Un nou món creat del no res

Un món on es pot quadrar el cercle!

17 novembre 2004, Sant Albert

Facultat de Ciències UAB

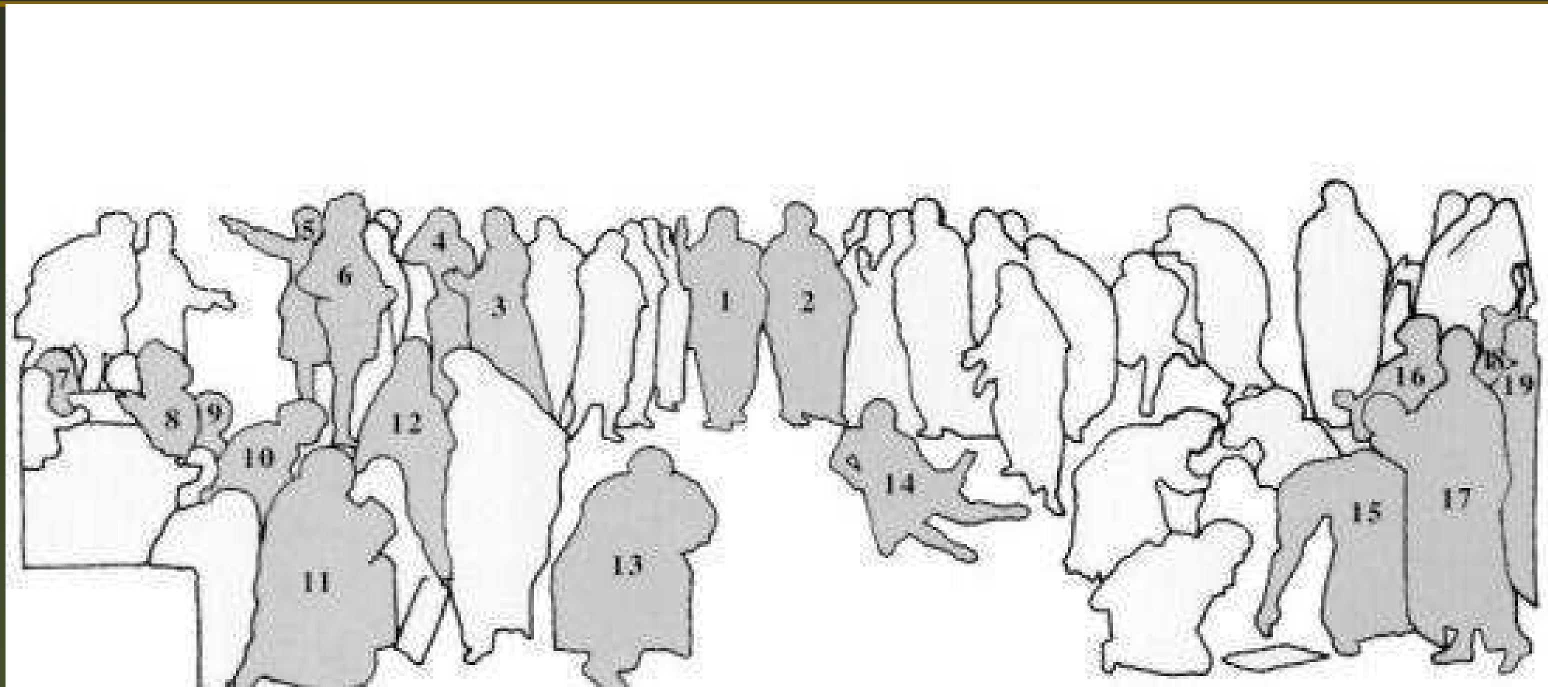
AGUSTÍ REVENTÓS

Euclides

Euclides $\sim 300aC.$

Escola d’Atenes. **Raffaello** 1510

Escola d'Atenes



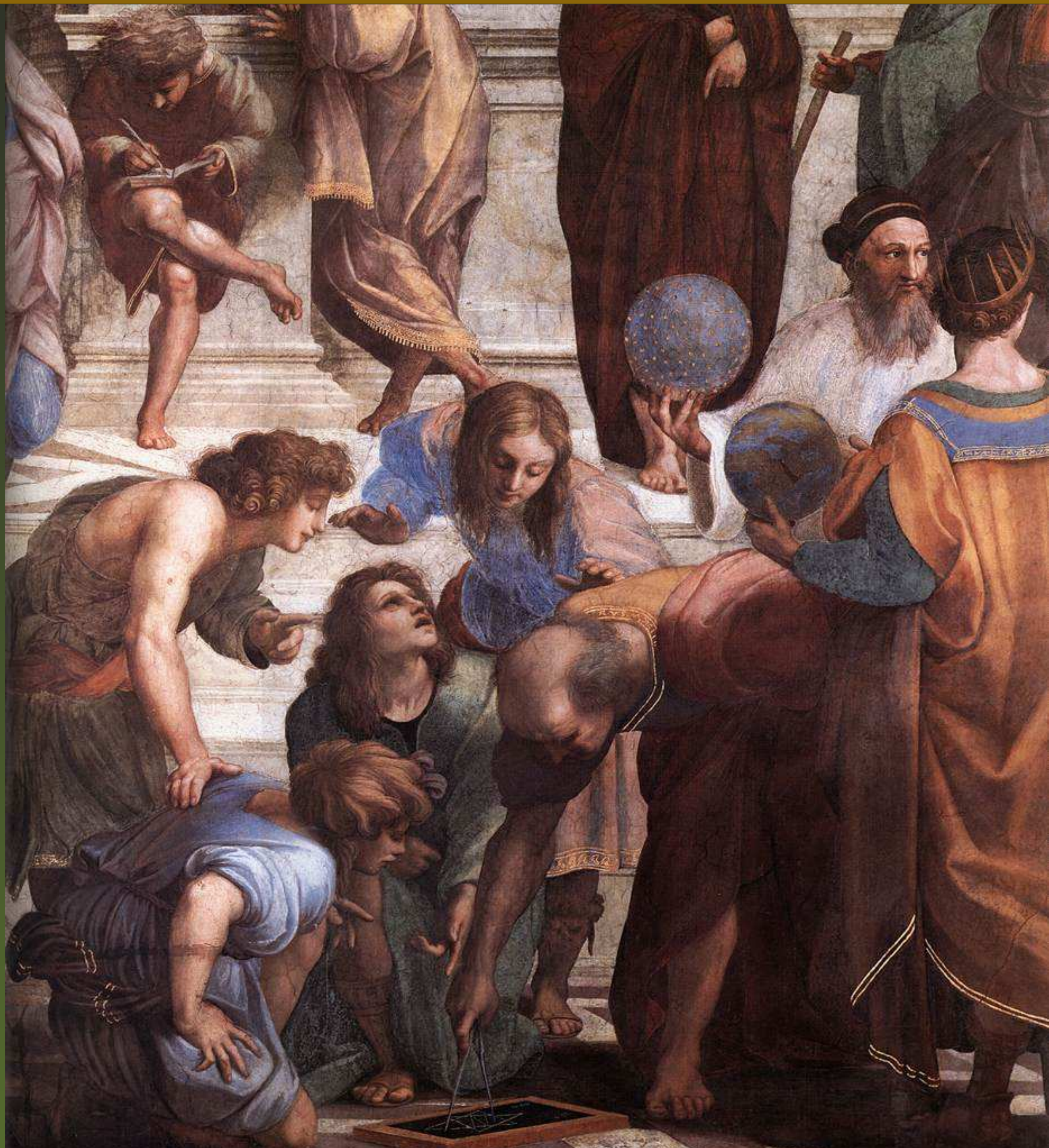
1. Plató 2. Aristòtil 3. Sòcrates

7. Zenó 11. Pitàgores 13. Heràclit

15. Euclides

17. Ptolemeu 18. Autoretrat de Raphael

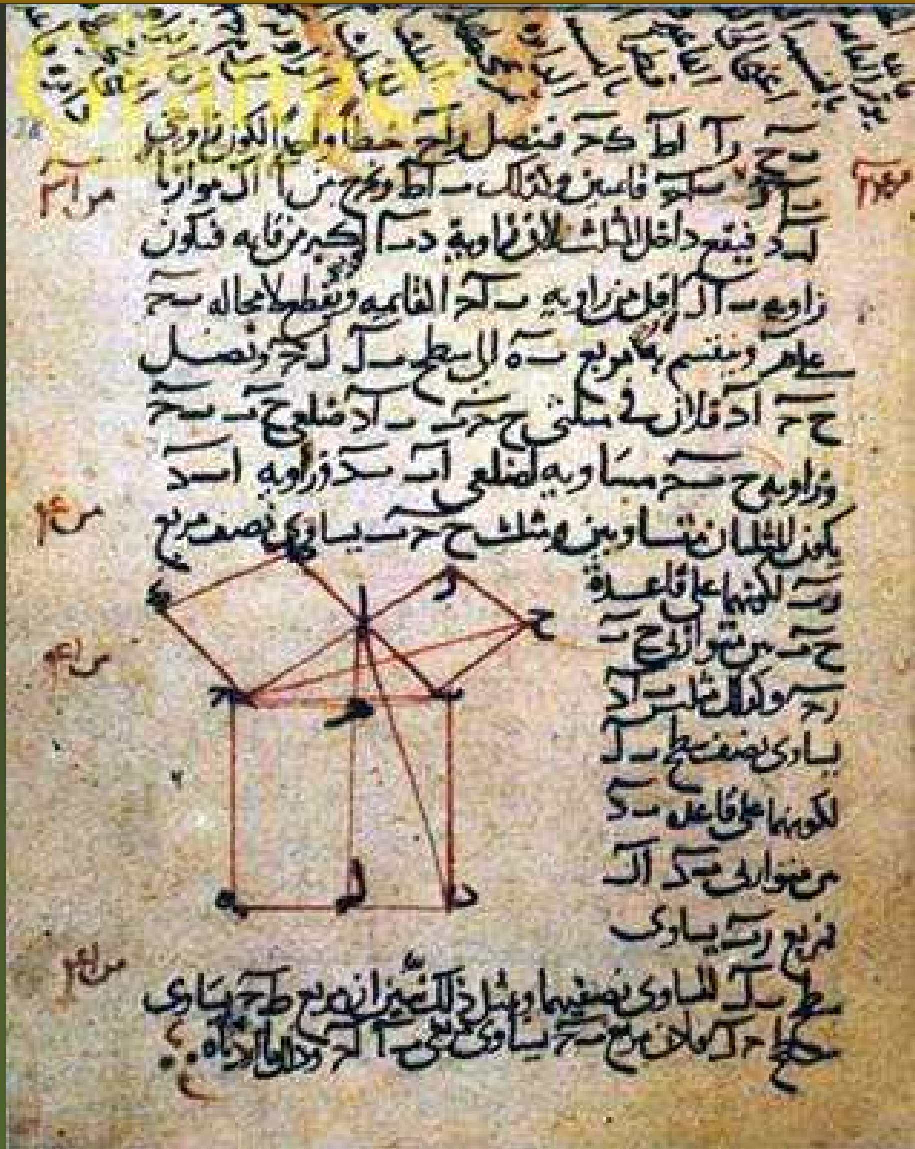
Euclides amb un compàs



Els Elements

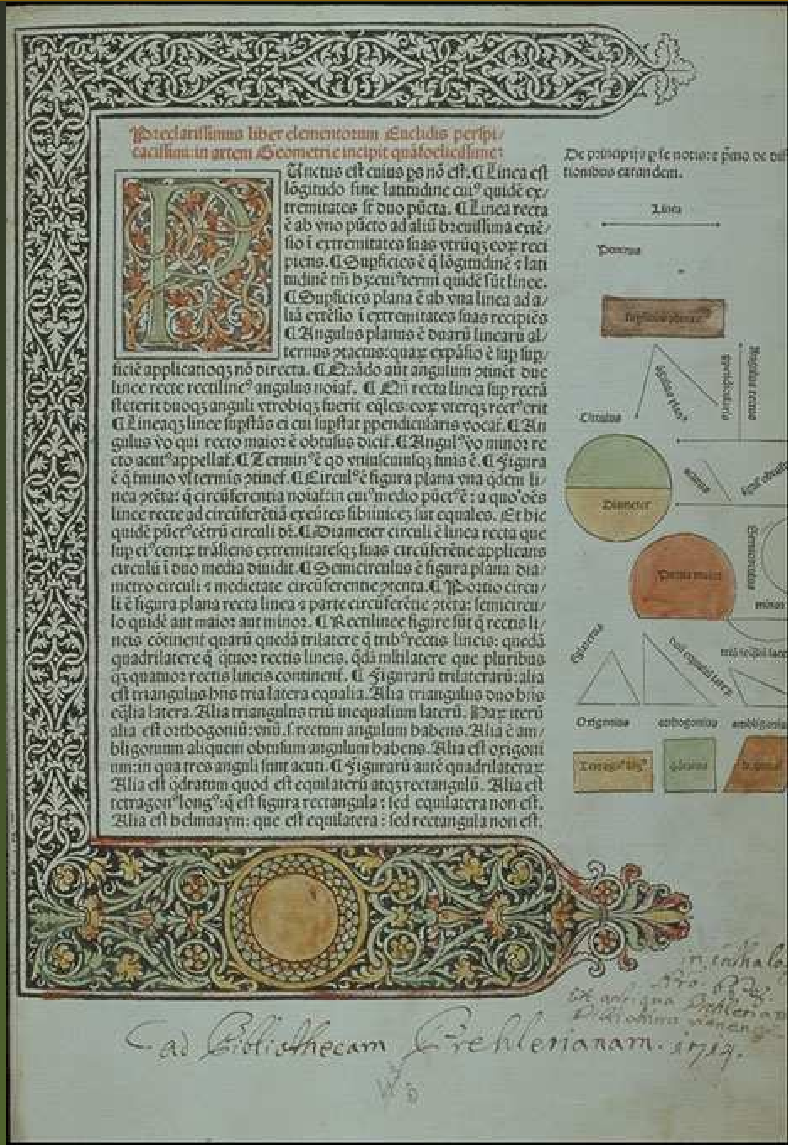
Pergamí grec. Segle IX. Vaticà.

Els Elements



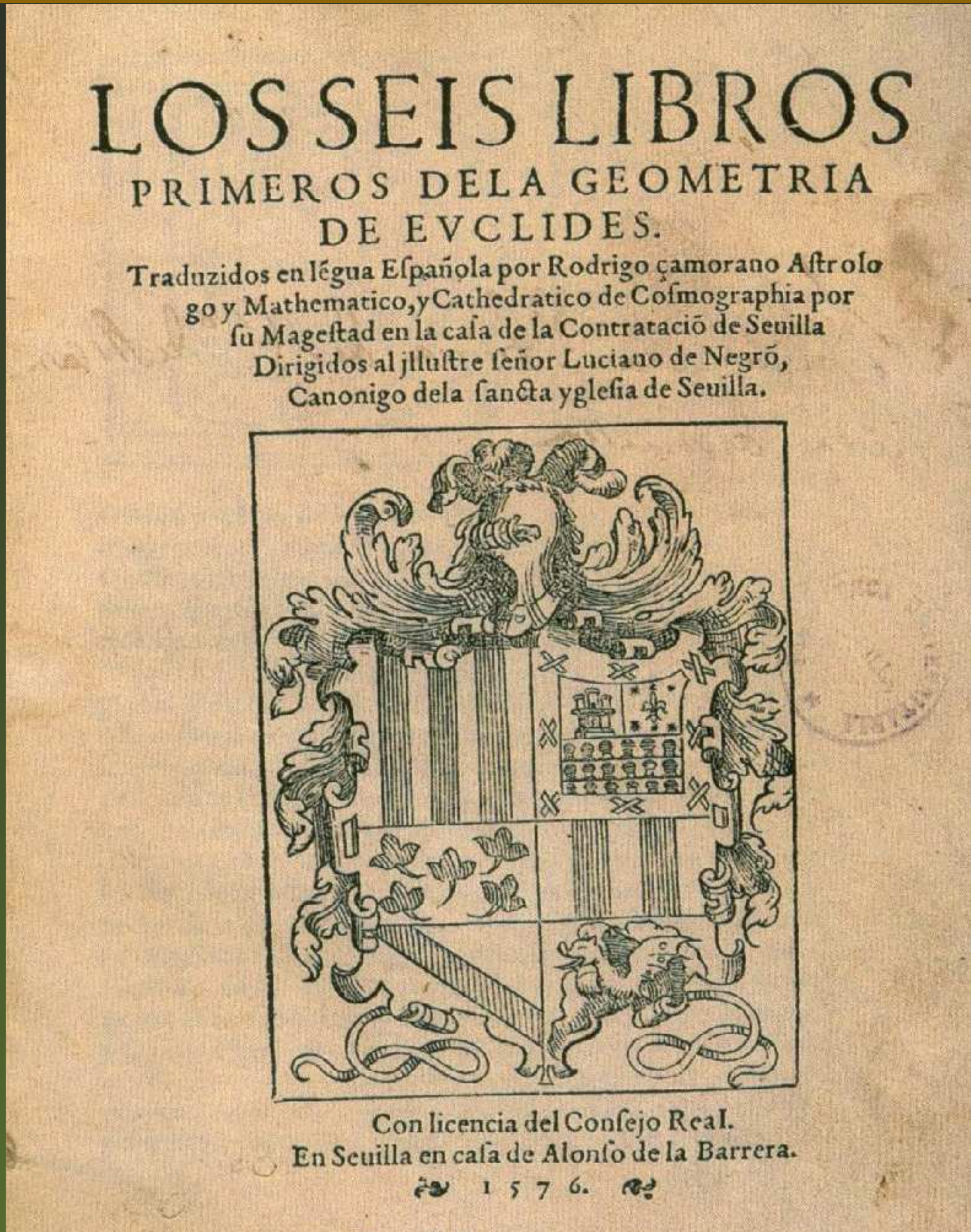
Abu Jafar Muh. b. al-Hasan Nasiraddin at-Tusi, 1258

Els Elements



Primera edició impresa. Venecia 1482

Els Elements



LOS SEIS LIBROS
PRIMEROS DELA GEOMETRIA
DE EVCLIDES.
Traduzidos en lẽgua Eſpañola por Rodrigo çamorano Aſtrolo
go y Mathematico, y Cathedratico de Coſmographia por
ſu Mageſtad en la caſa de la Contratació de Seuilla
Dirigidos al jlluſtre ſeñor Luciano de Negró,
Canonigo dela ſancta ygleſia de Seuilla.

Con licencia del Conſejo Real.
En Seuilla en caſa de Alonſo de la Barrera.
1576.

POSTULATS

1. Podem dibuixar línies rectes des de qualsevol punt a qualsevol punt.
2. Podem prolongar una línia recta finita contínuament a una línia recta.
3. Podem descriure un cercle amb qualsevol centre i distància.

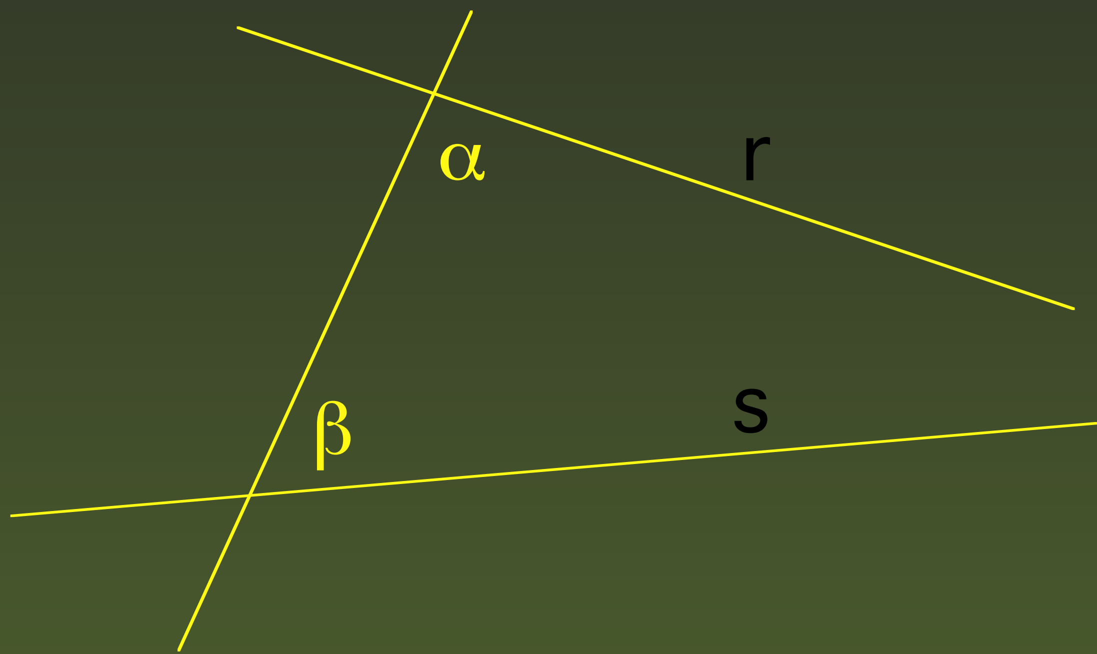
POSTULATS

4. Tots els angles rectes són iguals.

POSTULATS

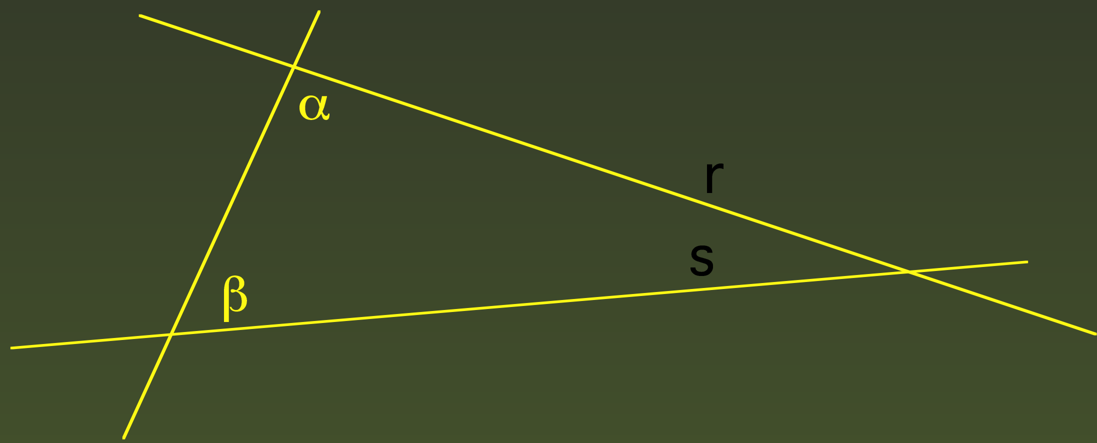
5. Si una línia recta és tallada per dues línies rectes de manera que els angles interiors del mateix costat sumin menys de dos rectes, i si aquestes dues línies rectes es prolonguen indefinidament, llavors es tallen en el costat on estan aquests angles que sumen menys de dos rectes.

Cinquè Postulat



Si $\alpha + \beta < \pi$, r i s es tallen.

Cinquè Postulat



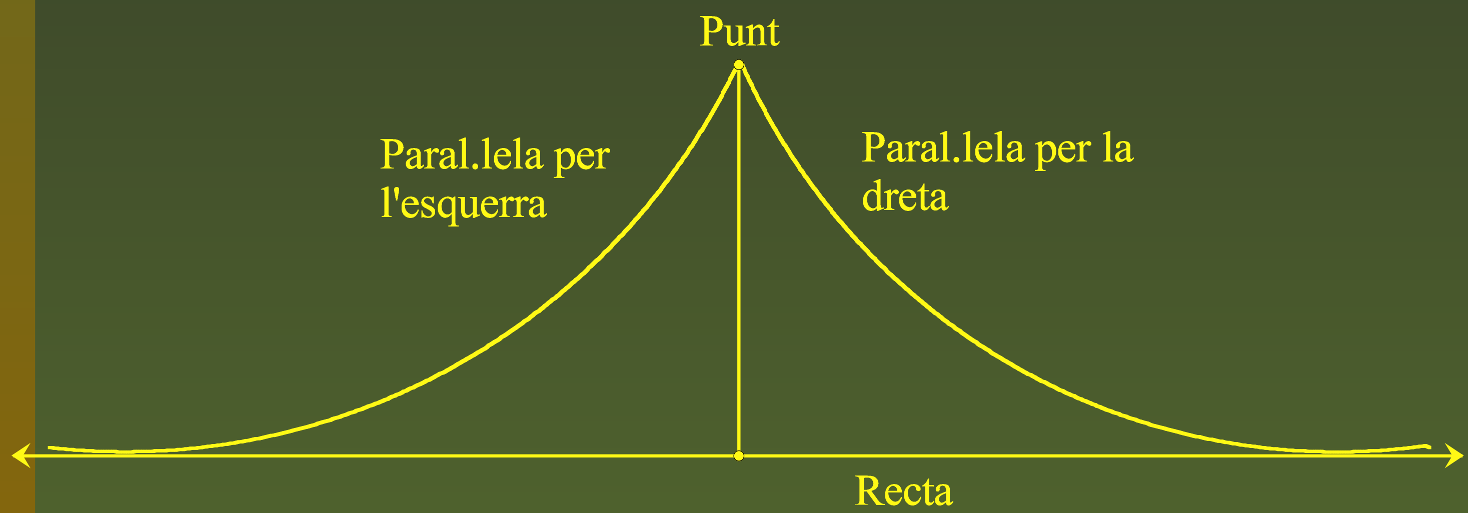
Ja s'han tallat.

Enunciats equivalents

1. Per un punt exterior a una recta hi passa una única paral.lela.
2. Tres punts no alineats determinen una circumferència.
3. Existeixen triangles semblants.
4. Hi ha triangles d'àrea tan gran com vulguem.
5. Els angles d'un triangle sumen el mateix que dos angles rectes.
6. Les equidistants són rectes.

Negació del cinquè postulat

- *Donada una recta i un punt exterior, passen per aquest punt més d'una rectes que no tallen la recta donada.*



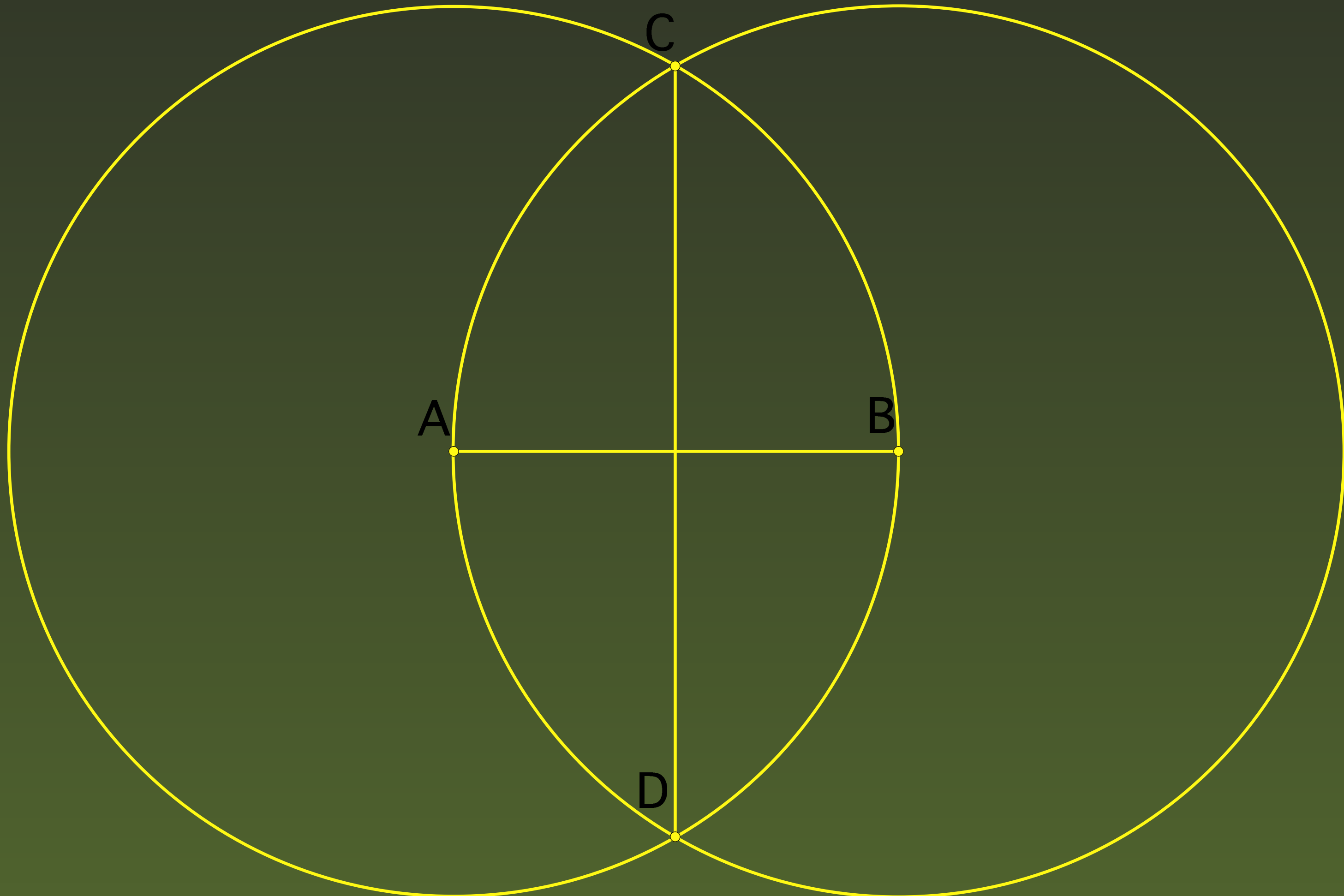
Construccions amb regle i compàs

Regle i compàs

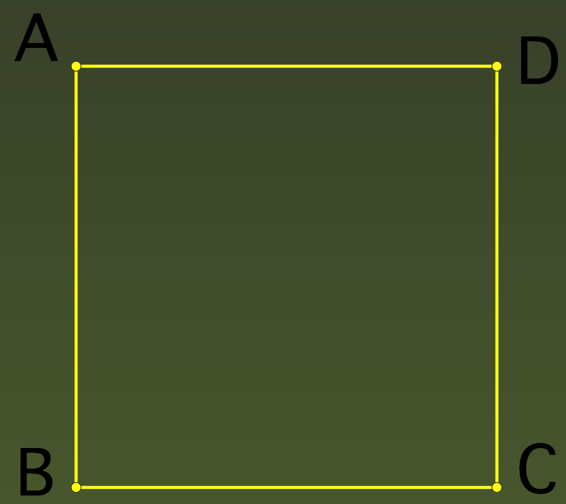
Regle i compàs

- Punt construït $\leftrightarrow$ *Intersecció* de rectes i/o circumferències ja construïdes

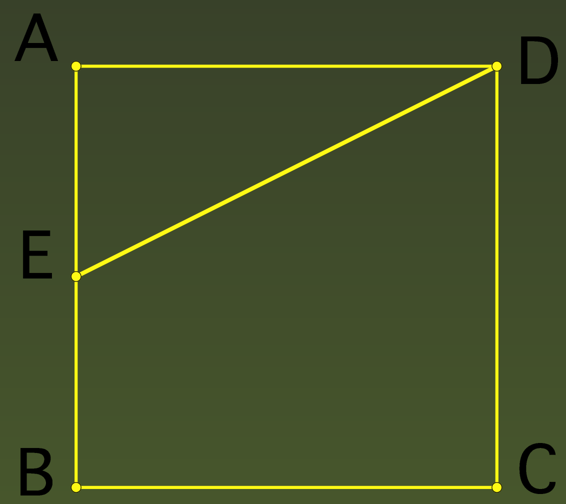
Mediatriu



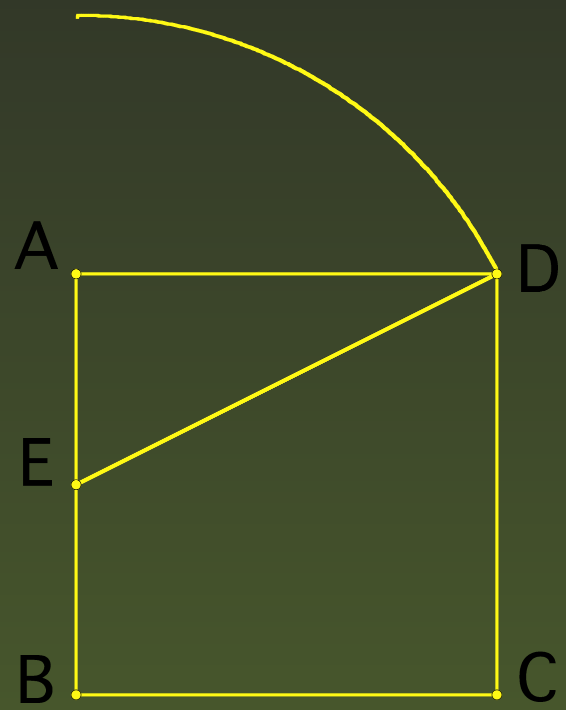
Rectangle auri



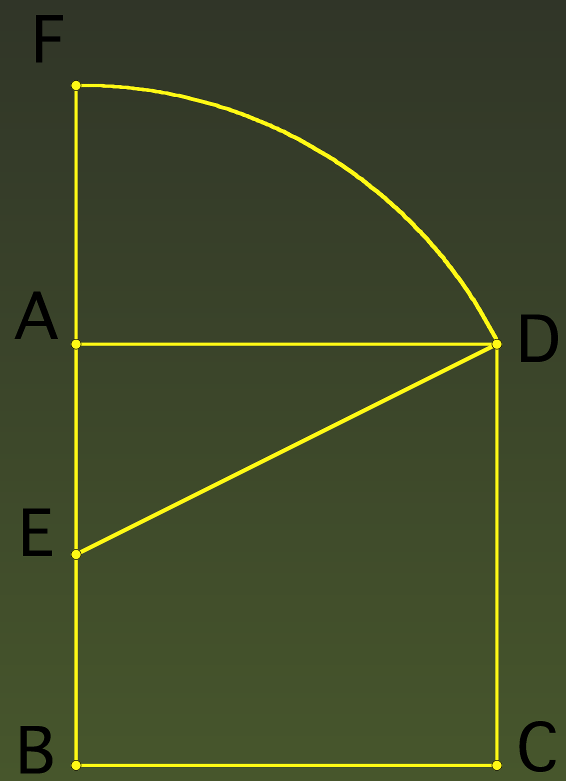
Rectangle auri



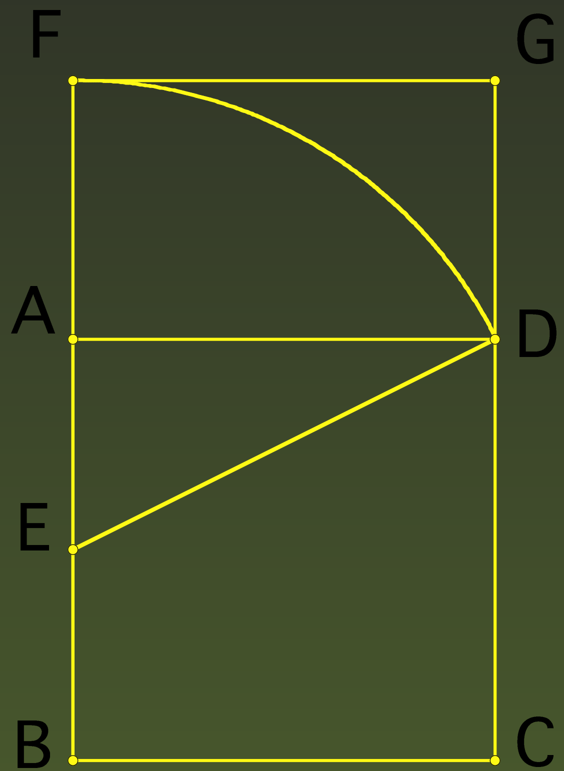
Rectangle auri



Rectangle auri



Rectangle auri



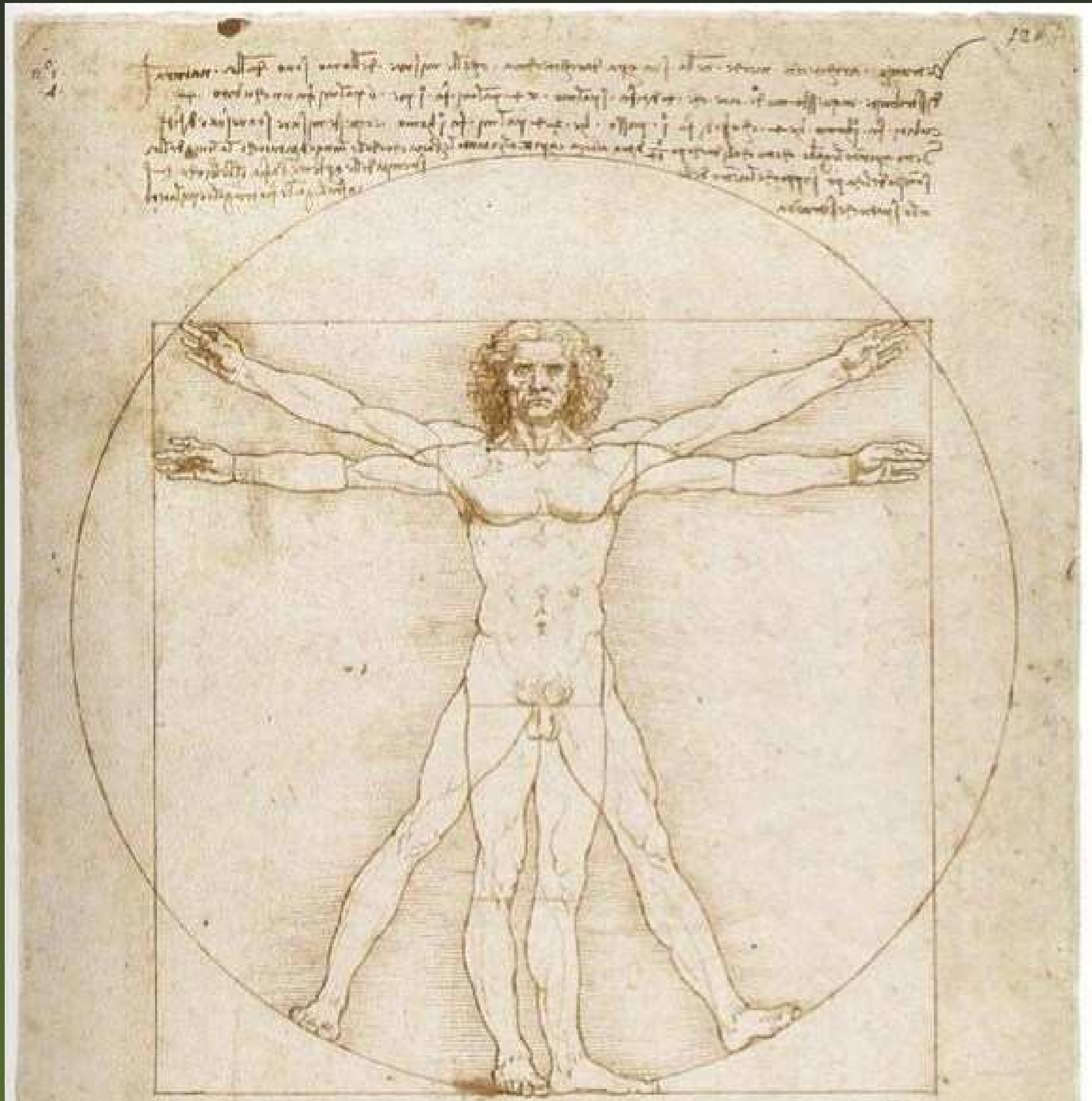
- $BF/BC = \Phi$

Partenó

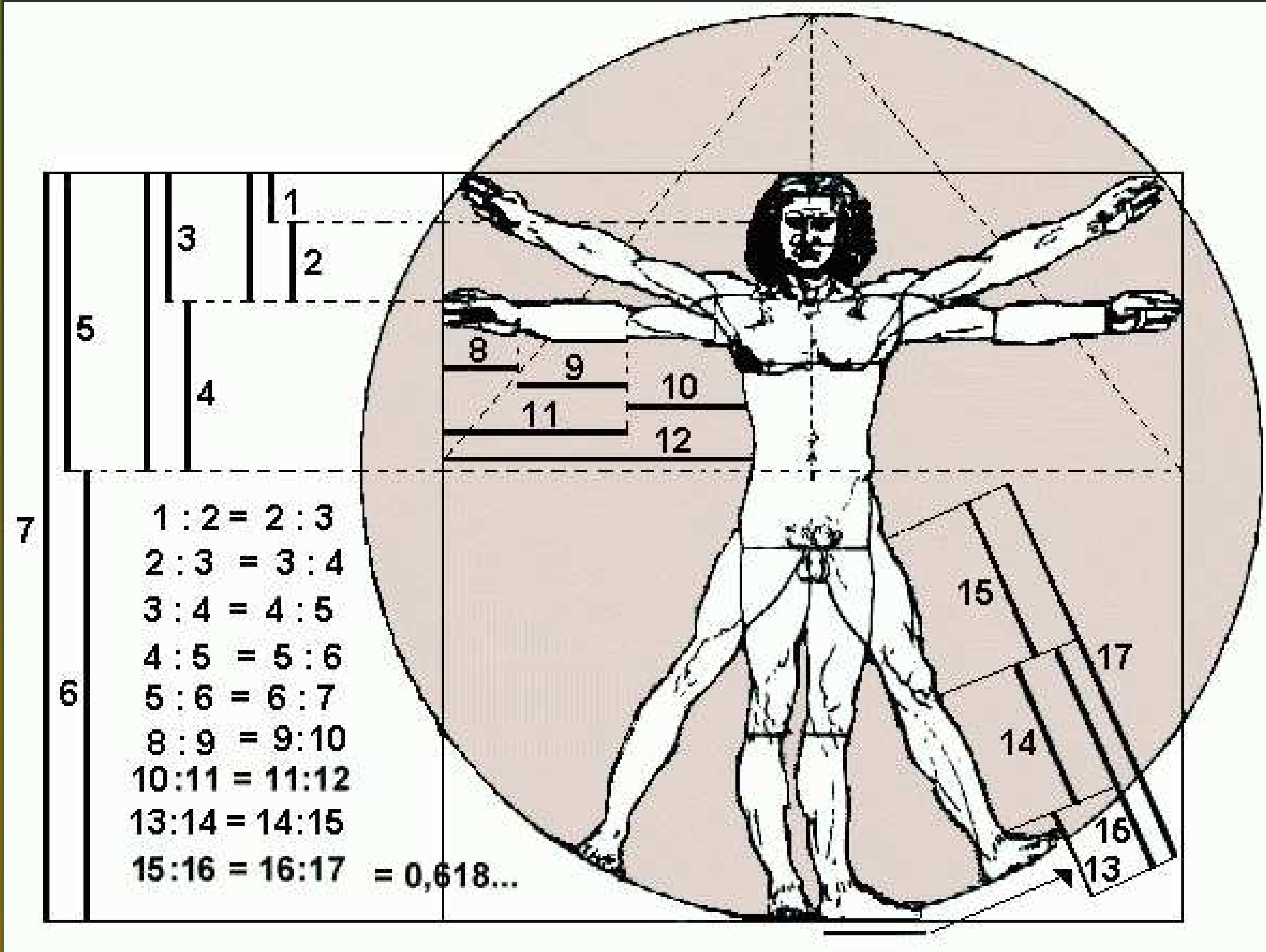
Partenó

$$\Phi = 1,618\ldots \quad \Phi^{-1} = 0.618\ldots$$

Home de Vitrubi



Home de Vitrubi



Marc Vitrubi Pol·lió

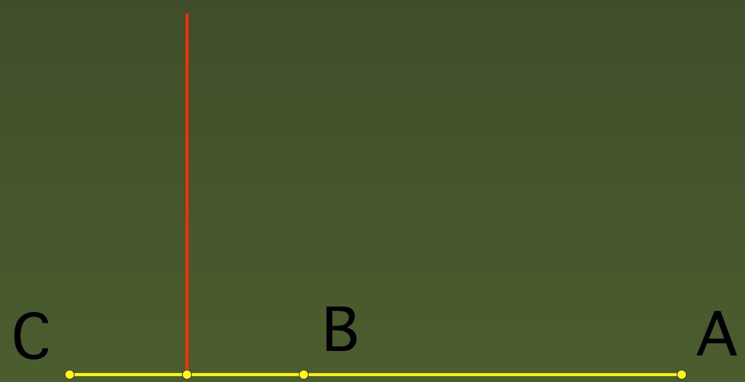
Pentàgon

Mitjana i extrema raó

- El total és a la part gran com la gran és la petita.
- $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{CB} = \Phi$

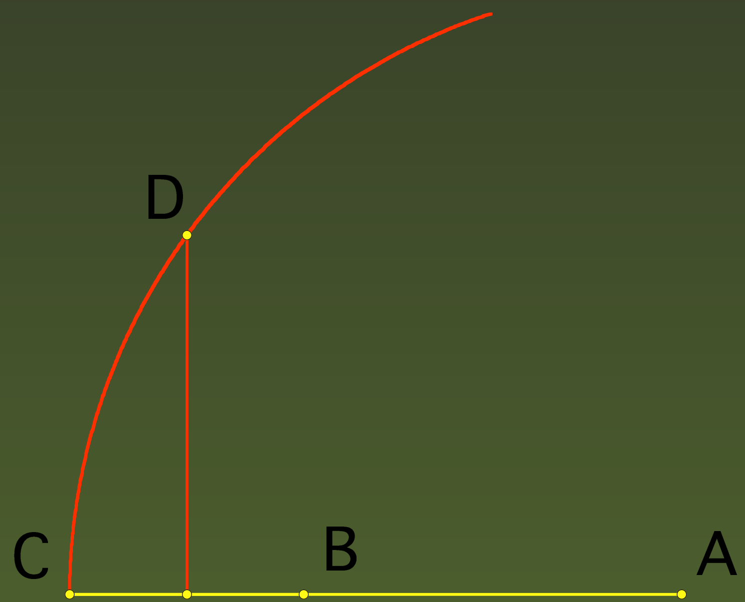
Triangle auri

- $\frac{AC}{AB} = \Phi.$
- Construïm la mediatriu de BC.



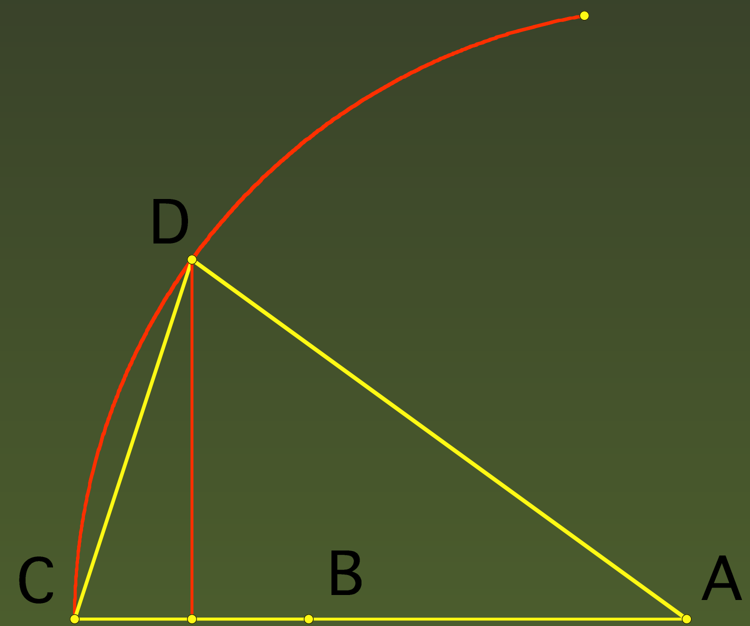
Triangle auri

- $\frac{AC}{AB} = \Phi$.
- Tallem amb la circumferència de centre A i radi AC.



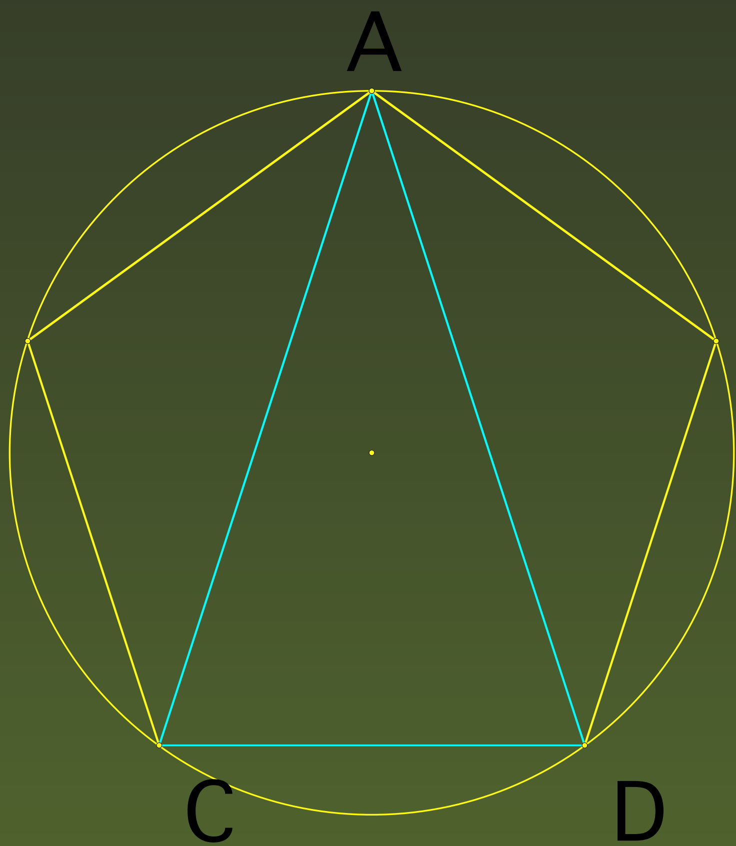
Triangle auri

- El $\triangle ACD$ és auri, ja que $CD = BD = BA$.



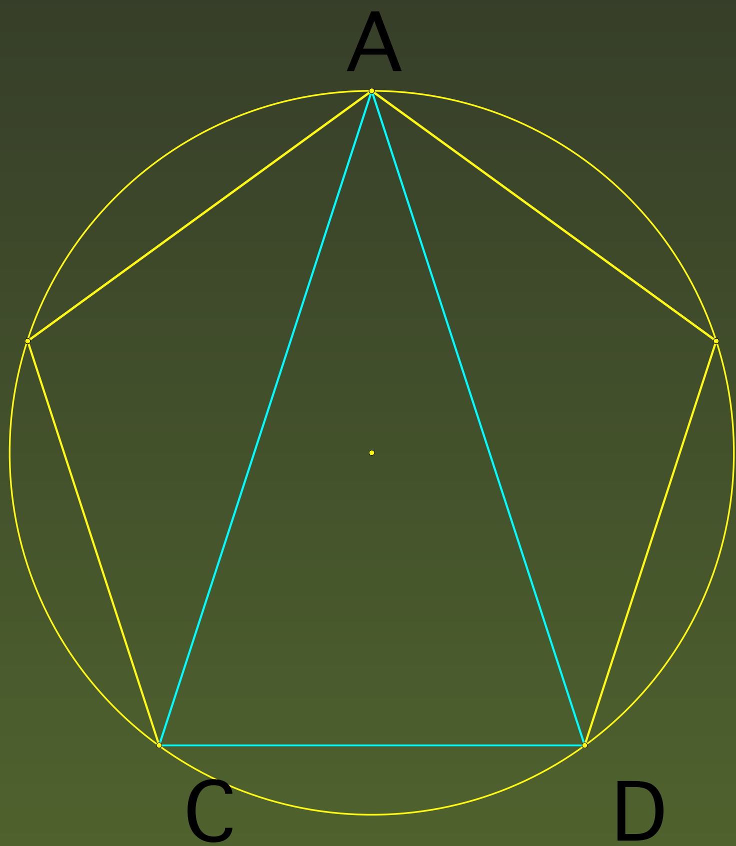
Pentàgon i raó àuria

$$\triangle ACD = 72^\circ, 72^\circ, 36^\circ.$$



Pentàgon i raó àuria

$$\triangle ACD = 72^\circ, 72^\circ, 36^\circ.$$



$$\frac{AC}{CD} = \Phi$$

Leda Atòmica. **Dalí** 1949

Leda Atòmica. Dalí 1949

Leda Atòmica. Dalí 1949

Polígons regulars

- Quins polígons regulars es poden dibuixar amb regle i compàs?

- El primer que no es pot dibuixar és l'eptàgon
- Gauss, als disset anys, va construir el de 17 costats
- Es poden construir els de $3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17, \ldots$ costats

Polígons regulars

- TEOREMA(Gauss 1801) *El polígon regular de n costats es pot construir amb regle i compàs si i només si n té una descomposició en factors primers de la forma*

$$n = 2^{\alpha}(2^{2^{\alpha_1}} + 1) \cdot (2^{2^{\alpha_2}} + 1) \cdots (2^{2^{\alpha_k}} + 1)$$

on $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ són enters diferents entre ells.

Polígons regulars

- TEOREMA(Gauss 1801) *El polígon regular de n costats es pot construir amb regle i compàs si i només si n té una descomposició en factors primers de la forma*

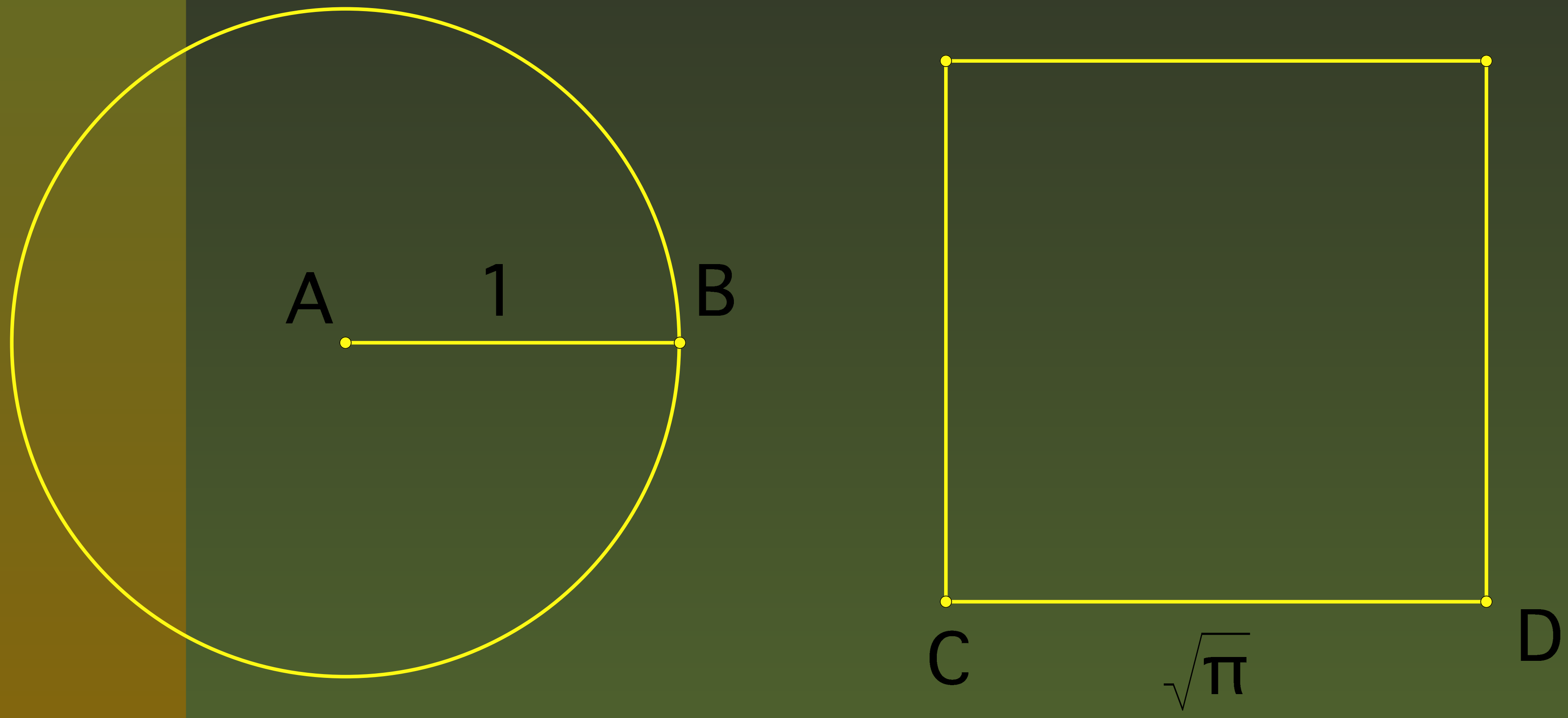
$$n = 2^{\alpha}(2^{2^{\alpha_1}} + 1) \cdot (2^{2^{\alpha_2}} + 1) \cdots (2^{2^{\alpha_k}} + 1)$$

on $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ són enters diferents entre ells.

- Primers de Fermat $(2^{2^a} + 1)$: $3, 5, 17, 257, 65537, ..$

Quadratura del cercle

Quadratura del cercle



Quadratura del cercle

- Anaxagoras $499 - 428$ aC.
- Aristofanes en fa burla a *Els ocells*, 414 aC.

Quadratura del cercle

- TEOREMA[P. L. Wantzel, 1837] Els nombres reals construïbles amb regle i compàs són arrels de polinomis que tenen per coeficients nombres racionals.

Quadratura del cercle

- TEOREMA[P. L. Wantzel, 1837] Els nombres reals construïbles amb regle i compàs són arrels de polinomis que tenen per coeficients nombres racionals.

- Exemple: $a = \sqrt{2}, \quad a^2 - 2 = 0.$

Quadratura del cercle

- TEOREMA[F. Lindemann, 1882] El nombre π no és arrel de cap polinomi a coeficients racionals.

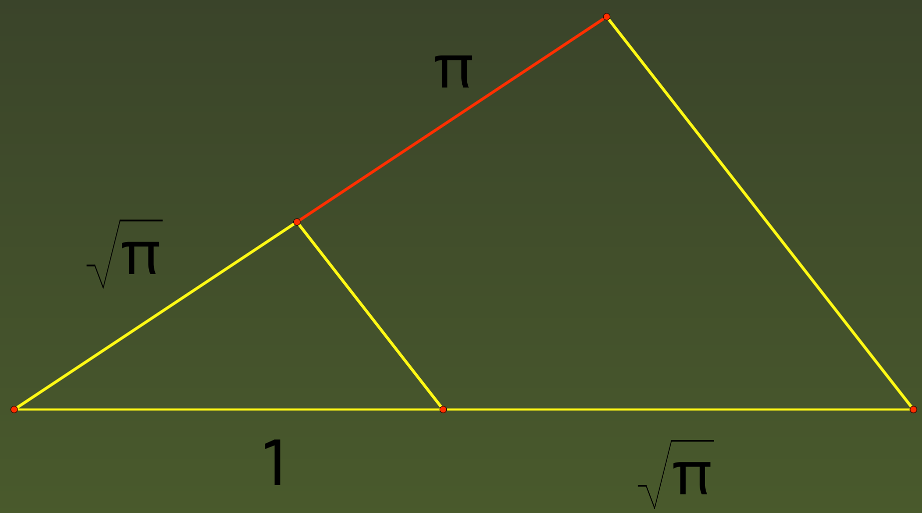
L. F. von Lindemann, $1852 - 1939$

Quadratura del cercle

Si poguéssim construir $\sqrt{\pi}$ (quadrar el cercle), podríem construir π.

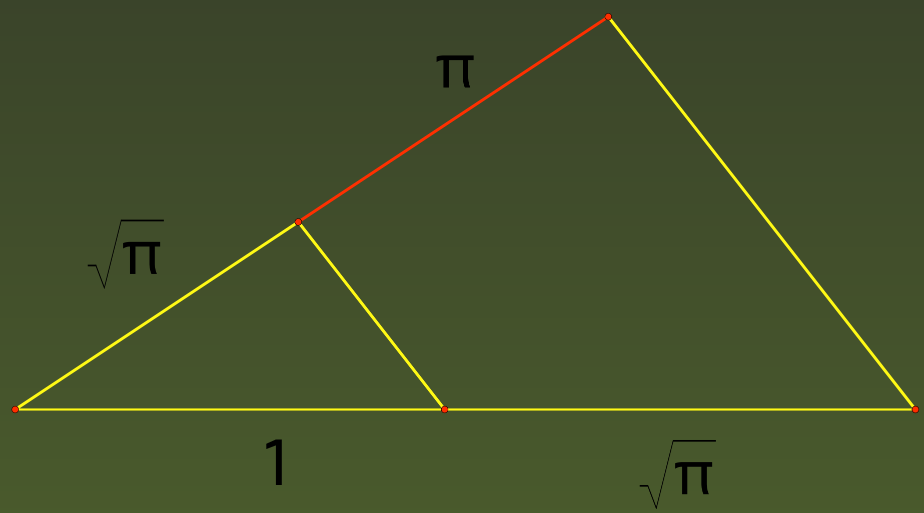
Quadratura del cercle

Si poguéssim construir $\sqrt{\pi}$ (quadrar el cercle), podríem construir π.



Quadratura del cercle

Si poguéssim construir $\sqrt{\pi}$ (quadrar el cercle), podríem construir π.



Contradicció

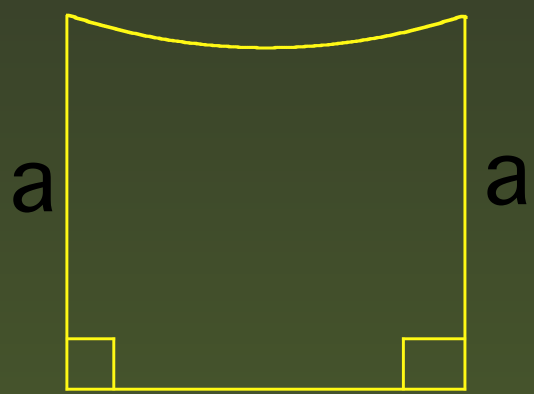
Geometria Absoluta

Geometria Absoluta

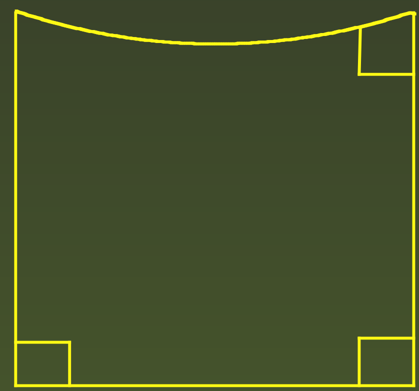
- G. Saccheri (1667-1733): *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia.*

- J. H. Lambert (1728 – 1777): *Theorie der Parallellinien.*

Geometria Absoluta



Saccheri



Lambert

Geometria Absoluta

- Saccheri rebutja *l'hostil hipòtesi de l'angle agut* perquè obté resultats *que repugnen la natura de la línia recta*.

Geometria Absoluta

- Saccheri rebutja *l'hostil hipòtesi de l'angle agut* perquè obté resultats *que repugnen la natura de la línia recta*.

- Lambert veu possible una geometria sense el cinquè postulat: *M'inclino a pensar que la hipòtesi de l'angle agut és certa en alguna esfera de radi imaginari*.

Geometria Absoluta

- Saccheri rebutja *l’hostil hipòtesi de l’angle agut* perquè obté resultats *que repugnen la natura de la línia recta*.

- Lambert veu possible una geometria sense el cinquè postulat: *M’inclino a pensar que la hipòtesi de l’angle agut és certa en alguna esfera de radi imaginari*.

- Taurinus (1794-1874) desenvolupa aquesta idea arribant a l’angle de paral·lelisme.

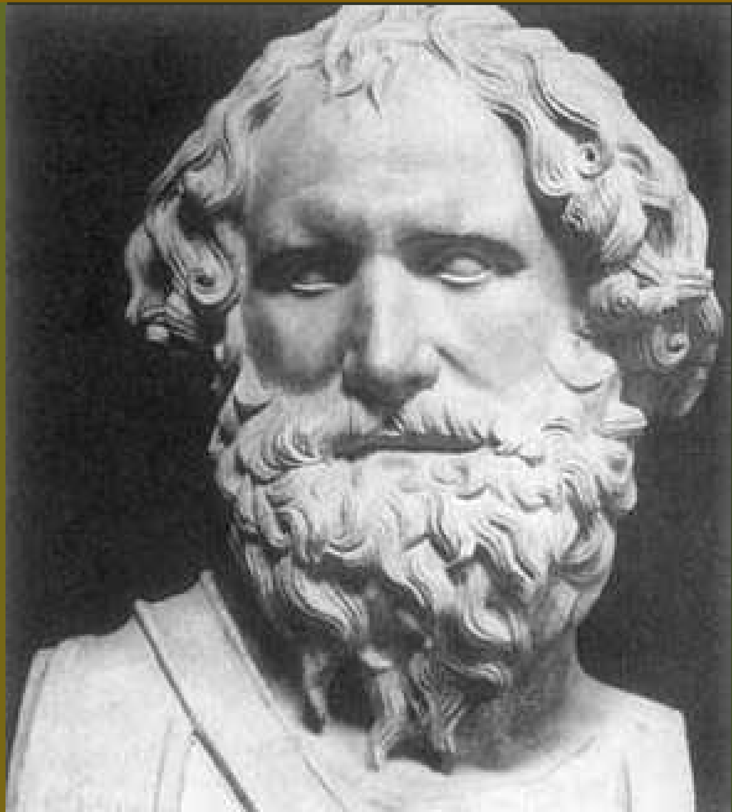
Geometria esfèrica

Triangle esfèric

- Menelaus d'Alexandria $(70 - 130$ dC.) defineix triangle esfèric a *Sphaerica* .

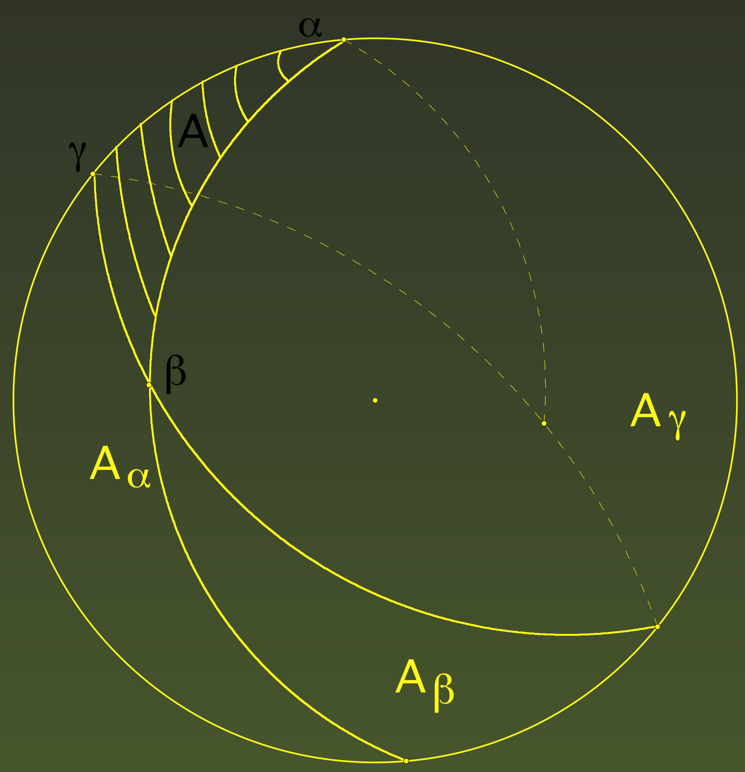
- *Un triangle esfèric és l'espai inclòs per arcs de cercles màxims sobre la superfície de l'esfera [...] aquests arcs són sempre menors que un semicercle.*

Àrea de l'esfera



Arquimedes: Àrea $= 4\pi R^2$.

Àrea d'un fus



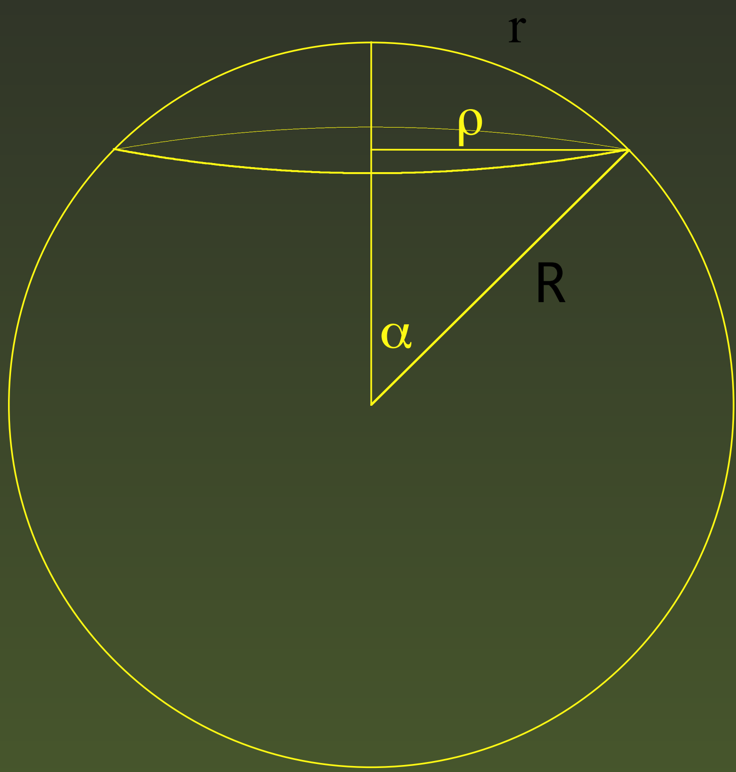
Àrea d'un fus esfèric $F_\alpha = 2R^2\alpha.$

Àrea d'un triangle

A partir de les àrees dels fusos es veu que

$$\text{Àrea} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2 \cdot \text{ Excés}$$

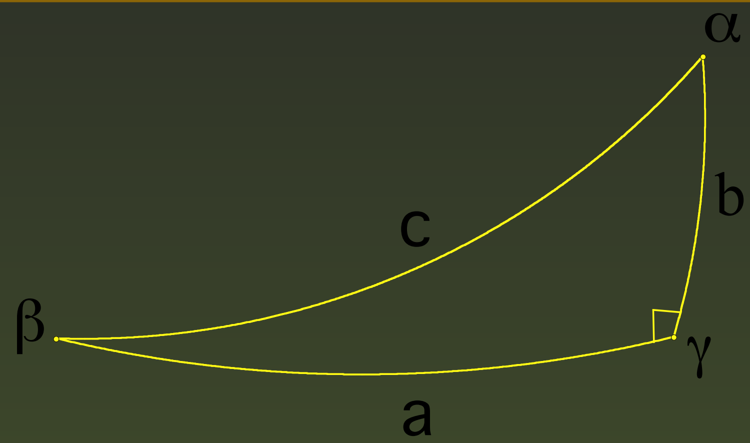
Longitud d'una circumferència



$$L = 2\pi\rho = 2\pi R \sin\alpha = 2\pi R \sin\frac{r}{R}.$$

Criteri per saber on vivim.

Teorema de Pitàgores



$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cdot\cos\frac{b}{R}$$

$$R \to \infty$$

Àrea del triangle

- Àrea $= R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = \infty \cdot 0.$

Longitud de la circumferència

$$L = 2\pi R \sin\frac{r}{R} \sim 2\pi\, r.$$

Teorema de Pitàgores

$$\cos\frac{a}{R} \sim 1 - \frac{a^2}{2R^2}$$

$$1 - \frac{c^2}{2R^2} \sim \left(1 - \frac{a^2}{2R^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{b^2}{2R^2}\right)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Esfera Imaginària

Esfera imaginària

- Formalment substituïm R per Ri i recordem

$$\boxed{\cos ix = \cosh x, \qquad \sin ix = i \sinh x.}$$

Exponencial complexa

- Fórmula d'Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Àrea d'un triangle

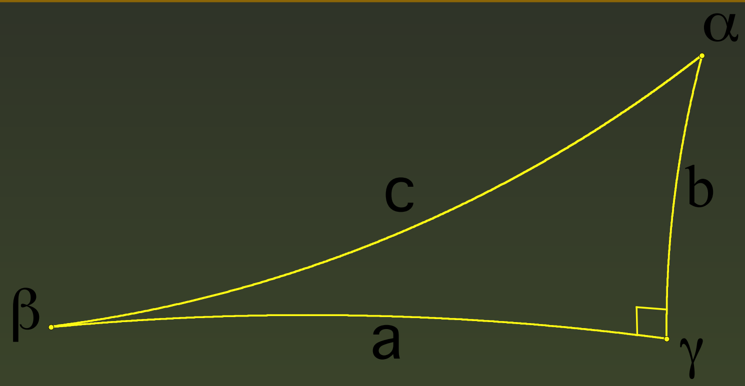
$$\begin{aligned}\text{Àrea} &= (Ri)^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \\ &= R^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)) \\ &= R^2 \cdot \text{Defecte}\end{aligned}$$

Longitud d'una circumferència

$$L = 2\pi Ri \sin \frac{r}{Ri} = 2\pi R \sinh \frac{r}{R}.$$

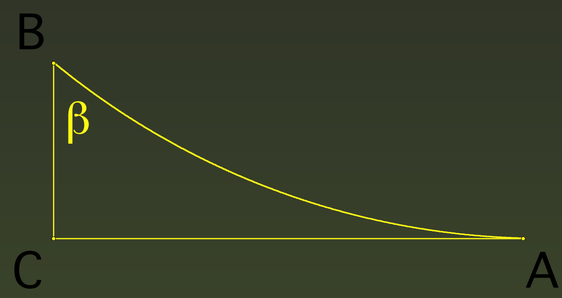
Criteri per saber on vivim.

Teorema de Pitàgores



$$\cosh\frac{c}{R} = \cosh\frac{a}{R}\cdot\cosh\frac{b}{R}$$

Angle de paral·lelisme



$$\cos\alpha = \sin\beta\cosh\tfrac{a}{R}$$

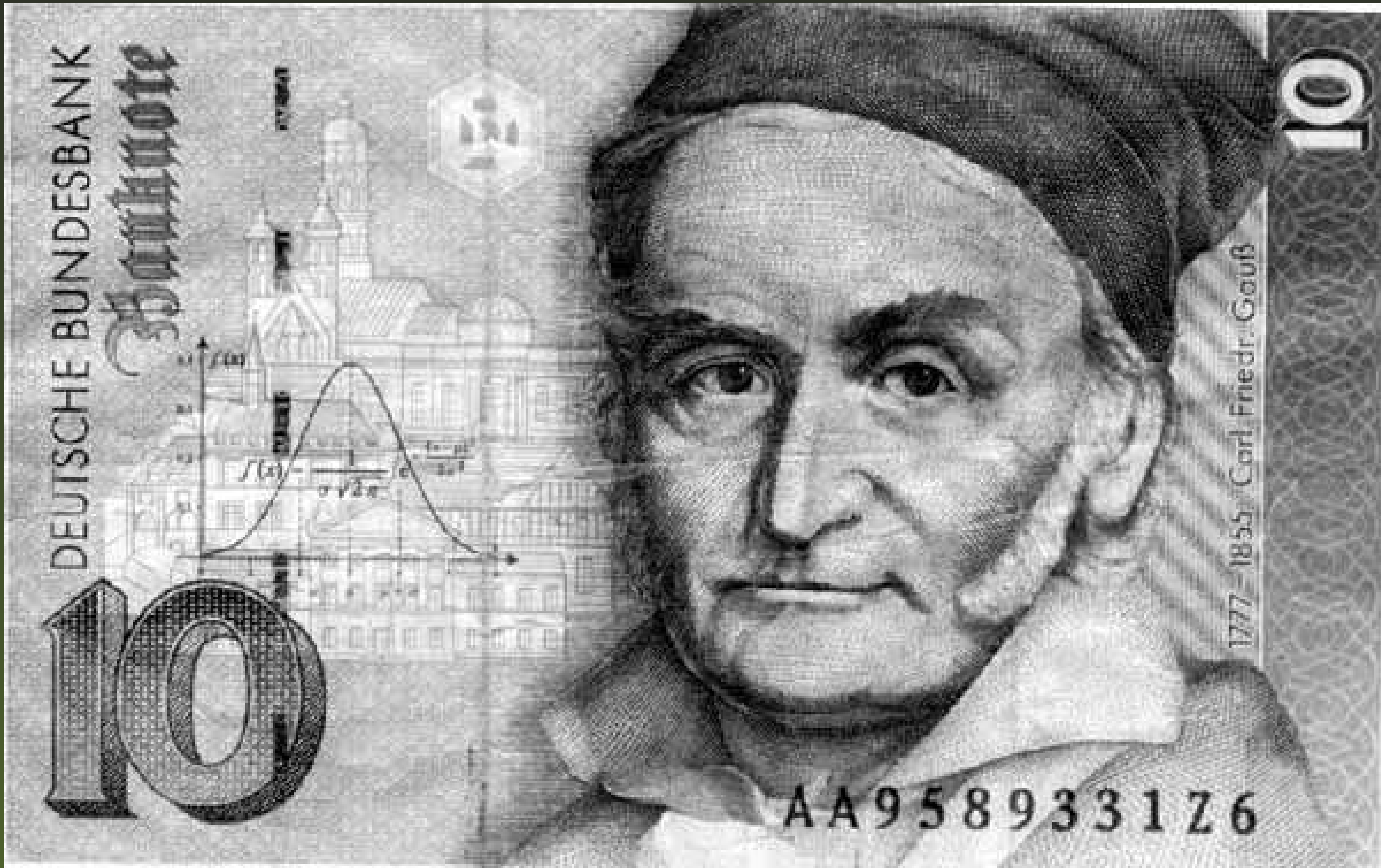
Si $A \to \infty$, $\alpha \to 0$,

$$1 = \sin\beta(a)\cosh\frac{a}{R}$$

- $\boxed{\beta(a) = 2\arctan e^{-a/R}}$

C. F. Gauss

C. F. Gauss


DEUTSCHE BUNDESBANK
Banknote
10
1777–1855 Carl Friedr. Gauß
AA9589331Z6
10

Carta a **F. W. Bolyai** (1813)

- Si es pogués demostrar l'existència d'un triangle d'àrea tan gran com vulguem, aleshores es podria demostrar amb tot rigor la totalitat de la geometria euclidiana. *Moltes persones prendrien aquesta proposició com un axioma, però jo no!*

Carta a **Taurinus** (1824)

- No és correcta la seva demostració de què la suma dels angles d'un triangle no pot ser inferior a dos rectes: *aquest és el punt crític, el penya-segat on es produeixen tots els naufragis*.

Els Bolyai

Farkas i Janos Bolyai

Marosvásárhely

Farkas Bolyai

Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Introducendi. (1832)

Carta al seu fill, 1820

- Per l'amor de Deu! *Deixa les paral·leles tranquil·les*, abjura d'elles com d'una xerrada indecent, et prendran (com a mi) el teu temps, la salut, la tranquil·litat i la felicitat de la teva vida.

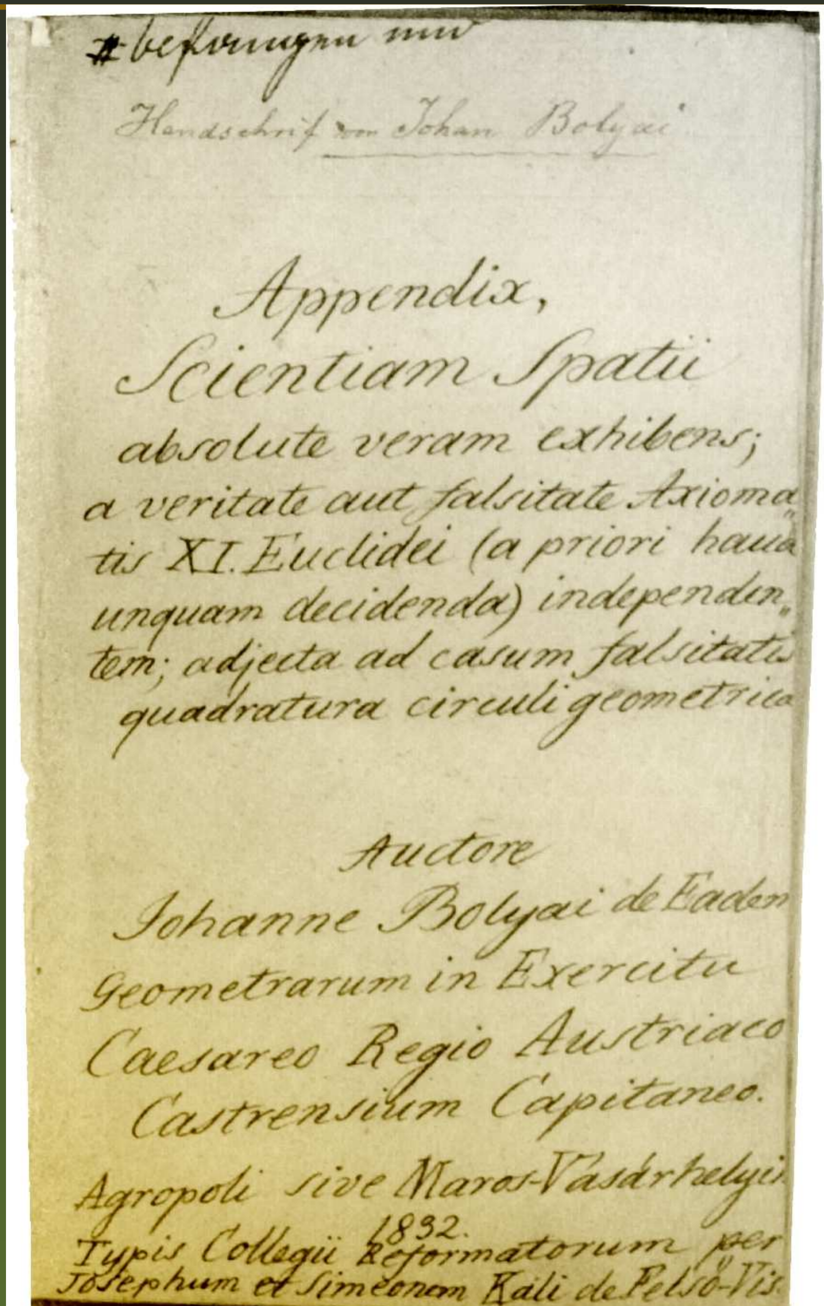
J. Bolyai

Palau de cultura de Marosvásárhely

Carta de **Janos** a **Farkas**, 1823

- He descobert coses tan superbes que jo mateix estic atònit, i significaria una vergonya eterna deixar-ho perdre per sempre; si vostè, apreciat pare, les veu, les reconeixerà; ara no puc dir més:
del no res he creat un món nou i diferent.

J. Bolyai



Handschrift von Johan Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma-
tis XI. Euclidei (a priori haud
unquam decidenda) independen-
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Agropoli sive Maros-Vásárhelyini
1832.
Typis Collegii Reformatorum per
Josephum et Simeonem Kali de Felső-Vis.

Carta de Gauss a Farkas (1832)

- Si començo dient que no el puc alabar, restaràs desconcertat. No obstant no puc fer altra cosa: *Si l'alabés, m'alabaria a mi mateix*, ja que el total contingut del treball, el camí que segueix el teu fill i els resultats a que ha arribat, coincideixen quasi completament amb les meves reflexions de fa trenta o trenta-cinc anys.

Carta de Gauss a Gerling (1832)

- He llegit aquests dies un petit treball d'un hongarès, sobre geometries no euclidianes, que conté totes les meves idees i resultats.

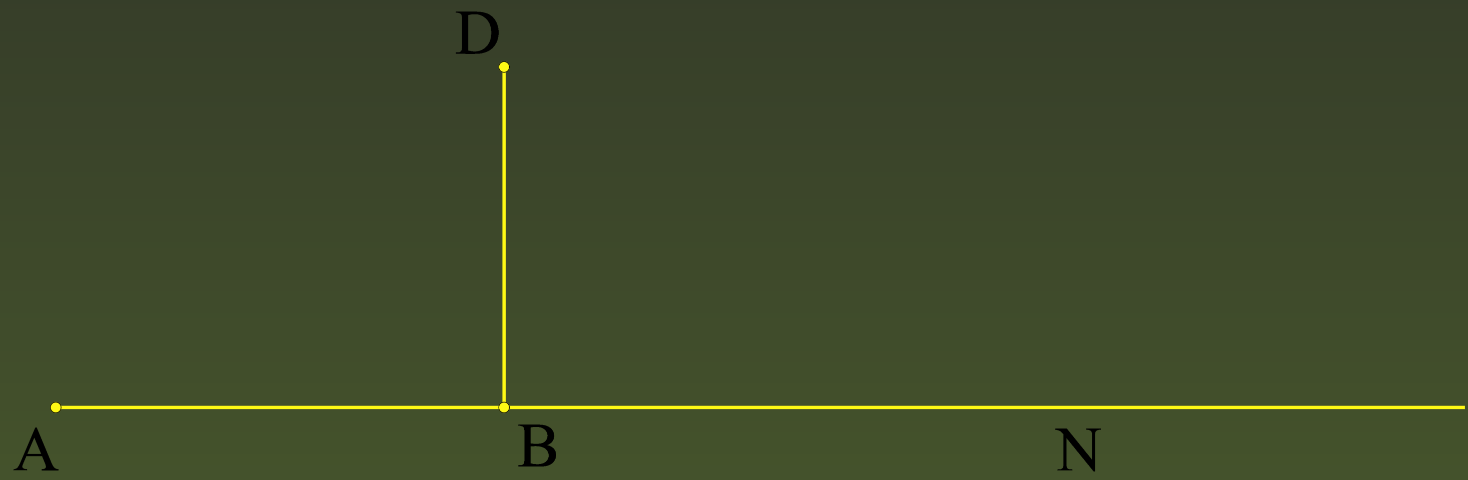
- *Tinc a aquest jove geòmetra com un dels més grans genis.*

Carta de **Farkas a Gauss**, 1816

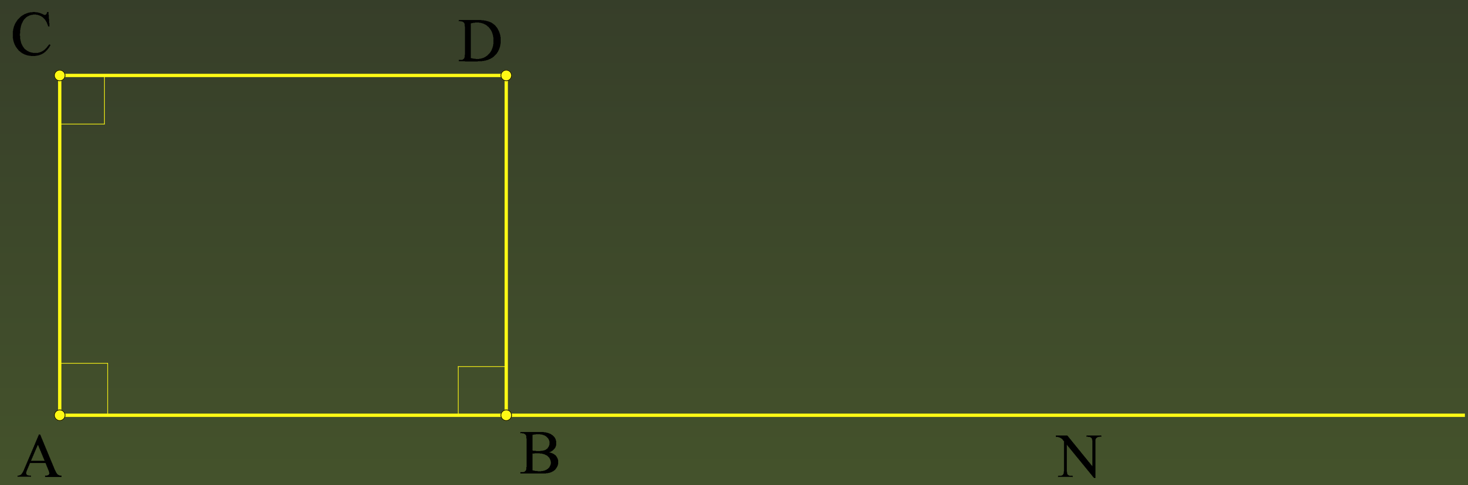
- 1. No tens pas una filla que pugui esdevenir (recíprocament) perillosa en aquesta època...? 2. Estàs sa i no ets pobre? Estàs satisfet i no reganyaire? I, principalment, és la teva dona excepcional entre totes les dones? No és ella més variable que un penell. És imprevisible com el canvi d'un baròmetre?...

Quadratura del cercle (hiperbòlic)

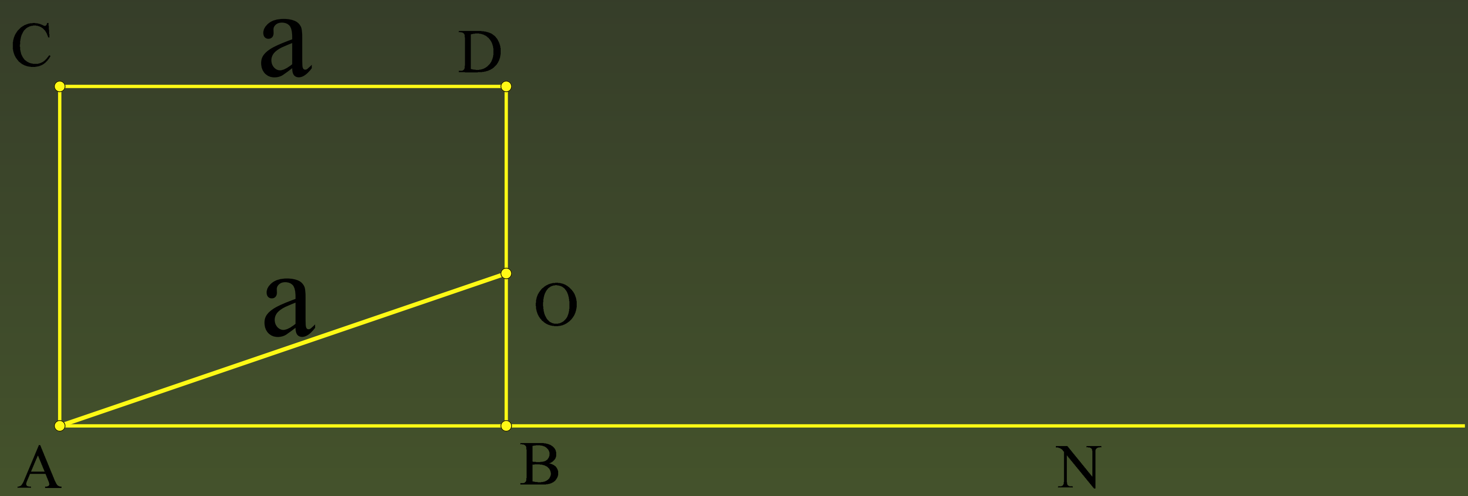
Angle de paral·lelisme



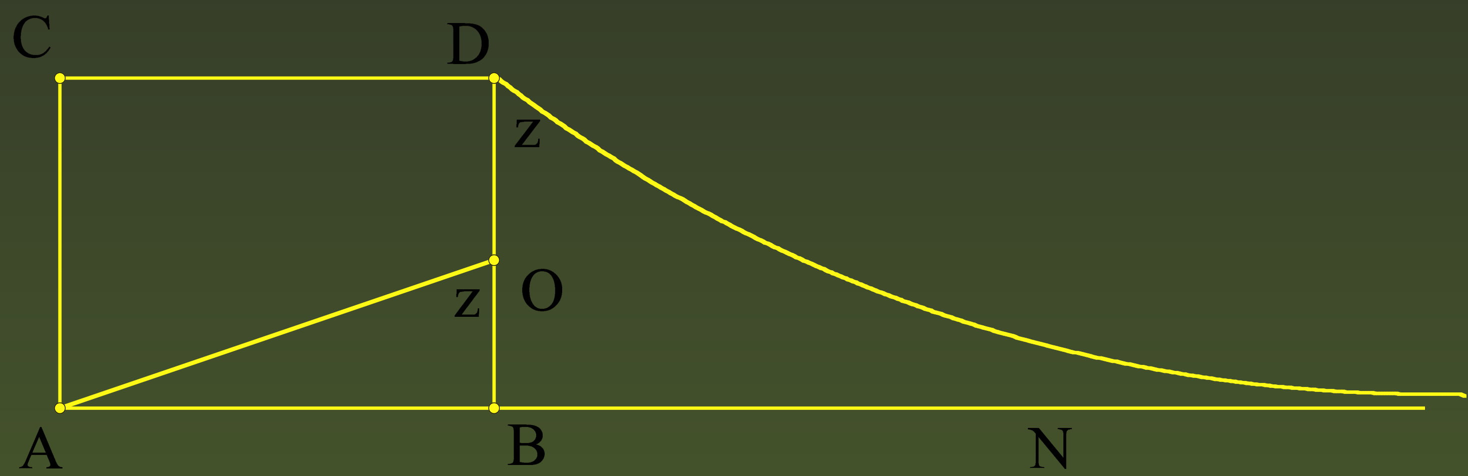
Angle de paral·lelisme



Angle de paral·lelisme



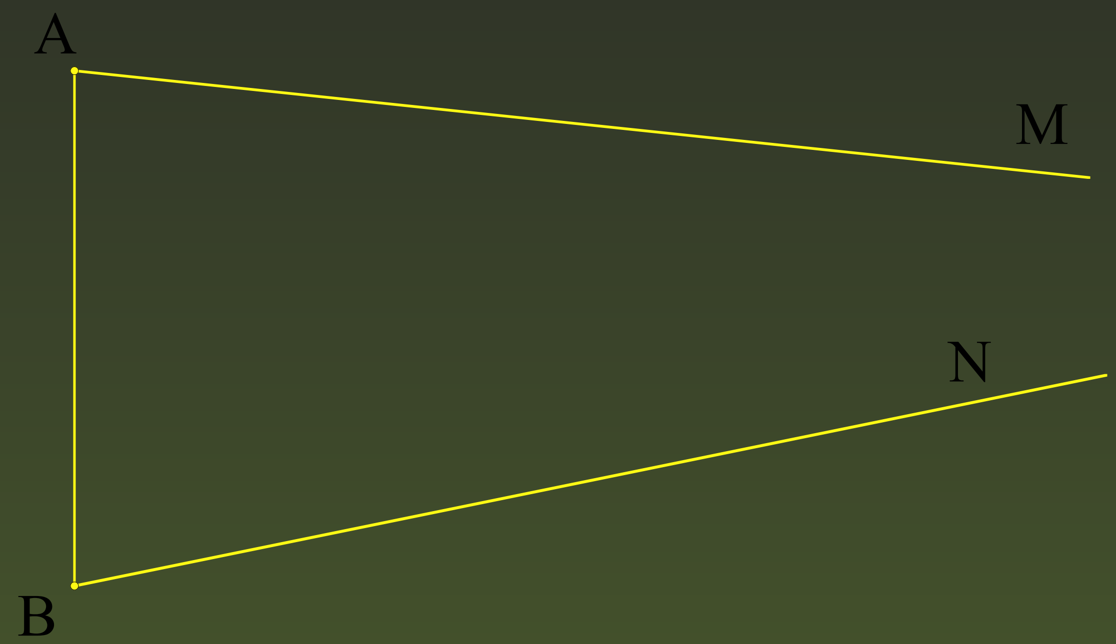
Angle de paral·lelisme



Segment de paral·lelisme

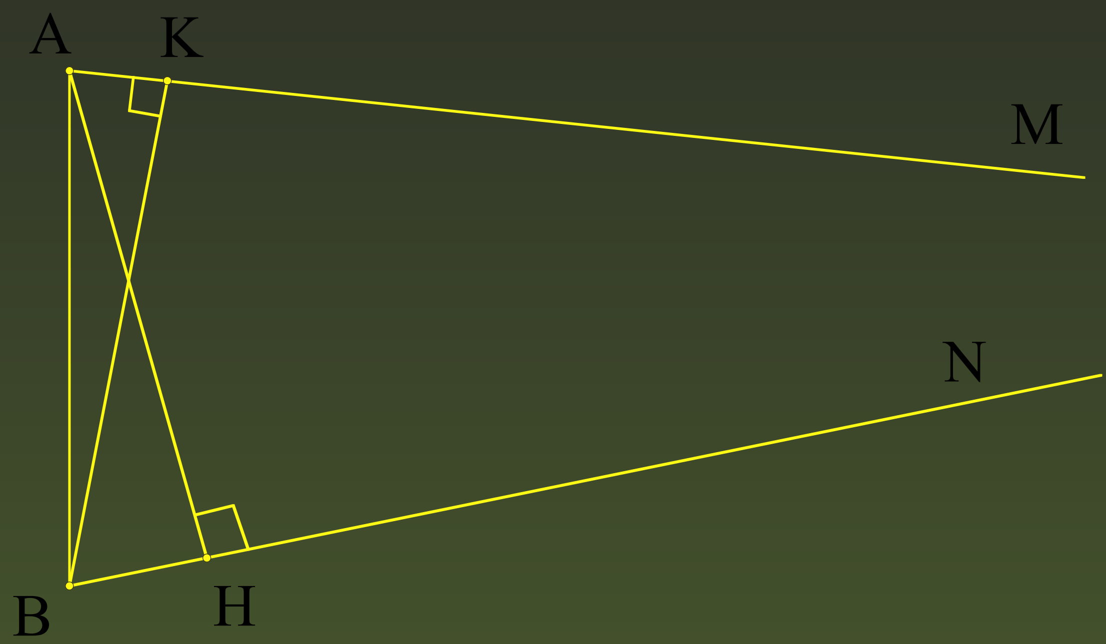
- Tenim un angle $\alpha = BAM$.

Segment de paral·lelisme



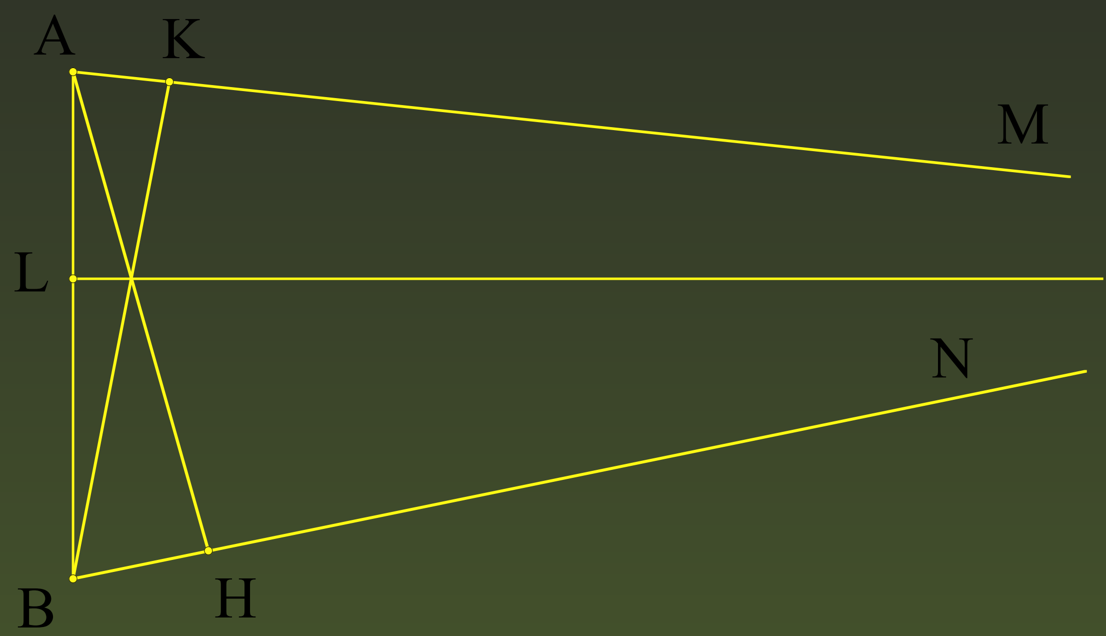
- Tracem la paral·lela.

Segment de paral·lelisme



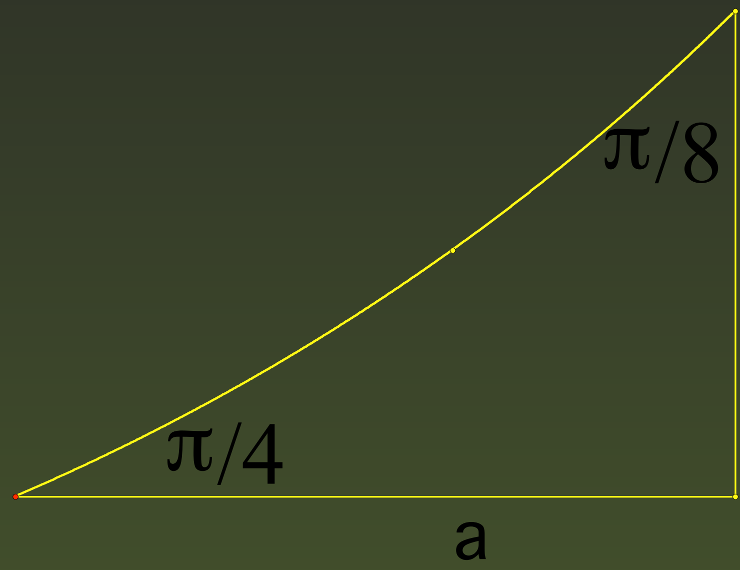
- Tracem les perpendiculars.

Segment de paral·lelisme



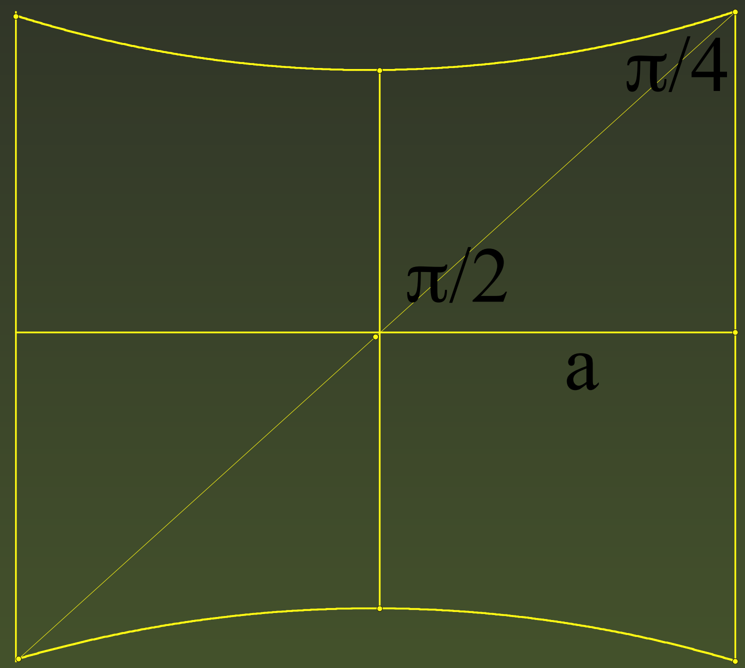
- $\Pi(AL) = \alpha$.

Triangle d'àrea $\pi/8$



- Àrea $= \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = \pi/8.$

Quadrat d'àrea π



- Àrea $= 8\,\frac{\pi}{8} = \pi$.

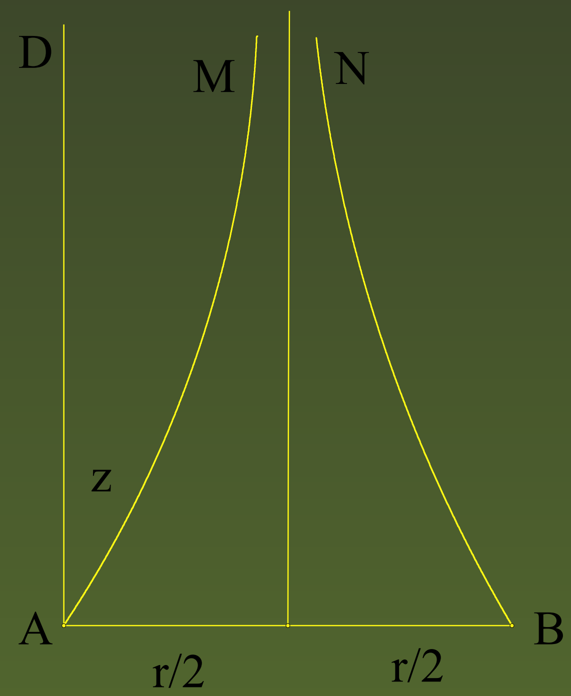
Quadrat d'àrea π

$$\begin{aligned} \sin\frac{3\pi}{8} &= \cosh a \cdot \sin\frac{\pi}{4} \\ \cosh c &= \cosh a \cdot \cosh b \end{aligned}$$

- a és el catet d'un triangle rectangle d'hipotenusa $\Pi^{-1}(\pi/4)$ i altre catet $\Pi^{-1}(3\pi/8)$ i per tant construïble.

Cercle d'àrea π

- Àrea cercle $= \pi(2\sinh\frac{r}{2})^2 = \pi\ \tan^2 z.$
- z és el complementari de l'angle de paral·lelisme de $r/2$.



Cercle d'àrea π

- Només hem de construir $z = \pi/4$ i r a partir de $\Pi(r/2) = \pi/4$.
- Això acaba la quadratura del cercle hiperbòlica, amb l'advertència de que no pas tot cercle hiperbòlic es pot quadrar! Quins es poden?

Realitzem l’esfera imaginària

Problema

- Trobar una superfície on la longitud de les circumferències de radi r sigui

$$L = 2\pi \sinh r$$

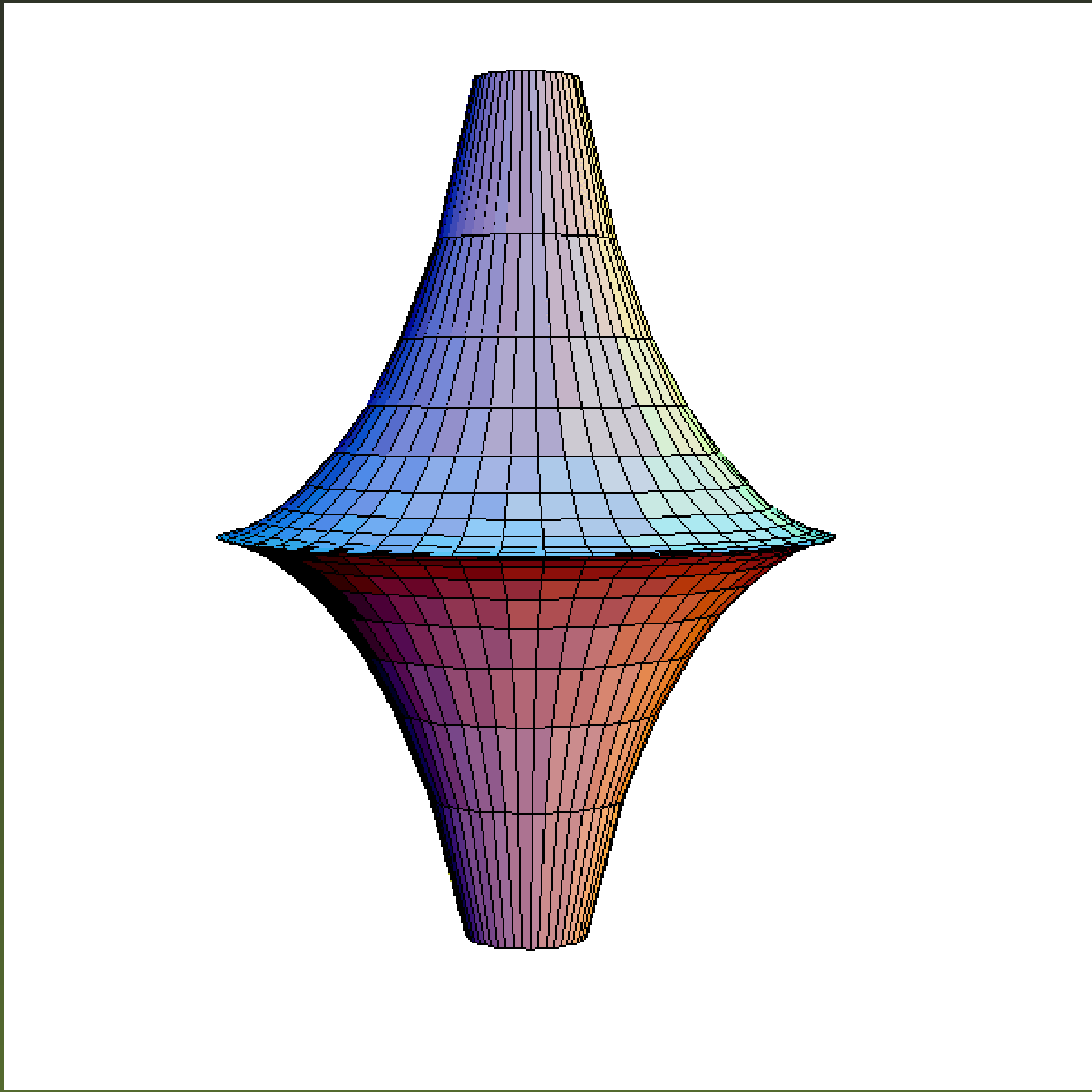
Tractriu

- Corba amb subtangent 1.
- $y' = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

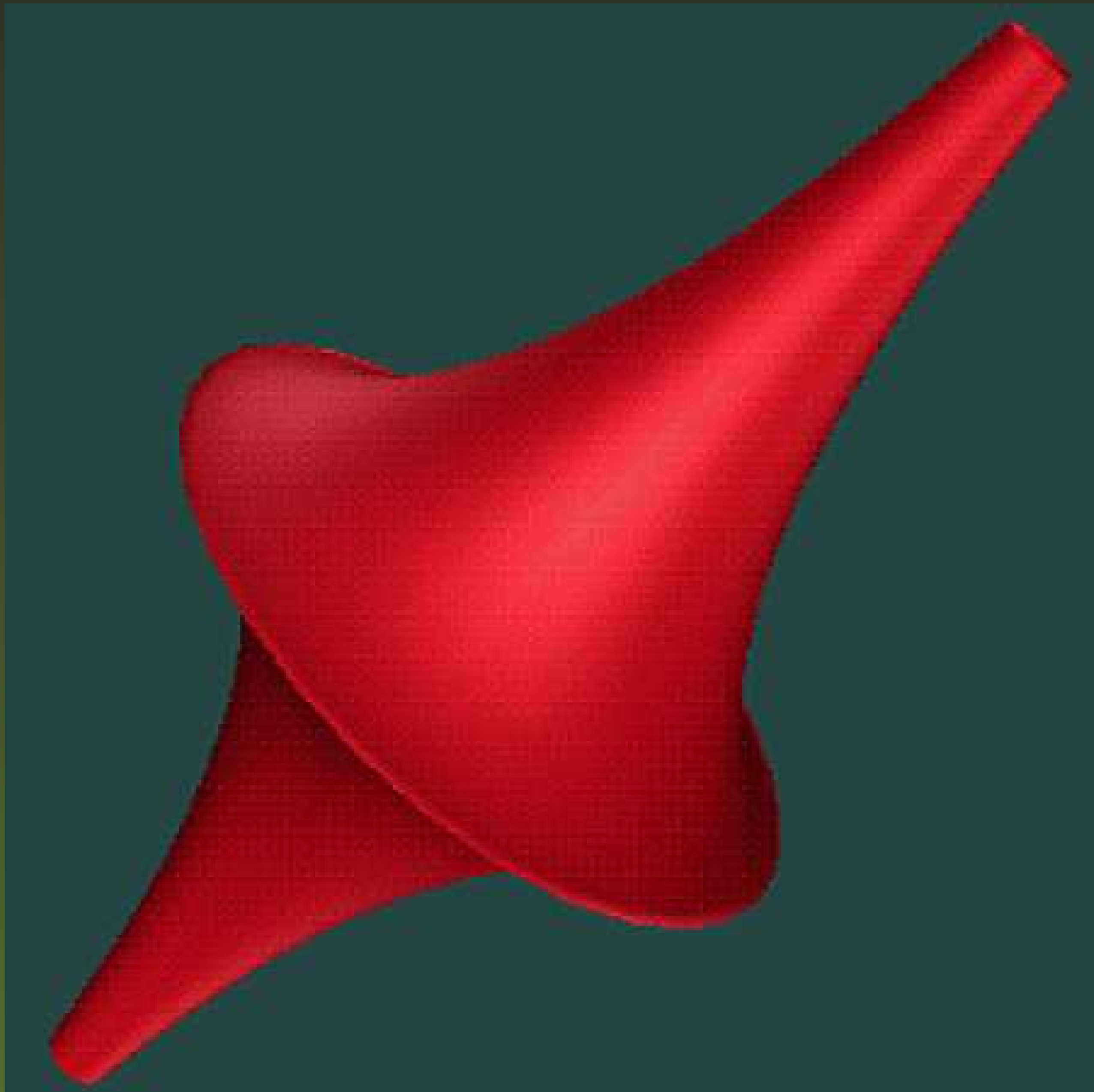
Tractriu

- Trajectòria d'un cos situat a $(0,1)$ en ser arrossegat des de $(0,0)$ sobre l'eix de les $x>0$.
- Proposat per Perrault, XVII. Resolt per Huygens.

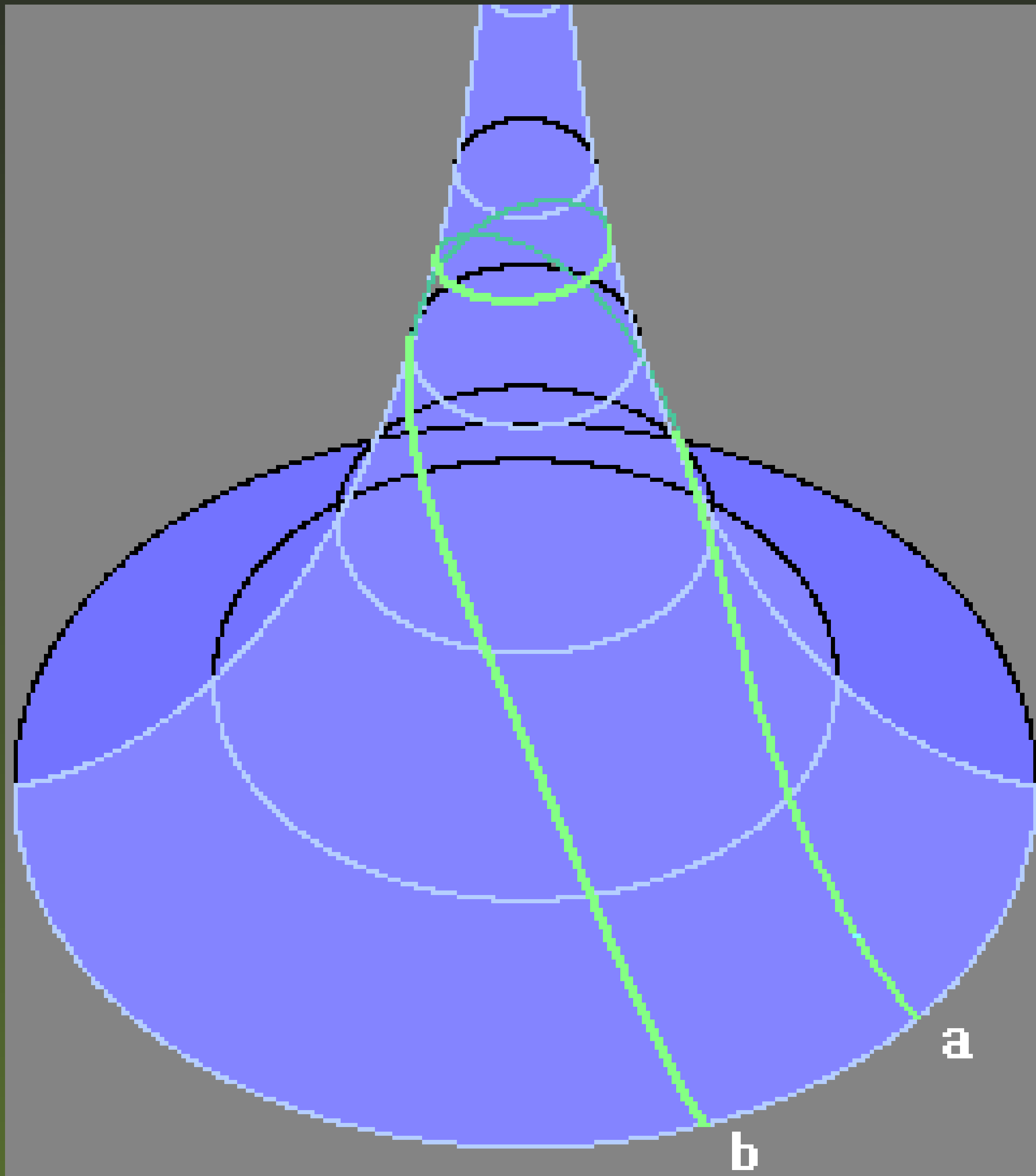
Pseudoesfera. **F. Minding** 1840



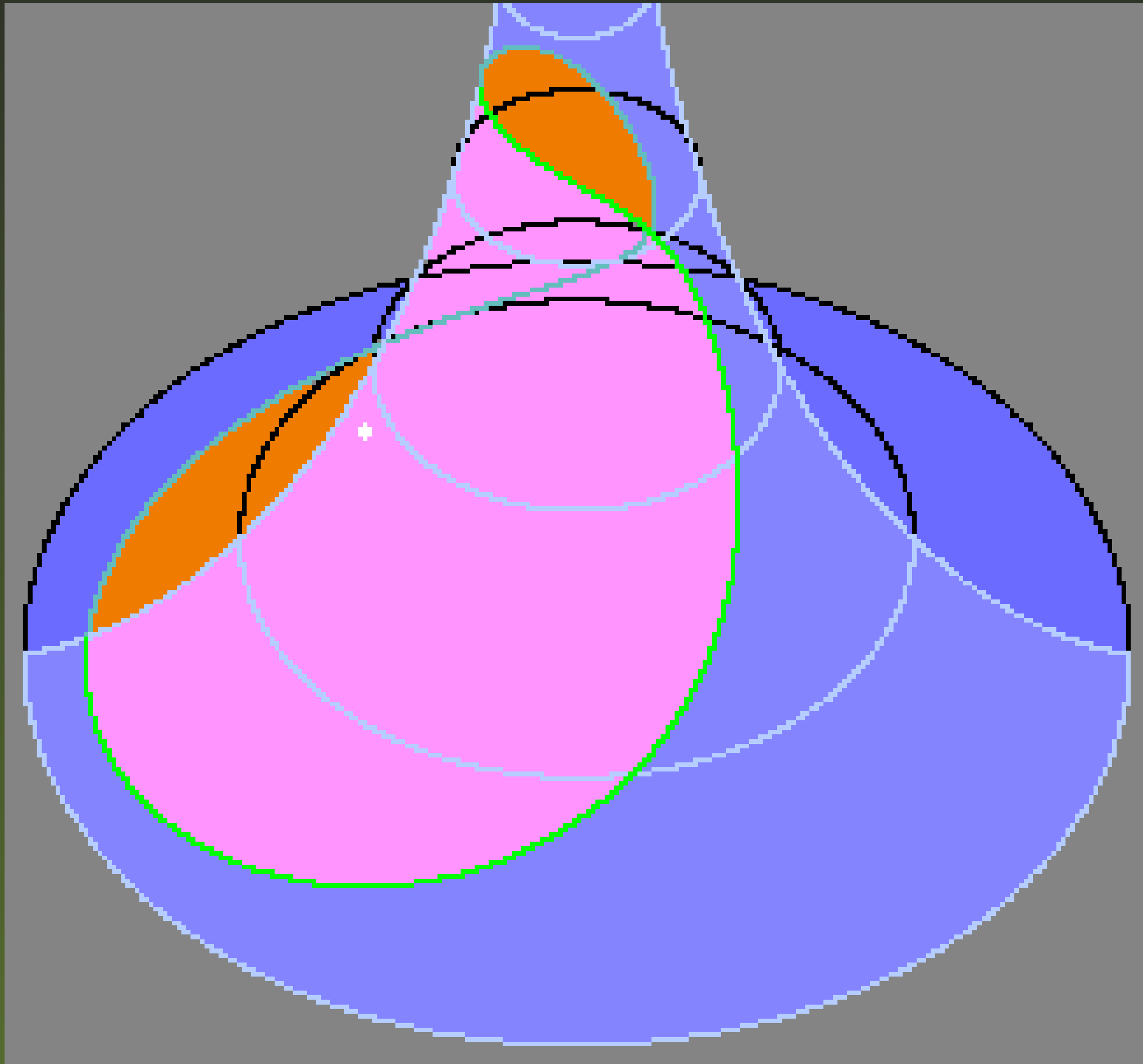
Pseudoesfera



Pseudoesfera



Pseudoesfera



Pseudoesfera

Marosvásárhely

Consistència de la geometria hiperbòlica

Disc de Poincaré

Disc de Poincaré

- La distància entre els punts $(0,0)$ i (x,y) està donada per

$$d = \ln \frac{1+r}{1-r}$$

- $(r^2 = x^2 + y^2)$

Disc de Poincaré