Santaló Selected Works

Springer-Verlag, 2009

A. M. Naveira, A. Reventós

Guió

1. Breu biografia de Santaló
2. Presentació del volum Santaló Selected Works

Guió

1. Breu biografia de Santaló
2. Presentació del volum Santaló Selected Works

Dos tastets de GI *a la Santaló*

3. Geometria Integral Euclidiana
4. Geometria Integral Afí

L. A. Santaló

Santaló

- Girona 1911 – Buenos Aires 2001
- Madrid 1927-1934
- Hamburg 1934-1936 (Tesi)

W. Blaschke

L. A. Santaló

- Cartagena 1936-1939.
- Argelers. París. Élie Cartan.
- Argentina 12-10-1939.
- Instituto de Matemática a Rosario. *Mathematicae Notae*. Beppo Levi.
- Es casa amb Hilda Rossi el 1945 i tenen tres filles, Maria Inés (Tessi), Alicia i Claudia.
- Chicago i Princeton 1948-1949.
- Dirigeix 12 Tesis Doctorals.

Rosario

Allí, el andar lento y sin pausa de las aguas del Paraná fue un bálsamo para mi cuerpo cansado de luchas. (L. A. Santaló, Acadèmic Acad. Nac. Educació, 1997.)

Premis a Espanya

- Honoris Causa per 3 Universitats: UPC 1977. UAB 1986. Sevilla 1990.
- Príncep d'Astúries 1983.
- Medalla Narcís Monturiol de la Generalitat de Catalunya, 1984.
- Medalla de la Universitat de València, 1993.
- Creu de Sant Jordi de la Generalitat de Catalunya, 1994.
- Encomienda d'Alfons X (El Savi) 1996.

Premis a Argentina

- Honoris Causa per 7 Universitats.
- Premi Nacional de Cultura 1954.
- Premi de la Societat Científica Argentina 1959.
- Premi de la Fundació Severo Vaccaro 1977.
- Acadèmic de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires 1985
- Premi ”Consagración Nacional” del Ministeri de Cultura, 1992.

Recança

Una esperança desfeta,
una recança infinita.
I una pàtria tan petita
que la somio completa.

Santaló Selected Works

Relació amb Santaló

- Trobada de Naveira amb Santaló el 1967 i 1978.
- Diverses visites de Santaló a Espanya (Madrid, Santiago, Barcelona, Valencia, Sevilla ...)
- Primera conferència mundial de Matemàtiques al servei de l'home, Barcelona 1977.
- First International Symposium on Statistics, UPC 1983.
- Curs de Santaló a la Universitat de Barcelona, invitat pel CRM, que es pot considerar com la inauguració d'aquest centre, 1984.
- Curs de Santaló a la càtedra Ferrater Mora de la Universitat de Girona, 1992.

Relació amb Santaló

- Viatge de Naveira a Buenos Aires el 1997.
- Relació de Santaló amb matemàtics espanyols: Pi Calleja, Vidal-Abascal, García-Rodeja, Sancho-San Román, Trillas, Alsina, Reventós, Gual-Arnau, Cruz-Orive, de Guzman, Naveira...
- Importància de l'obra de Santaló: investigació, didàctica i divulgació.

Inici del projecte. 2006

- Projecte científic per a un any sabàtic (Naveira).
- Petició de permís a la família Santaló.
- Entrevista amb Catriona Byrne, Directora Editorial per a Matemàtiques de Springer, a Madrid, ICM 2006.

Aprovació del projecte. 2007

- Entrevista amb C. Byrne al CRM, abril de 2007.
- Springer envia el projecte a diversos referees i s'aprova el juliol de 2007.

Desenvolupament del projecte. 2008

- Viatge de Naveira a Argentina. Últim trimestre de 2007. Entrevistes amb la familia Santaló, deixebles, companys, recerca bibliogràfica, transport de separates, etc.
- Estada de Naveira al CRM, Febrer-Maig 2008.
- Entrega del material per a la publicació a Heidelberg, octubre de 2008.

Finalització del projecte. 2009

- Presentació de SSW al Congrés de la RSME a Oviedo, Febrer 2009. Justament on Santaló va rebre el Premi Príncep d'Astúries de I. C. T. 1983.
- Aparició de SSW: 19 de març de 2009.
- Presentació a la Trobada de la SCM, juny 2009.

Contingut de SSW

- Introducció (Simon K. Donaldson)
- Curta Biografia.
- Presentació de la seva obra científica.
- Fotos.
- Publicacions (316) b-r-g-e.

Contingut de SSW

- Articles seleccionats (60/200) (r).
- Repercussió de l’obra de Santaló.
- Ressenyes de llibres.
- Correspondència Santaló—Vidal-Abascal.
- Anàlisi de la puntuació dels seus treballs.

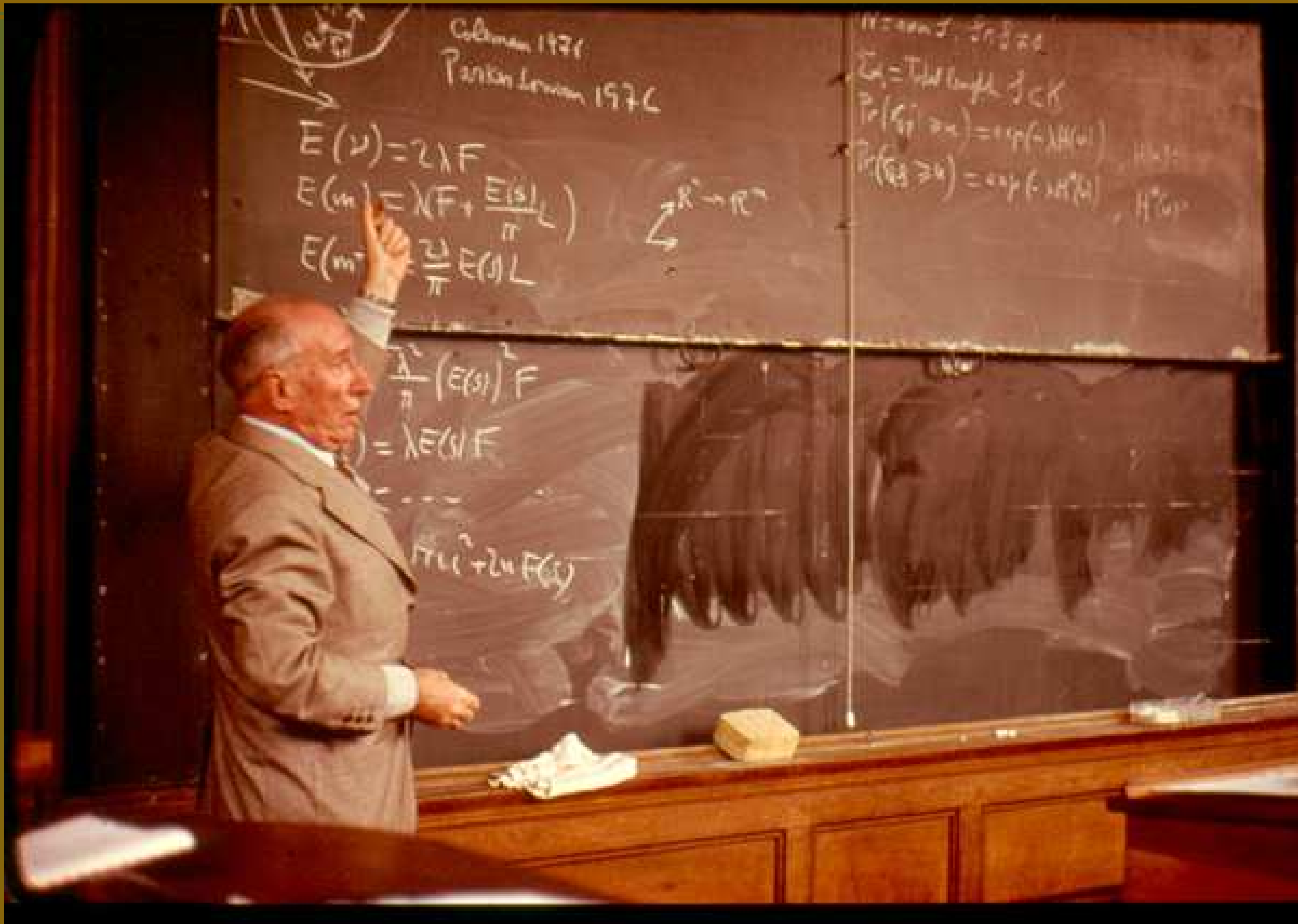
1941 Rey Pastor

1942 Birkhoff

Despatx

1967 Vidal-Abascal

1977 Buffon

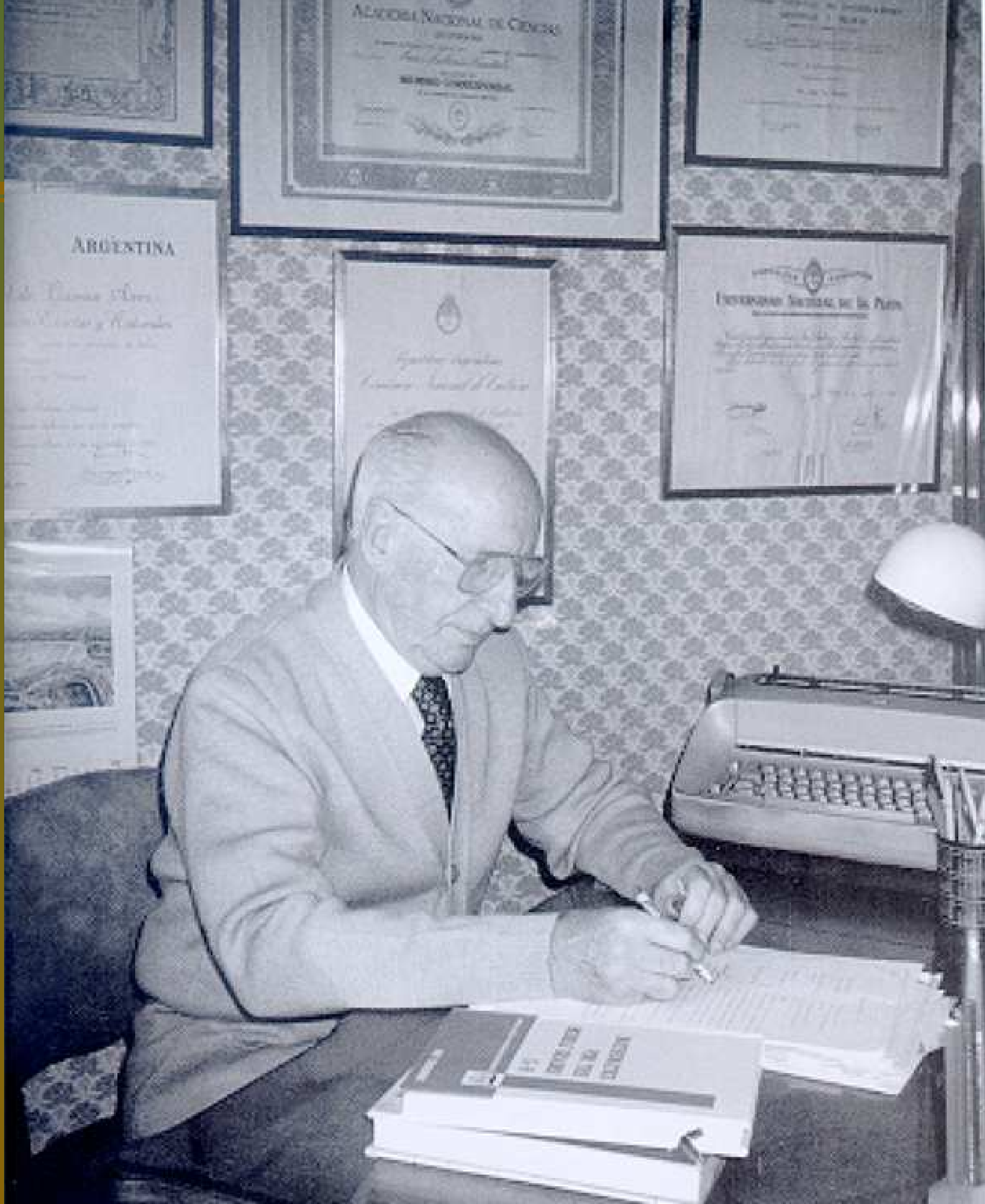


1977 Buffon

Cruz-Orive

1983 Premi Príncep d’Astúries

1988



Conferencia

1997 Naveira

Hilda Rossi

Publicacions

1970

[70.1.r]* Mean values and curvatures, *Izv. Akad. Nauk. Armejan*, SSR, Ser. Math. **5** (1970), 286–295. Reprinted in the book *Stochastic Geometry*, (tribute memory Rollo Davidson), Ed. Harding-Kendall, Wiley, London (1974), 165-174.

[70.2.r] Probabilities on convex bodies and cylinders, (Spanish); *Rev. Un. Mat. Argentina* **25** (1970), 95–104. (1971)

[70.3.g] Probability and statistical inference, (Spanish); *Washington, Monografías de la OEA*, 1970. 132 pp.

[70.4.e] Mathematics in the Faculty of Exact and Natural Sciences of the University of Buenos Aires in the period 1865-1930, (Spanish); *Boletín Academia de Ciencias*, Córdoba, Buenos

Articles seleccionats

- Geometria Diferencial
- Geometria Integral
- Geometria Convexa
- Geometria Afí
- Estadística i Estereologia

Articles seleccionats

- Geometria Diferencial E. Teufel
- Geometria Integral
- Geometria Convexa
- Geometria Afí
- Estadística i Estereologia

Articles seleccionats

- Geometria Diferencial E. Teufel
- Geometria Integral R. Langevin
- Geometria Convexa
- Geometria Afí
- Estadística i Estereologia

Articles seleccionats

- Geometria Diferencial E. Teufel
- Geometria Integral R. Langevin
- Geometria Convexa R. Schneider
- Geometria Afí
- Estadística i Estereologia

Articles seleccionats

- Geometria Diferencial E. Teufel
- Geometria Integral R. Langevin
- Geometria Convexa R. Schneider
- Geometria Afí K. Leichtweiss
- Estadística i Estereologia

Articles seleccionats

- Geometria Diferencial E. Teufel
- Geometria Integral R. Langevin
- Geometria Convexa R. Schneider
- Geometria Afí K. Leichtweiss
- Estadística i Estereologia L. M. Cruz-Orive

Repercussió

Notes de: Montes, Simó, Palmer, Porti, Croke, Segura-Gómis, Naveira, Solanes, Gallego, Miquel, Rataj, Fava (coautor amb Santaló), Kiderlen

Ressenyes de llibres

- Fetes per Santaló: *Blumenthal, Coxeter, Stoka, Roşca, do Carmo, Solomon, Toranzos-Nanclares, Bonnesen-Fenchel,* etc.

- De llibres de Santaló: *Integral geometry in spaces of constant curvature; Introduction to Integral Geometry; Non-Euclidean geometries; Integral Geometry and Geometric Probability; The History of Aeronautics*

Traducció

JACQUES HADAMARD

PSICOLOGÍA DE LA INVENCIÓN EN EL CAMPO MATEMÁTICO

Traducción por L. A. Santaló Sors

Qüestionari

22. Considera útil per al matemàtic l'observació d'algunes regles particulars d'higiene: regim, horaris dels àpats, temps de descans, etc?
23. Quantes hores considera necessari dormir diàriament?
24. El treball diari del matemàtic ha de ser interromput per altres ocupacions o exercicis físics adequats a l'edat i força de cadascun?

Relació amb Vidal-Abascal

Lunes 20 enero 1936

D. Enrique Vidal

Querido amigo:

Contestando a la tuya tengo que decirte:

I. De geometría superior me ha dicho Pineda que no tiene todavía hecho el programa, pero que como en Secretaría también se lo han pedido piensa hacerlo. El libro que siguen es el de Blaschke "Differentialgeometrie" tomo I. Está en alemán.

II. De geografía matemática todavía no han empezado el curso. Les dijo Honorato que

Puntuació

La lista de trabajos <u>empieza</u>
en hoja 6.

<u>Se ha indicado un índice de 1 a 10</u>
<u>como valor estimado de los mismos.</u>

~~[illegible]~~

Los trabajos de divulgación y didáctica de
la matemática habría que actualizarlos,
pero no creo interesen. En todo caso
se completaría la lista hasta el presente.

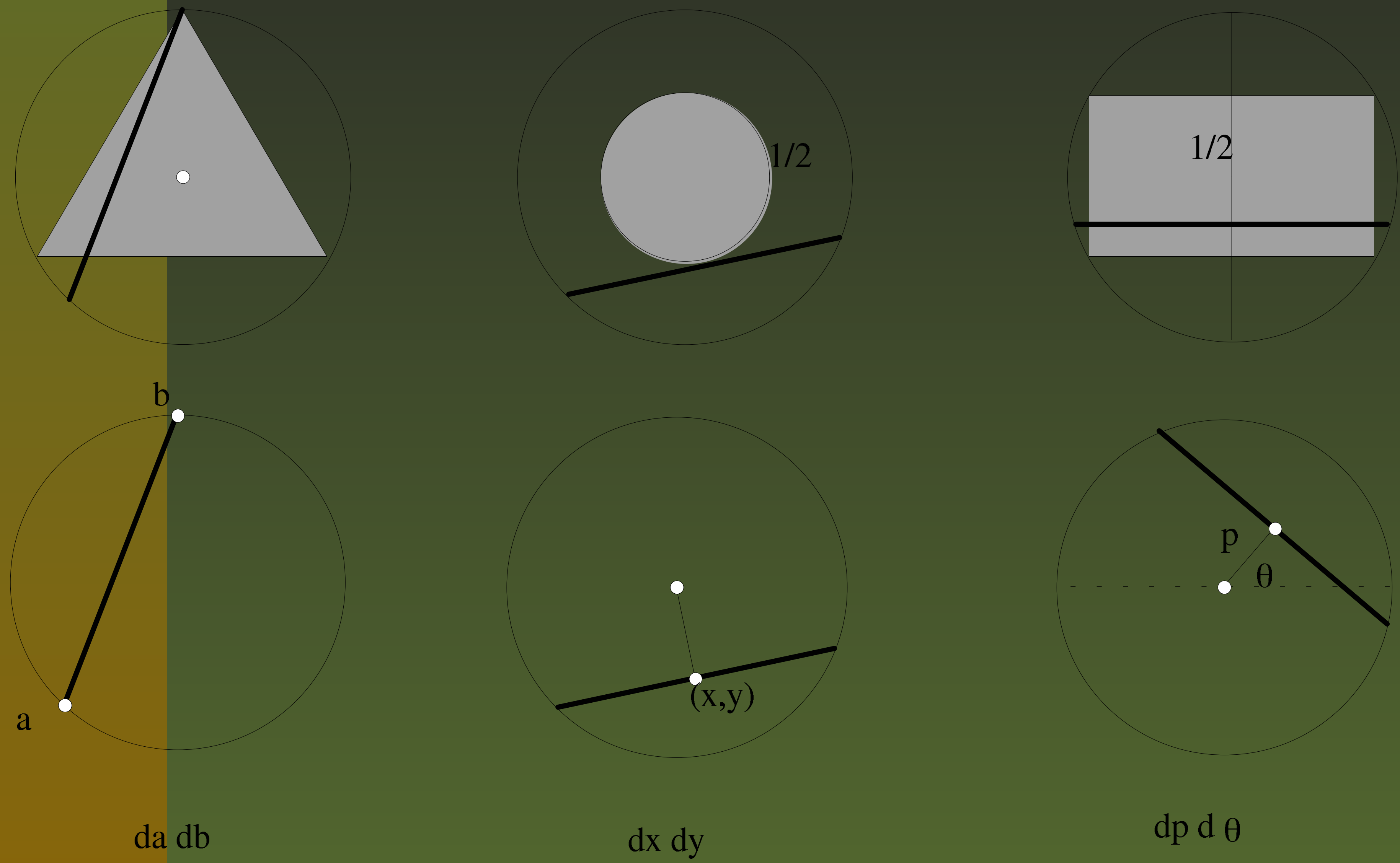
Alcántara

Agraïments

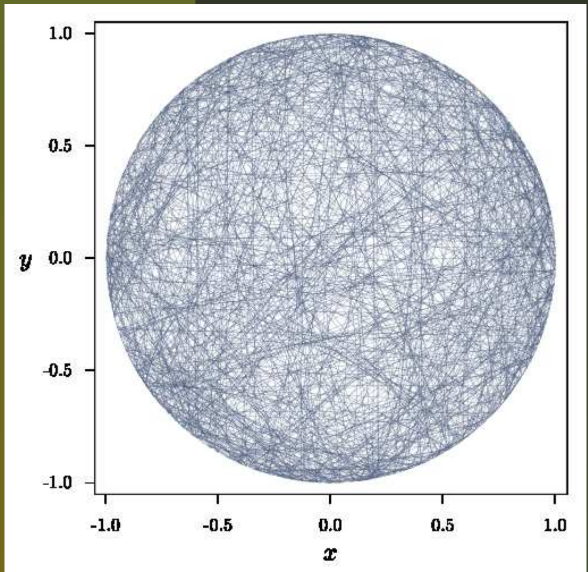
- Universitats de Valencia, Autònoma de Barcelona.
- Institut d'Estudis Catalans.
- Societat Catalana de Matemàtiques.
- Centre de Recerca Matemàtica.
- Càtedra Lluís Santaló d'Aplicacions de la Matemàtica, Universitat de Girona.
- Departament de Matemàtiques de la Universidad de Buenos Aires.
- Família Ares Rodríguez, Buenos Aires.
- Jeff Palmer.

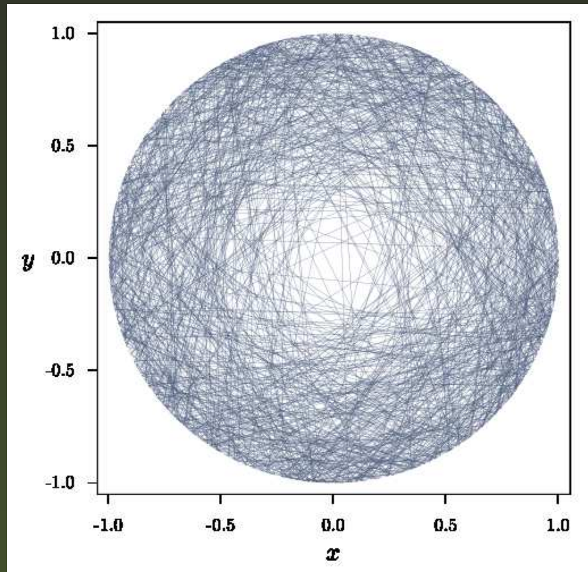
Geometria Integral Euclidiana

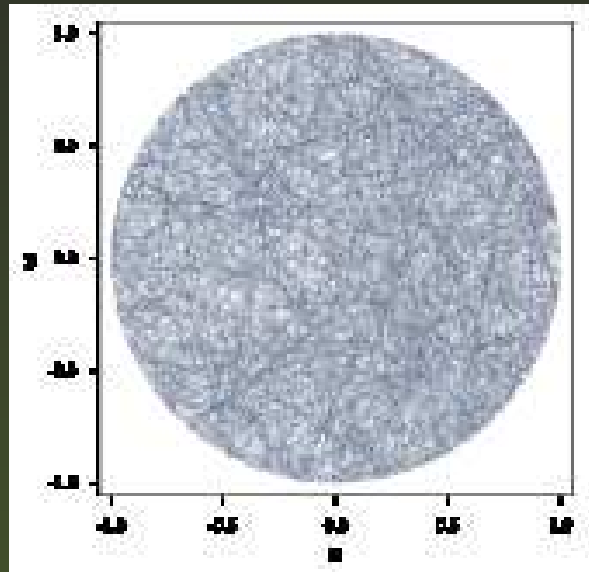
Els inicis de la GI



Els inicis de la GI







Extrem. $1/3$ Punt mitjà. $1/4$ Radi. $1/2$

Poincaré

- **Calcul des Probabilités**, París 1912

§1*“Comment oser parler des lois du hasard? Le hasard n’est-il pas l’antithèse de tout loi?” Ainsí s’exprime Bertrand.*

§63 *La probabilité pour que le point* (x, y) *soit a l’intérieur d’une aire donnée est*

$$\int\int \varphi(x, y) dx\, dy$$

mais nous ne connaissons pas $\varphi(x, y)$.

Probabilitats geomètriques

Donats a, A, p independents i a l'atzar sobre $[0, K], [0, \pi], [0, K]$ la probabilitat de que hi hagi un triangle d'angle A, costat oposat a i radi del cercle inscrit p és

$$\frac{\log 2}{2\pi}$$

- L. A. Santaló, *La probabilidad en las contrucciones geométricas*, An. Soc. Ci. Argentina **152**, (1951) 203-229.

GI al pla

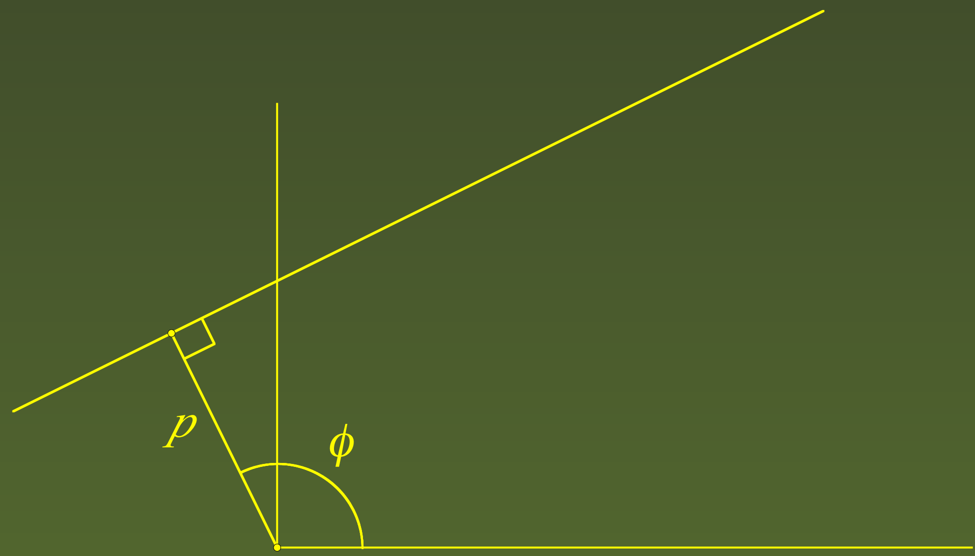
Mesura de rectes

Densitat de rectes

- $dG = dp\, d\phi$

Mesura de rectes

- $m(G \cap C \neq \emptyset) = \int_{G\cap C\neq\emptyset} dG$



Fórmula de Crofton

- Teorema: La mesura de rectes que tallen una corba, contades amb multiplicitat, es igual al doble de la seva longitud.

$$\int_{G\cap C\neq\emptyset} n \, dG = 2L$$

Fórmula de Crofton

- Teorema: La mesura de rectes que tallen una corba, contades amb multiplicitat, es igual al doble de la seva longitud.

$$\int_{G\cap C\neq\emptyset} n\, dG = 2L$$

- Teorema: La mesura de rectes que tallen un convex és igual a la longitud de la seva vora.

$$\int_{G\cap K\neq\emptyset} 2\, dG = 2L(\partial K)$$

Fórmula de Crofton

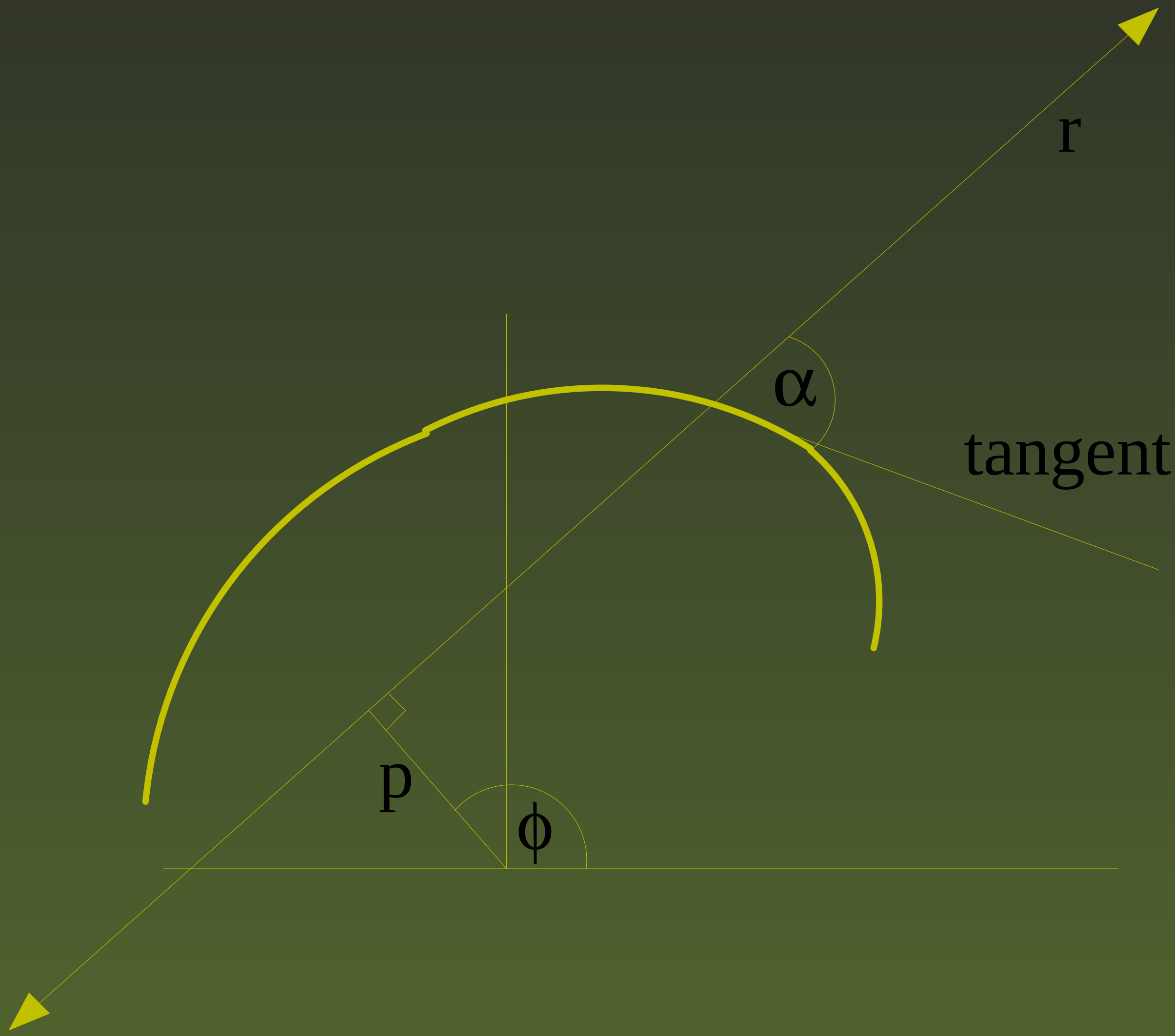
- Teorema: La mesura de rectes que tallen una corba, contades amb multiplicitat, es igual al doble de la seva longitud.

$$\int_{G\cap C\neq\emptyset} n \, dG = 2L$$

- Teorema: La mesura de rectes que tallen un convex és igual a la longitud de la seva vora.

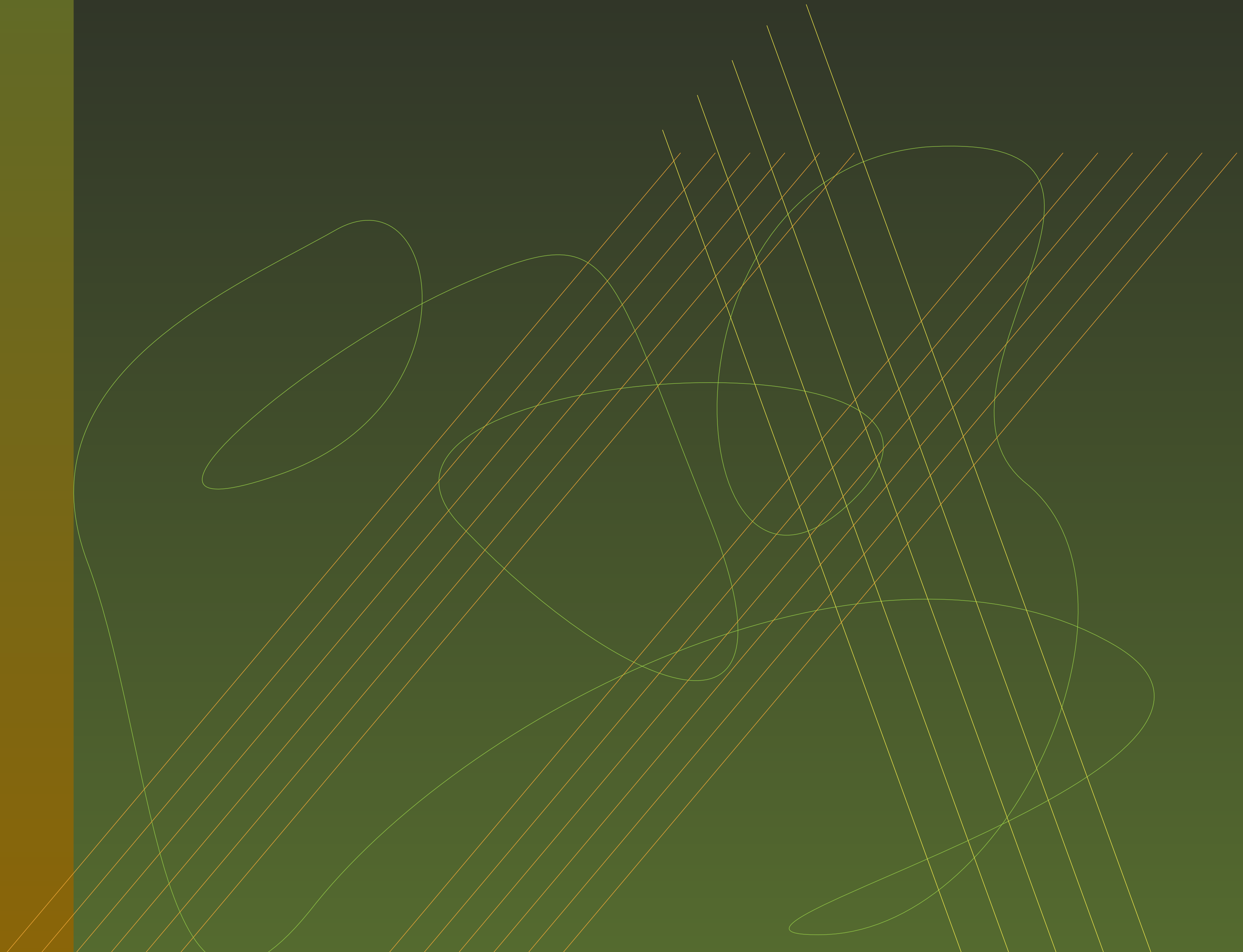
$$\int_{G\cap K\neq\emptyset} dG = L(\partial K)$$

Demostració



$$dp\, d\phi = \sin\alpha\, d\alpha\, ds. \qquad 0 < \alpha \le \pi$$

Geometria Integral Euclidiana

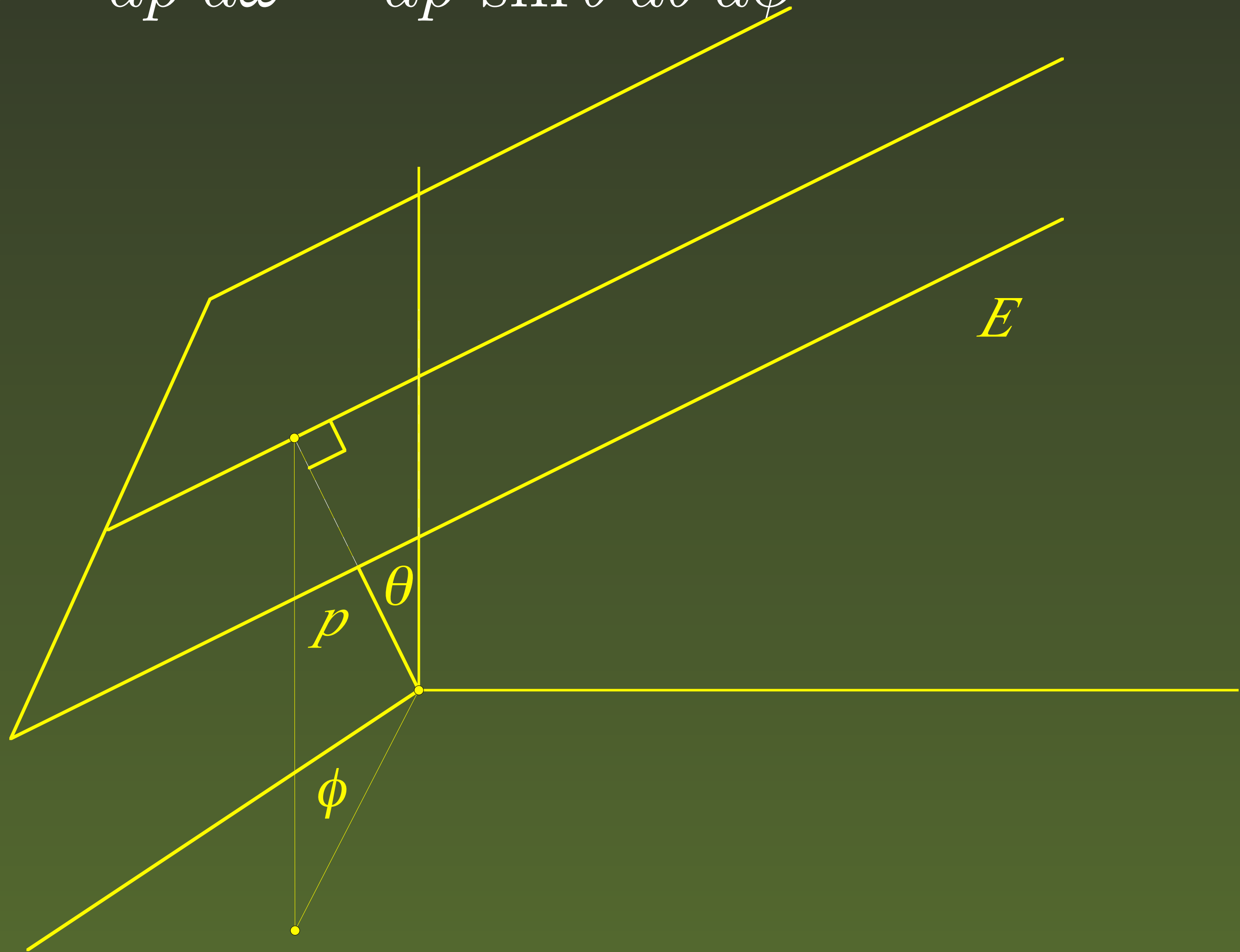


GI a l'espai

Mesura de plans

Densitat de plans

- $dE = dp\, d\omega = dp \sin\theta\, d\theta\, d\phi$



Mesura de plans

Teorema: La mesura de plans que tallen un convex K és igual a l'integral de la curvatura mitjana de la vora.

$$\int_{E\cap K\neq\emptyset} dE = \mu_1$$

on

$$\mu_1 = \int_{\partial K} \frac{k_1 + k_2}{2} dA,$$

Exemple: $\partial K = S^2(R)$

$$\int_{E \cap K \neq \emptyset} dE = \int_{S^2} p \, d\omega = 4\pi R$$

$$\mu_1 = \frac{1}{R} \int_{\partial K} dA = 4\pi R$$

Mesura de plans

La demostració directa de $\int dE = \mu_1$ passa, no per integrar dE, sinó $k\, dE$. I usar tres fets:
(1) La integral de la curvatura d'un corba plana és 2π,
(2) $k = k_n / \cos(N, n)$
(3) $H = (k_1 + k_2)/2 = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} k_n(\alpha) d\alpha$.

Mesura de plans

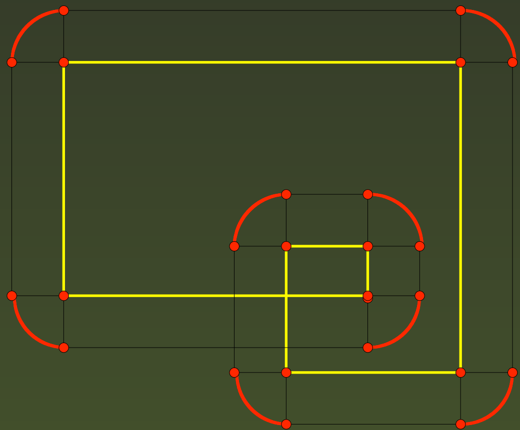
La demostració directa de $\int dE = \mu_1$ passa, no per integrar dE, sinó $k\, dE$. I usar tres fets:
(1) La integral de la curvatura d'un corba plana és 2π,
(2) $k = k_n / \cos(N, n)$
(3) $H = (k_1 + k_2)/2 = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} k_n(\alpha) d\alpha$.

En donarem una demostració indirecta usant cossos paral·lels.

- L. A. Santaló, J. Rey Pastor, *Geometría Integral*, Espasa-Calpe, Buenos Aires (1951), pp. 284.

Cossos paral·lels

Cossos paral·lels al pla



$$L(r) = L + 2\pi r I \qquad A(r) = A + Pr + \pi r^2$$

Mesures de Steiner (1840)

$$\begin{aligned}
\mu_3(K) &= \text{Volum}\,(K) \\
\mu_2(K) &= \text{Àrea}\,\partial(K) \\
\mu_1(K) &= \int_{\partial(K)} H\,dA, \qquad H = (k_1 + k_2)/2 \\
\mu_0(K) &= \int_{\partial(K)} K\,dA = 2\pi\chi(\partial K), \qquad K = k_1 k_2
\end{aligned}$$

Mesures de Steiner (1840)

$$
\begin{aligned}
\mu_3(K) &= \text{Volum}\,(K)\\
\mu_2(K) &= \text{Àrea}\,\partial(K)\\
\mu_1(K) &= \int_{\partial(K)} H\,dA, \qquad H = (k_1+k_2)/2\\
\mu_0(K) &= \int_{\partial(K)} K\,dA = 2\pi\chi(\partial K), \qquad K = k_1 k_2
\end{aligned}
$$

Quina és la longitud d'una patata?

Fórmula de Steiner

- La superfície ∂K es mou una distància t en la direcció de la normal. Denotem A_t l'àrea de la nova superfície.

Fórmula de Steiner

$$\boxed{A_t = \mu_0 t^2 + 2\mu_1 t + \mu_2}$$

$\mu_0 =$ integral de la curvatura de Gauss de ∂K.

$\mu_1 =$ integral de la curvatura mitjana de ∂K.

$\mu_2 =$ àrea de la superfície inicial ∂K.

Fórmula de Steiner

$$\boxed{A_t = \mu_0 t^2 + 2\mu_1 t + \mu_2}$$

$\mu_0 =$ integral de la curvatura de Gauss de ∂K.

$\mu_1 =$ integral de la curvatura mitjana de ∂K.

$\mu_2 =$ àrea de la superfície inicial ∂K.

- Un polinomi!

Fórmula de Steiner

$$\boxed{A_t = \mu_0 t^2 + 2\mu_1 t + \mu_2}$$

$\mu_0 =$ integral de la curvatura de Gauss de ∂K.

$\mu_1 =$ integral de la curvatura mitjana de ∂K.

$\mu_2 =$ àrea de la superfície inicial ∂K.

- Un polinomi!
- $4\pi(R+t)^2 = 4\pi t^2 + 8\pi R\, t + 4\pi R^2$

Fórmula de Steiner

Demostració: Els radis de curvatura $R_i = \frac{1}{k_i}$ *s'inflen* t.

$$K = \frac{d\omega}{dA}, \qquad K = \frac{1}{R_1 R_2} = \text{Curvatura de Gauss}$$

$$dA = R_1\, R_2\, d\omega$$

$$dA_t = (R_1 + t)\,(R_2 + t)\, K\, dA$$

$$A_t = \mu_0 t^2 + 2\mu_1 t + \mu_2$$

Comentari: Superfícies minimals

Velocitat de variació de l'àrea quan inflem:

$$\left.\frac{dA_t}{dt}\right|_{t=0} = 2\mu_1$$

Comentari: Superfícies minimals

Velocitat de variació de l'àrea quan inflem:

$$\left.\frac{dA_t}{dt}\right|_{t=0} = 2\mu_1$$

Les superfícies de curvatura mitjana zero són minimals respecte l'àrea.

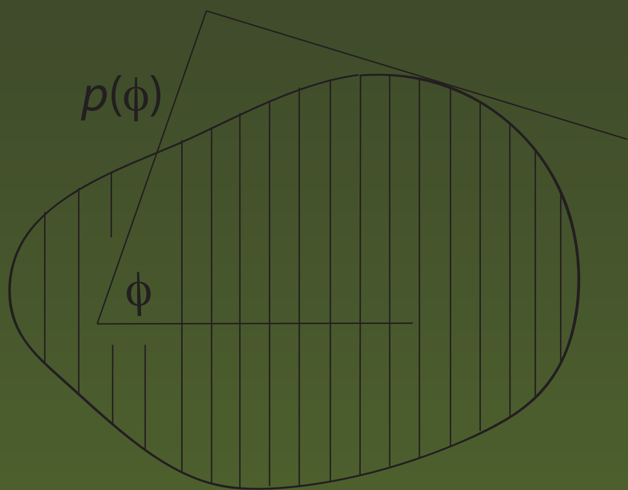
Tornem a la mesura de plans

Mesura de plans

Per provar que

$$\int dE = \mu_1$$

calcularem el volum del paral·lel usant Steiner i usant la funció suport, i igualarem el resultats.



$$\int dE = \int dp\, d\omega = \int_{\partial K} p\, d\omega$$

Volum del cos paral·lel usant Steiner

$$\boxed{V_t = \mu_0 t^3/3 + \mu_1 t^2 + \mu_2 t + \mu_3}$$

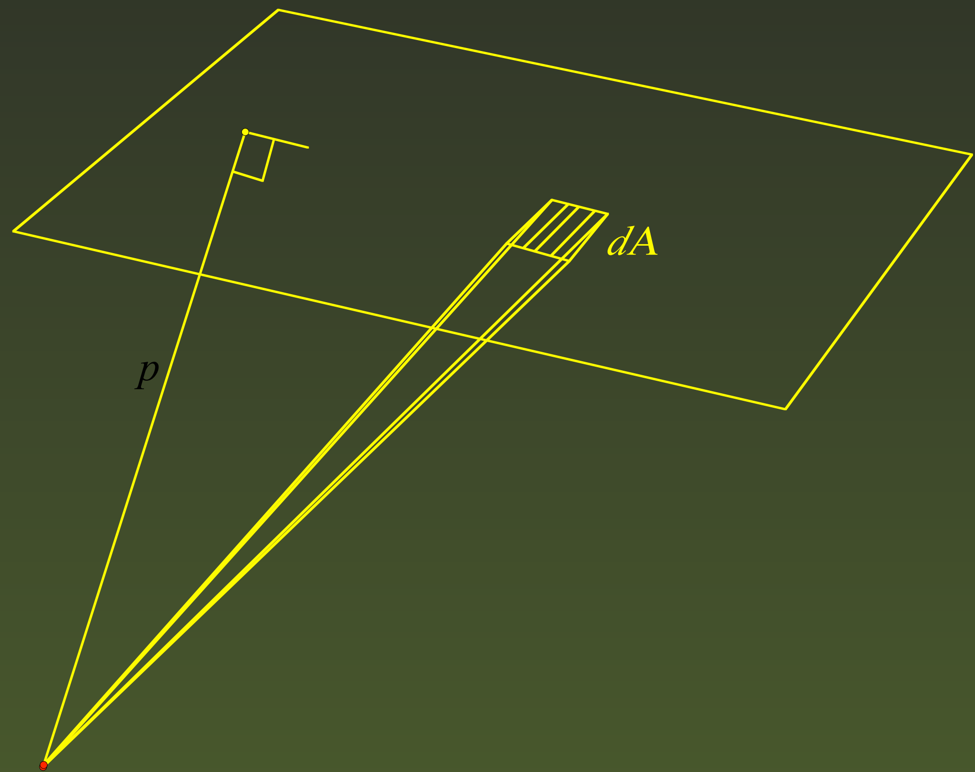
$\mu_0 =$ integral de la curvatura de Gauss de ∂K.

$\mu_1 =$ integral de la curvatura mitjana de ∂K.

$\mu_2 =$ àrea de la superfície inicial ∂K.

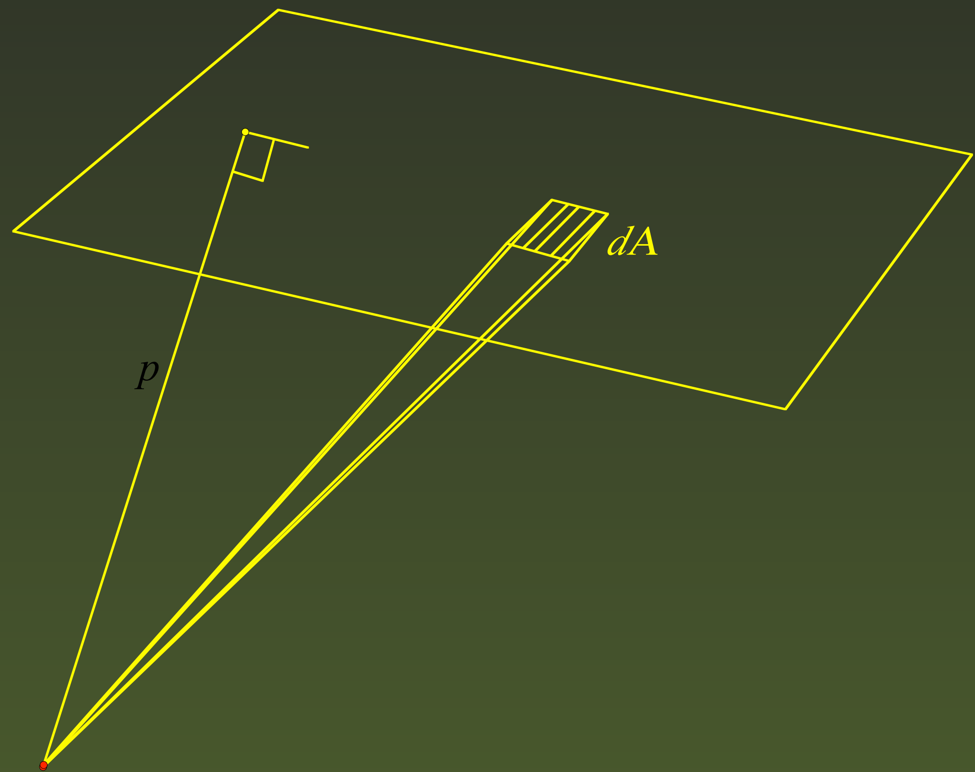
$\mu_3 =$ volum del convex K.

Volum d'un cos usant funció suport



$$V = \frac{1}{3}\int_{\partial K} p\, dA = \frac{1}{3}\int_{S^2} p\, R_1 R_2 d\omega$$

Volum del cos paral·lel



$$V_t = \frac{1}{3}\int_{S^2} (p+t)\,(R_1+t)(R_2+t)d\omega$$

Mesura de plans

$$
\begin{aligned}
\text{(Steiner)}V_t &= \mu_3 + \mu_2 t + \mu_1 t^2 + \mu_0 t^3/3 \\
\text{(Càlcul directe)}V_t &= \frac{1}{3}\int_{S^2} (p+t)\,(R_1+t)(R_2+t)d\omega
\end{aligned}
$$

Mesura de plans

$$\begin{aligned}
\text{(Steiner)}V_t &= \mu_3 + \mu_2 t + \mu_1 t^2 + \mu_0 t^3/3 \\
\text{(Càlcul directe)}V_t &= \frac{1}{3}\int_{S^2} (p+t)\,(R_1+t)(R_2+t)d\omega
\end{aligned}$$

Igualant els coeficients de t^2:

$$\mu_1 = \frac{1}{3}\int_{S^2} p\,d\omega + \frac{2}{3}\mu_1$$

$$\mu_1 = \int_{S^2} p\,d\omega = \int dE = m(E; E \cap K \neq \emptyset).$$

Mesura de r-plans a E^{n+1}

- L. A. Santaló, *Total curvatures of compact manifolds immersed in Euclidean space*, Symposia Math. Inst. Naz. di Alta Matematica **14** (1974), 363-390.

$$\int_{X_c^n \cap E^r \neq \emptyset} dE^r = \frac{O_{n-1} \dots O_{n-r+1}}{O_1 \dots O_{r-1}} \frac{O_{n-r+2}}{O_1} M_{r-1}(X_c^n)$$

Mesura de r-plans a E^{n+1}

- L. A. Santaló, *Total curvatures of compact manifolds immersed in Euclidean space*, Symposia Math. Inst. Naz. di Alta Matematica **14** (1974), 363-390.

$$\int_{X_c^n \cap E^r \neq \emptyset} dE^r = \frac{O_{n-1} \dots O_{n-r+1}}{O_1 \dots O_{r-1}} \frac{O_{n-r+2}}{O_1} M_{r-1}(X_c^n)$$

$$O_i = \frac{2\pi^{(i+2)/2}}{\Gamma((i+1)/2)}.$$

$$M_r(X^n) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \int_{X^n} \{\frac{1}{R_{i_1}} \frac{1}{R_{i_2}} \dots \frac{1}{R_{i_r}}\} d\sigma_n(x)$$

I si la vora no és diferenciable?

Quina és la mesura de plans que tallen un cub?

I si la vora no és diferenciable?

Quina és la mesura de plans que tallen un cub?

Quina és la curvatura mitjana total d'un cub?

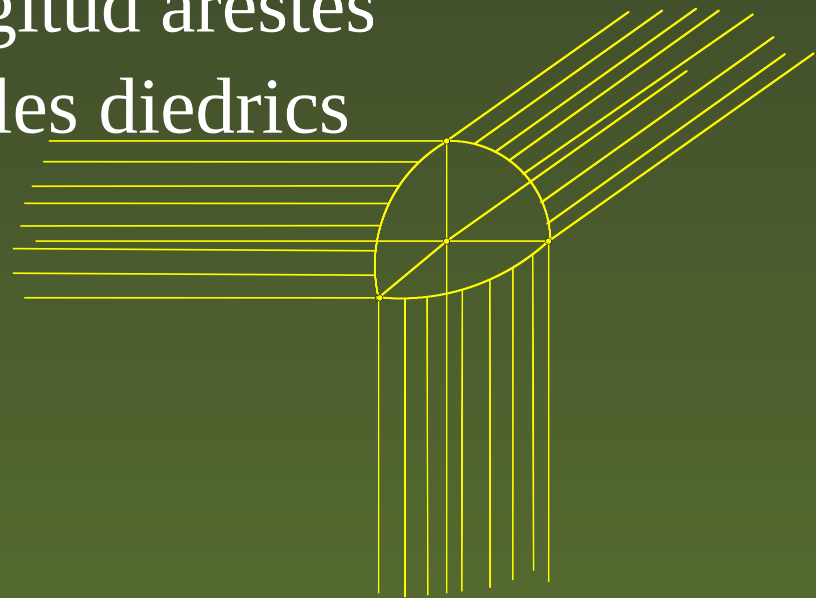
Curvatura mitjana d'un poliedre

$$A_t = A + \text{àrea cilindre sobre arestes} + 4\pi t^2$$

$$\mu_1 = (1/2)\text{coeficient de } t$$

$$\boxed{\mu_1 = \frac{1}{2}\sum_{arestes}(\pi - \alpha_i)a_i}$$

$$\begin{aligned} a_i &= \text{longitud arestes} \\ \alpha_i &= \text{angles diedrics} \end{aligned}$$

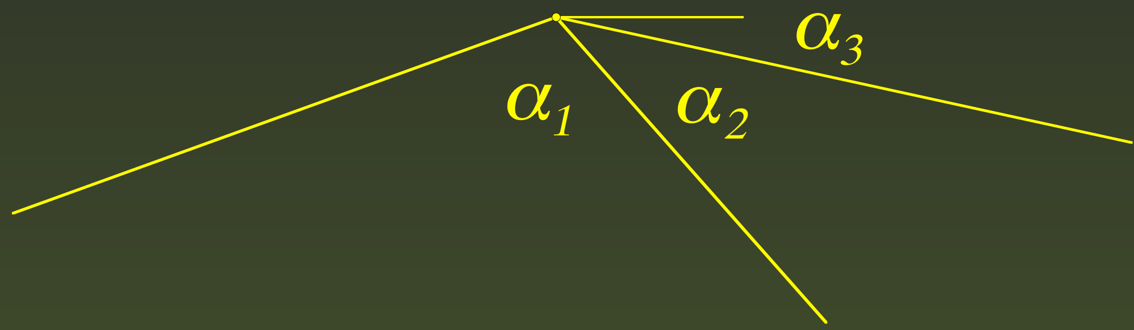


Plans que tallen un cub

$$\int_{E\cap cub\neq\emptyset} dE = \mu_1(cub) = \frac{1}{2}12(\pi - \frac{\pi}{2})\,a = 3\pi a$$

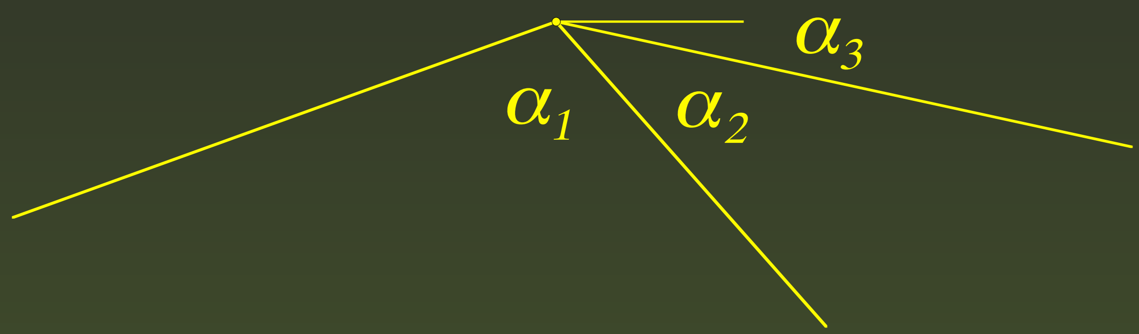
Gauss-Bonnet per a poliedres

Curvatura en el vèrtex



$$K(P) = 2\pi - \sum \alpha_i$$

Curvatura en el vèrtex

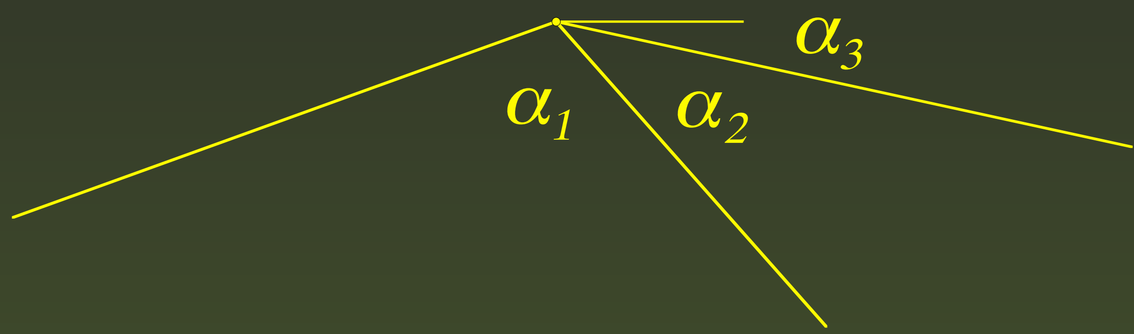


$$K(P) = 2\pi - \sum \alpha_i$$

Curvatura total

$$K = \sum K(P)$$

Curvatura en el vèrtex

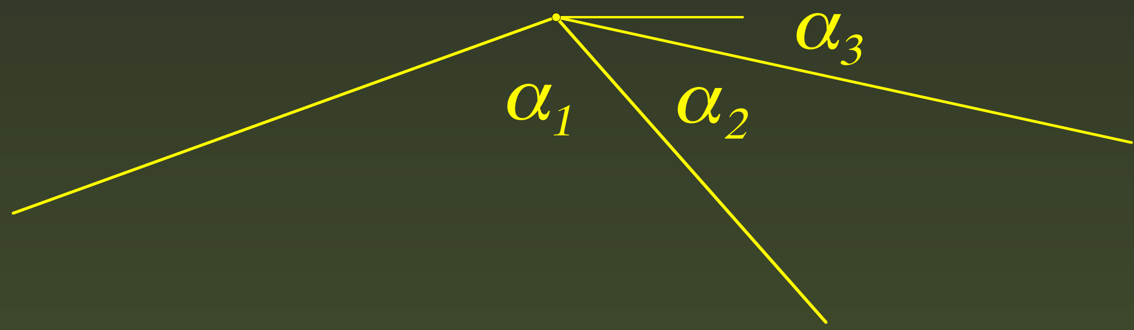


$$K(P) = 2\pi - \sum \alpha_i$$

Poliedre

$$K = \sum_P (2\pi - \sigma_P)$$

Curvatura en el vèrtex

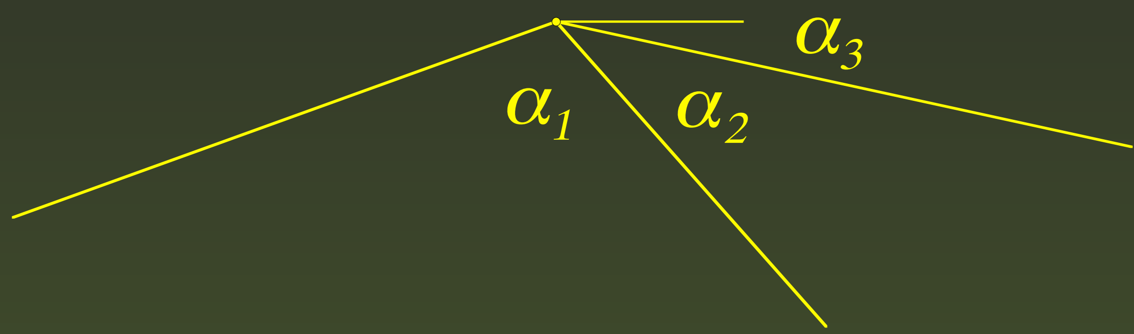


$$K(P) = 2\pi - \sum \alpha_i$$

Poliedre regular

$$K = V(2\pi - \sigma)$$

Curvatura en el vèrtex



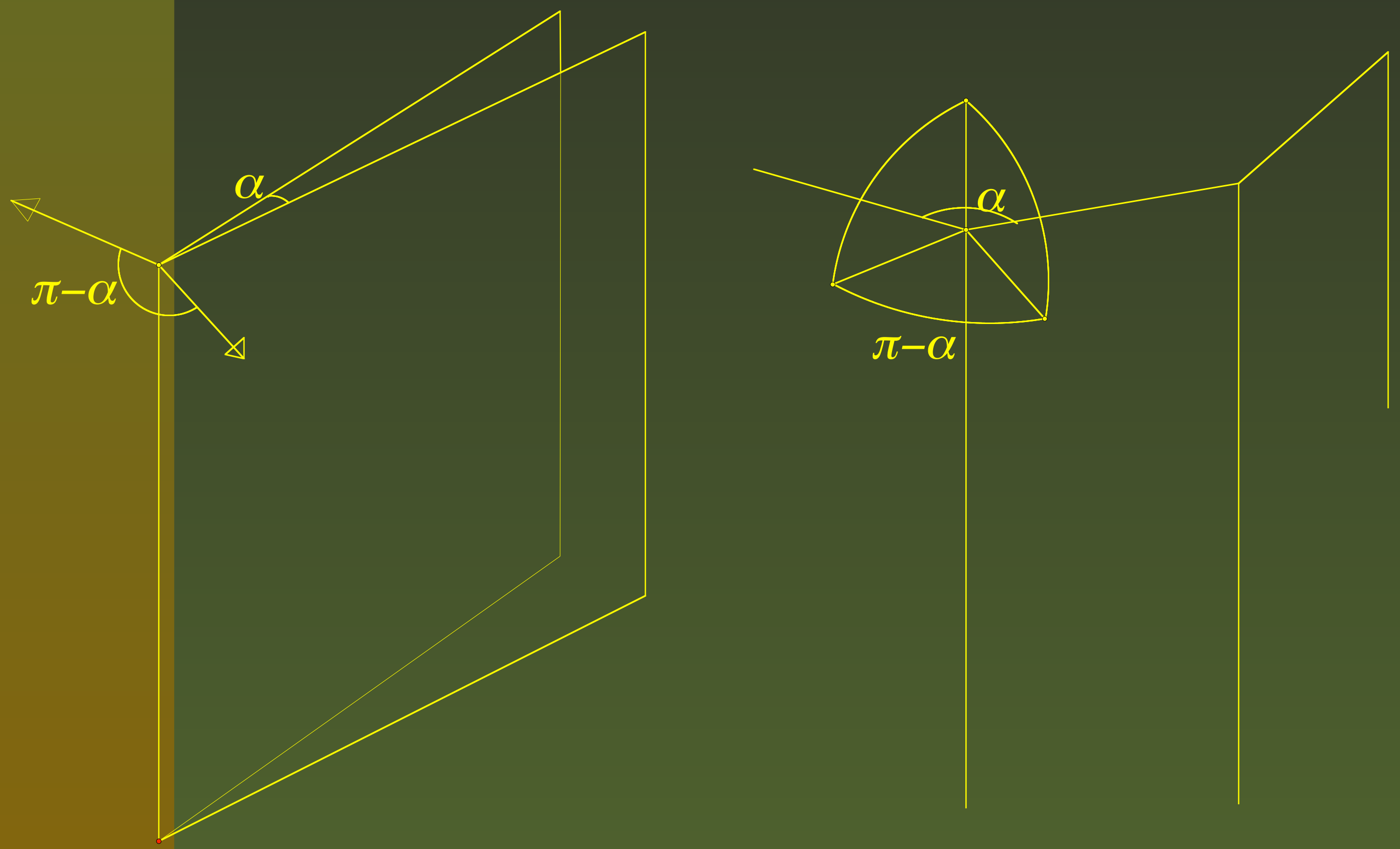
$$K(P) = 2\pi - \sum \alpha_i$$

Gauss-Bonnet

$$\boxed{4\pi = V(2\pi - \sigma)}$$

Gauss-Bonnet. Demostració

Fem el paral·lel a distància 1.



Gauss-Bonnet

Àrea triangle esfèric= Excés

$$\text{Àrea triangle en cada vèrtex} = \sum_{i=1}^{3}(\pi-\alpha_i)-\pi = 2\pi-\sigma_P$$

Gauss-Bonnet

Àrea triangle esfèric= Excés

Àrea triangle en cada vèrtex $= \sum_{i=1}^{3}(\pi - \alpha_i) - \pi = 2\pi - \sigma_P$

Per tant

$$K \ = \ \sum \text{àrees triangles}$$

Gauss-Bonnet

Àrea triangle esfèric= Excés

Àrea triangle en cada vèrtex $= \sum_{i=1}^{3}(\pi - \alpha_i) - \pi = 2\pi - \sigma_P$

Per tant

$$\begin{aligned} K &= \sum \text{àrees triangles} \\ K &= 4\pi \end{aligned}$$

Gauss-Bonnet

Àrea triangle esfèric= Excés

Àrea triangle en cada vèrtex $= \sum_{i=1}^{3} (\pi - \alpha_i) - \pi = 2\pi - \sigma_P$

Per tant

$$\begin{aligned} K &= \sum \text{àrees triangles} \\ K &= 2\pi\chi \end{aligned}$$

Gauss-Bonnet diferenciable

L'apliquem al paral·lel

$$\int K dA = 0 + 0 + \text{àrees triangles vertexs} = 2\pi\chi.$$

Gauss-Bonnet en curvatura constant

- L. A. Santaló, *Sobre la fórmula de Gauss-Bonnet para poliedros en espacios de curvatura constante*, Rev. Un. Mat. Argentina **18** (1962), 79-91.

$$c_{n-1}\alpha_{n-1}+c_{n-3}\alpha_{n-3}L_2+\cdots+c_2\alpha_2L_{n-3}+c_0F=\frac{1}{2}O_n\chi(Q)$$

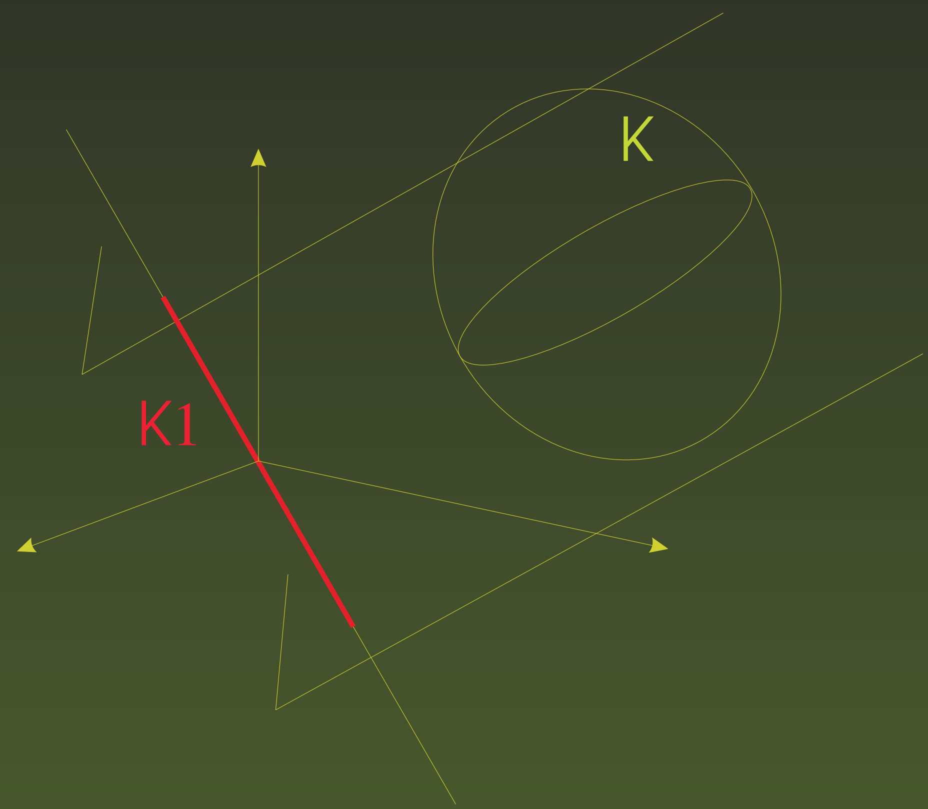
Gauss-Bonnet en curvatura constant

- L. A. Santaló, *Sobre la fórmula de Gauss-Bonnet para poliedros en espacios de curvatura constante*, Rev. Un. Mat. Argentina **18** (1962), 79-91.

$$\alpha_2 + KF = 2\pi\chi(\partial Q)$$

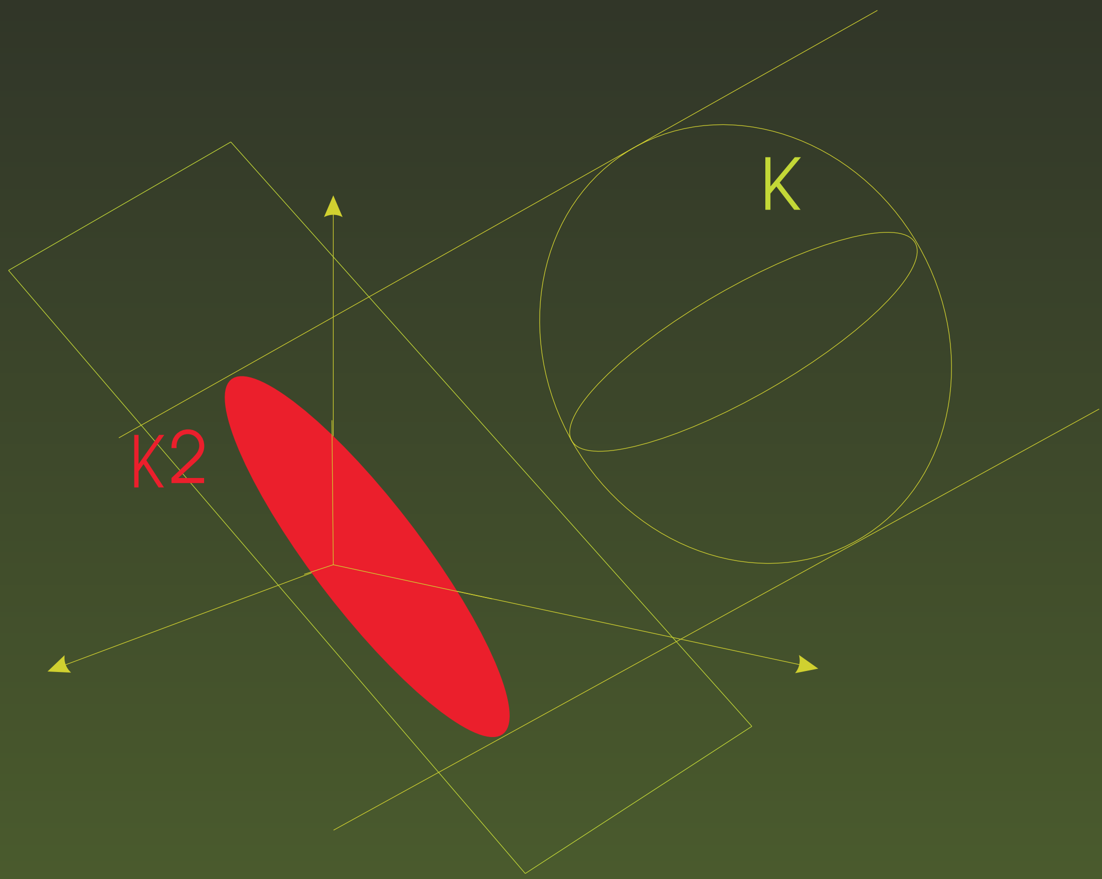
Quermassintegrale

Quermassintegrale



- $W_2 =$ mitjana de les longituds K_1.
- Projecció ortogonal sobre rectes per l'origen.

Quermassintegrale



- W_1 = mitjana de les àrees K_2.
- Projecció ortogonal sobre plans per l'origen.

Quermassintegrale

- $W_1 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}P^2} (\text{àrea projecció sobre } E)\, dE$
- $W_2 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}P^2} (\text{longitud projecció sobre } G)\, dG$

Quermassintegrale

- $W_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}P^2}$ (àrea projecció sobre E)dE
- $W_2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}P^2}$ (longitud projecció sobre G)dG
- És clar que sobre $S^2(R)$, $W_1 = \pi R^2$, $W_2 = 2R$.

  i.e. $W_1 = \frac{1}{4}$Àrea $= \frac{1}{4}\mu_2,\quad W_2 = \frac{1}{2\pi}\mu_1.$

Quermassintegrale

Teorema

$$\mu_2 = 4W_1$$

$$\mu_1 = 2\pi\, W_2$$

- L'àrea de la vora d'un convex és igual a quatre vegades la mitjana de les àrees de les projeccions.
- La "longitud" de la vora d'un convex és igual a 2π vegades la mitjana de les longituds de les projeccions.

- Molt usades en medicina.

Valoracions

Valoracions

Policonvex= Unió finita de convexos compactes.

Valoració $\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$

1. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
2. $\mu(\emptyset) = 0$

Valoracions

Policonvex= Unió finita de convexos compactes.

Valoració $\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$

1. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
2. $\mu(\emptyset) = 0$

- Les mesures de Steiner són valoracions.

Hadwiger

Teorema (1957). Les valoracions $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ formen una base de l'espai vectorial de les valoracions *invariants i contínues* definides sobre policonvexos de $\mathbb{R}^n$.

Infinites aplicacions

$$\int \chi(K \cap L_r) dL_r = c\mu_{n-r}(K)$$

Demostració: La característica d'Euler és una valoració de grau zero ($\mu(aK) = a^{grau}\mu(K)$). La integral de la característica d'Euler és una valoració de grau $n - r$. La combinació lineal de Hadwiger es redueix al terme de grau $n - r$. La constant c es determina aplicant-ho a esferes, per exemple.

Geometria Integral Afí

Desigualtat de Blaschke-Santaló

- L. A. Santaló, *Un invariante afín para las curvas convexas del plano*, Math. Notae **8** (1948), 103-111.

$$X' = AX, \quad \det A = 1$$

- La densitat de rectes $ux + vy + 1 = 0$ és

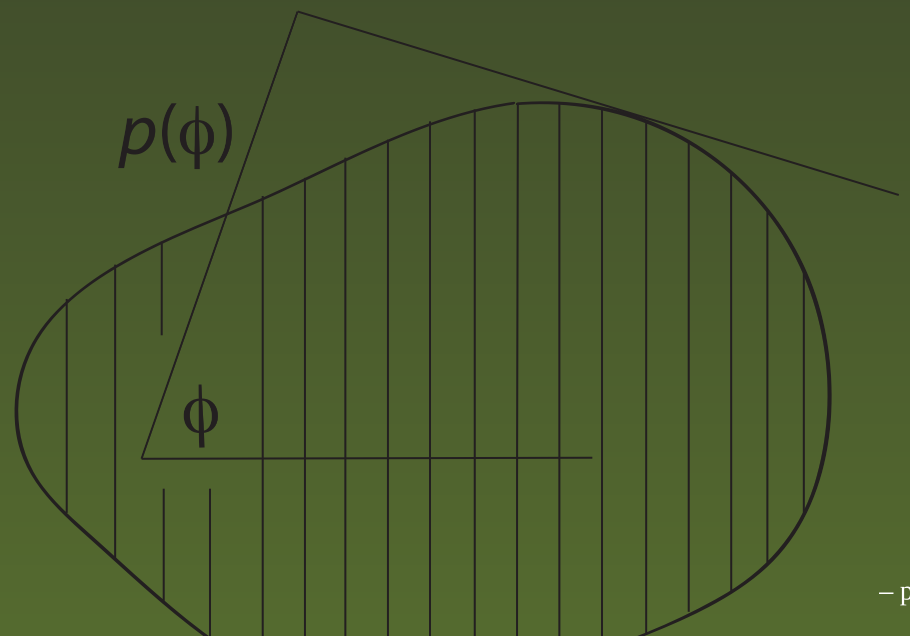
$$dG = du \wedge dv$$

$$dG = \frac{1}{p^3} dp \wedge d\phi$$

Desigualtat de **Blaschke-Santaló**

- Mesura de rectes exteriors a un convex que conté l'origen.

$$\int_{G\cap K=\emptyset} dG = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{p(\phi)}^{\infty} \frac{dp}{p^3} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{p^2}.$$



Desigualtat de Blaschke-Santaló

- Mesura de rectes exteriors a una el·lipse.

$$\int_{G\cap K=\emptyset} dG = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{R^2} = \pi/ab$$

Desigualtat de Blaschke-Santaló

A continuació demostra que

$$\boxed{I_m F \leq \pi^2}$$

on F és l'àrea del convex K i

$$I_m = \min_{P \in K} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{p^2}.$$

Quan hi ha centre de simetria $I_m =$ àrea del convex polar, i.e. el donat en polars per $r(\phi) = 1/p(\phi)$.

Desigualtat de Blaschke-Santaló

[Desigualtat de Blaschke-Santaló] (1949): El volum d'un convex amb centre de simetria multiplicat pel volum del seu polar és un invariant afí i està acotat pel quadrat del volum de la bola unitat.

$$\boxed{\text{volum}(K) \cdot \text{volum}(K^*) \leq \kappa_n^2}$$

on

$$\kappa_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}$$

i

$$K^* = \{x \in E^n; \langle x, y \rangle \leq 1, \forall y \in K\}$$

Desigualtat de Blaschke-Santaló

Aquesta desigualtat ha donat fruit a nombrosos articles, generalitzacions, aplicacions (a les pròpies matemàtiques, però també a la tomografia, estereologia, etc.) i conjectures, i és un dels resultats més citats de Santaló.

Conjectura de Mahler:

$$I_m V \geq \frac{4^n}{n!}$$

Desigualtat de Blaschke-Santaló

y por tanto es en todo punto $\varkappa > 0$; por consiguiente la curva (6.1) es convexa. La representaremos, indistintamente a ella y al recinto convexo que limita, por K^0. Su elemento de arco vale

$$ds^0 = (x'^2 + y'^2)^{1/2}\, d\varphi = \frac{1}{h^3}\, d\varphi. \tag{6.3}$$

La longitud afin $L_a{}^0$ de K^0 es, por definición [9],

$$L_a{}^0 = \int \sqrt[3]{\varkappa}\; ds^0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2} = 2\, I_m. \tag{6.4}$$

Por otra parte, el área mixta de Minkowski entre K^0 y K es también

$$F(K^0, K) = \frac{1}{2} \int h\, ds^0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2} = I_m. \tag{6.5}$$

Entre el área F^0 y la longitud afin $L_a{}^0$ de K^0 vale la siguiente desigualdad de *Blaschke* [10]

$$8\,\pi^2 F^0 - (L_a{}^0)^3 \geqq 0 \tag{6.6}$$

y entre el área mixta $F(K^0, K)$ y las áreas F^0, F de dos figuras convexas vale la desigualdad de Minkowski

$$(F(K^0, K))^2 - F F^0 \geqq 0. \tag{6.7}$$

Teniendo en cuenta (6.4) y (6.5), eliminando F^0 entre (6.6) y (6.7) se obtiene

$$I_m\, F \leqq \pi^2 \tag{6.8}$$

y aplicando la desigualdad general (6.6) a K y teniendo en cuenta (6.8) resulta

---

(9) Ver. BLASCHKE, *Differentialgeometrie II*, pág. 32.
(10) W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie II*, pág. 61.

Desigualtat de Blaschke-Santaló

P. Pi Calleja, *Sobre la figura polar de una dada respecto de un circulo con centro en el baricentro*, Math. Notae **9** (1950), 88-93.