Geometría no euclidiana

De la geometría clásica a la geometría diferencial

8-12 Setiembre 2008

II Encuentro Nacional de Matemáticas y su Enseñanza,

Universidad Tecnológica de Pereira

AGUSTÍ REVENTÓS & CARLOS J. RODRÍGUEZ

Gauss y la geometría euclidiana

1796

- 29 de marzo de 1796. Diecisiete lados.
- Carta a Gerling 1819.

1796

- 29 de marzo de 1796. Diecisiete lados.
- Carta a Gerling 1819.

Das Geschichtliche jener Entdeckung ist bisher nirgends von mir öffentl erwähnt; ich kann es aber sehr genau angeben. Der Tag war der 29 März 1796, und der Zufall hatte gar keinen Antheil daran. ;

La historia de este descubrimiento no se ha mencinado hasta ahora; la puedo explicar muy exactamente. Fue el dia 29 de marzo de 1796, sin la más mínima participación de la casualidad, ya que fue fruto de esforzadas meditaciones;

1796

- 29 de marzo de 1796. Diecisiete lados.
- Carta a Gerling 1819.

Schon früher war alles was auf die Zertheilung der Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$$

en zwei Gruppen [...]

Todo està en dividir las raíces de la ecuación...

1796

- 29 de marzo de 1796. Diecisiete lados.
- Carta a Gerling 1819.

[...] glückte es mir bei einem Ferenaufenthalt en Braunschweig, am Morgen des gedachten Tages (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war) diesen Zusammenhang auf das klarste anzuschauen, so dass ich die specielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle machen konnte.

Durante unas vacaciones en B. una mañana (antes de levantarme de la cama) tuve la suerte de ver claramente todas las correlaciones, de manera que apliqué al polígono de 17 lados la correspondiente confirmación numérica.

El Diario

- Al día siguiente, 30 de marzo de 1796, empezó el Diario, un mes antes de cumplir 19 años.

  Las entradas [1],[3],[55],[65],[66],[116], hacen referencia a polígonos. Nace la Teoría de Galois.

El Diario

- Al día siguiente, 30 de marzo de 1796, empezó el Diario, un mes antes de cumplir 19 años.

  Las entradas [1],[3],[55],[65],[66],[116], hacen referencia a polígonos. Nace la Teoría de Galois.

  [1] *Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc.*

El Diario

- Al día siguiente, 30 de marzo de 1796, empezó el Diario, un mes antes de cumplir 19 años.

Las entradas [1],[3],[55],[65],[66],[116], hacen referencia a polígonos. Nace la Teoría de Galois.

[1] *Los principios de los que depende la división del círculo, y la divisibilidad geométrica del mismo en diecisiete partes, etc.*

Braunschweig

Göttingen

Gauss y la geometría no euclidiana

1792

- Carta a Schumaker (09-28-1846)

  Ein gewisser Schweikart nannte eine solche Geometrie Astralgeometrie, Lobatchevski imaginäire Geometrie. Sie wissen, dass ich schon seit 54 Jahren (seit 1792) dieselbe Überzeugung habe.

  .. He tenido la misma opinión durante 54 años (desde 1792)

1792

- Carta a Schumaker (09-28-1846)

  Ein gewisser Schweikart nannte eine solche Geometrie Astralgeometrie, Lobatchevski imaginäire Geometrie. Sie wissen, dass ich schon seit 54 *Jahren (seit* 1792*) dieselbe Überzeugung habe.*

  .. He tenido la misma opinión durante 54 años (desde 1792)

  Tenía 15 años!

1794

- Carta a Gerling (10-10-1846)

Der Satz, den Ihnen Hr. Schweikart erwähnt hat, dass en jeder Geometrie die Summe aller äussern Polygonwinkel von $360°$ *um eine Grösse verschieden ist, [....] welche dem Flächeninhalt proportional ist, ist der erste gleichsam an der Schwelle liegende Satz der Theorie, den ich schon im Jahr* 1794 *als nothwending erkannte.*

El teorema que Mr. S. le menciona a usted, que en cada Geometría la suma de los ángulos externos de un polígono difiere de $360°$ en una cantidad... es el primer teorema en el umbral de esta teoría, de lo que ya me di cuenta en el año 1794.

El Diario

- 28 de julio de 1797.

[72] *Plani possibilitatem demonstravi.*

El Diario

- Setiembre 1799.

[99] *In principiis Geometriae egregios progressus fecimus.*

Parallelentheorie

- Notas encontradas entre los papeles de Gauss de 1831. Cartas a amigos y colaboradores.
- No obstante, todos los resultados sobre *Geometría astral* que aparecen en estas cartas se pueden deducir directamente de la *analogía de Lambert*.
- Gauss consulta el trabajo de Lambert en la biblioteca de Göttingen el 24 de octubre de 1795 y el 2 de enero de 1797.

Algunas cartas

Carta a **Farkas Bolyai** (17-12-1799)

- *Wenn man beweisen könnte, dass ein geradliniges Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre als eine jede gegeben Fläche, so bin ich im Stande die ganze Geometrie völlig strenge zu beweisen. Die meisten würden nun whol jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht;*

Si se pudiera probar que existe un triángulo de área tan grande como se quiera, entonces yo estaría en condiciones de probar rigurosamente toda la Geometría. Mucha gente tomaría esto como un axioma, pero yo no. Es posible que el área no llegue nunca a un cierto valor límite.

Carta a **Gerling** (11-04-1816)

- *Es wäre sogar wünschenswerth, dass die Geometrie Euklids nicht wahr wäre, weil wir dann ein allgemeines Mass a priori hätten, z. B. könnte man als Raumeinheit die Seite desjenigen gleichseitigen Dreiecks annehmen, dessen Winkel* $= 59°59'59''.99999$.

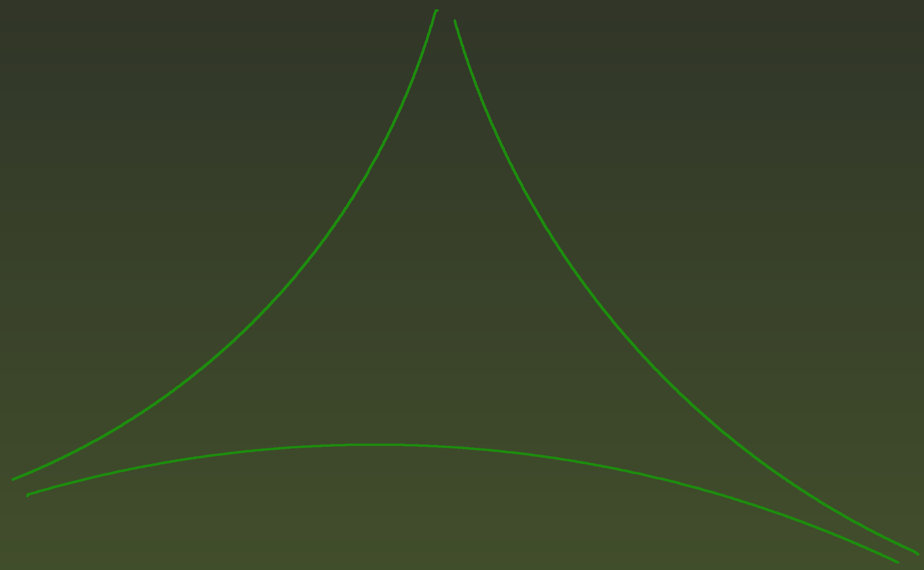
Sería incluso deseable que la GE no fuera cierta, *porque entonces tendríamos una unidad de medida a priori*. Por ejemplo, el lado de un triángulo equilátero...

Carta a Gerling (16-03-1819)

- *Der* *Defect* *der Winkelsumme im ebenen Dreieck gegen* 180° *ist z. B. nicht bloss desto grösser, je grösser der Flächeninhalt ist, sondern ihm genau proportional, so dass der Flächeninhalt eine Grenze hat, die er nie erreichen kann, und welche Grenze selbst dem Inhalt der zwischen drei sich asymptotisch berührenden geraden Linien enthalten Fläche gleich ist, die Formel für diese Grenze ist*

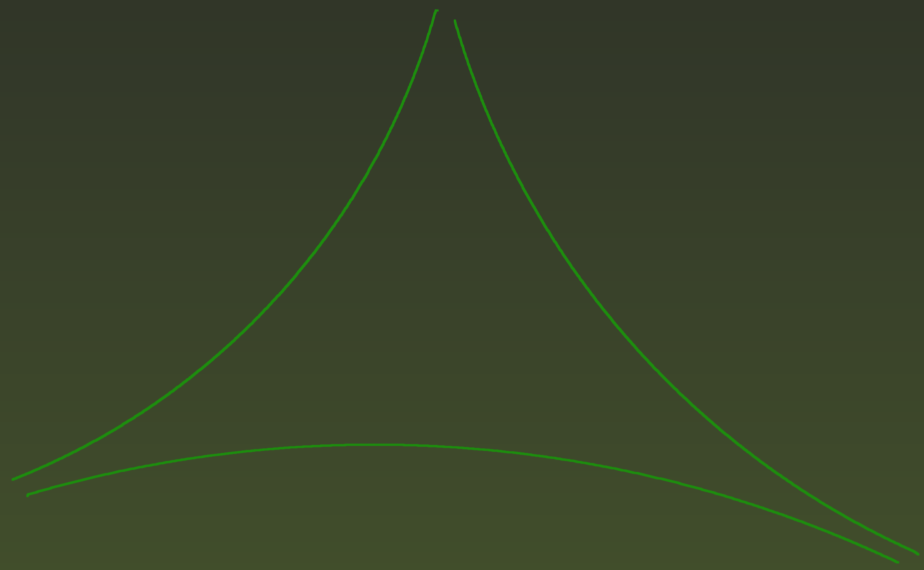
El defecto no es sólo más grande cuando el área se hace más grande, sino que es exactamente proporcional a ella, de tal manera que el área tiene una cota que no se puede alcanzar, y esta cota es igual al área encerrada por 3 líneas asintóticas. La fórmula para esta cota es

Misma carta



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \mathrm{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

Misma carta



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \text{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

$$\Pi(1) = \frac{\pi}{4}$$

Carta a Schumaker (05-17-1831)

- *Von meinen eigenen Meditationen, die zum Theil schon gegen 40 Jahr alt sind, wovon ich aber nie etwas aufgeschrieben habe, und daher manches 3 oder 4 mal von neuem auszusinnen genöthigt gewesen bin, habe ich vor einigen Wochen doch einiges aufzuschreiben angefangen. Ich wünschte doch, dass es nicht mit mir unterginge.*

Hace algunas semanas que he empezado a escribir algunos resultados de mis meditaciones sobre este asunto, que provienen de 40 años atrás. Nunca las había redactado, y ello me ha obligado a empezar mi trabajo de nuevo tres o cuatro veces. No quisiera que esto muriese conmigo.

Carta a Schumaker (12-07-1831)

- En esta carta da también la longitud de una circunferencia de radio r:

$$L = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

y comenta que para que las medidas coincidan con la experiencia, k debería ser infinitamente grande.

Carta a Schumaker (12-07-1831)

- En esta carta da también la longitud de una circunferencia de radio r:

$$L = \pi k (e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

y comenta que para que las medidas coincidan con la experiencia, k debería ser infinitamente grande.

- Gauss interrumpe la escritura en 1832, cando conoce el trabajo de János Bolyai.

Carta a **Gerling** (14-02-1832)

- *Noch bemerke ich, dass ich dieser Tage eine Schrift aus Ungarn über die Nicht-Euklidische Geometrie erhalten habe, worin ich alle meine eigenen Ideen und Resultate wiederfinde, mit grosser Eleganz entwicklet,*

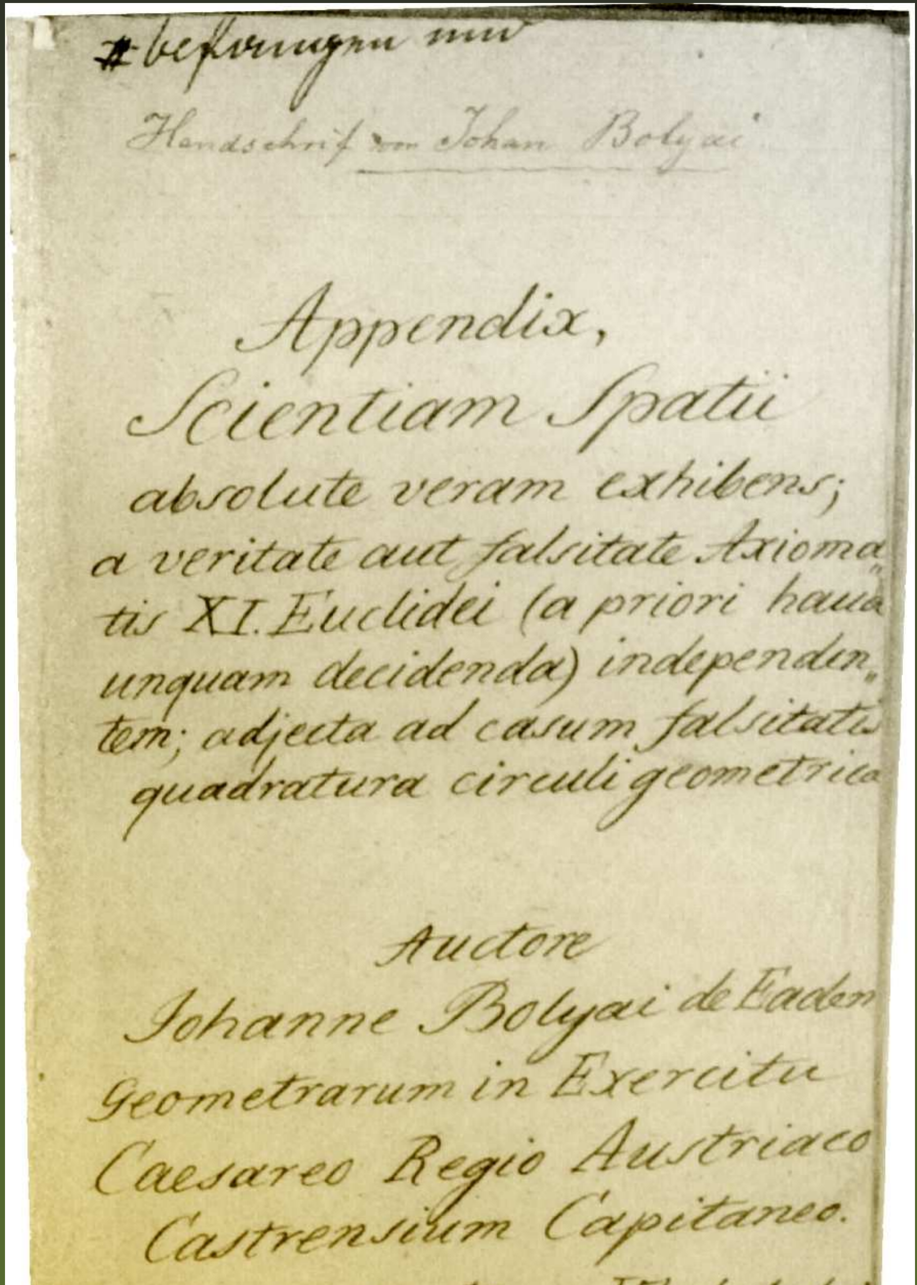
Te comento también que he recibido estos días un pequeño trabajo desde Hungría, sobre Geometrías no euclidianas, que contiene todas mis ideas y resultados desarrollados muy elegantemente.

Carta a **Gerling** (14-02-1832)

- *Der Verfasser ist ein sehr junger ósterreichischer Officier, Sohn eines Jugendfreundes von mir, mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten hatte, wiewohl damals meine Ideen noch viel weiter von der Ausbildung und Reife entfernt waren [...] Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Grösse...*

  El autor es un joven oficial austríaco, hijo de un amigo de mi juventud, que conocí en 1978, y con quien había hablado del tema, pero por aquel entonces mis ideas no habían llegado a la madurez y formación actual. Tengo a este joven geómetra v. Bolyai como uno de los más grandes genios.

Tentamen

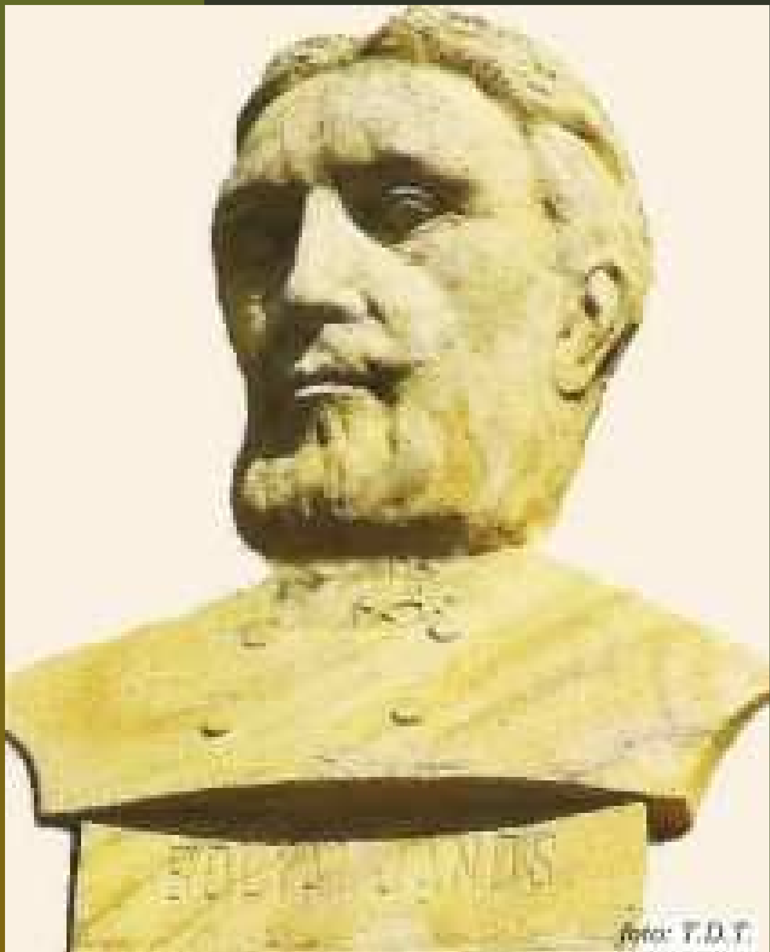


Handschrift von Johan Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma-
tis XI. Euclidei (a priori haud
unquam decidenda) independen-
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica.

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

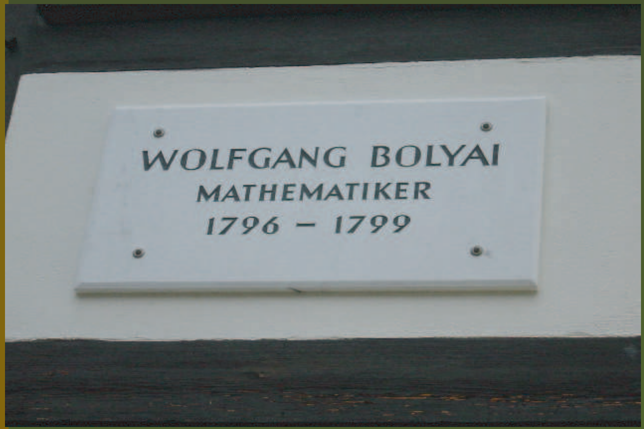
János Bolyai (1802-1860)



Marosvásárhely (Tirgu Mures, Transilvania, Rumania)

Farkas a János. Abril de 1820

Por el amor de Dios! Deja las paralelas tranquilas, abjura de ellas como de una charla indecente, te quitaran (como a mi) todo tu tiempo, salud, tranquilidad y felicidad de tu vida.



Carta a **Farkas Bolyai** (6-03-1832)

- *Und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.*

  Y es una gran alegría para mí que sea justamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de manera tan remarcable.

Carta a **Farkas Bolyai** (6-03-1832)

- *Und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.*

  Y es una gran alegría para mí que sea justamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de manera tan remarcable.

- Cuánto hubiera podido cambiar la historia si Gauss hubiese hecho pública su buena opinión del trabajo de János Bolyai!

Farkas y János Bolyai

Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Introducendi. 1832

Marosvásárhely

Geodesia

Geodesia

El más refinado geómetra y el perfecto astrónomo, estos son dos títulos separados que amo con todo mi corazón, y que adoro con pasión siempre que están unidos.

Hannover

El rey George III de Gran Bretaña, Elector de Hannover, encargó en 1818 a Gauss la triangulación del reino de Hannover.

Hannover

El rey George III de Gran Bretaña, Elector de Hannover, encargó en 1818 a Gauss la triangulación del reino de Hannover.

- Dedicó a ello unos 8 años.
- Utilizó el método de mínimos cuadrados.
- Inventó el heliotropo.
- Los resultados no fueron suficientemente satisfactorios (línea base).
- Bessel comentó al propio Gauss que su trabajo geodésico podría ser hecho por alguien de menor estatura matemática.

Hannover

Hannover

Representaciones conformes

Representaciones conformes

- Carta a Schumaker $(5-07-1816)$.

  He pensado un problema interesante [para poner en una competición]: *en el caso general, proyectar (aplicar) una superficie dada sobre otra, también dada, de manera que la imagen y la original sean infinitesimalmente similares. Un caso especial es cuando la primera superficie es una esfera y la segunda un plano. Entonces las proyecciones estereográfica y de Mercator son soluciones particulares.*

Representaciones conformes

- Se publica esta pregunta en 1821 (Sociedad Científica de Copenhagen).
- El propio Gauss la contesta el $11 - 12 - 1822$.

Isotermales

- Al día siguiente, $12 - 12 - 1822$, escribe en sus notas privadas: *Estado de mis investigaciones sobre la transformación de superficies.*

$$k = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right)$$

Isotermales

- Al día siguiente, $12-12-1822$, escribe en sus notas privadas: *Estado de mis investigaciones sobre la transformación de superficies*.

$$k = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right)$$

- $ds^2 = m(du^2 + dv^2)$. No aparece (explícitamente) en el *Disquisitiones*.

Isotermales

- Al día siguiente, $12 - 12 - 1822$, escribe en sus notas privadas: *Estado de mis investigaciones sobre la transformación de superficies.*

$$k = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right)$$

- $ds^2 = m(du^2 + dv^2)$. No aparece (explícitamente) en el *Disquisitiones*.
- *La curvatura toma el mismo valor bajo todas las transformaciones de la superficie que dejan el elemento de línea* $m(du^2 + dv^2)$ *invariante.*

Representaciones conformes

- La respuesta a la pregunta de 1821, dada el 1822, no se publica hasta el 1825 en *Astronomische Abhandlungen*, Altona:

  > *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den Kleinsten Theilen ähnlich wird.*

Representaciones conformes

- La respuesta a la pregunta de 1821, dada el 1822, no se publica hasta el 1825 en *Astronomische Abhandlungen*, Altona:

  Una solución general al problema de aplicar una superfície dada sobre otra superficie de manera que la imagen y la superficie aplicada sean infinitesimalmente similares.

Ab his via sternitur ad maiora.

Siguiendo a Newton en 'De quadratura curvarum', preludio del calculo de fluxiones.

Analogía diferenciable

Conjetura

- Gauss podría haber extendido la *analogía* de Lambert a la Geometría Diferencial, con la idea de encontrar una superficie que representara la esfera imaginaria. En particular, de curvatura negativa.

Conjetura

- Gauss podría haber extendido la *analogía* de Lambert a la Geometría Diferencial, con la idea de encontrar una superficie que representara la esfera imaginaria. En particular, de curvatura negativa.
- Podría ser este el camino diferente tomado por Gauss para probar el V postulado, y al cual se refiere en su carta a Schumaker? [(1846) hablando sobre el trabajo de Lobatchevski]:

  > [...] *aber die Entwickelung ist auf anderm Wege gemacht*

Conjetura

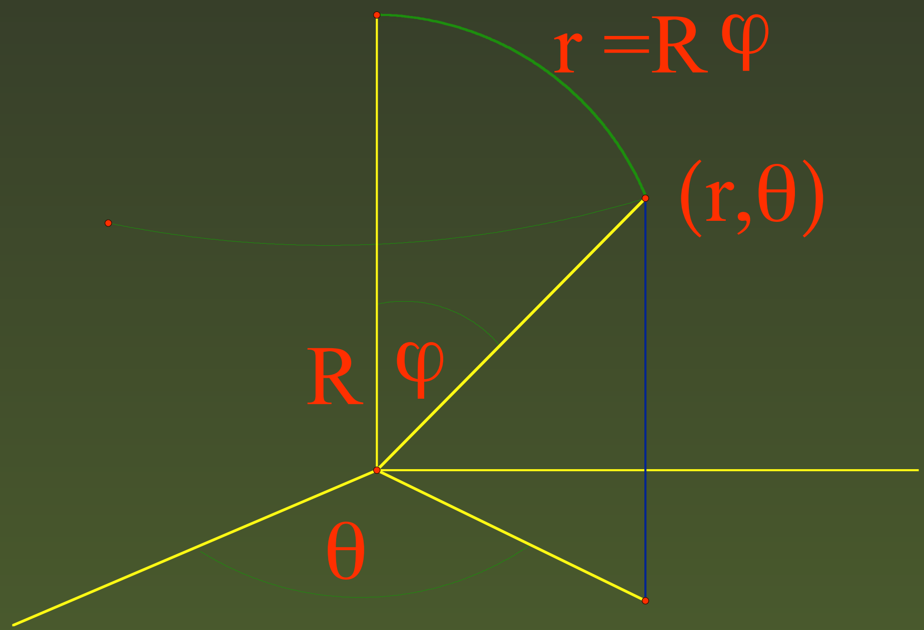
- Gauss podría haber extendido la *analogía* de Lambert a la Geometría Diferencial, con la idea de encontrar una superficie que representara la esfera imaginaria. En particular, de curvatura negativa.
- Podría ser este el camino diferente tomado por Gauss para probar el V postulado, y al cual se refiere en su carta a Schumaker? [(1846) hablando sobre el trabajo de Lobatchevski]:

  > [...] *aber die Entwickelung ist auf anderm Wege gemacht*

- Fue el Disquisitiones escrito [parcialmente] con esta idea?

Elemento de longitud de la esfera

- $ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2(\frac{r}{R})\, d\theta^2$



Objetivo

- Encontrar una superficie con

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})\, d\theta^2$$

Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas

7 de Octubre de 1827

Carta a **Schumaker** (21-11-1825)

- *Ich habe seit einiger Zeit angefangen, einen Theil der allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen wieder vorzunehmen, die die Grundlage meines projectirten Werks über Höhere Geodäsie werden sollen.*

Recientemente he retomado parte de mis investigaciones sobre superficies curvas, que habrán de formar parte de mi proyectado ensayo sobre geodesia avanzada.

Carta a Schumaker (21-11-1825)

- *Ich finde leider, dass ich dabei sehr weit werde ausholen müssen, da auch das Bekannte en einer andern, den neuen Untersuchungen anpassenden Form entwickelt werden muss.*

Desafortunadamente debo ir muy atras en la exposición, porque incluso lo que es conocido se debe desarrollar de diferente manera, adaptada a las nuevas investigaciones.

Disquisitiones

- 40 páginas; 29 secciones.
- 5 nuevos (?) conceptos; 10 teoremas.
- Menciona Euler (§8), y Legendre (§27).
- La única superficie que aparece es la esfera.

Proyecto inacabado (?)

- *Attamen uberiorem huius argumenti de figuris generalissime conceptis expositionem ad aliam occasionem nobis reservare debemus.* §6
- *Ad has posteriores, quarum investigatio campum geometriae novum fertilemque aperit,...* §13
- *Magnam utilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuius latera aequalia sunt ipsis* a, b, c; §26

Proyecto inacabado (?)

- *Debemos reservar para otra ocasión una exposición más detallada de la teoría de estas figuras.* §6
- *Ad has posteriores, quarum investigatio campum geometriae novum fertilemque aperit,...* §13
- *Magnam utilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuius latera aequalia sunt ipsis* a, b, c; §26

Proyecto inacabado (?)

- *Debemos reservar para otra ocasión una exposición más detallada de la teoría de estas figuras.* §6

- *El estudio de las cuales abre a la Geometría un campo nuevo y fértil...* §13

- *Magnam utilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuius latera aequalia sunt ipsis* a, b, c*;* §26

Proyecto inacabado (?)

- *Debemos reservar para otra ocasión una exposición más detallada de la teoría de estas figuras.* §6
- *El estudio de las cuales abre a la Geometría un campo nuevo y fértil...* §13
- *La consideración del triángulo rectilíneo de lados iguales a* a, b, c *es de una gran utilidad;* §26

Proyecto inacabado (?)

- *Debemos reservar para otra ocasión una exposición más detallada de la teoría de estas figuras.* §6
- *El estudio de las cuales abre a la Geometría un campo nuevo y fértil...* §13
- *La consideración del triángulo rectilíneo de lados iguales a* a, b, c *es de una gran utilidad;* §26
- No encuentra la esfera imaginaria.

Nuevos conceptos

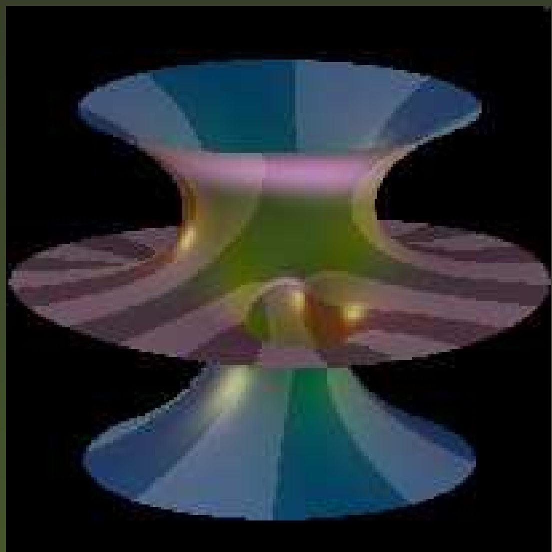
- Aplicación de Gauss. §6
- Curvatura de Gauss. §6
- Curvatura total. §6
- Variación angular. §17
- Carta absciso-geodésica ortogonal. §19

Nuevos teoremas

- $k = \det \Phi_2 / \det T_2$. §7
- $k = k_1 \cdot k_2$. §8
- Teorema egregio. §12
- Lema de Gauss. §16
- $k = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{rr}, \qquad \frac{d\gamma}{d\theta} = -(\sqrt{G})_r$. §19
- Teorema del defecto. §20
- $A^* \simeq A - \frac{1}{12}\sigma(2k(A) + k(B) + k(C))$. §27

Curvatura. §6

$\gamma : S \longrightarrow S^2$ aplicación de Gauss.



$\longrightarrow$

$$k(P) = \lim_{S \to P} \frac{\text{Área de } \gamma(S)}{\text{Área de } S}$$

Curvatura de Euler. §8

THEOREM. *Mensura curvaturae in quovis superficiei puncto aequalis est fractioni, cuius numerator unitas, denominator autem productum duorum radiorum curvaturae extremorum in sectionibus per plana normalia.*

$$k = k_1 \cdot k_2$$

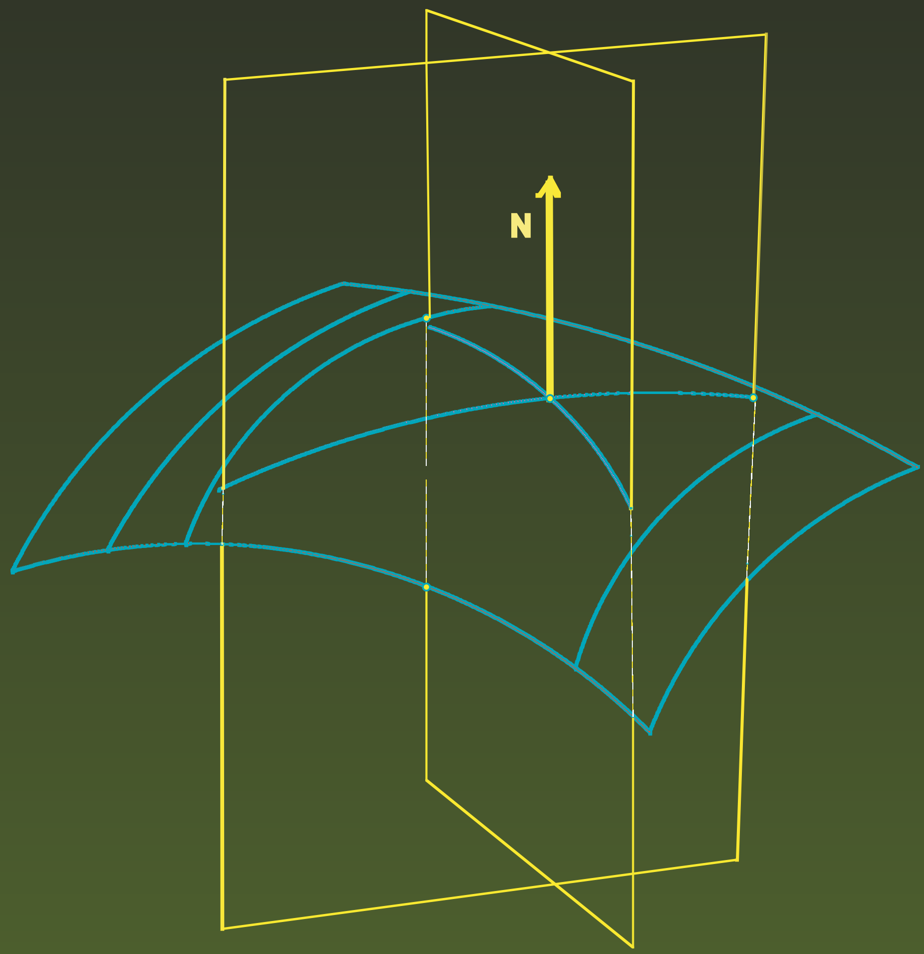
Curvatura de Euler. §8

THEOREM. *Mensura curvaturae in quovis superficiei puncto aequalis est fractioni, cuius numerator unitas, denominator autem productum duorum radiorum curvaturae extremorum in sectionibus per plana normalia.*

$$k = k_1 \cdot k_2$$

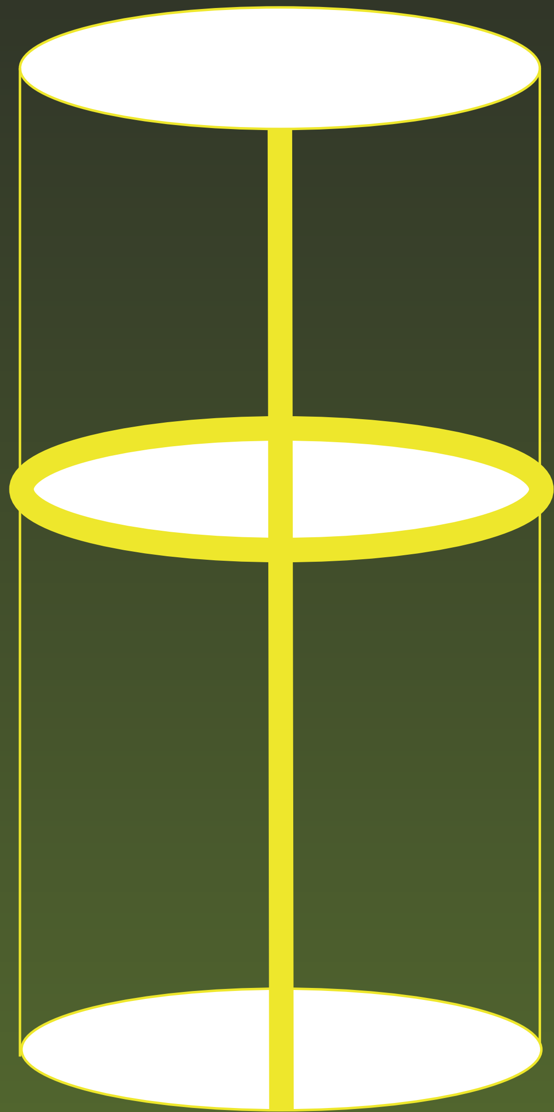
Justo antes dice: *Estas conclusiones contienen casi todo lo que el il. Euler fue el primero de probar sobre curvatura de superficies.*

Curvatura de Euler. §8



$$\boxed{k = k_1 \cdot k_2}$$

Curvatura de Euler. §8



$$\boxed{k = 1 \cdot 0 = 0}$$

Olinde Rodrigues (1794-1851)

Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une class d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie, Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, Vol 3, pag.$162 - 182$, 1815.

Olinde Rodrigues (1794-1851)

- Aplicación de Gauss.
- Curvatura de Gauss.
- $k = k_1 \cdot k_2$.
- $N'(t) = \lambda x'(t)$.

Olinde Rodrigues (1794-1851)

- Aplicación de Gauss.
- Curvatura de Gauss.
- $k = k_1 \cdot k_2$.
- $N'(t) = \lambda x'(t)$.

- Gauss conocía los 3 primeros puntos antes de 1813 (no publicado).

El teorema egregio. §11

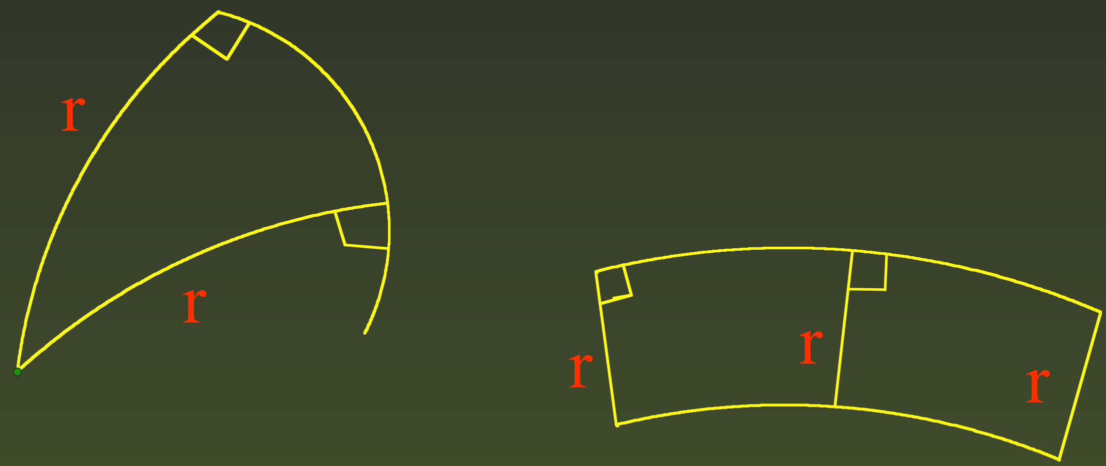
$$
\begin{aligned}
4 \quad & (EG - FF)^2\, k = E\Big(\frac{dE}{dq} \cdot \frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq} + \big(\frac{dG}{dp}\big)^2\Big) \\
+ \quad & F\Big(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dp}\Big) \\
+ \quad & G\Big(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dF}{dq} + \big(\frac{dE}{dq}\big)^2\Big) \\
- \quad & 2(EG - FF)\Big(\frac{ddE}{dq^2} - 2\frac{ddF}{dp \cdot dq} + \frac{ddG}{dp^2}\Big).
\end{aligned}
$$

El teorema egregio. §12

Formula itaque art. prae. sponte perducit ad egregium

THEOREMA *Si superficies curva en quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae en singulis punctis invariate manet.*

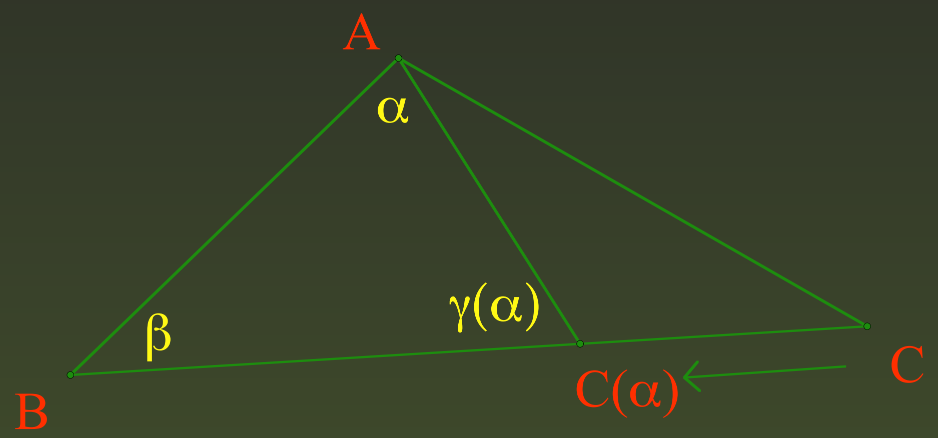
Lema de Gauss. §15



...también aquí, consideraciones geométricas podrían tomar el papel del análisis, pero no lo hacemos, ya que son suficientemente óbvias.

Variación angular

Variación angular en el plano

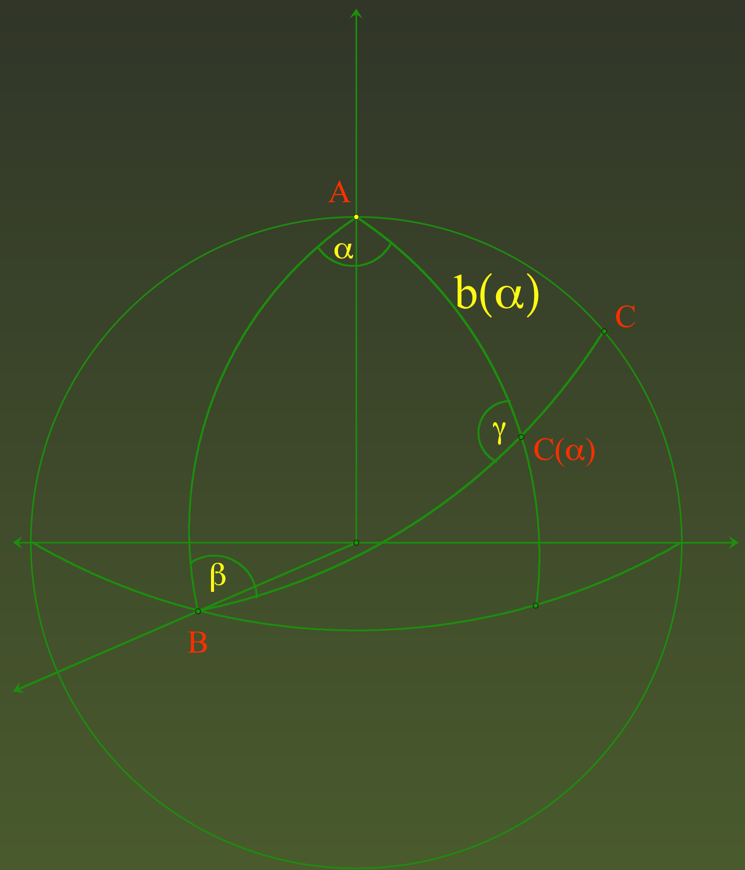


α+β+γ=π;   1+γ' =0

$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha} = -1}$$

- Observemos $\gamma(0) = \pi - \beta$.

Variación angular en la esfera



$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\cos\frac{b(\alpha)}{R}}$$

Cálculos

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \sin\alpha\ \cos\frac{c}{R}\,.$$

$$-\sin\gamma\cdot\frac{d\gamma}{d\alpha} = \sin\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\alpha\ \cos\frac{c}{R}\,.$$

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\frac{c}{R}}\cos\beta - \frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin\frac{c}{R}}\cos\alpha\ \cos\frac{c}{R}\,.$$

Cálculos

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\sin\alpha\,\cos\frac{c}{R}\,.$$

$$-\sin\gamma\cdot\frac{d\gamma}{d\alpha} = \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha\,\cos\frac{c}{R}\,.$$

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\frac{c}{R}}\cos\beta - \frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin\frac{c}{R}}\cos\alpha\,\cos\frac{c}{R}\,.$$

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{c}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{c}{R}\sin\frac{b}{R}\cos\alpha$$

Cálculos

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma}{d\alpha} &= \frac{1}{\sin\frac{c}{R}}\Big(\frac{\cos\frac{c}{R}\,\cos\frac{a}{R}-\cos\frac{b}{R}}{\sin\frac{c}{R}} \\
&+ \frac{\cos\frac{c}{R}\,\cos\frac{b}{R}-\cos\frac{a}{R}}{\sin\frac{c}{R}}\cos\frac{c}{R}\Big) \\
&= \frac{1}{\sin^2\frac{c}{R}}\left(\cos\frac{b}{R}\left(\cos^2\frac{c}{R}-1\right)\right) = -\cos\frac{b}{R}.
\end{aligned}$$

Area de un triángulo en $S^2(R)$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} R\sin\frac{r}{R}\,dr\,d\theta \\ &= R^2\alpha - \int_0^{\alpha} R^2\cos\frac{r(\theta)}{R}\,d\theta \end{aligned}$$

Area de un triángulo en $S^2(R)$

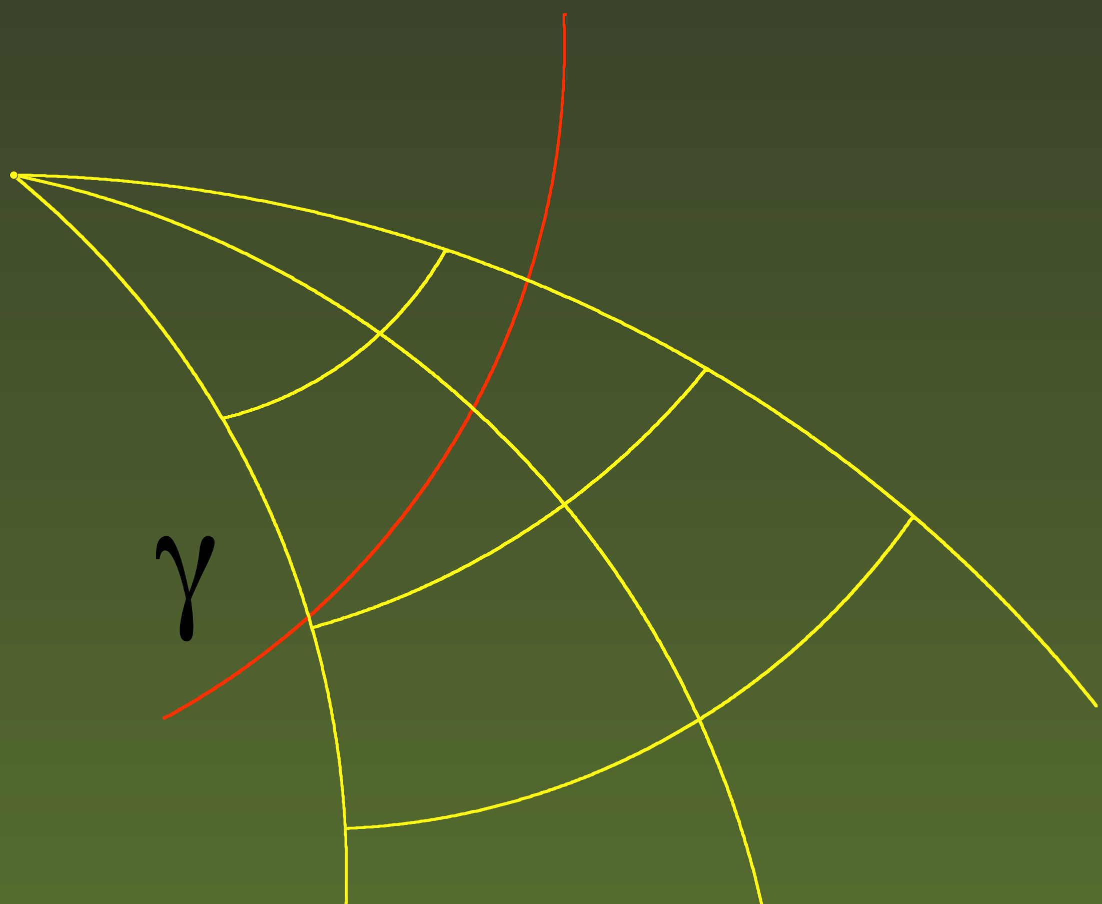
$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} R\sin\frac{r}{R}\,dr\,d\theta \\
&= R^2\alpha - \int_0^{\alpha} R^2\cos\frac{r(\theta)}{R}\,d\theta \\
&= R^2\alpha + R^2(\gamma(\alpha)-\gamma(0)) \\
&= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi) \\
&= R^2\cdot\text{Exceso}.
\end{aligned}$$

Disquisitiones (continuación)

Variación angular. §19

Elemento de longitud en una carta absciso-geodésica ortogonal:

$$ds^2 = dr^2 + G(r,\theta)d\theta^2$$



Variación angular. §19

Condición inicial

$$\left.\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right|_{r=0} = 1$$

Para r pequeño la longitud de una circunferencia en la superficie es como $2\pi r$. Y $ds = \sqrt{G} d\theta$.

Variación angular. §19

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}$$

Variación angular. §19

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}$$

- Coordenadas polares en el plano:

$$G = r^2; \qquad \frac{d\gamma}{d\theta} = -1$$

- Coordenadas polares en la esfera:

$$G = R^2 \sin^2 \frac{r}{R}; \qquad \frac{d\gamma}{d\theta} = -\cos \frac{r}{R}$$

Cálculos

$$
\begin{aligned}
\langle(\dot r,\dot\theta),(1,0)\rangle &= (\dot r,\dot\theta)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
&= \dot r = \sqrt{\dot r^2 + G\dot\theta^2}\cos\gamma
\end{aligned}
$$

Derivar $\cos\gamma$ y ecuaciones de Euler:

$$
\begin{aligned}
2\,\ddot r &= G_r\,\dot\theta^2\\
2\,\ddot\theta\,G + 2\,\dot\theta\,\dot r\,G_r + \dot\theta^2\,G_\theta &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Curvatura. §19

$$k = -\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}$$

- $4G^2 k = G_r^2 - 2GG_{rr}$
- Implica el teorema egregio.
- Ultima fórmula del Disquisitiones de 1825.

Teorema del defecto. §20

- A partir de

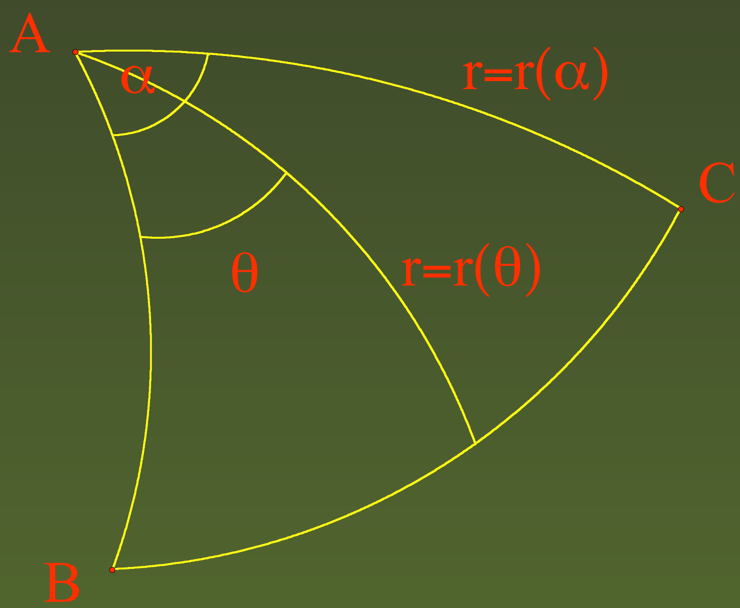
$$k\sqrt{G} = -\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}$$

Teorema del defecto. §20

- A partir de

$$k\sqrt{G} = -\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}$$

- Integrando en el triángulo



Teorema del defecto. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$

Teorema del defecto. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

Teorema del defecto. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\; d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

$$\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\; d\theta = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

Teorema del defecto. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

$$\int_T kdA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

Teorema del defecto. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

$$\int_T kdA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

- Curvatura total = Area de imagen esférica = Defecto

Teorema del cambio de variable

$$S \xrightarrow{N} S^2$$

$$\int_{N(T)} dS^2 = \int_T N^* dS^2 = \int_T k dS$$

La versión de 1825.

- Demuestra $\text{Area}(N(T)) = \text{Defecto}(T)$ pero dice:

  La demostración requerirá alguna modificación y explicación, cuando el punto (3) es interior al triángulo.

La versión de 1825.

- Demuestra $\mathrm{Area}(N(T)) = \mathrm{Defecto}(T)$ pero dice:

  La demostración requerirá alguna modificación y explicación, cuando el punto (3) es interior al triángulo.

- Deduce, a partir de aquí, el teorema egregio.

La versión de 1825.

- Demuestra $\text{Area}(N(T)) = \text{Defecto}(T)$ pero dice:

  La demostración requerirá alguna modificación y explicación, cuando el punto (3) es interior al triángulo.

- Deduce, a partir de aquí, el teorema egregio.

- Defecto $\longleftrightarrow$ Egregio

La versión de 1825.

$$dA' = k \cdot dA = k \cdot \sqrt{G}\, dr\, d\theta\,,$$

Integrando

$$\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G} dr\ d\theta = a(T') = \delta(T) = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}\, d\theta\,.$$

Derivando dos veces

$$\boxed{k = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}}$$

Ultimas secciones

Teoremas de comparación. §24

Parece importante también desarrollar en serie el área del triángulo ABD. Para este desarrollo podemos usar la siguiente ecuación condicional, la cual se deduce fácilmente de consideraciones geométricas suficientemente obvias, y en la qual S denota el área considerada:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{dS}{dp}+r\cos\psi\cdot\frac{dS}{dq}=\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\int n dq\,,$$

la integración empezando desde $q=0$.

Teoremas de comparación. §24

Parece importante también desarrollar en serie el área del triángulo ABD. Para este desarrollo podemos usar la siguiente ecuación condicional, la cual se deduce fácilmente de consideraciones geométricas suficiente-mente obvias, y en la qual S denota el área considerada:

$$\frac{dS}{dp} + n \cot \psi \cdot \frac{dS}{dq} = \int n dq \, ,$$

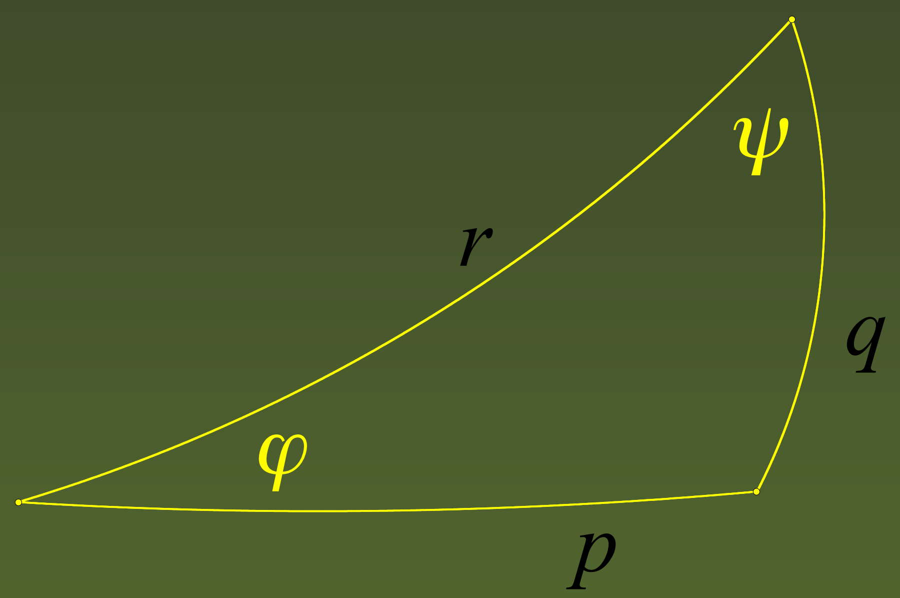
la integración empezando desde $q = 0$.

Posible motivación

Relación entre coor. polares y coor. ortogonales

$$ds^2 = n^2 dp^2 + dq^2 = m^2 d\varphi^2 + dr^2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} + n \cot \psi \frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0$$



Posible motivación

En la esfera $S = \varphi + \psi - \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\partial S}{\partial p} + n \cot \psi \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \psi}{\partial p} + n \cot \psi \frac{\partial \psi}{\partial q} = ?$$

Posible motivación

En la esfera $S = \varphi + \psi - \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\partial S}{\partial p} + n \cot \psi \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \psi}{\partial p} + n \cot \psi \frac{\partial \psi}{\partial q} =?$$

$$\cos \psi = \frac{\sin q \cos p}{\sin r}, \qquad n = \cos q$$

Teoremas de comparación. §24

Area del triángulo rectángulo de catetos p, q.

$$S = \frac{1}{2}pq - \frac{1}{12}f^0p^3q - \frac{1}{12}f^0pq^3 - \frac{1}{20}f'p^4q + \cdots$$

Teoremas de comparación. §24

Area del triángulo rectángulo de catetos p, q.

$$S = \frac{1}{2}pq - \frac{1}{12}f^0 p^3 q - \frac{1}{12}f^0 pq^3 - \frac{1}{20}f' p^4 q + \cdots$$

- $ds^2 = Edp^2 + dq^2$
- $\sqrt{E} = 1 + f^0 qq + f' pqq + f'' ppqq + \cdots$

Teoremas de comparación. §26

Salvo cantidades de cuarto orden:

- $A^* = A - \frac{\sigma}{12}(2k(A) + k(B) + k(C))$

Teoremas de comparación. §26

Salvo cantidades de cuarto orden:

- $A^* = A - \frac{\sigma}{12}(2k(A) + k(B) + k(C))$

- $\sigma =$ área ABC.
- $k(A) =$ curvatura en A.
- $A^* =$ ángulo del triángulo euclidiano con lados iguales a los lados del triángulo sobre la superficie.

La esfera §27

- Las anteriores fórmulas fueron primeramente establecidas por Legendre sobre la esfera.

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2}$$

La esfera §27

- Las anteriores fórmulas fueron primeramente establecidas por Legendre sobre la esfera.

  $A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2}$

- Sumando, obtenemos el teorema del defecto.

  $$\pi = A + B + C - \frac{\sigma}{R^2}$$

Nota de Gauss. 1841

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

D'UN

THÉORÈME DE LEGENDRE RELATIF A LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE;

PAR M. GAUSS [*].

On peut résoudre de petits triangles sphériques comme des triangles plans, pourvu que l'on diminue chaque angle sphérique du tiers de l'excès sphérique. Voici une démonstration tout-à-fait élémentaire de ce théorème.

Désignons l'excès sphérique par 3ω, les trois côtés du triangle par a, b, c, et les angles sphériques opposés par $A + \omega$, $B + \omega$, $C + \omega$. On a les deux formules connues

Nota de Gauss. 1841

$$\sin^2 \frac{1}{2}a = \frac{\sin \frac{3}{2}\omega \sin(A - \frac{1}{2}\omega)}{\sin(B+\omega)\sin(C+\omega)},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}a = \frac{\sin(B - \frac{1}{2}\omega)\sin(C - \frac{1}{2}\omega)}{\sin(B+\omega)\sin(C+\omega)},$$

Nota de Gauss. 1841

On peut mettre cette équation sous la forme

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \sqrt[3]{D},$$

en représentant, pour abréger, par D la quantité

$$\frac{a^3 \cos\frac{1}{2} a}{8 \sin^3 \frac{1}{2} a} \cdot \frac{8 \sin^3 \frac{1}{2} b}{b^3 \cos \frac{1}{2} b} \cdot \frac{\sin(A+\omega) \sin^2 (A - \frac{1}{2}\omega)}{\sin^3 A} \cdot \frac{\sin^3 B}{\sin(B+\omega) \sin^2 (B - \frac{1}{2}\omega)}.$$

Cette formule est rigoureuse; mais on voit aisément que si a, b, c sont très-petits du premier ordre, chacun des quatre facteurs dont D est composé ne diffère de l'unité que par des termes du quatrième ordre. Donc, etc.

Dans mes *Recherches générales sur les surfaces courbes*, j'ai étendu ce théorème aux triangles formés sur une surface courbe quelconque par les lignes les plus courtes.

BHI

BHI

BHI §28

Si BHI fuera un triángulo esférico

- $B^* = B - \frac{\sigma}{3R^2} = B - \frac{14.85348''}{3} = B - 4''.95116$

BHI §28

Si BHI fuera un triángulo esférico

- $B^* = B - \frac{\sigma}{3R^2} = B - \frac{14.85348''}{3} = B - 4''.95116$

Sobre el elipsoide terrestre *los cálculos dan*

- Hohehagen $-4''.95113$
- Brocken $-4''.95104$
- Inselsberg $-4''.95131$

BHI §28

Carta a Olbers (Marzo de 1827).

En consideraciones prácticas esto no es importante, ya que incluso en el triángulo más grande que se puede medir sobre la tierra, se hace imperceptible. Pero la dignidad de la ciencia requiere que se entienda claramente la naturaleza de esta desigualdad.