad Tecnológica de Pereira

AGUSTÍ REVENTÓS & CARLOS J. RODRÍGUEZ

Referencia


PUBLICACIONS DE LA SCM
4
UNA LECTURA DEL
DISQUISITIONES GENERALES
CIRCA SUPERFICIES CURVAS
DE C.F. GAUSS
Agustí Reventós
Carlos J. Rodríguez

Referencia



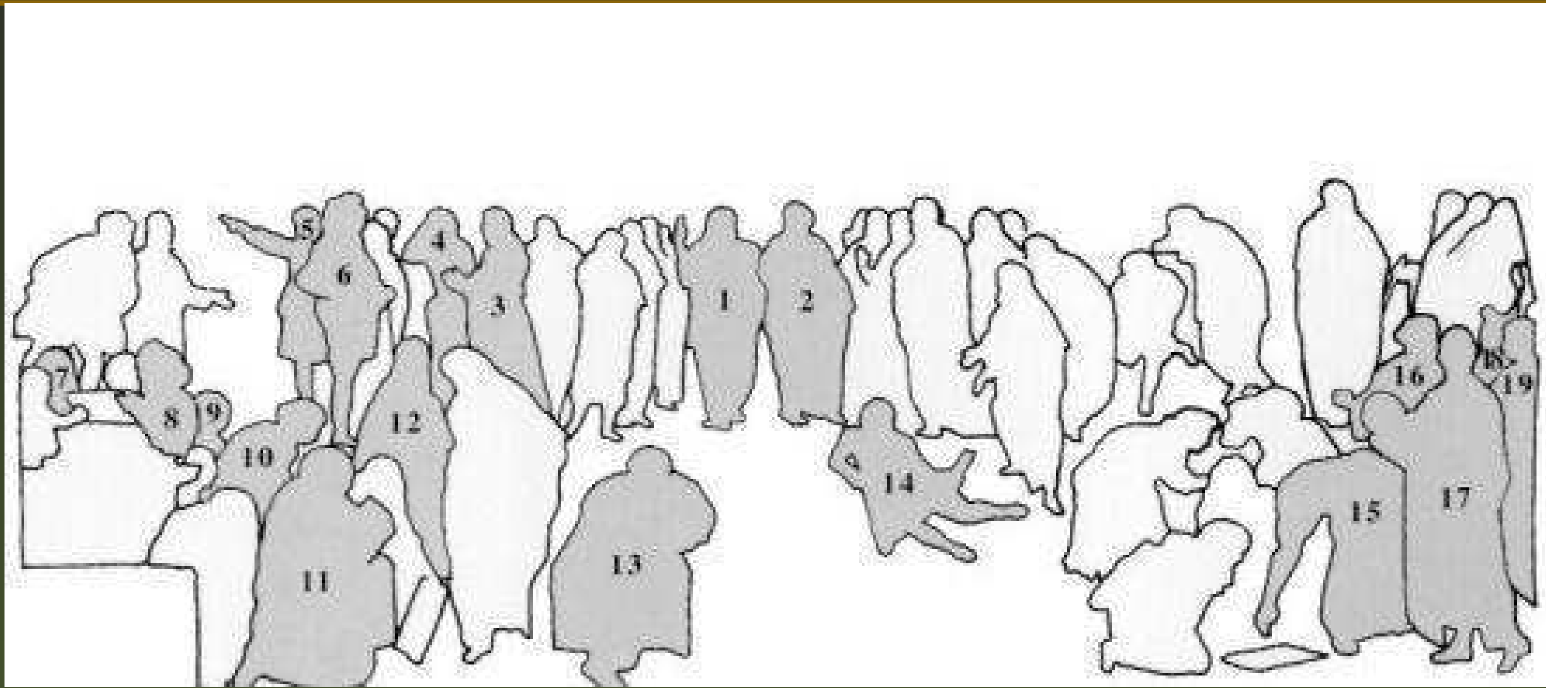
http://scm.iec.cat

El quinto postulado

Euclides $\sim 300 aC.$

Escuela de Atenes. **Raffaello** 1510

Escuela de Atenes



1. Platón 2. Aristóteles 3. Sócrates
7. Zenón 11. Pitágoras 13. Heráclito

15. Euclides

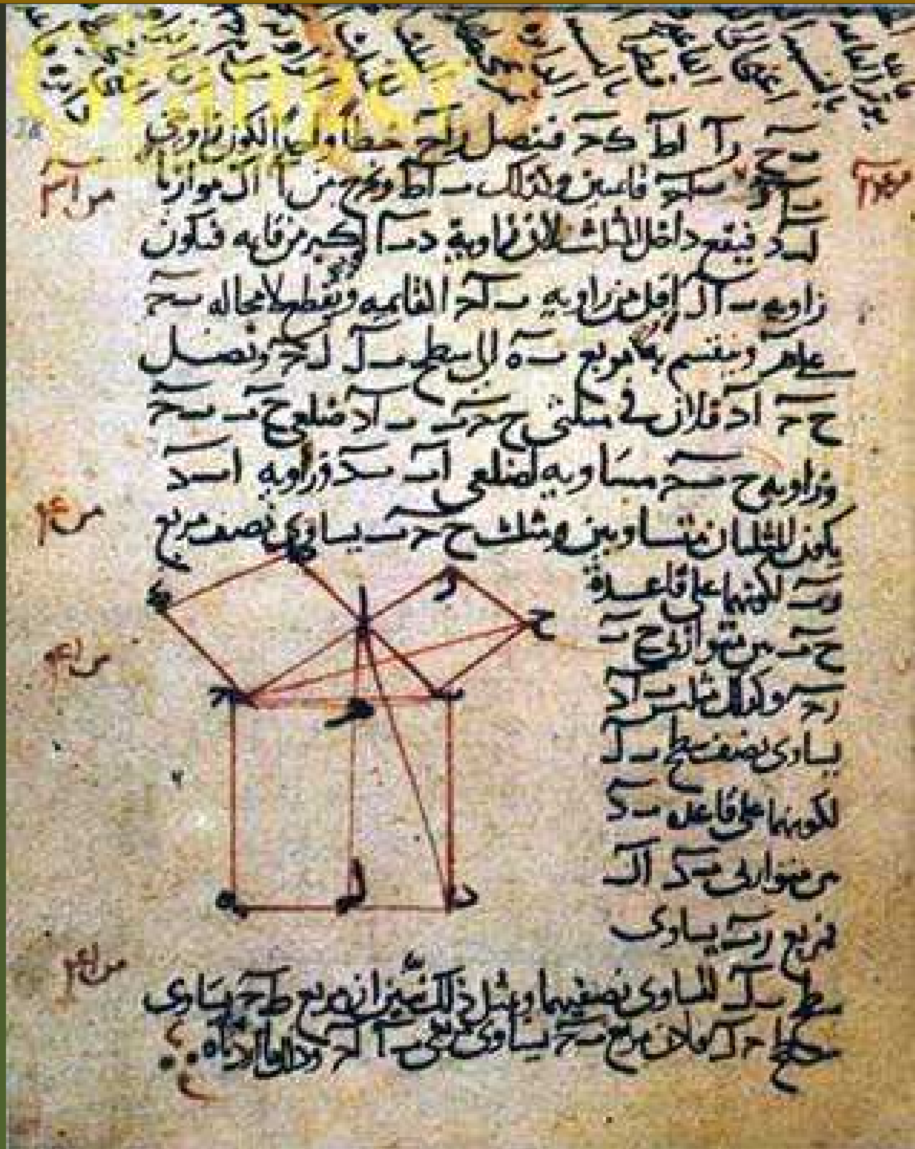
17. Ptolomeo 18. Autoretrato de Raphael

Euclides con un compás

Los Elementos

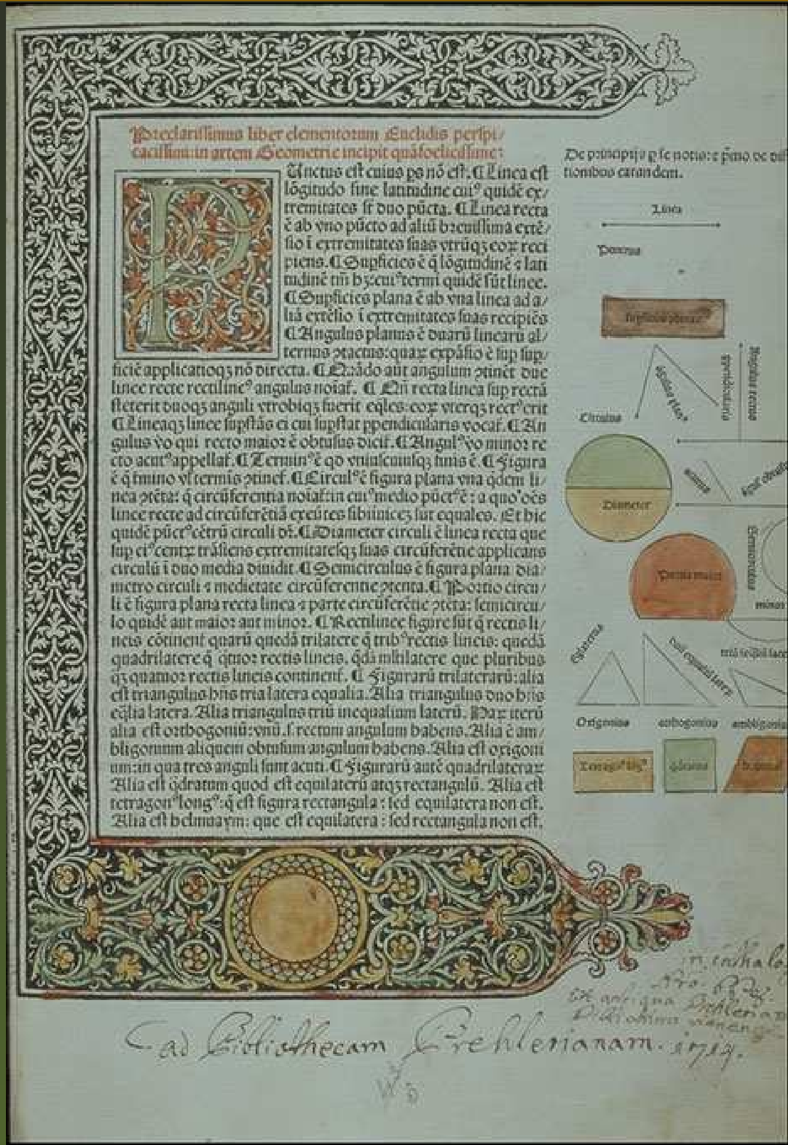
Pergamino griego. Siglo IX. Vaticano.

Los Elementos



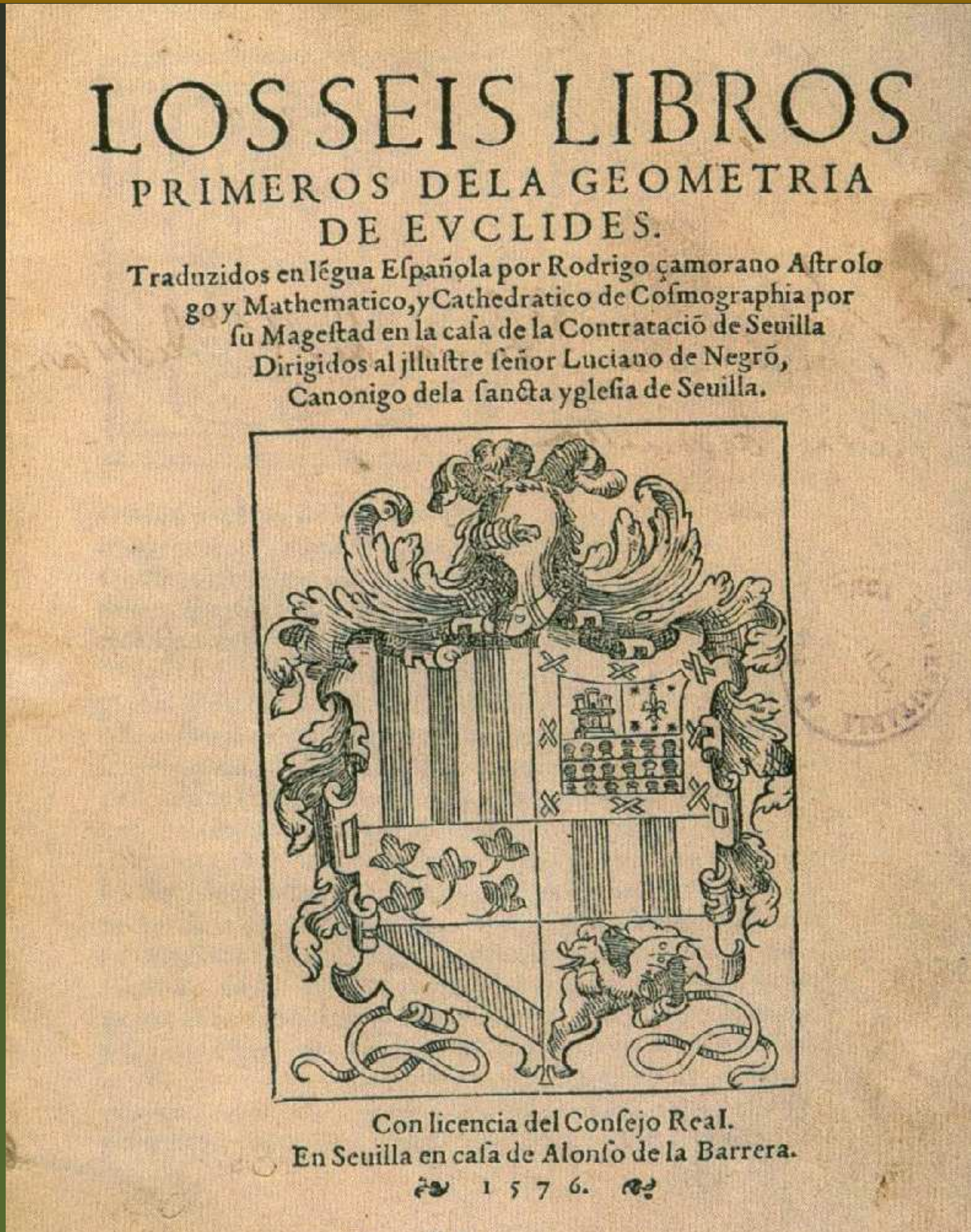
Abu Jafar Muh. b. al-Hasan Nasiraddin at-Tusi, 1258

Los Elementos



Primera edición impresa. Venecia 1482

Los Elementos

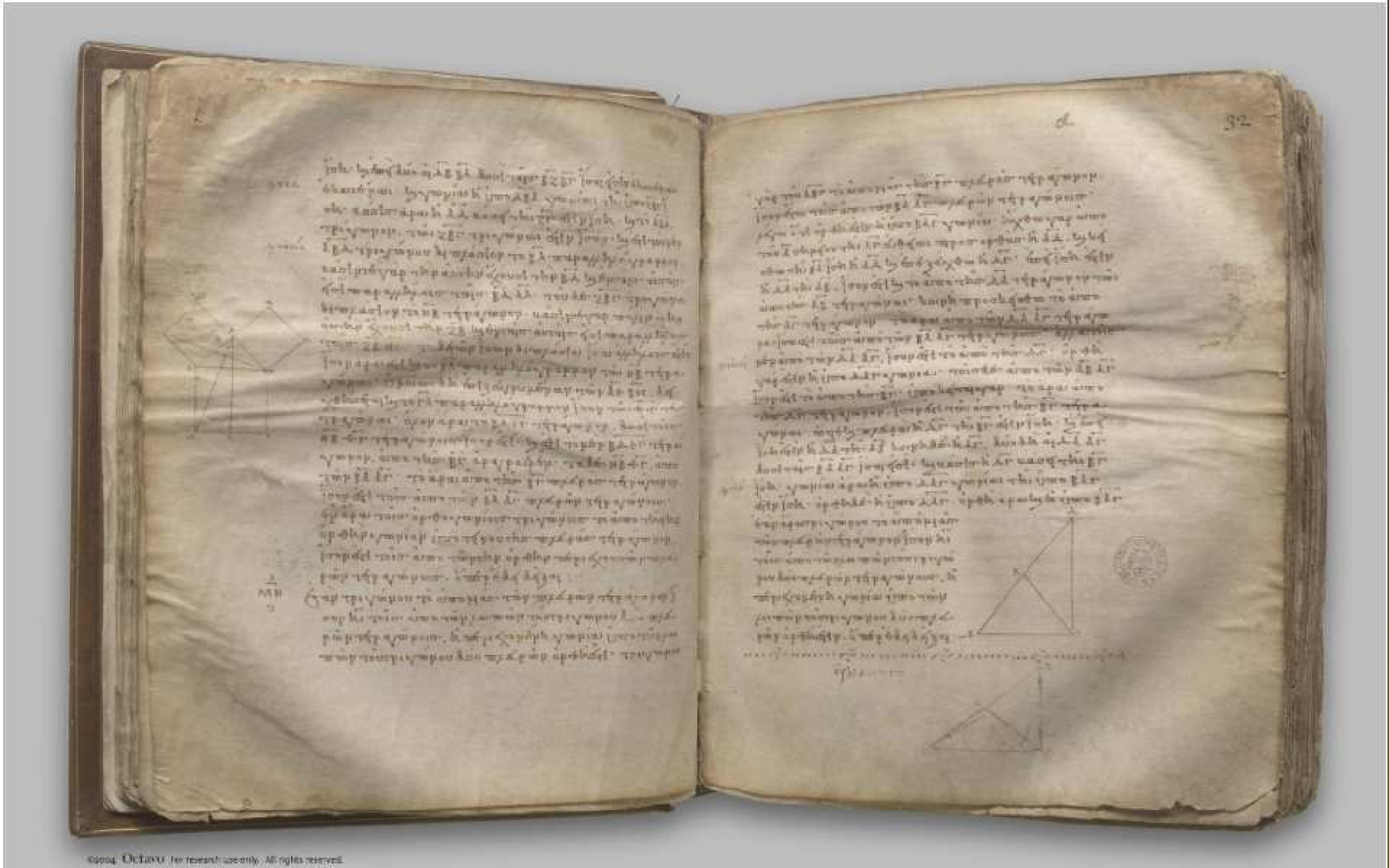


LOS SEIS LIBROS
PRIMEROS DELA GEOMETRIA
DE EVCLIDES.

Traduzidos en lẽgua Eſpañola por Rodrigo çamorano Aſtrologo y Mathematico, y Cathedratico de Coſmographia por ſu Mageſtad en la caſa de la Contratació de Seuilla Dirigidos al jlluſtre ſeñor Luciano de Negró, Canonigo dela ſancta yglefia de Seuilla.

Con licencia del Conſejo Real.
En Seuilla en caſa de Alonſo de la Barrera.
1576.

Los Elementos



Año 888. www.rarebookromm.org The Bodleian Library, Oxford

POSTULADOS

1. Podemos dibujar líneas rectas desde cualquier punto a cualquier punto.
2. Podemos prolongar una línea recta finita continuamente a una línea recta.
3. Podemos describir un círculo con cualquier centro y distancia.

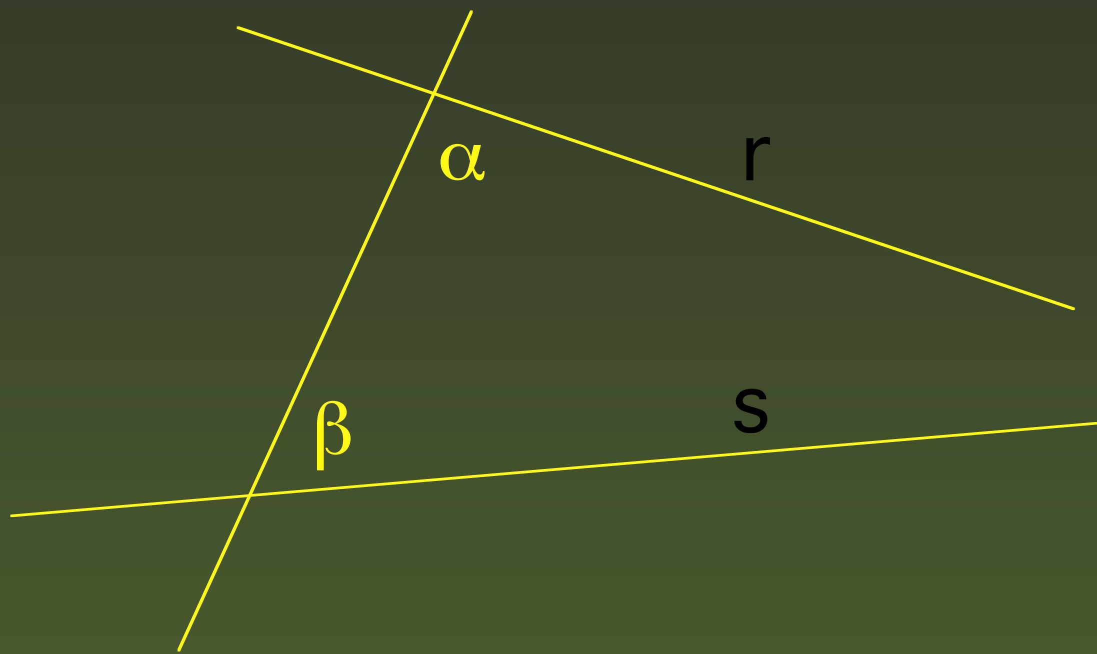
POSTULADOS

4. Todos los ángulos rectos son iguales.

POSTULADOS

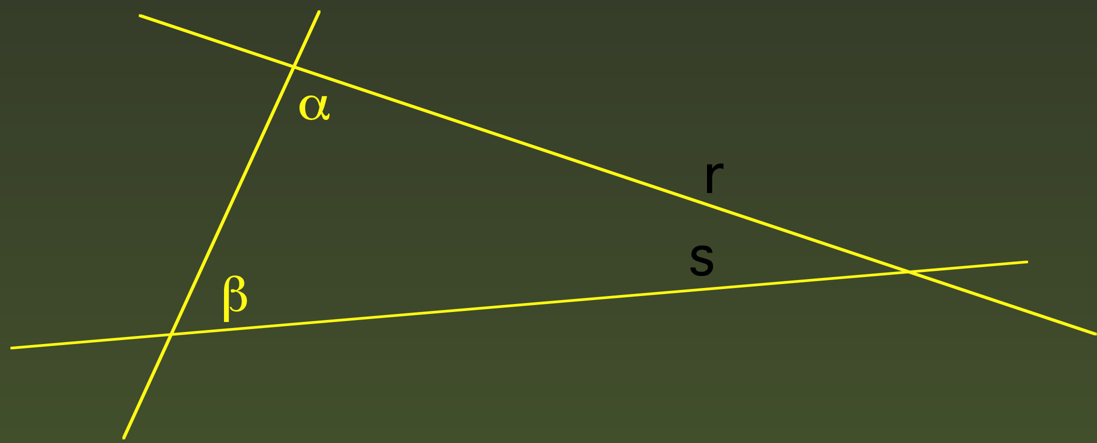
5. Si una línea recta es cortada por dos líneas rectas de manera que los ángulos interiores del mismo lado sumen menos de dos rectos, y si estas dos líneas rectas se prolongan indefinidamente, entonces se cortan en el lado dónde están estos ángulos que suman menos de dos rectos.

Quinto Postulado



Si $\alpha + \beta < \pi$, r y s se cortan.

Quinto Postulado

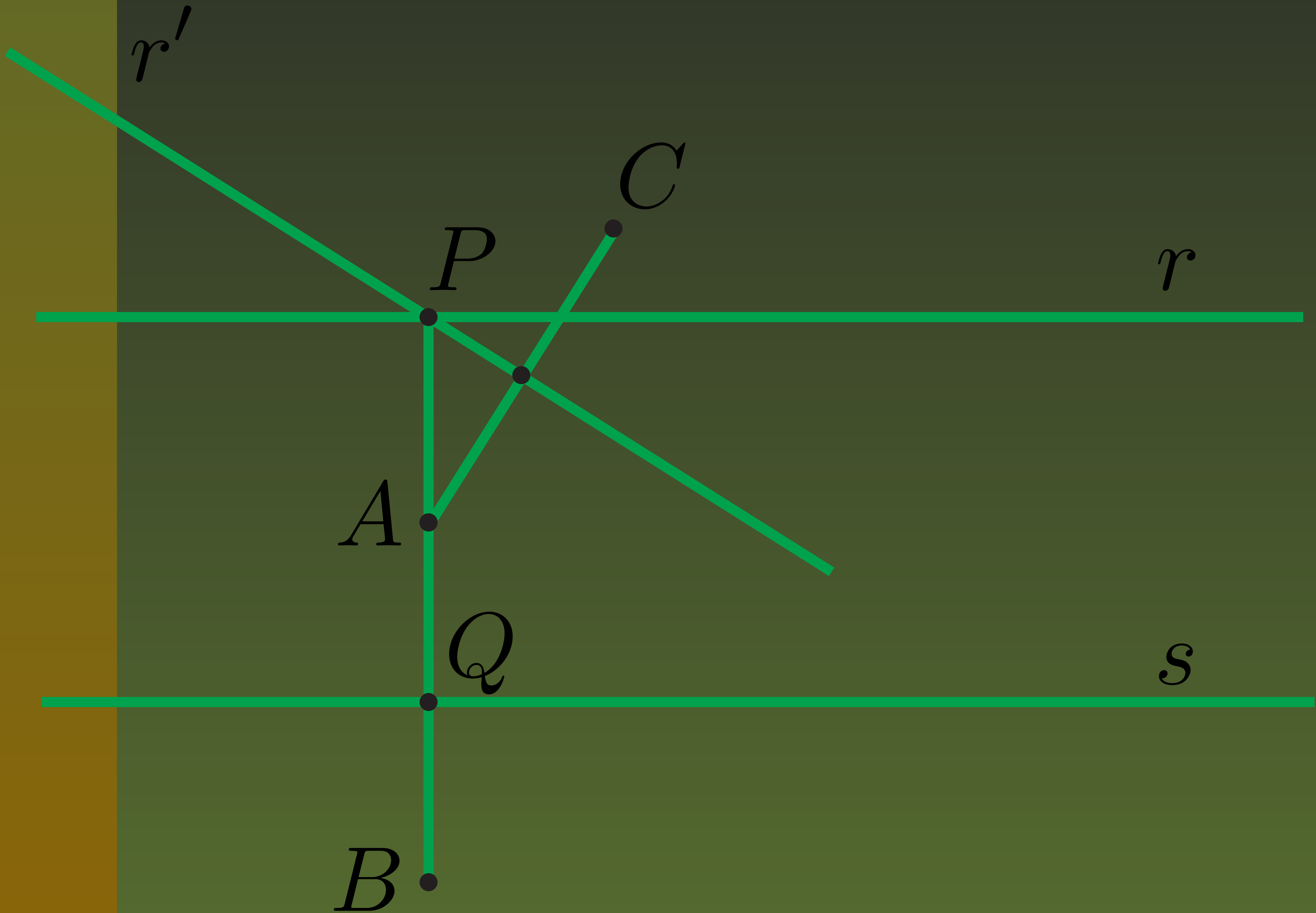


Ya se han cortado.

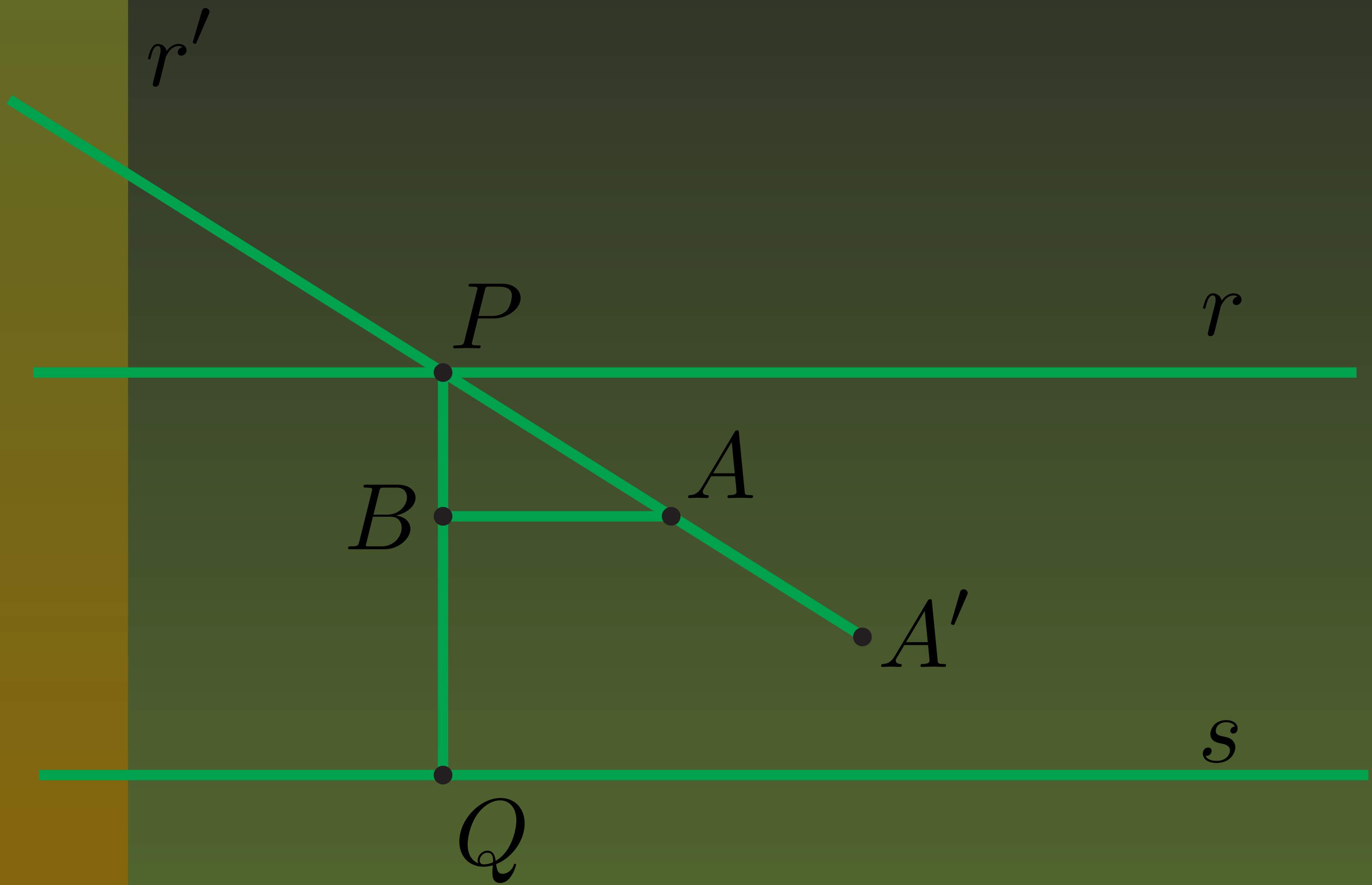
Enunciados equivalentes

1. Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela.
2. Tres puntos no alineados determinan una circunferencia.
3. Existen triángulos semejantes.
4. Hay triángulos de área tan grande como queramos.
5. Los ángulos de un triángulo suman lo mismo que dos ángulos rectos.
6. Las equidistantes son rectas.

Bolyai

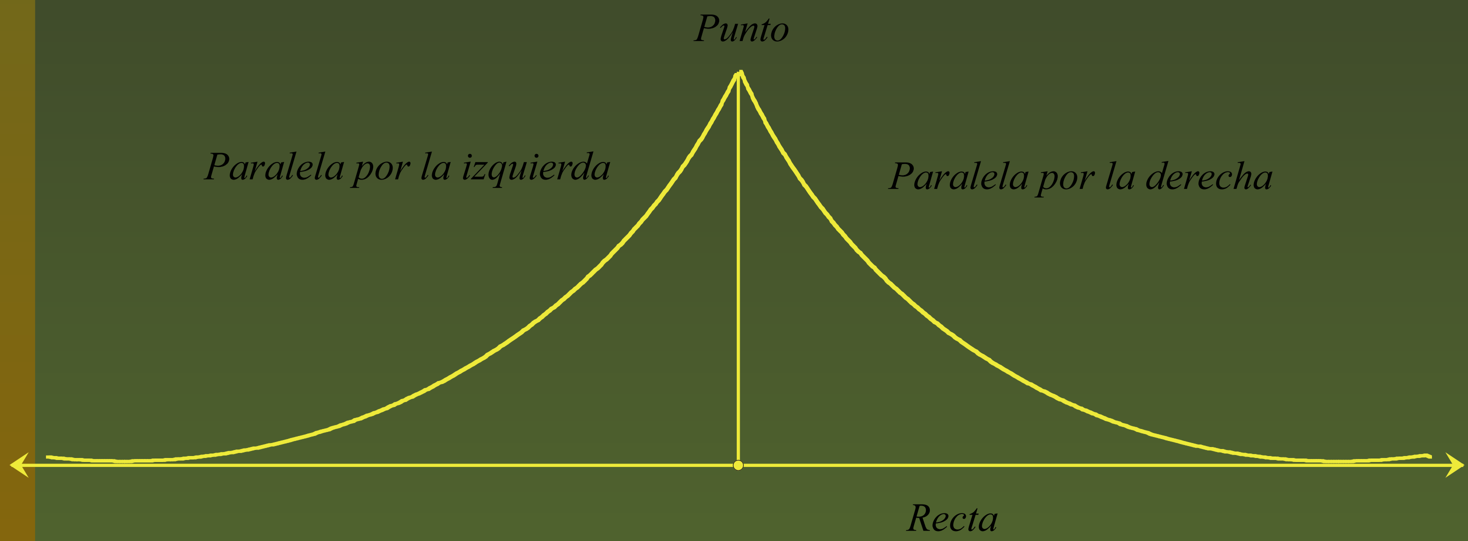


Wallis



Negación del quinto postulado

- *Dada una recta y un punto exterior, pasan por este punto más de una recta que no cortan la recta dada.*



El primer geómetra no-euclidiano

Aristóteles 384 – 322 **aC.**

Aristóteles 384 – 322 aC.

Si es imposible que los ángulos de un triángulo sumen dos rectos, entonces el lado del cuadrado es conmensurable con la diagonal.

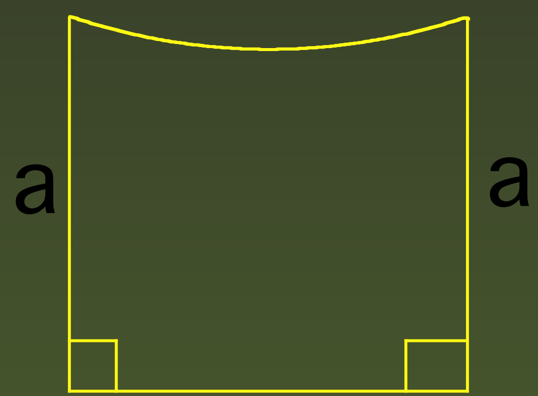
Geometría Absoluta

Geometría Absoluta

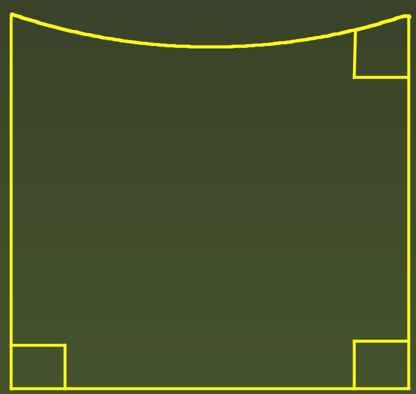
- G. Saccheri (1667-1733): *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia.*

- J. H. Lambert (1728 – 1777): *Theorie der Parallellinien.*

Geometría Absoluta



Saccheri



Lambert

Geometría Absoluta

- Saccheri rechaza la *hostil hipótesis del ángulo agudo* porqué obtiene resultados *que repugnan la naturaleza de la línea recta*.

Geometría Absoluta

- Saccheri rechaza la *hostil hipótesis del ángulo agudo* porqué obtiene resultados *que repugnan la naturaleza de la línea recta*.

- Lambert ve posible una geometría sin el quinto postulado: *Me inclino a pensar que la hipótesis del ángulo agudo es cierta en alguna esfera de radio imaginario*.

Geometría Absoluta

- Saccheri rechaza la *hostil hipótesis del ángulo agudo* porqué obtiene resultados *que repugnan la naturaleza de la línea recta*.

- Lambert ve posible una geometría sin el quinto postulado: *Me inclino a pensar que la hipótesis del ángulo agudo es cierta en alguna esfera de radio imaginario*.

- Taurinus (1794-1874) desarrolla esta idea llegando al ángulo de paralelismo.

Hilbert

Grundlagen der Geometrie, 1900

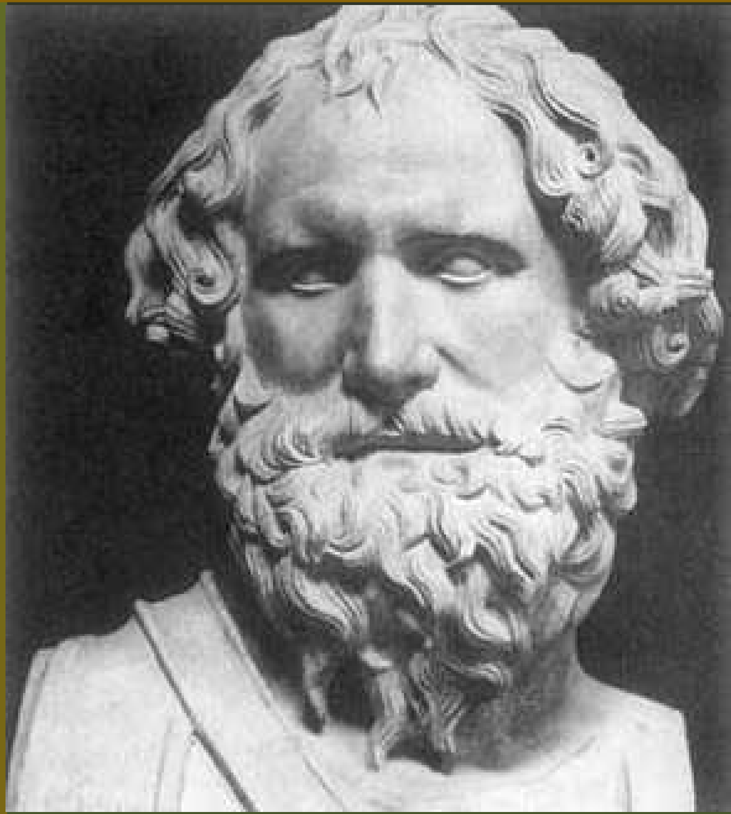
La analogía de Lambert

Geometría esférica

Triángulo esférico

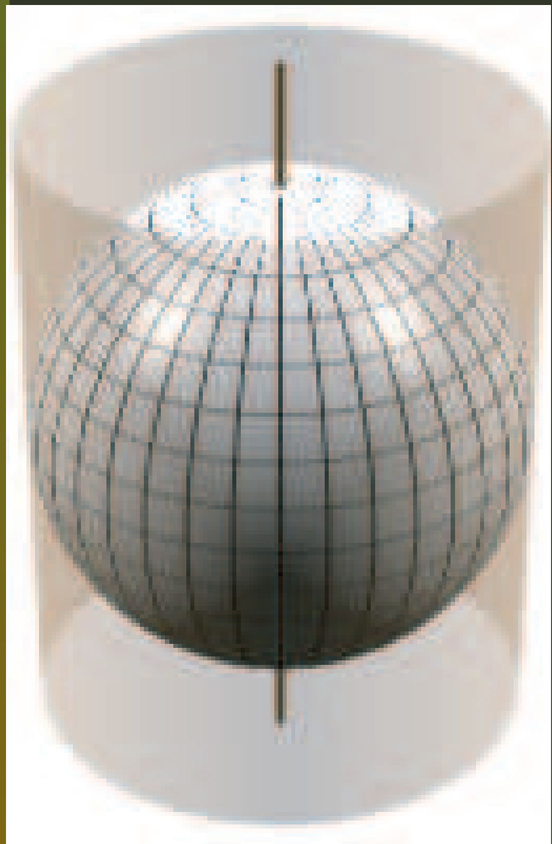
- Menelao de Alejandría $(70 - 130$ dC.) define triángulo esférico en *Sphaerica* .
- *Un triángulo esférico es el espacio comprendido por arcos de círculos máximos sobre la superficie de la esfera [...] estos arcos son siempre menores que un semicírculo .*

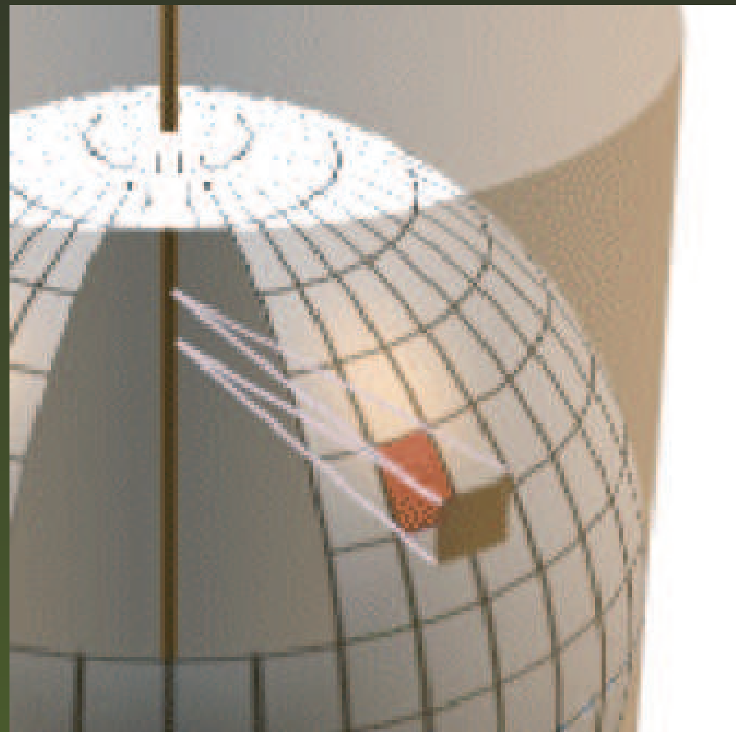
Area de la esfera



Arquímedes (287-212 aC): Area $= 4\pi R^2$.

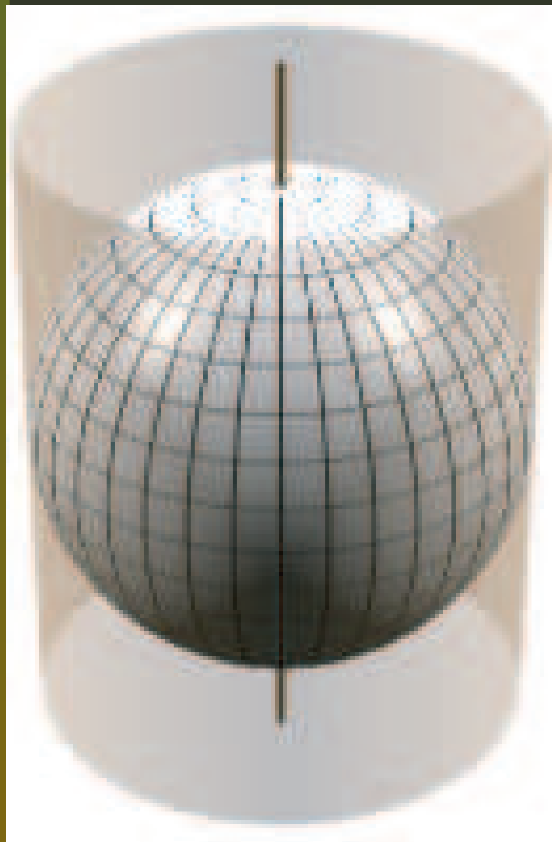
Area de la esfera

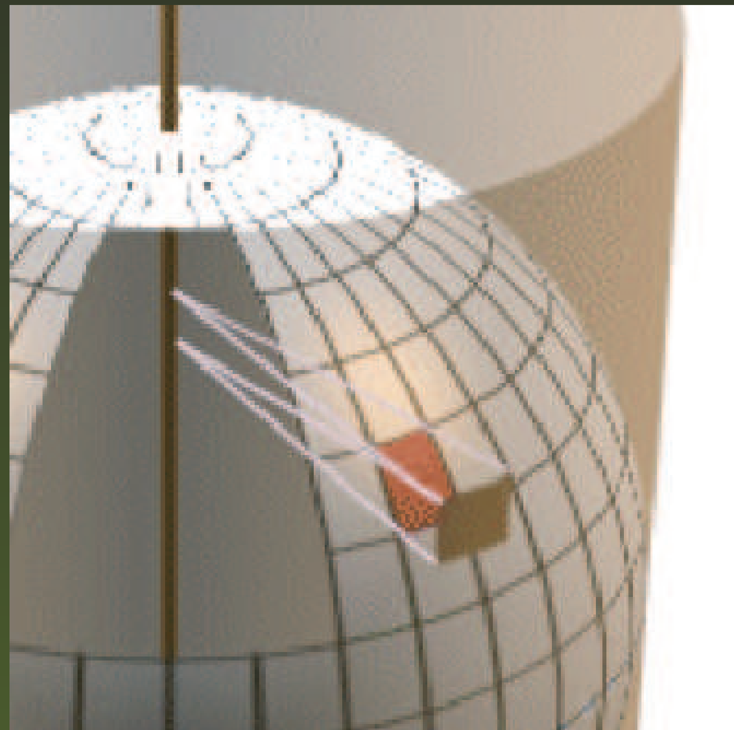




$$A = 2\pi R.2R$$

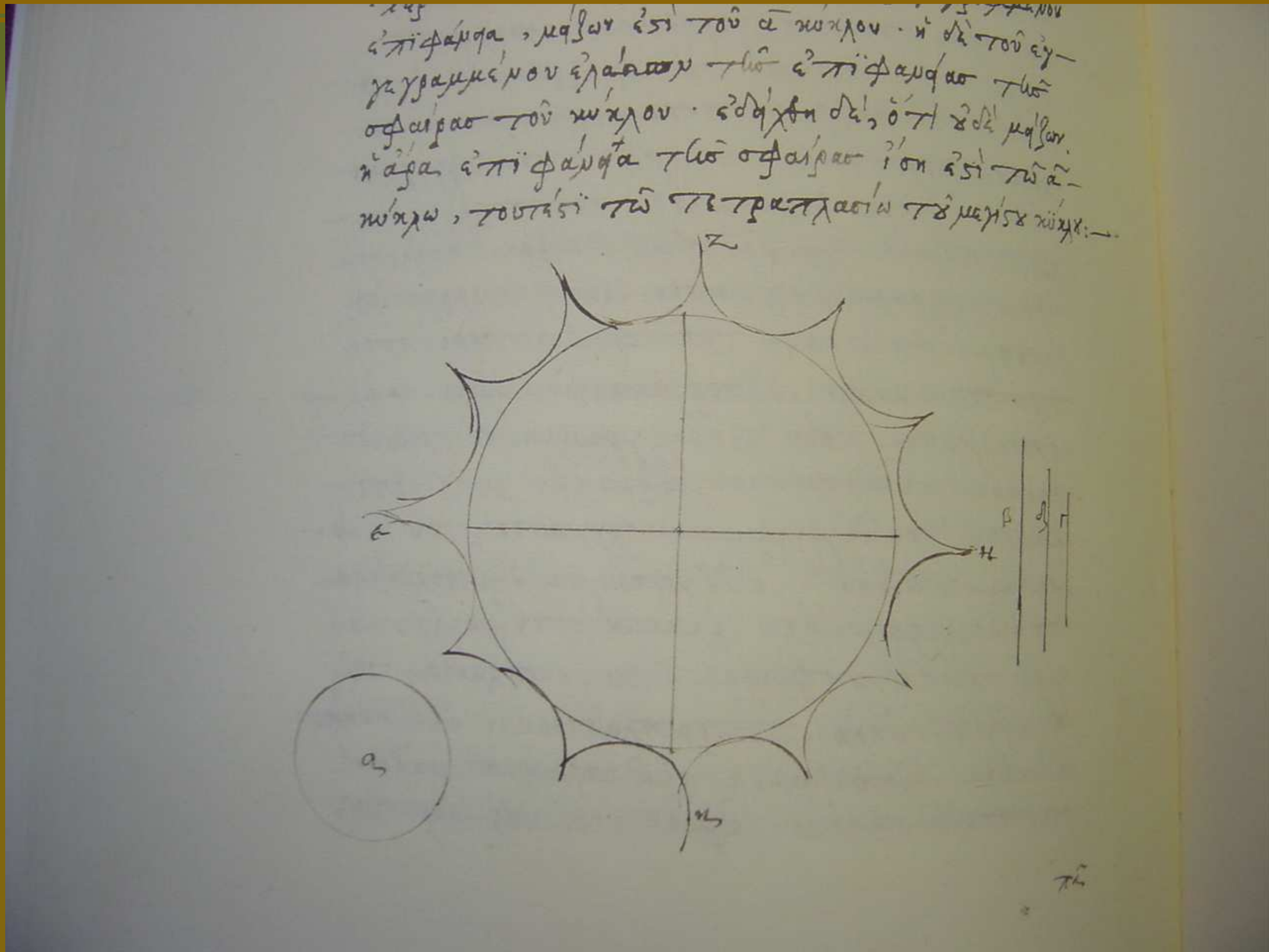
Area de la esfera





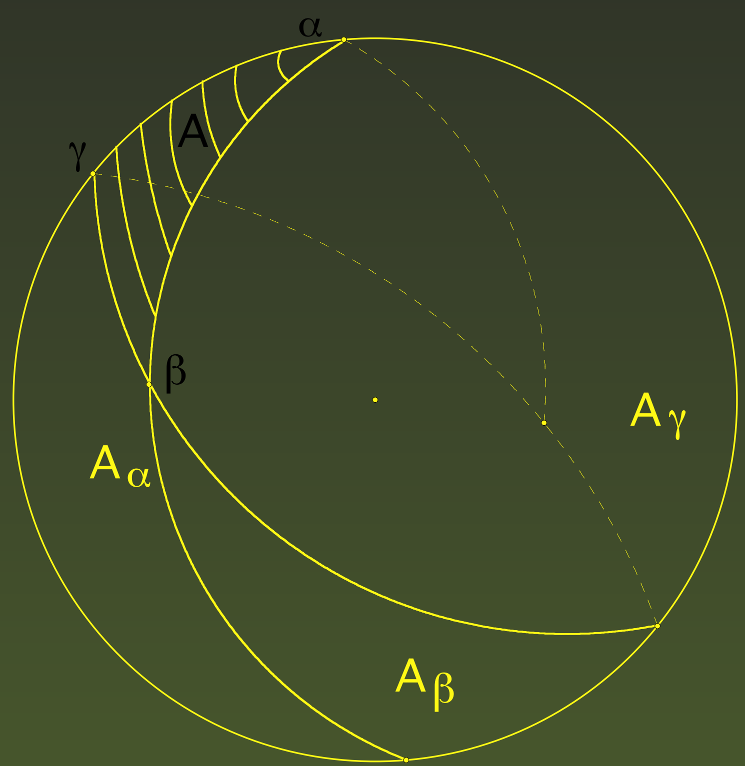
$$A = 2\pi R.2R$$
$$V = \frac{2}{3}\pi R^2.2R$$

Sobre la esfera y el cilindro



Manuscrito X-I-14 El Escorial (∼ 1540), copiado del CCCV de Venecia, copiado de uno del siglo IX, perdido.

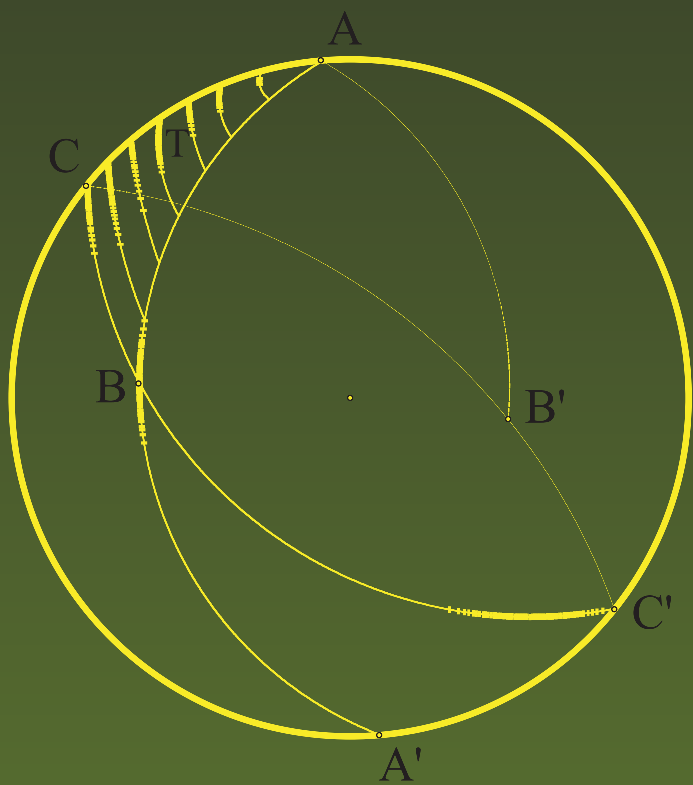
Area de un huso



Area de un huso esférico $F_\alpha = 2R^2\alpha.$

Area triángulo esférico

	Triángulo	*Triángulo*	*Area*
1	ABC	$A'B'C'$	T
2	ABC'	$A'B'C$	$2R^2\gamma - T$
3	$AB'C$	$A'BC'$	$2R^2\beta - T$
4	$A'BC$	$AB'C'$	$2R^2\alpha - T$



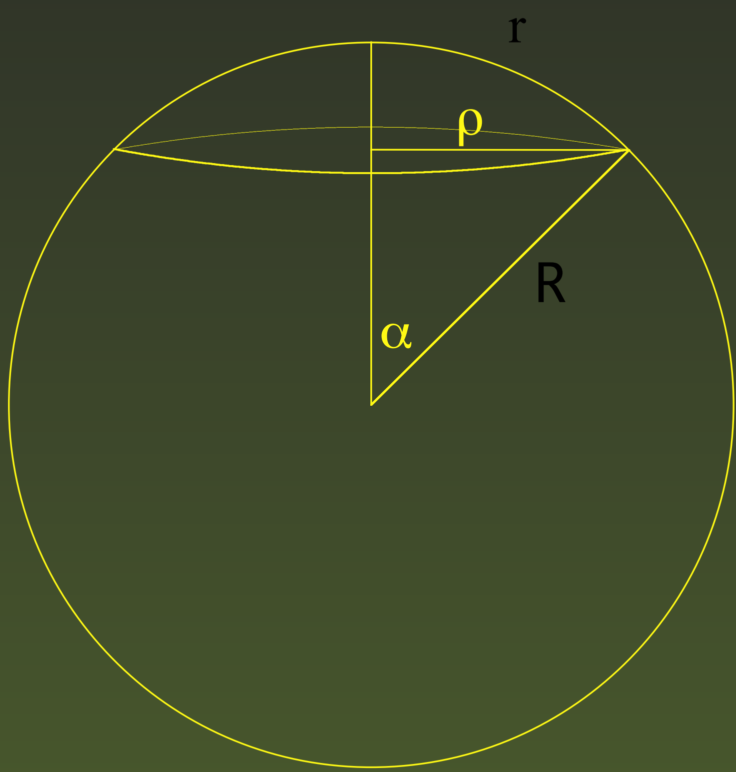
Area triángulo esférico

	Triángulo	*Triángulo*	*Area*
1	ABC	$A'B'C'$	T
2	ABC'	$A'B'C$	$2R^2\gamma - T$
3	$AB'C$	$A'BC'$	$2R^2\beta - T$
4	$A'BC$	$AB'C'$	$2R^2\alpha - T$

$$\begin{aligned} 4\pi R^2 &= 2(T + (2R^2\gamma - T) + (2R^2\beta - T) + (2R^2\alpha - T)) \\ \pi R^2 &= R^2(\alpha + \beta + \gamma) - T. \end{aligned}$$

$$\text{Area} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2 \cdot \ \text{Exceso}$$

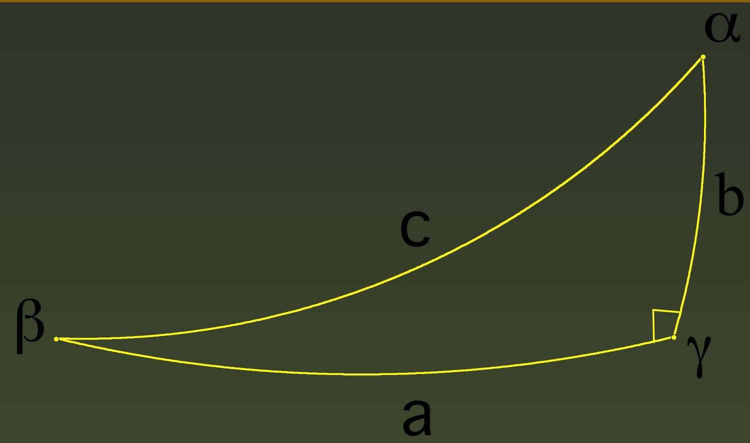
Longitud de una circunferencia



$$L = 2\pi\rho = 2\pi R \sin\alpha = 2\pi R \sin\frac{r}{R}.$$

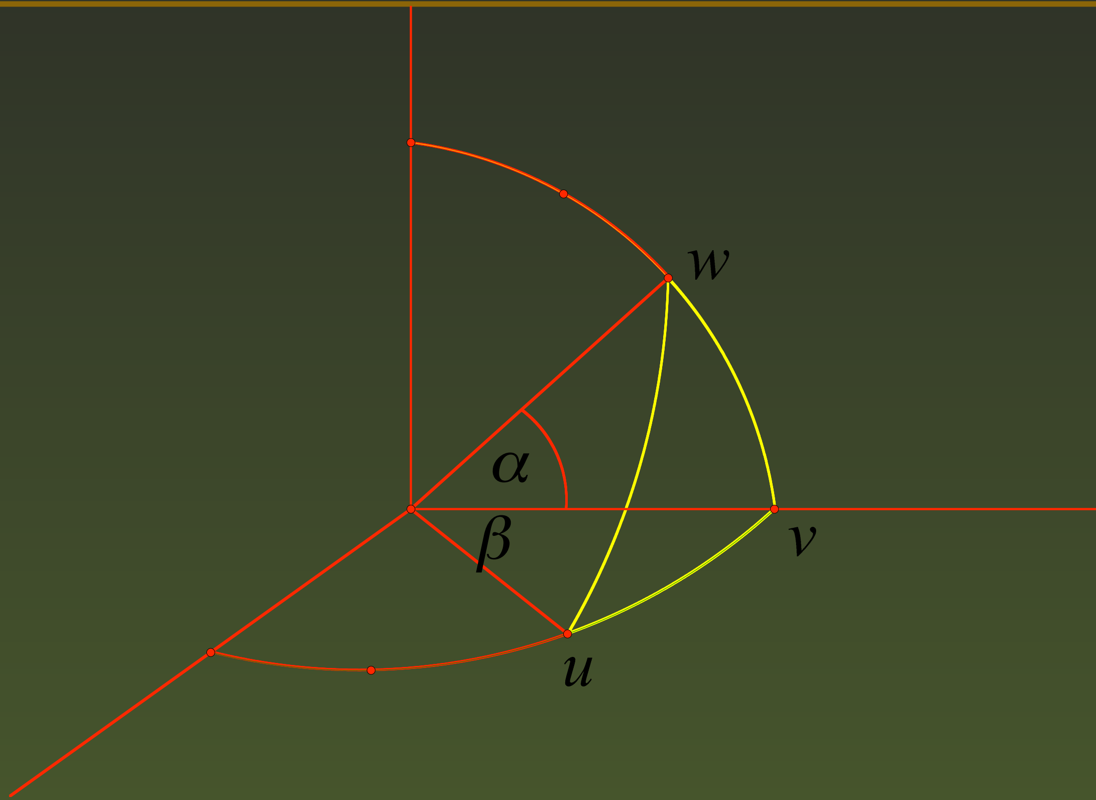
Criterio para saber dónde vivimos.

Teorema de Pitágoras



$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cdot\cos\frac{b}{R}$$

Teorema de Pitágoras



$$u = (\sin\beta, \cos\beta, 0), w = (0, \cos\alpha, \sin\alpha)$$

$$u \cdot v = \cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\gamma$$

Trigonometría esférica

$$
\left\{
\begin{aligned}
\sin\frac{a}{R}\sin\beta &= \sin\frac{b}{R}\sin\alpha \\
\cos\frac{a}{R} &= \cos\frac{c}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{c}{R}\sin\frac{b}{R}\cos\alpha \\
\cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{R}
\end{aligned}
\right.
$$

$$R \to \infty$$

Longitud de la circunferencia

$$L = 2\pi R \sin \frac{r}{R} \sim 2\pi\ r.$$

Teorema de Pitágoras

$$\cos\frac{a}{R} \sim 1 - \frac{a^2}{2R^2}$$

$$1 - \frac{c^2}{2R^2} \sim (1 - \frac{a^2}{2R^2}) \cdot (1 - \frac{b^2}{2R^2})$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Area del triángulo

- Area $= R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = \infty \cdot 0.$

La esfera imaginaria

Esfera imaginaria

- Formalmente substituimos R por Ri y recordamos

$$\boxed{\cos ix = \cosh x, \qquad \sin ix = i \sinh x.}$$

Exponencial compleja

- Fórmula de Euler $\quad e^{ix} = \cos x + y \sin x$

- $\quad \cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

Area de un triángulo

$$\begin{aligned}\text{Area} &= (Ri)^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \\ &= R^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)) \\ &= R^2 \cdot \text{Defecto}\end{aligned}$$

Area de un triángulo

$$\begin{aligned} \text{Area} &= (Ri)^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \\ &= R^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)) \\ &= R^2 \cdot \text{Defecto} \end{aligned}$$

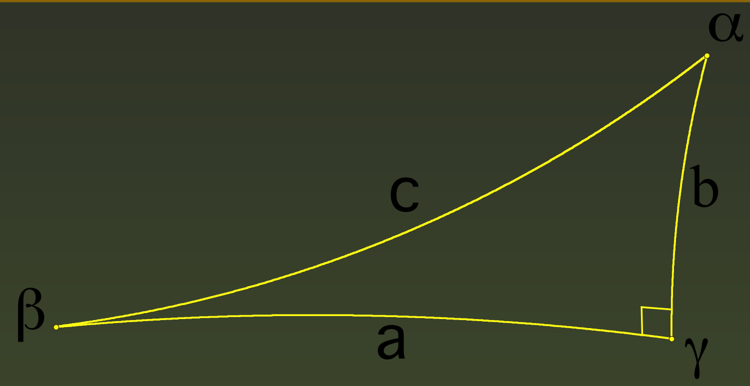
El defecto es positivo.

Longitud de una circunferencia

$$L = 2\pi Ri \sin\frac{r}{Ri} = 2\pi R \sinh\frac{r}{R}.$$

Criterio para saber dónde vivimos.

Teorema de Pitágoras



$$\cosh\frac{c}{R} = \cosh\frac{a}{R}\cdot\cosh\frac{b}{R}$$

Analogía

$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}$	$\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cdot\cosh\frac{c}{R}$
A $= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$	A$= R^2(\pi-(\alpha+\beta+\gamma))$
L$= 2\pi R\sin\frac{r}{R}$	L$= 2\pi R\sinh\frac{r}{R}.$

Trigonometría esfera imaginaria

$$\begin{aligned} \sinh\frac{a}{R}\sin\beta &= \sinh\frac{b}{R}\sin\alpha \\ \cosh\frac{a}{R} &= -\sinh\frac{c}{R}\sinh\frac{b}{R}\cos\alpha + \cosh\frac{c}{R}\cosh\frac{b}{R} \\ \cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh\frac{a}{R} \end{aligned}$$

Trigonometría esfera imaginaria

$$\sinh\frac{a}{R}\sin\beta = \sinh\frac{b}{R}\sin\alpha$$

$$\cosh\frac{a}{R} = -\sinh\frac{c}{R}\sinh\frac{b}{R}\cos\alpha + \cosh\frac{c}{R}\cosh\frac{b}{R}$$

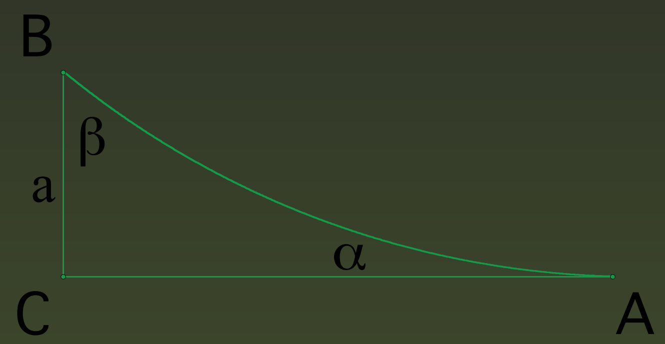
$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh\frac{a}{R}$$

Trigonometría esfera imaginaria

$$
\begin{aligned}
\sinh\frac{a}{R}\sin\beta &= \sinh\frac{b}{R}\sin\alpha \\
\cosh\frac{a}{R} &= -\sinh\frac{c}{R}\sinh\frac{b}{R}\cos\alpha + \cosh\frac{c}{R}\cosh\frac{b}{R} \\
\cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh\frac{a}{R}
\end{aligned}
$$

No hay triángulos semejantes.

Angulo de paralelismo



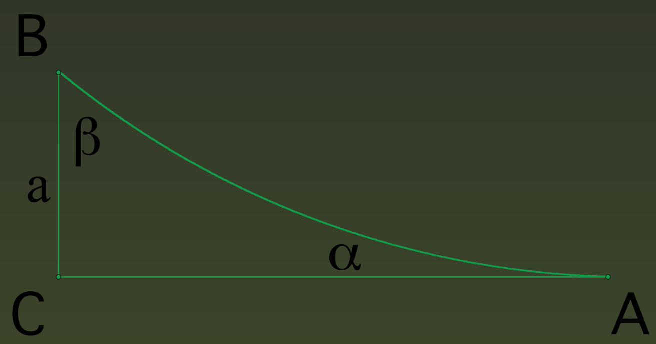
$$\cos\alpha = \sin\beta \cosh\tfrac{a}{R}$$

Si $A \to \infty$, $\alpha \to 0$,

$$1 = \sin\Pi(a)\cosh\frac{a}{R}$$

$$\boxed{\bullet \quad \Pi(a) = 2\arctan e^{-a/R}}$$

Las rectas tienen longitud infinita



$$\cos\beta = \sin\alpha \cosh\frac{b}{R}$$

Si $\alpha \longrightarrow 0$, $\beta \longrightarrow$ ángulo paralelismo $< \pi/2$

$$\Longrightarrow \quad b \longrightarrow \infty$$