el col·loqui

6 de maig de 2015
Sala d'Actes de les
Facultats de Ciències i de Biociències de la UAB
A les 12.00h

Joan Girbau i Agustí Reventós

Universitat Autònoma de Barcelona

Gauss i les geometries no euclidianes

Recentment, Editorial Gregal ha publicat el llibre «L'home de la campana» de Joan Girbau, una biografia novel·lada de Carl Friedrich Gauss.

A la conferència es llegirà una conversa geomètrica entre Gauss i Farkas Bolyai, recollida al llibre, i s'explicarà en detall les seves conseqüències.

A la geometria euclidiana les unitats de mesures d'angles es poden introduir a través de conceptes geomètrics (el grau és la norantena part de l'angle recte), però les unitats de longitud no es poden introduir així. Gauss escriuria a Christian Ludwig Gerling l'any 1816: «[...] seria desitjable que la geometria euclidiana no fos certa, ja que llavors tindríem una mesura universal a priori». S'explicarà com a la geometria hiperbòlica, introduïda per Janos Bolyai (fill de Farkas), les unitats de longitud es poden definir per conceptes geomètrics intrínsecs.

col·loqui

Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Matemàtiques

Presentació llibre

GIRBAU

març 2015

Com és ben sabut, Gauss coneixia profundament la Geometria Hiperbòlica, però no va publicar mai res sobre el tema.

A la carta a Bessel 1829 diu

passarà probablement un temps abans no començi a preparar les meves molt extenses investigacions sobre el tema per publicar-les; potser això no passarà mai mentre jo visqui ja que temo el rebombori dels Beocis.

Personalment penso que ell mateix trobava a faltar un detall no menor: la consistència. Això no ho donaria per acabat Jois Beltrami quasi quaranta anys més tard.

No obstant sí que tenim coses escrites de Gauss sobre geometria ~~hiperbòlica~~ no euclidiana: a les seves cartes i a les notes trobades després de la seva mort i publicades als Werke amb el títol

"Teoria de les Paral·leles"

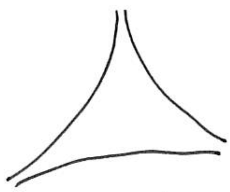
Avui citaré només dues cartes ~~i exploraré un punt concret~~
~~d'algunes memòries de Gauss~~ que tenen relació amb el
llibre de Gisbau.

1a carta. Olbers. 1816.

Seria desitjable que la geometria euclidiana no fos certa
ja que llavors tindríem una mesura universal a
priori, per exemple, podríem agafar com unitat
el costat del triangle equilàter d'angle 59°59'59''.9999

2a carta Olbers 1819

Puc resoldre tots els problemes de geometria astral
un cop la constant C és donada. Per exemple



$$\text{limes area trianguli plani} = \frac{\pi C C}{[\log hyp(1+\sqrt{2})]^2}$$

3a carta Farkas Bolyai 1832

uns comentaris sobre el
treball del teu fill.

János Bolyai (1802 – 1860)[12]

Marosvásárhely

Carta a Gerling (14 – 02 – 1832)

Et comento que he llegit aquests dies un petit treball d'un hongarès, sobre geometries no euclidianes, que conté totes les meves idees i resultats, desenvolupats molt elegantment, encara que d'una manera concentrada difícil de seguir per algú que no estigui familiaritzat amb el tema. L'autor és un jove oficial austríac, fill d'un amic de la meva joventut, que vaig conèixer el 1798, *amb qui havia parlat del tema, però aleshores les meves idees no havien arribat a la maduresa i formació d'ara. Tinc aquest jove geòmetra, v. Bolyai, com un dels genis més grans.*

Carta a Farkas Bolyai[13] (6 – 03 – 1832)

Ara deixa'm dir una cosa sobre el treball del teu fill. Si començo dient que no el puc alabar, restaràs desconcertat. No obstant això, no puc fer altra cosa: si l'alabés, m'alabaria a mi mateix, ja que el total contingut del treball, el camí que segueix el teu

[12]No es conserven retrats de János Bolyai. Sabem que tenia la cara allargada i els ulls blaus. Però en el Palau de cultura de la ciutat on van viure els Bolyai, Marosvásárhely, hi ha representats sis famosos científics. D'esquerra a dreta, Elek Dósa, Sámuel Teleki, Farkas Bolyai, Jänos Bolyai, Ferenc Mentovich i István Pêntelei. Vegeu http : //www.titoktan.hu/Bolyai_a.htm

[13]L'original d'aquesta carta es va perdre. Però hi ha una copia feta per János Bolyai enviada pel seu pare a Sartorius el 26 d'agost de 1856, vegeu [?].

3

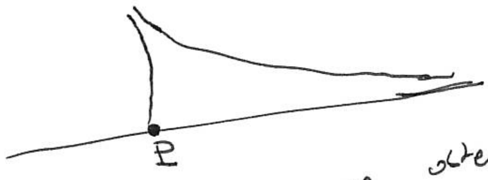
Teoria de les paral·leles de Gauss

Enllaç

Al final de la carta Gauss i posa VII sessions amb diversos fets i teoremes.
Mirem de comentar-los

I. Existeixen triangles ideals

Això és diferent a la geometria euclidiana, però aquí no hi ha paral·leles per la dreta i paral·leles per l'esquerra podem tenir:



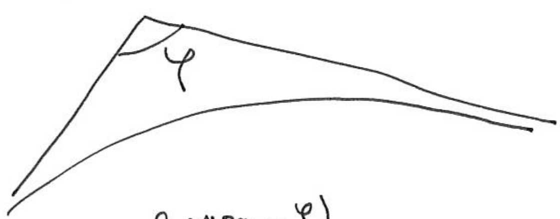
fent tendir P a $-\infty$ obtenim el triangle ideal: un triangle amb angles zero.

II. Tenen àrea finita. Ho diu t.

No fa cap més comentari excepte un peu de pàgina per dir que s'ha d'escriure bé...

De fet és l'àrea més gran que podrà tenir un triangle arbitrari.
Una altra diferència amb geometria euclidiana on hi ha triangles semblants.

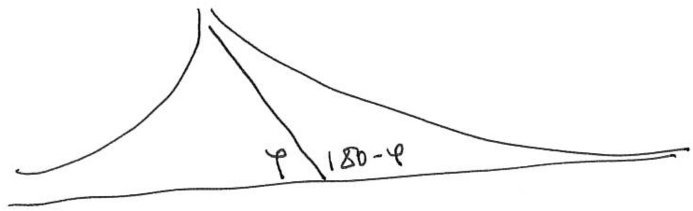
III L'àrea depèn de l'angle



$a = f(180 - \varphi)$

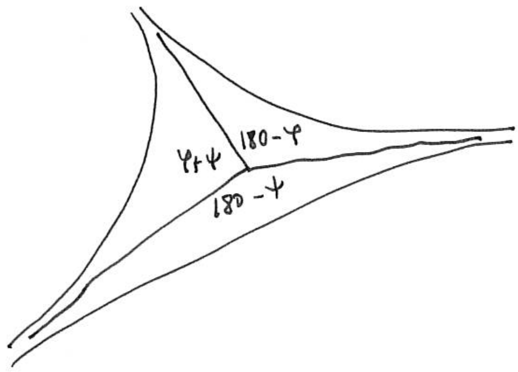
així $f(0)$ = àrea gran $\varphi = 180$
$= 0$

$\underline{\text{IV}}$ Teorema $\quad f(\varphi) + f(180-\varphi) = t$



obvi

$\underline{\text{V}}$ Teorema $\quad f(\varphi) + f(\psi) + f(180-\varphi-\psi) = t$



obvi

$\underline{\text{VI}}$. ~~Teorema~~ Corollari: $\quad f(\varphi+\psi) = f(\varphi) + f(\psi)$

$\underline{\text{Proof}}$. $\quad \underbrace{f(\varphi) + \varphi(\psi) = t}_{\text{Teorema V}} - \underbrace{f(180-\varphi-\psi) =}_{\text{teorema IV}} f(\varphi+\psi)$

Això vol dir que f és lineal, i.e. $f(\varphi) = a\varphi$ i podem calcular a posant $f(180) = 180\,a = t$,

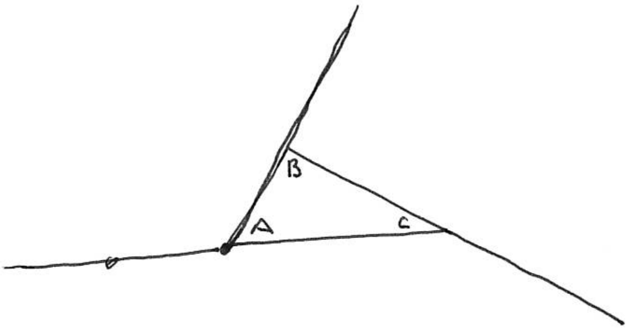
$$\boxed{f(\varphi) = \frac{t}{180}\,\varphi}$$

VII **teorema**

L'àrea d'un triangle d'angles A,B,C és

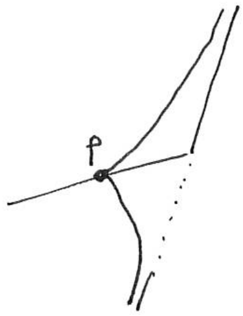
$$\boxed{\text{àrea} = \frac{\pi}{180}(180 - A - B - C) = \frac{\pi}{180} \cdot \text{DEFECTE.}}$$

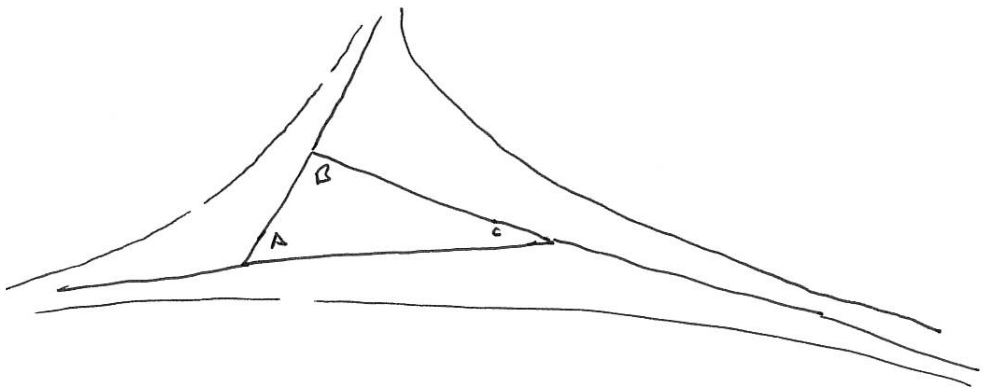
Prof



Utilitzo que donades dues rectes que es tallen hi ha una paral·lela comuna. La demostració rigorosa pot ser delicada. Però la idea és passar al límit com abans.

Fixem P en una de les rectes. Traçem les paral·leles i fem P → −∞.





Aquí ja es veu que tot triangle està tancat en un ideal. Tots els ideals tenen la mateixa àrea perquè l'àrea depèn dels angles.

diguem Z a l'àrea del triangle

Clarament $$Z + f(A) + f(B) + f(C) = t$$

$$Z + \frac{t}{180}(A+B+C) = t$$

$$Z = \frac{t}{180}\left(180 - (A+B+C)\right) = \frac{t}{180}\cdot \text{DEFECTE}$$

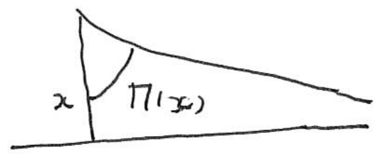
De moment deixem aquesta constant t "penjada" i anem a parlar breument d'angle de paral·lelisme

ANGLE DE PARAL·LELISME.

Aquesta fórmula que ara posarem no apareix en les cartes de Gauss* però es dedueix de l'Analogia com ara veurem. Sí que apareix a Bolyai!.

La fórmula és

$$\Pi(x) = 2\,\mathrm{arctg}\, e^{-x/R}$$

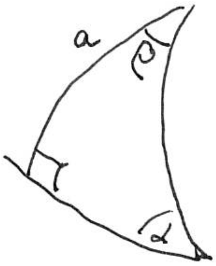


on R és una certa constant i

En trigonometria esfèrica hi ha 3 fórmules fonamentals: el teorema del sinus, el teorema del cosinus i la següent:

* però de la carta a Olbers 1819 es dedueix que la coneixia.

En un triangle rectangle esfèric es compleix



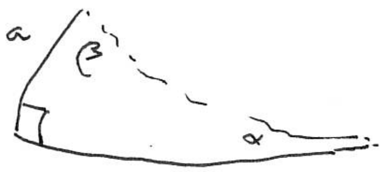
$$\cos\alpha = \sin\beta \cdot \cos\frac{a}{R}$$

R = radi esfera on està aquest triangle.

L'analogia consistiria en canviar R per Ri de manera que en geometria no euclidiana

$$\cos\alpha = \sin\beta \cdot \cosh\frac{a}{R} \qquad (1)$$

Observem que quan $\alpha \to 0$, $\beta \to \Pi(a)$ = angle de paral·lelisme



així $(1) \Rightarrow$

$$1 = \sin\Pi(a) \cdot \cosh\frac{a}{R}$$

$$\Pi(a) = \arcsin\frac{1}{\cosh\frac{a}{R}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sinh\frac{a}{R}}$$

utilitzant $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$

com $\operatorname{tg}\Pi(a) = \dfrac{1}{\sinh a/R}$ arribem a

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi(a)}{2} = e^{-a/R} \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\Pi(a) = 2\operatorname{arctg} e^{-a/R}}$$

Relació entre la constant t de la pàgina (5) i la constant R de la pàgina (8).

l'Anàlisi també ens diu que l'àrea d'un triangle és

$$A = R^2 \cdot \text{DEFECTE}$$ ja que a l'esfera de

radi R, A és igual a R^2 per l'EXCESS $(R \to Ri)$

per tant, $\frac{t}{180} = R^2$

---

relació de R (= per tant de t) amb la constant

C de la carta de Gauss a Olbers del 1819

Allà fa servir π i aquí 180 graus o part d'això

comparant Area del triangle ideal han de ser

$$t = \frac{\pi\, C C}{\left[\log \operatorname{hyp}(1+\sqrt{2})\right]^2}$$

d'on surt això? Què és aquesta C?

Doncs sé, prenem C tal que

$$\Pi(C) = \frac{\pi}{4}$$

$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} e^{-C/R}$ és a dir $e^{-C/R} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$$\boxed{R = \frac{C}{\log \operatorname{hyp}(\sqrt{2}+1)}}$$

Això de la fórmula (canvio π per 180)

$$\frac{t}{\pi} = R^2 \quad \text{deduïm}$$

$$\frac{t}{\pi} = \frac{C \cdot C}{[\log \text{hip} (1+\sqrt{2})]^2}$$

fórmula de Gauss.

<u>Podem dir</u>: agafem com unitat de mesura la distància tal que el seu angle de paral·lelisme $= \pi/4$

Llavors $C = 1$

Gauss donava valor a C perquè està determinada per $\pi/4$ i per això sortia la fórmula de l'àrea del triangle en funció de C i no de R que no utilitzava

Però en altres cartes posteriors se veu que en una carta Schumacher 1831, 12 anys més tard diu que la longitud d'una circumferència de radi r

$$L = 2\pi k \sinh\left(\frac{r}{k}\right)$$

i diu que perquè les <u>mesures coincideixin amb l'experiència</u> k havia de ser infinitament gran. I aquesta k és el nostre R exactament