# Matemàtiques

Agustí Reventós

NOTES DEL CURS IMPARTIT A PRIMER DE BIOTECNOLOGIA
Facultat de Ciències, UAB, 2010.

*For internal use only*

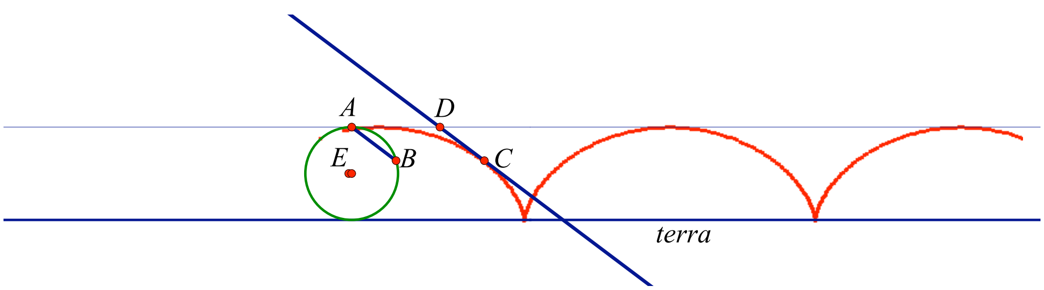
# Índex

# Capítol 1

# Derivades i integrals

Un dels problemes fonamentals que va donar lloc al naixement del càlcul diferencial va ser el càlcul de tangents a diverses corbes. La més fonamental va ser la cicloide, és a dir la corba descrita per un punt d'una roda quan aquesta gira sobre un terra pla. Per exemple la trajectòria descrita per la vàlvula d'una roda de bicicleta.

Per exemple, molt abans dels creadors del càlcul diferencial (Newton i Leibnitz), se sabia (Wren 1670) que la tangent a la cicloide en el punt $C$ es traçava de la manera següent: Tracem la paral·lela al terra per $C$. Aquesta talla la roda (en la seva posició inicial) en el punt $B$. A continuació unim el punt més alt de la roda, $A$, amb $B$. Doncs bé, la tangent a la cicloide per $C$ és la recta per $C$ paral·lela a $AB$.




També van ser capaços de demostrar, sense derivades ni integrals, que la longitud de la cicloide entre els punts $A$ i $C$ és justament $2DC$.

Aquests dos resultats tan elegants i sorprenents ja fan veure que els matemàtics pre-Newtonians havien treballat a fons la cicloide. Però els mètodes usats per a la cicloide no els ajudaven gaire per a resoldre el mateix tipus de problema sobre una altra corba.

La gràcia del càlcul diferencial va ser, entre d'altres, la unificació de problemes aparentment diferents en un sol problema: el càlcul de derivades (o integrals).

Això va simplificar de tal manera els problemes que va fer que qualsevol matemàtic podés resoldre problemes que abans tan sols podien resoldre els grans matemàtics: es va democratitzar el Càlcul.

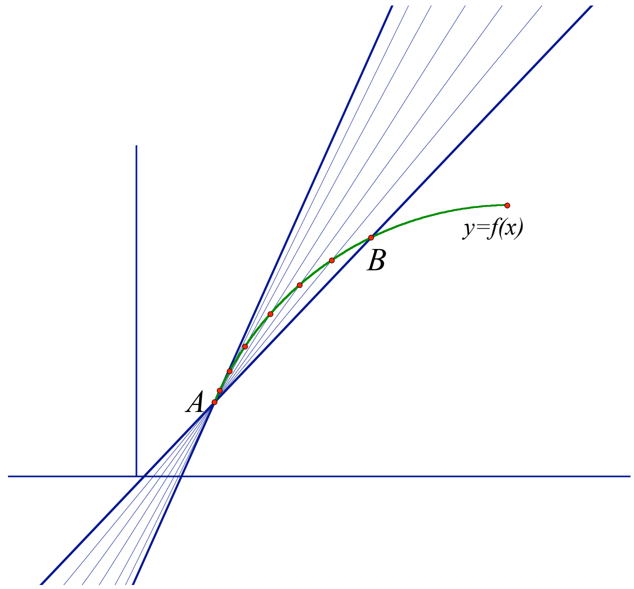
És un procés semblant al que va passar amb la introducció de coordenades a la geometria: es va posar la geometria sintètica a l'abast de tothom.

Però es va pagar un preu: cap matemàtic actual[1] coneix les corbes una per una com les coneixien els nostres precursors!. Derivar i integrar és com usar un mena de caixa negra en la que entra un problema i surt la solució, però si no s'analitza detalladament, no se saps molt bé què ha passat. L'exemple anterior de la cicloide és paradigmàtic: avui tothom sap calcular la longitud $AC$ però quasi ningú s'adona que el resultat numèric que obté integrant és $2DC$.

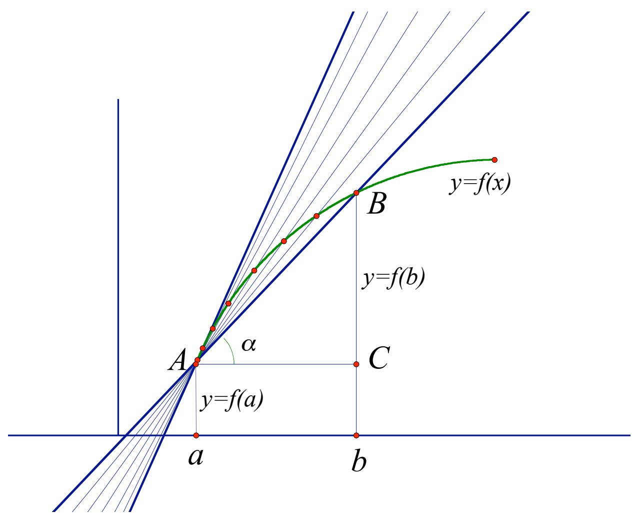
## 1.1 Tangent a una gràfica

La tangent a la gràfica de la funció $y = f(x)$ en el punt $A$ és la recta que s'obté com posició límit de les rectes $AB$, on $B$ és un punt sobre la corba que es va apropant a $A$.

[1] Potser exagero una mica, però no massa.




Si denotem per $a$ l'abscissa del punt $A$, i per $b$ l'abscissa del punt $B$, és a dir $A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$, el pendent de la recta $AB$ val




$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Per tant, el penent de la tangent a la gràfica en el punt $A$ val

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Es diu que $f'(a)$ és *la derivada de la funció* $y = f(x)$ en el punt $A$.

També és usual denotar $h = b - a$ de manera que també tenim

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

## 1.2 Velocitat mitjana

Si ens desplacem en cotxe entre dues ciutats distants entre si 100 km i triguem 1 hora, diem que la nostra velocitat mitjana ha estat de 100 km/h. Estem usant la definició de velocitat que ens diu

$$\text{velocitat} = \frac{\text{espai}}{\text{temps}}$$

Denotem per $s(t)$ l'espai recorregut pel cotxe quan fa $t$ hores que ha sortit de la primera ciutat. Així $s(0) = 0$ i $s(1) = 100$.

Quina velocitat mitjana hem portat entre els instants $t_0$ i $t_1 = t_0 + h$?

Novament

$$\text{velocitat} = \frac{\text{espai}}{\text{temps}} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

A quina velocitat anàvem justament quant $t = t_0$? Aquest és el concepte de *velocitat instantània*. La idea és que la velocitat instantània en $t = t_0$ és la velocitat mitjana entre $t = t_0$ i $t = t_1$ quan $t_1$ és molt i molt pròxim a $t_0$.

Escriurem

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Equivalentment

$$\boxed{v(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h) - s(t_0)}{h}}$$

Així doncs, la *velocitat instantània és la derivada de l'espai respecte del temps.*

Tenim definida dons una funció $t$, $v(t)$, anomenada velocitat instantània o simplement velocitat, donada per

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}.$$

## 1.3 Derivades i integrals d'algunes funcions

En aquesta secció recordem breument i sense demostració les derivades i integrals d'algunes funcions d'ús freqüent.

| *Taula 1* | Funció | Derivada |
|---|---|---|
| | $y = x^n$ | $y' = nx^{n-1}$ |
| | $y = e^x$ | $y' = e^x$ |
| | $y = \ln x$ | $y' = \frac{1}{x}$ |
| | $y = \sin x$ | $y' = \cos x$ |

Usant la regla de la cadena, que recordem en el peu de pàgina de la pàgina 88, tenim que si $f(x)$ és una funció de $x$ derivable, llavors

| *Taula 2* | Funció | Derivada |
|---|---|---|
| | $y = f(x)^n$ | $y' = nf(x)^{n-1}f'(x)$ |
| | $y = e^{f(x)}$ | $y' = f'(x)e^{f(x)}$ |
| | $y = \ln f(x)$ | $y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ |
| | $y = \sin f(x)$ | $y' = f'(x)\cos f(x)$ |

La primitiva (o integral) d'una funció $f(x)$ és una altra funció $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Així que per trobar primitives de funcions només hem de llegir les dues taules anteriors de dreta a esquerra: les primitives de les funcions que apareixen a la dreta són les respectives funcions que apareixen a l'esquerra.

La primitiva de $f(x)$ es denota per $F(x) = \int f(x)dx$. Potser la notació $F(x) = \int f(x)$ sembla més adequada en aquest moment, però per diverses raons, entre elles raons històriques usem la notació anterior, que es llegeix *integral de $f(x)$ diferencial de $x$.*

| *Taula 3* | Funció | Primitiva |
|---|---|---|
| | $y = nx^{n-1}$ | $\int nx^{n-1}\, dx = x^n + C$ |
| | $y = e^x$ | $\int e^x\, dx = e^x + C$ |
| | $y = \frac{1}{x}$ | $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C$ |
| | $y = \cos x$ | $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ |

Observem que la integral de la primera fila s'escriu també com

$$\int x^{n-1}\, dx = \frac{x^n}{n} + C,$$

fórmula vàlida per a tot $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$. Per això la tercera fila de la taula no és un cas particular de la primera.

| Funció | Primitiva |
|---|---|
| $y = nf(x)^{n-1}f'(x)$ | $\int nf(x)^{n-1}f'(x)\,dx = f(x)^n + C$ |
| $y = f'(x)e^{f(x)}$ | $\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$ |
| $y = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ | $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C$ |
| $y = f'(x)\cos f(x)$ | $\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \sin f(x) + C$ |

*Taula 4*

Observem que la integral de la primera fila s'escriu també com

$$\int f(x)^{n-1}f'(x)\,dx = \frac{f(x)^n}{n} + C,$$

fórmula vàlida per a tot $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$. Per això la tercera fila de la taula no és un cas particular de la primera.

A la última columna hi hem sumat a cada funció una constant ja que la derivada d'una constant és zero. El fet de que una funció tingui una única derivada però moltes primitives jugarà un paper important més endavant en l'estudi de les equacions diferencials.

Hi ha molts mètodes per calcular primitives que no explicarem aquí. La majoria es basen en transformar el problema en el càlcul d'alguna de les quatre primitives anteriors.

Programes com Mapple calculen força bé primitives elementals. Però el mètode més potent que els enginyers i científics en general han de saber és el mètode PAMA.[2]

[2] *Pregunta al matemàtic adequat.* Fins al moment els matemàtics, a diferència de la majoria de professions, no cobren pels seus coneixements, es consideren ben pagats pel repte que representa per a ells resoldre un problema. Si us donen les gràcies per haver proposat un càlcul tan interessant només heu de dir: *de res.*

**Exemple 1.3.1** *Trobeu una primitiva de* $\sqrt{2x+1}$

*Solució.* Mirem si aquesta funció apareix a la columna de la dreta de la taulea 4. Posem $f(x) = 2x + 1$, de manera que $f'(x) = 2$. Llavors

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int f(x)^{1/2}\,dx$$

Comparant amb

$$\int nf(x)^{n-1}f'(x)\,dx$$

que apareix a la taula 4, escrivim

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int f(x)^{1/2}\,dx = \frac{1}{3}[\int \frac{3}{2}f(x)^{1/2}f'(x)\,dx] \\ &= \frac{1}{3}f(x)^{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

## 1.4 Mètode del canvi de variable

Observem que podem passar de la taula 4 a la taula 3 de la manera següent: Posem

$$\begin{aligned}f(x) &= t \\ f'(x)dx &= dt\end{aligned}$$

La segona fila s'obté derivant la primera igualtat respecte de $x$:

$$f'(x) = \frac{dt}{dx}$$

però que escrivim com $f'(x)dx = dt$, és a dir, manipulem el signe de derivació $\frac{dt}{dx}$ com si fos un quocient. Aquest és el motiu d'usar la notació $\int f(x)\,dx$ en lloc de $\int f(x)$.

Amb aquest canvi de variable transformem la segona columna de la taula 4 en la segona columna de la taula 3.

$$\int nf(x)^{n-1}f'(x)\,dx = \int nt^{n-1}dt = t^n + C = f(x)^n + C$$

$$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{f(x)} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln f(x) + C$$

$$\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \int \cos t\,dt = \sin t + C = \sin f(x) + C$$

**Exemple 1.4.1** *Trobeu una primitiva de* $\sqrt{2x+1}$

*Solució.* Posem

$$\begin{aligned} 2x+1 &= t \\ 2\,dx &= dt \end{aligned}$$

i substituïm

$$\int (2x+1)^{1/2}dx = \int t^{1/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C.$$

$\diamondsuit$

**Exemple 1.4.2** *Trobeu una primitiva de* $xe^{x^2}$.

*Solució.* Posem

$$\begin{aligned} x^2 &= t \\ 2x\,dx &= dt \end{aligned}$$

i substituïm

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int e^t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

$\diamondsuit$

**Exemple 1.4.3** *Trobeu una primitiva de* $\tan x$.

*Solució.* Posem

$$\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x\,dx &= dt \end{aligned}$$

i substituïm

$$\int tanx\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t + C = -\ln(\cos x) + C.$$

$\diamondsuit$

**Exemple 1.4.4** *Trobeu una primitiva de* $\cos(3x+1)$.

*Solució.* Posem

$$\begin{aligned} 3x+1 &= t \\ 3\,dx &= dt \end{aligned}$$

i substituïm

$$\int \cos(3x+1)\,dx = \int \cos t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x+1) + C.$$

$\Diamond$

En canvi, petites modificacions de les funcions anteriors, com ara $\sqrt{2x^2+1}$, $\cos(3x^2+1)$, $\tan x^2$, $e^{x^2}$, donen lloc a funcions difícilment integrables. La última d'elles fa més de cent anys que es va demostrar que la seva integral no és expressable per funcions elementals. Mireu com de nerviós es posa el Mapple quan li fem fer aquestes integrals!

```
> int(tan(x·x), x);
```

$$-\mathrm{I}\,x - \mathrm{I}\int -\frac{2}{\left(\mathrm{e}^{\left(\mathrm{I}x^2\right)}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x \qquad (1)$$

```
> int(exp(x·x), x);
```

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(\mathrm{I}\,x) \qquad (2)$$

```
> int(cos(3·x·x + 1), x);
```

$$\frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{\pi}\sqrt{3}\left(\cos(1)\,\mathrm{FresnelC}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}\,x}{\sqrt{\pi}}\right) - \sin(1)\,\mathrm{FresnelS}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}\,x}{\sqrt{\pi}}\right)\right) \qquad (3)$$

```
> int(sqrt(2x^2 + 1), x);
```

$$\frac{1}{2}\,x\sqrt{2\,x^2+1} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\,\mathrm{arcsinh}\left(\sqrt{2}\,x\right) \qquad (4)$$

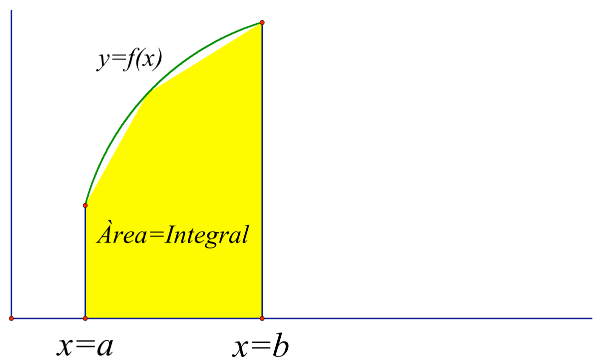
```
>
```

Si voleu anar més lluny, és un bon moment per usar el mètode PAMA.

## 1.5 Teorema fonamental del càlcul

Recordem la definició d'integral definida.

$$\int_a^b f(x)dx = \text{àrea sota la gràfica de la funció } y = f(x), \text{ entre els punts } x = a \text{ i } x = b.$$




Per tal de calcular-la dividim l'interval $[a, b]$ en $n$ parts iguals. Cada part tindrà longitud $\frac{b-a}{n}$ i aquestes parts estaran delimitades pels punts

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}; \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Observem que $x_0 = a$ i $x_n = b$.

L'àrea que busquem és aproximadament igual a la suma de les àrees dels rectangles de base $\frac{b-a}{n}$ i altures respectives $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$

Així

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{n}f(x_1) + \cdots + \frac{b-a}{n}f(x_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Si la $n$ és molt gran l'error serà molt petit, i tindrem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

que prendrem com definició d'integral (definida) d'una funció.

**Exemple 1.5.1** *Demostreu, sense usar inducció, que*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Posem

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 \\ (1+1)^3 &= 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \\ (2+1)^3 &= 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1 \\ (3+1)^3 &= 3^3 + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1 \\ &\vdots \\ (n+1)^3 &= n^3 + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1 \end{aligned}$$

Sumem totes aquestes igualtats i observem que el terme $1^3$ de la primera fila a l'esquerra es simplifica amb el terme $1^3$ de la segona fila a la dreta; el terme $2^3$ de la segona fila a l'esquerra es simplifica amb el terme $2^3$ de la tercera fila a la dreta; el terme $3^3$ de la tercera fila a l'esquerra es simplifica amb el terme $3^3$ de la quarta fila a la dreta; i així successivament.

De tots els termes de l'esquerra només queda sense simplificar l'últim (ja que no té cap més fila per sota). Així tindrem

$$(n+1)^3 = 3(\sum_{k=1}^{n} k^2) + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Aïllant

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n+1}{3}((n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2}) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Exemple 1.5.2** *Trobeu l'àrea sota la paràbola $y = x^2$ entre $x = 0$ i $x = 1$.*

En aquets cas $x_k = 0 + k\frac{1}{n} = \frac{k}{n}$. Per tant tenim

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

**Exercici 1.5.3** *Doneu un valor aproximat de*

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

**Teorema 1.5.4 (Teorema fonamental del càlcul)** *La derivada de l'àrea sota la gràfica d'una funció és igual a la pròpia funció.*

Sigui $A(t)$ la funció que ens dóna l'àrea sota la gràfica de la funció $y = f(x)$ entre els punts $x = a$ i $x = t$.

Observem doncs que $A(a) = 0$ i que

$$A(t) = \int_a^t f(x)\, dx$$

Llavors

$$\begin{aligned} A'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{t+h} f(x)\, dx - \int_a^t f(x)\, dx}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_t^{t+h} f(x)\, dx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hf(\xi)}{h} \end{aligned}$$

on $\xi$ és un punt entre $t$ i $t+h$ (tendeix doncs a $t$ quan $h$ tendeix a zero.) Per tant

$$A'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{hf(\xi)}{h} = f(t)$$

com volíem demostrar.

**Teorema 1.5.5 (Barrow)**

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

*on $F$ és qualsevol primitiva de $f$, i.e., $F'(x) = f(x)$.*

*Demostració.* Si $A(x)$ denota la funció àrea entre $a$ i $x$, sabem que $A'(x) = f(x)$. Per tant, $F(x) = A(x) + c$, on $c$ és una constant, ja que funcions amb la mateixa derivada difereixen en una constant.

Com que $F(a) = A(a) + c$ i $A(a) = 0$, tenim que $c = F(a)$.

Per tant

$$\int_a^b f(x)\, dx = A(b) = F(b) - c = F(b) - F(a).$$

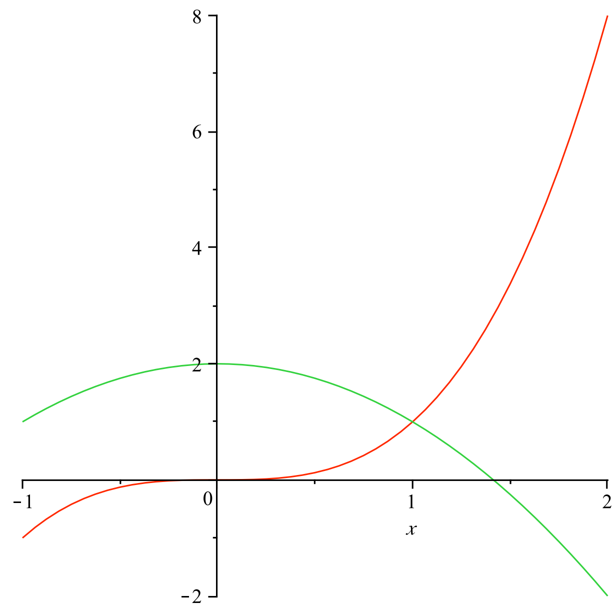
Aquest resultat és el que dóna importància al càlcul de primitives.

**Exemple 1.5.6** *Calculeu l'àrea del triangle curvilini limitat per la recta $x = 0$, i per les gràfiques de les corbes $y = x^3$, $y = -x^2 + 2$.*

*Solució.* Primer busquem el punt on es tallen aquestes dues corbes.

$$x^3 = -x^2 + 2$$

Com que no recordem la fórmula de l'equació de tercer grau, mirem si, per casualitat el polinomi $x^3 + x^2 - 2 = 0$ admet una arrel entera. Ha de ser un divisor del terme independent.

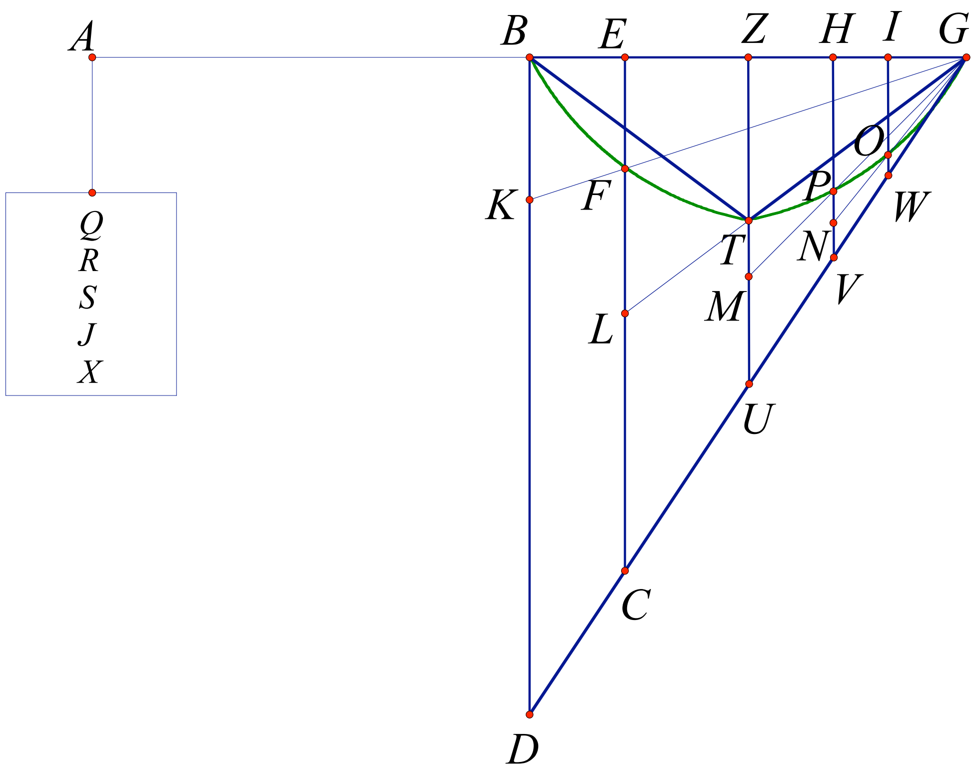



Ara ja es veu fàcil que $x = 1$ és una arrel. I no n'hi a més.
Així

$$A = \int_0^1 ((-x^2 + 2) - x^3)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{17}{12}.$$

**Exemple 1.5.7 (Arquimedes)** *Tallem una paràbola per una recta perpendicular al seu eix. Demostreu que l'àrea del sector de paràbola així determinat és igual a 4/3 de l'àrea del triangle que té la mateixa base i altura que aquest sector.*

Adjunto la feina d'Arquimedes pesant la paràbola. El triangle a que es refereix el problema és el $BTG$. $B$ és el centre de la bàscula. Els pesos $QRSJX$ penjats a $A$ equilibren el triangle $BGD$. A partir d'aquí, Arquimedes, usant sumes de Riemann (2000 anys abans de Riemann!!) calcula l'àrea de la paràbola, i sense el teorema fonamental del càlcul!!




## 1.6 Àrees i Volums

La idea d'aquesta secció és demostrar que l'àrea d'un cos pla és la integral de les longituds de les seves seccions rectes, i que el volum d'un cos de l'espai és la integral de les àrees de les seves seccions rectes.

Suposem que volem calcular l'àrea del recinte $R$ limitat per les gràfiques de les funcions $y = f(x)$ i $y = g(x)$ entre els punts $x = a$ i $x = b$.

Suposem, només per simplificar l'explicació, que $f(x) > g(x)$ per tot $x$.

Sabem que

$$\text{Àrea} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Però

$$l(x_0) = f(x_0) - g(x_0)$$

és justament la longitud de la secció que obtenim al tallar el recinte $R$ amb la recta vertical $x = x_0$.

Així,

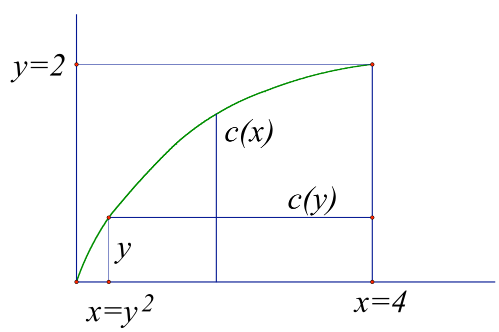
$$\text{Àrea} = \int_a^b l(x)dx = \text{Integral de la longitud de les seccions.}$$

**Teorema 1.6.1** *L'àrea $A$ d'un cos del pla és igual a la integral de les longituds de les seves seccions rectes.*

**Exemple 1.6.2** *Calculeu l'àrea del triangle curvilini format per les rectes $x = 4$, $y = 0$ i la gràfica de la funció $y = +\sqrt{x}$, tallant per $x =$ constant i tallant per $y =$ constant.*

*Solució 1.*Sigui $c(x_0)$ la longitud del segment que obtenim en tallar el triangle curvilini donat amb la recta $x = x_0$.

$$A = \int_0^4 c(x)\, dx = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx = \frac{16}{3}.$$




*Solució 2.* Sigui $c(y_0)$ la longitud del segment que obtenim en tallar el triangle curvilini donat amb la recta $y = y_0$.

Llavors

$$A = \int_0^2 c(y)dy = \int_0^2 (4 - y^2)\, dy = \frac{16}{3}.$$

El teorema 1.6.1 es generalitza al càlcul de volums. Concretament tenim

**Teorema 1.6.3** *El volum $V$ d'un cos de l'espai és igual a la integral de les àrees de les seves seccions rectes.*

*Concretament, si el cos està encaixat entre els plans $y = a$ (tangent per l'esquerra) i $y = b$ (tangent per la dreta), i denotem per*

$$A(y_0) = \text{Àrea de la intersecció del cos amb el pla } y = y_0$$

*tenim*

$$V = \int_a^b A(y)dy$$

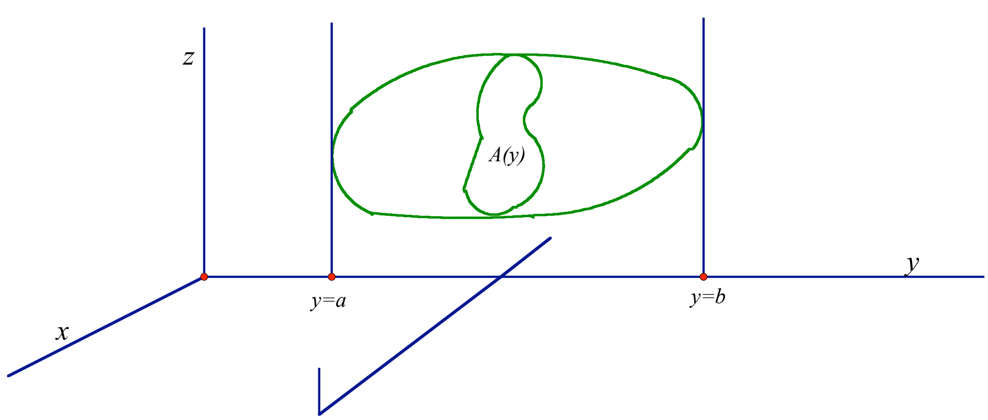
*Demostració.* Només hem d'aproximar el volum $V$ del cos com a suma dels volums dels cilindres de base la secció d'àrea $A(y)$ i altura $(b-a)/n$.

El volum d'aquests cilindres és *base* $\times$ *altura*, de manera que si dividim, com sempre, l'interval $[a, b]$ en $n$ parts iguals, i denotem els punts intermitjos per $y_k$, el volums de cadascun d'aquests cilindres és

$$V_k = A(y_k) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Sumant,

$$V = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} A(y_k) = \int_a^b A(y)\, dy.$$



**Exemple 1.6.4 (Esfera)** *Calculeu el volum d'una esfera de radi $R$.*

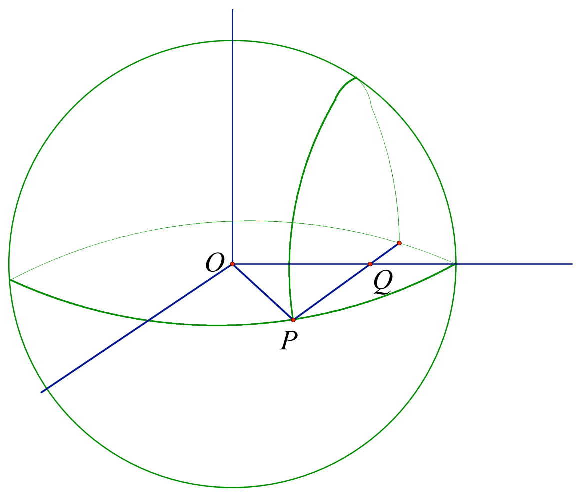
*Solució.* Observem que en tallar l'esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

pel pla $y = y_0$, obtenim una circumferència de radi $r = r(y_0)$ donat per

$$r = \sqrt{R^2 - y_0^2},$$

i per tant, d'àrea $A(y_0) = \pi r^2$.




(el triangle $OPQ$ de la figura és rectangle en $Q$, $OP = R$, $PQ = r$).
Per tant,

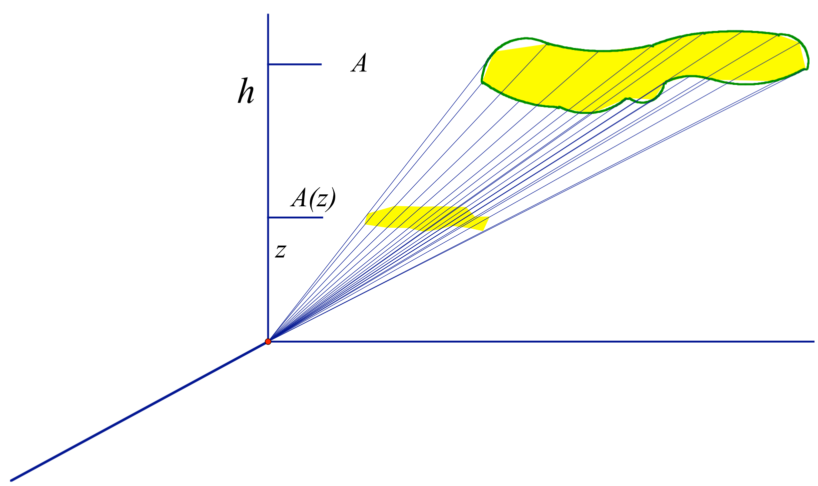
$$V = \int_{-R}^{R} \pi\,(R^2 - y^2)dy = \pi R^2(2R) - 2\pi\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

**Exemple 1.6.5 (Con inclinat)** *Calculeu el volum d'un con d'altura $h$ i àrea de la base $A$.*

*Solució.* Només ens hem d'adonar que les figures que s'obtenen en taller el con pels plans $z = z_0$ i $z = h$ són proporcionals, i el factor de proporcionalitat és $\frac{h}{z_0}$. És el Teorema de Tales.

Recordem també que quan tenim triangles semblants i el factor de proporcionalitat entre els seus costats és una constant $\lambda$, llavors la proporcionalitat entre les seves àrees és $\lambda^2$.

Com que l'àrea de qualsevol figura es pot pensar com suma d'àrees de triangles, també és cert que figures semblants amb factor de proporcionalitat $\lambda$, tenen àrees proporcionals amb factor de proporcionalitat $\lambda^2$.




Per tant, si denotem per $A(z_0)$ l'àrea de la figura que s'obté en tallar el con amb el pla $z = z_0$, tenim

$$A(z_0)\frac{h^2}{z_0^2} = A$$

I per tant

$$V = \int_0^h A(z)\,dz = \int_0^h A\frac{z^2}{h^2}dz = \frac{1}{3}Ah.$$

**Teorema 1.6.6 (Volum de revolució)** *El volum $V$ del cos de revolució que s'obté en girar la gràfica de la funció $z = z(y)$, entre $y = a$ i $y = b$, al voltant de l'eix de les $y's$, és igual a*

$$V = \pi \int_a^b z(y)^2 dy$$

*Demostració.* Conseqüència immediata del teorema 1.6.3, ja que en aquest cas l'àrea de la secció recta val $A(y) = \pi z(y)^2$.

**Exemple 1.6.7 (Esfera)** *Calculeu el volum d'una esfera de radi $R$.*

*Solució.* Observem que l'esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

s'obté al fer girar la gràfica de la funció $z = \sqrt{R^2 - y^2}$ al voltant de l'eix de les $y's$, variant $y$ entre $y = -R$ i $y = R$.

Per tant

$$V = \pi \int_{-R}^{R} z(y)^2\, dy = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - y^2)\, dy = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

**Exemple 1.6.8 (Con)** *Calculeu el volum d'un con d'altura $h$ i radi de la base $R$.*

*Solució.* Observem que aquest con s'obté al fer girar la gràfica de la funció $z = \frac{R}{h} y$ al voltant de l'eix de les $y's$, variant $y$ entre $y = 0$ i $y = h$.

Per tant

$$V = \pi \int_{0}^{h} z(y)^2\, dy = \pi \int_{0}^{h} (\frac{R^2}{h^2} y^2)\, dy = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

# Capítol 2

# Corbes

Un cordill embolicat al pla o a l'espai és una corba. Però als matemàtics ens agrada complicar-nos la vida i diem que una corba plana és una aplicació

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

que associa a cada punt $t \in [a, b]$ un punt

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

del pla. Suposarem que les funcions $x = x(t), y = y(t)$ es poden derivar.

Anàlogament, una corba a l'espai és una aplicació

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

que associa a cada punt $t \in [a, b]$ un punt

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

de l'espai. Suposarem que les funcions $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ es poden derivar.

**Exemple 2.0.9** *Considerem la corba*

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t); \quad t \in [0, 2\pi]$$

Si dibuixem els seus punts veiem que tots cauen a la circumferència d'equació $x^2 + y^2 = 1$ (i tot punt d'aquesta circumferència es de la forma $\gamma(t)$ per a algún $t \in [0, 2\pi]$), ja que $x(t)^2 + y(t)^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

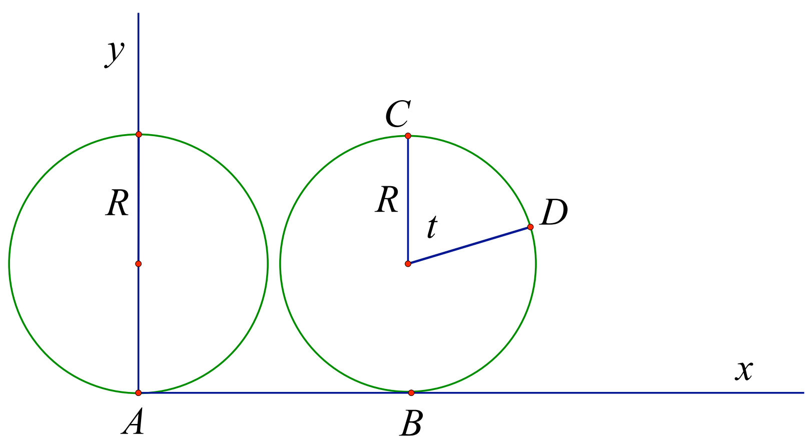
**Exemple 2.0.10** *Considerem la corba*

$$\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t); \quad t \in [0, 2\pi]$$

Si dibuixem els seus punts veiem que tots cauen a la circumferència d'equació $x^2 + y^2 = 1$, ja que $x(t)^2 + y(t)^2 = \cos^2(2t) + \sin^2(2t) = 1$. Però ara cada punt de la circumferència és imatge per $\gamma$ de dos punts diferents de l'interval $[0, 2\pi]$. El cordill dóna dues voltes sobre la circumferència.

**Exemple 2.0.11 (Cicloide)** *Tal com es veu en el dibuix, tenint en compte que per construcció de la cicloide $AB = CD$ (i.e. el segment $AB$ té la mateixa longitud que l'arc $CD$), tenim que les coordenades del punt $D$ de la figura són*

$$\begin{aligned} x(t) &= Rt + R\sin t \\ y(t) &= R + R\cos t \end{aligned}$$

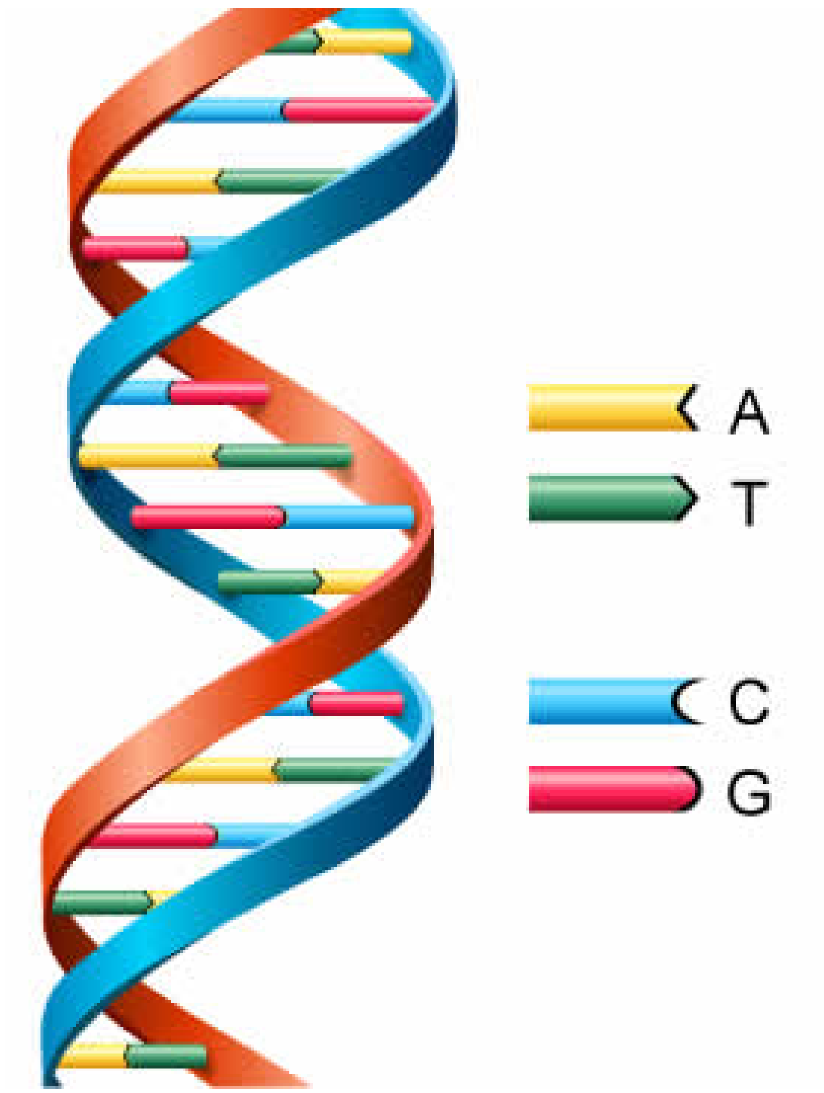



**Exemple 2.0.12 (Hèlix)**

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos t \\ y(t) &= R\sin t \\ z(t) &= at \end{aligned}$$

*Observem que $x(t)^2 + y(t)^2 = R^2$, és a dir, la corba està situada sobre el cilindre d'equació $x^2 + y^2 = R^2$.*

Podem pensar que $t$ és qualsevol nombre real. A mesura que $t$ creix la corba va girant (perquè hi ha sinus i cosinus) però també va pujant, ja que la $z$ depèn linealment de $t$.




www.biotechnologyonline.gov.au

## 2.1 Tangent

La idea intuïtiva de tangent a la corba $\gamma(t)$ en el punt $t = 0$, és que és la posició límit de les rectes determinades pels punts $\gamma(t)$ i $\gamma(0)$, quan $t$ s'acosta a 0.

Per evitar el problema de que

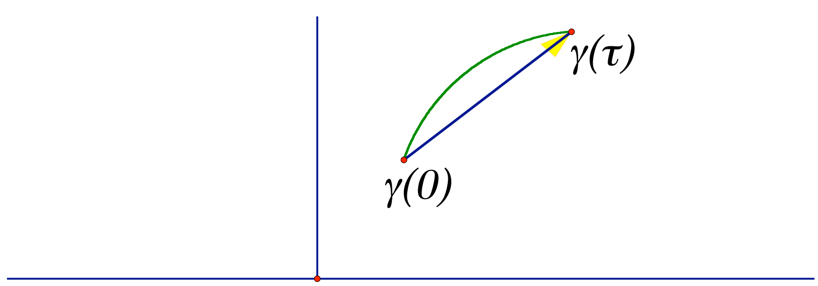
$$\lim_{t\to 0}(\gamma(t) - \gamma(0)) = 0$$

i tenint en compte que els vectors $\gamma(t) - \gamma(0)$ i

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t}$$

tenen la mateixa direcció, definirem la recta tangent a la corba $\gamma(t)$ en el punt $\gamma(0)$ com la única recta que passa per aquest punt amb vector director donat per

$$v = \lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = \gamma'(0).$$




Òbviament, el paper jugat pel punt $\gamma(0)$ pot ser jugat per qualsevol altre punt $\gamma(t_0)$ de la corba.

Resumint, el vector tangent a la corba $\gamma(t)$, en el punt $t = t_0$, és el vector

$$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

Els comentaris anteriors són només per justificar el nom de *vector tangent* que donem a $\gamma'(t)$.

## 2.2 Velocitat

Considerem la corba (plana o de l'espai) $\gamma(t)$, i pensem que $t$ és el temps, de manera que la corba és la trajectòria que descriu un punt que es mou en el pla o l'espai.

Per saber a quina velocitat (instantània) es mou aquest punt, només hem de posar

$$v = \frac{\text{espai}}{\text{temps}} = \lim_{t\to 0} \frac{\text{longitud de la corba entre } \gamma(t) \text{ i } \gamma(0)}{t}$$

Això ens donaria la velocitat en el punt $\gamma(0)$.

Però com que aquest quocient es calcula per a valors petits de $t$ podem aproximar la longitud de la corba entre $\gamma(t)$ i $\gamma(0)$ per la distància entre els punts $\gamma(t)$ i $\gamma(0)$.

Per tant

$$\begin{aligned} v &= \lim_{t\to 0} \frac{\|\gamma(t) - \gamma(0)\|}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{(x(t)-x(0))^2 + (y(t)-y(0))^2 + (z(t)-z(0))^2}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t\sqrt{x'(a)^2 + y'(b)^2 + z'(c)^2}}{t} \\ &= \sqrt{x'(0)^2 + y'(0)^2 + z'(0)^2} = \|\gamma'(0)\| \end{aligned}$$

on hem utilitzat tres cops el teorema del valor mitjà, i $0 \leq a, b, c \leq t$ (per tant, tendeixen a 0 quan $t$ tendeix a 0). Recordem que $\gamma'(t)$ vol dir

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)),$$

Aquest càlcul justifica anomenar *velocitat a la norma del vector tangent a una corba.*

## 2.3 Longitud d'una corba

**Teorema 2.3.1** *La longitud $L$ d'una corba $\gamma(t)$ entre els punts $t = a$ i $t = b$ (o, equivalentment, entre els punts $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$) és igual a la integral entre a* *i b de la norma del vector tangent a la corba.*

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

*Demostració.* Com que

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)),$$

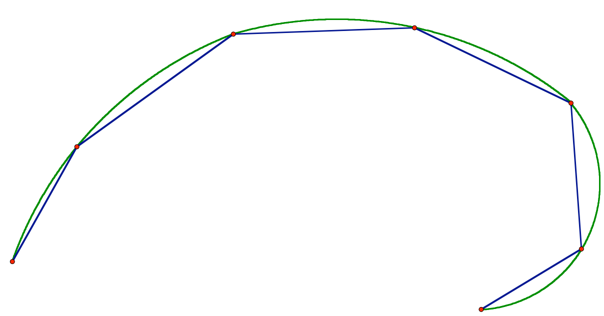
tenim

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

de manera que l'enunciat també s'escriu com

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt$$

La idea de la demostració és molt simple, ja que només hem de pensar que $L$ es pot aproximar per la longitud de poligonals que tenen cada cop més i més costats.



Concretament, prenem els punts

$$t_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Quan $n$ és gran, la longitud de la corba entre $\gamma(t_k)$ i $\gamma(t_{k+1})$ és aproximadament igual a la longitud del segment rectilini que uneix aquests punts.

Per tant, igual a

$$\sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2 + (z(t_{k+1}) - z(t_k))^2}.$$

Pel teorema del valor mitjà aquest valor és igual a

$$\frac{b-a}{n}\sqrt{x'(\xi_k)^2+y'(\eta_k)^2+z'(\nu_k)^2},$$

on $\xi_k, \eta_k, \nu_k$ són valors desconeguts situats entre $t_k$ i $t_{k+1}$.

Si denotem per $L_n$ la longitud de la poligonal que obtenim en unir per segments rectilinis els anteriors punts $\gamma(t_k)$ tenim

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}\sqrt{x'(\xi_k)^2+y'(\eta_k)^2+z'(\nu_k)^2}$$

i per tant, acceptant que la longitud $L$ de la corba s'aproxima per $L_n$ quan $n$ és molt gran, tenim

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}\sqrt{x'(\xi_k)^2+y'(\eta_k)^2+z'(\nu_k)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}\sqrt{x'(t_k)^2+y'(t_k)^2+z'(t_k)^2} = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt. \end{aligned}$$

Hem usat que els punts $\xi_k, \eta_k, \nu_k$ s'acosten a $t_k$ quan $n$ tendeix a infinit. I la definició d'integral donada a la pàgina 15.

**Exemple 2.3.2 (Longitud d'un pas de rosca de l'hèlix)**

En aquest cas, a partir de les equacions donades a l'exemple 2.0.11, tenim

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2+a^2}$$

i per tant

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2+a^2}\,dt = 2\pi\sqrt{R^2+a^2}$$

**Exemple 2.3.3 (Longitud d'un arc de cicloide)**

En aquest cas, a partir de les equacions donades a l'exemple 2.0.12, tenim

$$\|\gamma'(t)\| = R\sqrt{2}\sqrt{1+\cos t}$$

i per tant

$$L = \int_0^{\pi} R\sqrt{2}\sqrt{1+\cos t}\,dt = \int_0^{\pi} R\sqrt{2}\sqrt{2}\cos(t/2) = 2R[2\sin(t/2)]_0^{pi} = 4R.$$

# Capítol 3

# Funcions de diverses variables

## 3.1 Definició i gràfica

Una funció de dues variables és una aplicació

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

Per exemple, la funció *volum d'un cilindre*, és una funció de dues variables: el radi de la base i l'altura. Tenim concretament

$$V = V(r,h) = \pi r^2 h$$

Altres exemples seríen

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & x^2 + y \\ f(x,y) & = & \sin(xy) \\ f(x,y) & = & \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ & \vdots & \end{array}$$

Observem que el tercer exemple només té sentit quan el punt $(x,y)$ al qual s'aplica la funció $f$, pertany a l'interior o a la vora de la circumferència de centre l'origen $(0,0)$ i radi 1.

**Definició 3.1.1 (Gràfica)** *La gràfica de la funció $f(x,y)$ és el conjunt de punts $(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ tals que*

$$z = f(x,y).$$

Per exemple, la gràfica de $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ és l'hemisferi nord de l'esfera de centre $(0,0,0)$ i radi 1.

La gràfica de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ és un con de vèrtex $(0,0,0)$, com es veu trivialment tallant la gràfica amb el pla $x=0$ (obtenim $z=\pm y$, dues rectes del pla $z-y$), amb el pla $y=0$ (obtenim $z=\pm x$, dues rectes del pla $z-x$), i amb el pla $z=R$ (obtenim, per a cada $R$, la circumferència de radi $R$, $x^2+y^2=R^2$).[1]

## 3.2 Derivades parcials

Si, a la funció $f(x,y)$, mantenim la $y$ constant, podem pensar que tenim una funció d'una sola variable, la $x$, i la podem derivar sense problemes.

Anàlogament, si mantenim la $x$ constant, podem pensar que tenim una funció d'una sola variable, la $y$, i la podem derivar sense problemes.

Per saber si derivem respecte de la $x$ o respecte de la $y$ utilitzarem la notació

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Així, per exemple, si $f(x,y) = x^2+y$, llavors

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 1 \end{aligned}$$

La definició precisa de derivada parcial en un punt és la següent.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}$$

[1]Dibuixeu més gràfiques amb Maple.

## 3.3 Regla de la cadena

L'increment que experimenta el valor d'una funció $f(x, y)$ quan $x$ experimenta un increment $\Delta x$ i $y$ experimenta un increment $\Delta y$, és, per definició,

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Però sumant i restant la mateixa quantitat tenim

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) \\ &+ f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \end{aligned}$$

Pel teorema del valor mitjà tenim

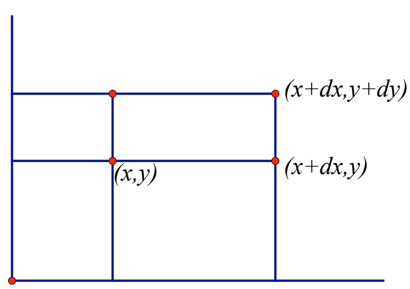
$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x + \Delta x, \xi) \cdot \Delta y,$$

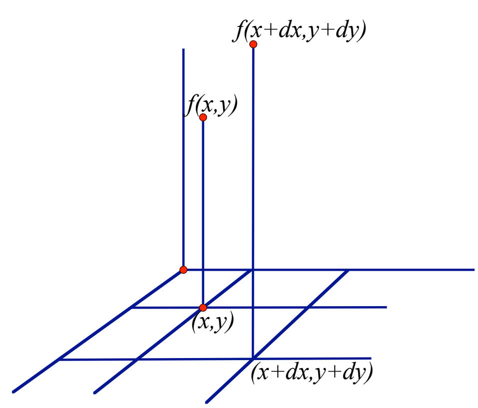
amb $\xi$ entre $y$ i $y + \Delta y$; i també

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\eta, y) \cdot \Delta x,$$

amb $\eta$ entre $x$ i $x + \Delta x$. Per tant,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial y}(x + \Delta x, \xi) \cdot \Delta y + \frac{\partial f}{\partial x}(\eta, y) \cdot \Delta x \tag{3.1}$$



Suposem ara que els punts $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ i $(x, y)$ estan units per una corba $(x(t), y(t))$ de manera que a l'instant $t$ estem en el punt $(x, y)$ $(x(t) = x, y(t) = y)$, i que al cap d'una petita estona $\Delta t$ estem a $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ $(x(t + \Delta t) = x + \Delta x,\ y(t + \Delta t) = y + \Delta y)$. Així

$$\begin{aligned}\Delta x &= x(t+\Delta t) - x(t) = x'(\xi)\cdot \Delta t\\ \Delta y &= y(t+\Delta t) - y(t) = y'(\eta)\cdot \Delta t\end{aligned}$$

Substituint aquests valors a (4.2) tenim

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial y}(x + \Delta x, \epsilon)\cdot y'(\eta)\cdot \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}(\delta, y)\cdot x'(\xi)\cdot \Delta t$$

on $\epsilon, \delta$ estan entre $t$ i $t + \Delta t$.

Observem que quan $\Delta t$ tendeix a zero, també $\Delta x$ i $\Delta y$ tendeixen a zero, i per tant $\xi \mapsto y$, $\eta \mapsto x$, $\epsilon \mapsto t$, i $\delta \mapsto t$. Per tant

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\cdot y'(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\cdot x'(t)$$

Resumint, si tenim una funció de dues variables $f(x, y)$, però cadascuna d'aquestes variables depèn d'una altra variable $t$, de manera que tinguem $x = x(t)$, $y = y(t)$, tenim de fet una funció d'una sola variable $t$, que continuem denotant per $f$,

$$f(t) = f(x(t), y(t))$$

i es compleix que

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\cdot y'(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\cdot x'(t)$$

A vegades només posem

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}}$$

que és l'anomenada *regla de la cadena.*

**Exemple 3.3.1** *Sigui $f(x, y) = x^2 + xy$. Sigui $x = \sin t$, $y = t^2$. Trobeu, directament, i aplicant la regla de la cadena la derivada de $f$ respecte de $t$.*

*Solució 1. Directament.* $f(x(t), y(t)) = x(t)^2 + x(t)y(t) = \sin^2 t + t^2 \sin t$. Per tant

$$\frac{df}{dt} = 2\sin t \cos t + 2t \sin t + t^2 \cos t.$$

*Solució 2. Regla de la cadena.* Com que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + y \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x \\
\frac{dx}{dt} &= \cos t \\
\frac{dy}{dt} &= 2t
\end{aligned}$$

tenim

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= (2x(t) + y(t)) \cdot \cos t + x(t) \cdot 2t \\
&= (2\sin t + t^2) \cdot \cos t + \sin t \cdot 2t.
\end{aligned}$$

## 3.4 Derivada direccional i Gradient

Les direccions es poden pensar com els punts d'una circumferència de radi 1 de la qual l'espectador n'és el centre. Les identificarem doncs amb els vectors de mòdul 1.

Sigui $f(x, y)$ una funció de dues variables i $u$ un vector de mòdul 1, i.e. $\|u\| = 1$.

Definim la *derivada direccional* de $f(x, y)$ en el punt $(x_0, y_0)$ i en la direcció del vector $u = (u_1, u_2)$, amb $u_1^2 + u_2^2 = 1$, per

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Observem ràpidament que si $u = (1, 0)$ aquesta definició coincideix amb al derivada parcial respecte de $x$, i que si $u = (0, 1)$ aquesta definició coincideix amb al derivada parcial respecte de $y$.

**Teorema 3.4.1**

$$D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot u$$

*Demostració.* Fixem el punt $(x, y)$ i considerem la funció

$$g(t) = f(x + tu_1, y + tu_2), \quad u = (u_1, u_2) \quad \|u\| = 1.$$

Per la regla de la cadena

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + tu_1, y + tu_2)\frac{d(x + tu_1)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x + tu_1, y + tu_2)\frac{d(y + tu_2)}{dt}$$

Per tant

$$g'(0) = \nabla f(x, y) \cdot u.$$

Per altra banda

$$g'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x + tu_1, y + tu_2) - f(x, y)}{t} = D_u f(x, y).$$

**Teorema 3.4.2** *El gradient d'una funció en un punt és ortogonal a la corba de nivell que passa per aquest punt. És a dir,*

$$\nabla f(x, y) \ \cdot \ w = 0,$$

*quan $w$ és un vector tangent a la corba de nivell de $f$, en el punt $(x, y)$.*

*Demostració.* Sigui $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ una corba continguda en la corba de nivell $f(x, y) = a$. Llavors

$$f(x(t), y(t)) = a, \text{per a tot} t,$$

i per tant, derivant als dos costats d'aquesta igualtat tenim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy(t)}{dt} = 0.$$

Però aquesta igualtat es pot escriure com

$$\nabla f(x(t), y(t)) \ \cdot \ (x'(t), y'(t)) = 0$$

i hem acabat. □

**Teorema 3.4.3** *Fixem un punt $(x, y)$. La direcció $u$ en la que la derivada direccional*

$$D_u f(x, y)$$

*és màxima és la direcció del gradient $\nabla f(x, y)$. I mínima en la direcció de $-\nabla f(x, y)$.*

*Demostració.* Com que

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u = \|\nabla f(x,y)\| \cdot \|u\| \cdot \cos\alpha = \|\nabla f(x,y)\| \cdot \cos\alpha$$

i el punt $(x,y)$ on es calcula el gradient està fixat, és clar que el valor màxim d'aquest producte s'agafa quan $\cos\alpha = 1$, és a dir, quan $\alpha = 0$. Com que $\alpha$ és l'angle entre $\nabla f(x,y)$ i $u$, el màxim s'agafa quan $u$ té la direcció del gradient.

El mínim s'agafa quan $\cos\alpha = -1$, és a dir quan $u$ té la direcció oposada del gradient. $\square$

**Exemple 3.4.4** *Sigui* $\Pi$ *el pla perpendicular al pla* $x-y$ *que passa pels punts* $P = (1,2,0)$, $Q = (3,4,0)$. *Sigui* $S$ *la superfície donada com a gràfica de la funció* $f(x,y) = 4x^2 + y^2$. *Trobeu l'equació de la recta tangent a la corba* $C = S \cap \Pi$ *en el punt* $\tilde{P} = (1,2,8)$.

*Solució.* Denotem

$$u = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)$$

La corba

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= P + tu \\ &= (1,2,0) + t(u_1, u_2, 0), \qquad u_1 = u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

uneix els punts $P$ i $Q$. Si la pugem a la superfície obtenim

$$\gamma(t) = (1 + tu_1, 2 + tu_2, f(1 + tu_1, 2 + tu_2))$$

i per tant

$$\gamma'(0) = (u_1, u_2, D_u f(1,2))$$

Com que

$$D_u f(1,2)) = \nabla f(1,2) \cdot u = (8,4) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 6\sqrt{2},$$

la recta demanada és

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-8}{12}$$

Recordem que la recta

$$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}$$

és la recta de l'espai que passa pel punt $(x_0, y_0, z_0)$ amb vector director $(u_1, u_2, u_3)$.

## 3.5 Pla tangent. Punts crítics

El pla tangent és *el pla que conté les tangents*. En efecte, fixem un punt $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ de la gràfica de la funció $f(x, y)$. Considerem una corba $\gamma(t)$ de $\mathbb{R}^3$ continguda a la superfície i tal que $\gamma(0) = P$. Per estar continguda a la gràfica tenim

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))).$$

El seu vector tangent en $P$ és

$$\gamma'(0) = (x'(0), y'(0), px'(0) + qy'(0))$$

on

$$\boxed{p=\frac{\partial f}{\partial x}(x(0),y(0)), \quad q=\frac{\partial f}{\partial y}(x(0),y(0))}$$

(regla de la cadena).

Traient factor comú

$$\gamma'(0) = x'(0)(1, 0, p) + y'(0)(0, 1, q)$$

És a dir, el vector tangent a tota corba dins la superfície en el punt $P$ és combinació lineal dels vectors $(1, 0, p)$ i $(0, 1, q)$[2]. És natural doncs dir que el pla tangent és el pla que passa per $P$ paral·lel al pla per l'origen generat per aquests dos vectors.

Observem que el vector

$$N = (-p, -q, 1)$$

[2]Que depenen de la superfície però no de la corba!

és ortogonal als dos vectors anteriors. Es diu que és el vector normal al pla. Observem que

$$\|N\| = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}.$$

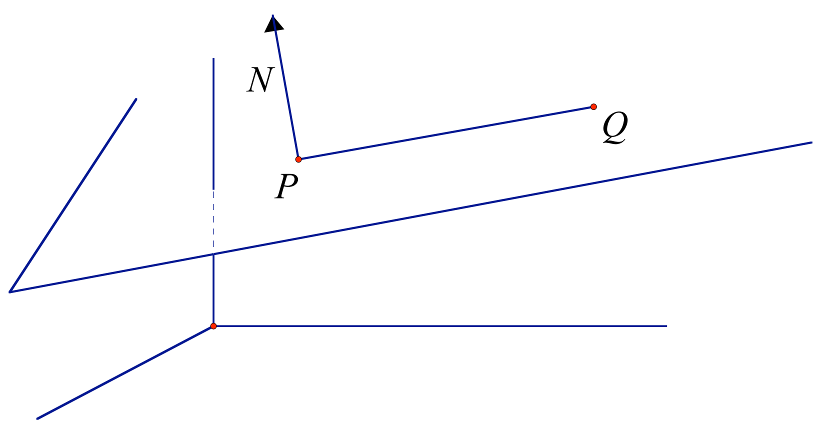
L'equació del pla tangent és doncs

$$\boxed{-p(x - x_0) - q(y - y_0) + (z - z_0) = 0}$$

amb $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Observem que aquesta equació expressa que els vectors $N$ i $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ son ortogonals, ja que l'anterior equació es pot escriure com

$$(-p, -q, 1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$




$$P = (x_0, y_0, z_0),\ Q = (x, y, z),\ \overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),\ \overrightarrow{PQ} \cdot N = 0.$$

Si $P$ és un màxim o un mínim, és clar intuïtivament que llavors el pla tangent a la gràfica en $P$ és paral·lel al pla $x - y$. El seu vector normal és doncs $(0, 0, 1)$. Per tant, $p = q = 0$.

**Teorema 3.5.1** *En els màxims i mínims (locals) de la funció $f(x, y)$, el seu gradient s'anul·la.*

**Definició 3.5.2** *Direm que el punt* $(x_0, y_0)$ *és un punt* crític *de la funció* $f(x, y)$ *quan* $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$. *És a dir,*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

Els punts crítics poden ser màxims, mínims o ni màxims ni mínims. Un punt crític que no és ni màxim ni mínim s'anomena *punt de sella.*

**Exemple 3.5.3** *Estudieu els punts crítics de* $f(x, y) = x^2 + y^2$

*Solució.* Calculem els punts crítics.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 2y = 0 \end{aligned}$$

Per tant, l'únic punt crític és $(0, 0)$. En aquest punt la funció val 0, i en qualsevol altre punt la funció és positiva (suma de quadrats), per tant aquest punt crític és un mínim.

**Exemple 3.5.4** *Estudieu els punts crítics de* $f(x, y) = -x^2 - y^2$

*Solució.* Calculem els punts crítics.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -2y = 0 \end{aligned}$$

Per tant, l'únic punt crític és $(0, 0)$. En aquest punt la funció val 0, i en qualsevol altre punt la funció és negativa (resta de quadrats), per tant aquest punt crític és un màxim.

**Exemple 3.5.5** *Estudieu els punts crítics de* $f(x, y) = x^2 - y^2$

*Solució.* Calculem els punts crítics.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= -2y = 0
\end{aligned}$$

Per tant, l'únic punt crític és $(0,0)$. En aquest punt la funció val 0. Veiem però que molt a prop de $(0,0)$ la funció agafa valors positius i negatius, ja que $f(0,\epsilon) = -\epsilon^2$, que és negatiu, i $f(\epsilon, 0) = \epsilon^2$ que és positiu, per a qualsevol valor de $\epsilon$ tant proper a 0 com vulguem. Per tant $(0,0)$ és un punt de sella.

**Observació 3.5.6** *En els màxims i mínims la superfície queda a un costat del pla tangent. Però en els punts de sella no. Estudieu el pla tangent a l'origen en els tres exemples anteriors.*

## 3.6 Taylor per a funcions de dues variables

Si volem aproximar $f(x,y)$ per un polinomi en les dues variables $x, y$ tindrem una expressió del tipus

$$f(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + \dots$$

I aquests coeficients es calculen fàcilment ja que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= a_1 + 2a_3 x + a_4 y + \dots \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= a_2 + a_4 x + 2a_5 y + \dots \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2a_3 + \dots \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= a_4 + \dots \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2a_5 + \dots
\end{aligned}$$

I per tant,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= a_1 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= a_2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= 2a_3 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= a_4 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= 2a_5
\end{aligned}$$

De manera que el polinomi que (eventualment) aproxima $f(x,y)$ al voltant del zero (ja que prenem derivades en el $(0,0)$) és

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2 + \ldots
\end{aligned}$$

## 3.7 Criteri del Hessià

Si suposem $f(0,0) = 0$ i que $(0,0)$ és un punt crític de $f(x,y)$,[3] el desenvolupament de Taylor de $f(x,y)$ al voltant de l'origen té la forma simple

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + \ldots$$

on hem posat, per simplificar, $a = a_3, b = a_4, c = a_5$. També escriurem

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + \Omega$$

on $\Omega$ engloba termes en $x, y$ de grau superior a dos.

[3] Això sempre ho podem aconseguir, ja que si $(x_0, y_0)$ és un punt crític, només hem de traslladar la gràfica de $f(x,y)$ fins a fer coincidir el punt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ amb $(0,0,0)$. Aquesta translació no afecta al tema que ens preocupa, que és saber sí els punts crítics són màxims, mínims o punts de sella.

## Estudi de la part quadràtica

Escrivim ara la part quadràtica de $f(x,y)$, $ax^2+bxy+cy^2$, com a suma o resta de quadrats:

Suposem primerament $a \neq 0$.

*Completació de quadrats.*

$$\begin{aligned} ax^2+bxy+cy^2 &= a(x+\frac{by}{2a})^2 - \frac{b^2y^2}{4a} + cy^2 \\ &= a(x+\frac{by}{2a})^2 + (\frac{-b^2}{4a}+c)y^2 \\ &= a(x+\frac{by}{2a})^2 + (\frac{\Delta}{4a})y^2 \end{aligned}$$

on $\Delta = 4ac - b^2$ és igual al determinant

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix}$$

Aquest determinant s'anomena *Hessià* de la funció $f(x,y)$ en el punt $(0,0)$.

*Estudi del signe de la part quadràtica.*

- Si $a>0$ i $\Delta>0$, l'expressió

  $$a(x+\frac{by}{2a})^2 + (\frac{\Delta}{4a})y^2$$

  és sempre positiva, i com en el $(0,0)$ val zero, això vol dir que $(0,0)$ és un *mínim*.

- Si $a>0$ i $\Delta<0$, l'expressió

  $$a(x+\frac{by}{2a})^2 + (\frac{\Delta}{4a})y^2$$

  és del tipus $X^2-Y^2$, que pren valors positius i negatius prop de $(0,0)$. Així, $(0,0)$ no és ni màxim ni mínim. Es diu que és un punt de *sella*.

- Si $a < 0$ i $\Delta > 0$, l'expressió

$$a(x + \frac{by}{2a})^2 + (\frac{\Delta}{4a})y^2$$

és sempre negativa, i com en el $(0, 0)$ val zero, això vol dir que $(0, 0)$ és un *màxim*.

- Si $a < 0$ i $\Delta < 0$, l'expressió

$$a(x + \frac{by}{2a})^2 + (\frac{\Delta}{4a})y^2$$

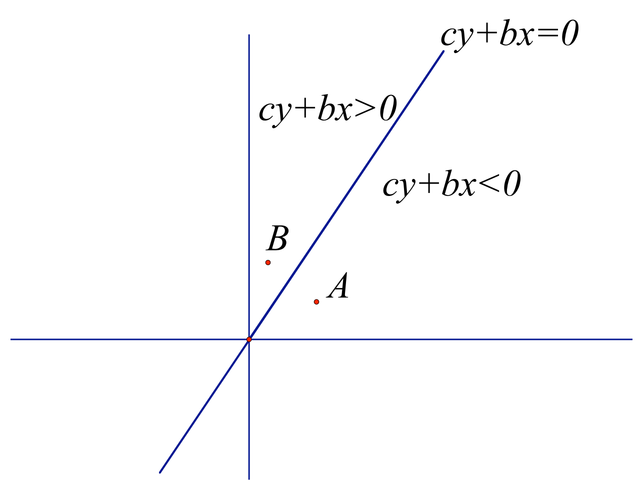
és del tipus $-X^2+Y^2$, que pren valors positius i negatius prop de $(0, 0)$. Així, $(0, 0)$ no és ni màxim ni mínim, torna a ser un punt de *sella*.

- $a = 0$. En aquest cas $\Delta = -b^2 \leq 0$.

Si $\Delta < 0$, $(b \neq 0)$ la part quadràtica queda reduïda a

$$bxy + cy^2 = y(cy + bx)$$

que pren valors positius i negatius tan a prop de zero com vulguem. És a dir, $(0, 0)$ és en aquest cas un punt de *sella*. A la figura es veu com aquesta funció té signes oposats en els punts $A$ i $B$, que podem suposar tant pròxims a $(0, 0)$ com vulguem, fent-los variar dintre de la regió limitada per la rectes $y = 0$ i $cy + bx = 0$.



Si $\Delta = 0$, $(b = 0)$ la part quadràtica queda reduïda a

$$cy^2$$

que és positiva si $c > 0$ (i llavors $(0,0)$ és un *mínim*), i negativa si $c < 0$ (i llavors $(0,0)$ és un *màxim*).

- $a \neq 0$, $\Delta = 0$. En aquest cas tenim

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a(x + \frac{by}{2a})^2$$

que és més gran o igual a zero si $a > 0$ (i llavors $(0,0)$ és un *mínim*), i més petita o igual a zero si $a < 0$ (i llavors $(0,0)$ és un *màxim*).

Resumim aquests sis punts en la taula següent.

| $a$ | $\Delta$ | $(0,0)$ |
|---|---|---|
| $> 0$ | $> 0$ | mínim |
| $< 0$ | $> 0$ | màxim |
|  | $< 0$ | sella |
|  | $0$ | màxim o mínim |

**Exemple 3.7.1** *Estudieu els màxims i mínims, i el Hessià, de* $f(x,y) = ax^2 + 2\sqrt{ac}xy + cy^2$.

*Solució.* Calculem els punts crítics.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2ax + 2\sqrt{ac}y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 2\sqrt{ac}x + 2cy = 0 \end{aligned}$$

Tenim tota una recta de punts crítics: Qualsevol punt de la forma

$$(-\sqrt{c/a}y) \quad y \in \mathbb{R}$$

és punt crític.

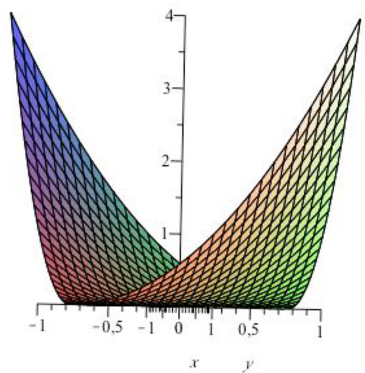
Calculem el Hessià.

$$\begin{vmatrix} 2a & 2\sqrt{ac} \\ 2\sqrt{ac} & 2c \end{vmatrix} = 0.$$

Com que el Hessià és zero, els punts crítics poden ser màxims o mínims. Mirem quin és el cas. Hem vist, en fer la completació de quadrats, que

$$f(x,y) = ax^2 + 2\sqrt{ac}xy + cy^2 = a(x + \frac{\sqrt{ac}y}{a})^2$$

Així, si $a > 0$, aquesta expressió és positiva i els punts $(-\sqrt{c/a}y)$ són mínims.[4] Si $a < 0$, aquesta expressió és negativa i els punts $(-\sqrt{c/a}y)$ són màxims.




$x^2 + 2xy + y^2$

## Estudi del cas general: $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + \Omega$

El comportament de la part quadràtica $ax^2+bxy+cy^2$ que acabem d'estudiar, es trasllada essencialment (però no completament) al comportament de

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + \Omega.$$

[4] Si prenem com definició de mínim local que el valor de la funció en aquest punt és menor o igual que el valor de la funció en un petit entorn d'aquest punt. Però si prenguéssim com a definició de mínim local que el valor de la funció en aquest punt és estrictament menor que el valor de la funció en un petit entorn d'aquest punt, llavors els punts $(-\sqrt{c/a}y)$ no serien mínims locals.

La idea intuïtiva és que $\Omega$ és petit en comparació a la part quadràtica, i podem menysprear la seva aportació al fet que un punt sigui màxim, mínim o sella.

Que $\Omega$ és petit en comparació a la part quadràtica es dedueix del fet que $\Omega$ és suma de termes en $x, y$ de grau superior a dos, i les potències $x^3, x^2y, xy^2, y^3;\ x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4; \ldots$ són petites al voltant del $(0,0)$ en comparació amb $x^2, xy, y^2$.

L'únic problema que pot haver és que la part quadràtica estigui formada només per $x^2$ o només per $y^2$, ja que llavors no és cert que, per exemple $y^3$ sigui molt petit respecte de $x^2$ ja que no podem comparar $x^2$ amb $y^3$ (la $x$ i la $y$ són independents).

*Acceptarem sense demostració que quan el Hessià és diferent de zero* ($\Delta \neq 0$) *el comportament de la part quadràtica* $ax^2 + bxy + cy^2$ *es traslllada al comportament de la funció.*[5]

En canvi, quan $\Delta = 0$, hi ha casos en que el comportament de la part quadràtica $ax^2 + bxy + cy^2$ es traslllada al comportament de la funció i casos en que no.

Veiem un parell d'exemples d'aquesta situació.

**Exemple 3.7.2** *Estudieu els màxims i mínims, i el Hessià, de* $f(x, y) = x^2 + y^3$.

*Solució.* Calculem els punts crítics.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 3y^2 \end{aligned}$$

[5] Això és degut a que la part quadràtica es pot escriure, fent un canvi de variables, com suma de quadrats. Concretament, podem posar

$$f(X, Y) = \pm X^2 \pm Y^2 \pm \text{termes d'ordre superior}$$

on

$$X = \sqrt{a}(x + \frac{by}{2a}), Y = \frac{\Delta}{4a}$$

quan $a > 0$, i expressions semblants quan $a \neq 0$.

Ara és clar que les potències $X^3, X^2Y, XY^2, Y^3, \ldots$ són petites al voltant del $(0,0)$ en comparació amb $\pm X^2 \pm Y^2$, i que per tant els màxims, mínims i selles de la part quadràtica continuen sent màxims, mínims i selles de la funció.

Per tant, l'únic punt crític és $(0,0)$. El Hessià en aquest punt és

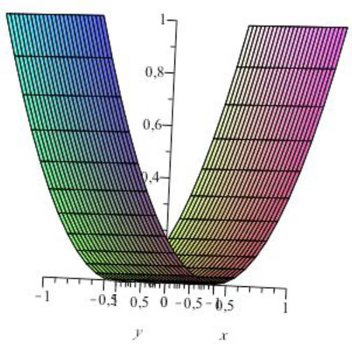
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Veiem que molt a prop de zero la funció agafa valors positius i negatius, ja que

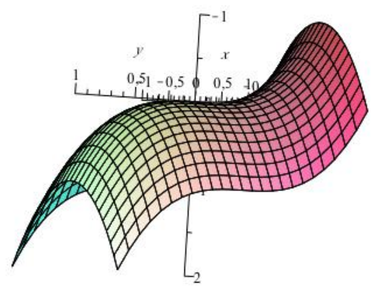
$$f(0,\epsilon) = \epsilon^3, \quad \epsilon \text{ petit}$$

que és positiu si $\epsilon$ és positiu i negatiu si $\epsilon$ és negatiu.

Per tant $(0,0)$ és un punt de sella (era un mínim de la part quadràtica).



$f(x,y) = x^2$



$f(x,y) = x^2 + y^3$

**Exemple 3.7.3** *Estudieu els màxims i mínims, i el Hessià, de* $f(x,y) = x^2 + y^4$.

*Solució.* Calculem els punts crítics.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 3y^2 \end{aligned}$$

Per tant, l'únic punt crític és $(0,0)$. El Hessià en aquest punt és

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Però ara és clar que $(0,0)$ és un mínim (també era mínim de la part quadràtica), ja que $f$ és suma de quadrats i per tant, sempre és positiva.

Així doncs, si en l'estudi dels punts crítics d'una funció, trobem que el Hessià s'anul·la en aquests punts, no podem saber (sense un estudi detallat de la funció) si aquells punts crítics són màxims, mínims o sella.

En canvi, en els casos en que $\Delta \neq 0$, *el comportament de la funció és igual al comportament de la seva part quadràtica.*

Resumim els comentaris anteriors en el teorema següent.

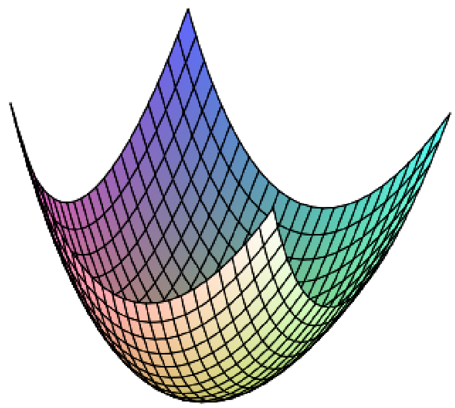
**Teorema 3.7.4** *Sigui $(x_0, y_0)$ un punt crític de la funció $f(x,y)$, és a dir, un punt tal que*

$$\nabla f(x_0, y_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)) = (0,0).$$

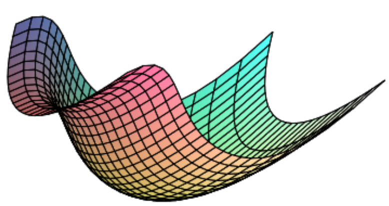
*Llavors, per saber si $(x_0, y_0)$ és màxim, mínim o punt de sella mirarem la taula següent.*

| $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ | $\Delta(x_0, y_0)$ | $(x_0, y_0)$ |
|---|---|---|
| $> 0$ | $> 0$ | *mínim* |
| $< 0$ | $> 0$ | *màxim* |
| | $< 0$ | *sella* |
| | $0$ | *depèn* |

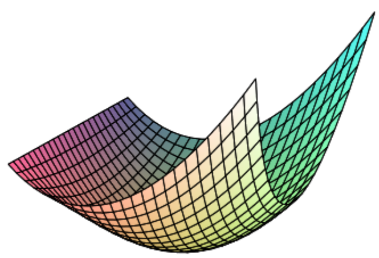
Acabem amb aquests dibuixos de les funcions $x^2+y^2, x^2+y^2+y^5, x^2+y^2+x^2y$ per tal que es vegi com, en el cas en que la part quadràtica és suma de quadrats, sumar termes de grau superior no afecta al fet que $(0,0)$ sigui mínim de la funció considerada. La gràfica canvia una mica però pràcticament gens al voltant del $(0,0)$.



$x^2 + y^2$



$x^2 + y^2 + y^5$



$x^2 + y^2 + x^2y$

# Capítol 4

# Integració de funcions de diverses variables

## 4.1 Definició

Així com

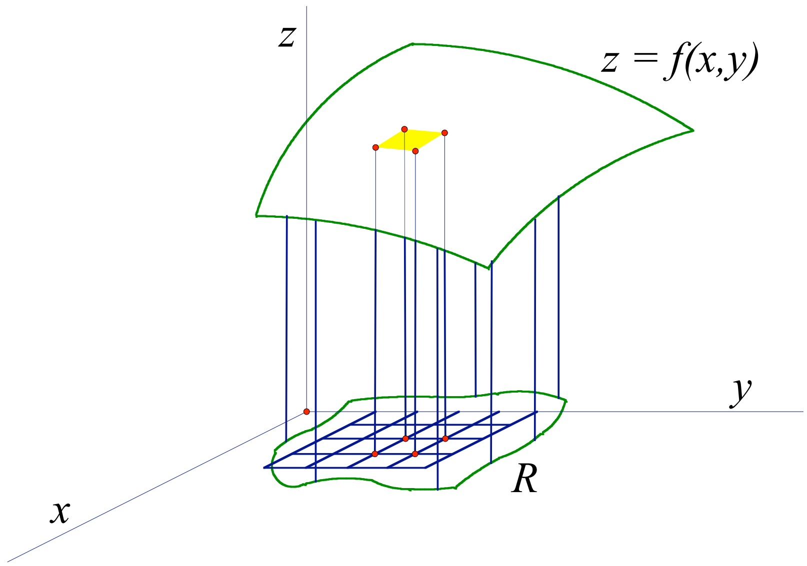
$$\int_a^b f(x)dx$$

representa l'àrea sota la gràfica de la funció $y = f(x)$, quan $x$ varia a l'interval $[a, b]$, l'expressió

$$\int\int_R f(x, y)\, dx\, dy$$

representa el volum sota la gràfica de la funció $z = f(x, y)$, quan $(x, y)$ varia dins del recinte $R \subset \mathbb{R}^2$.

Com que aquest volum no el sabem calcular, el que farem serà dividir el recinte $R$ en petits rectangles i aproximar el volum buscat per la suma dels volums dels prismes amb base aquests rectangles i altura fins a tocar la gràfica $z = f(x, y)$. El volum d'un prisma es calcula fàcilment multiplicant l'àrea de la base per l'altura.




## 4.2 Integració sobre un rectangle

Començarem estudiant un cas senzill: quan $R$ és un rectangle, és a dir

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

Dividim $[a, b]$ en $n$ parts iguals. És a dir, considerem els punts

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Dividim $[c, d]$ en $m$ parts iguals. És a dir, considerem els punts

$$y_j = c + j\frac{d-c}{m}, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

D'aquesta manera $R$ queda dividit en petits rectangles d'àrea

$$\frac{b-a}{n} \times \frac{d-c}{m}.$$

Com altura de cada prisma amb base aquests petits rectangles agafarem l'altura fins a la gràfica del punt

$$(x_k, y_j), \quad k = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m.$$

Observeu que em eliminat els casos $k = 0$ i $j = 0$, ja que tenim $n \times m$ rectangles, i cadascun d'ells l'individualitzem per un i només un dels seus vèrtexs.

Així doncs, la suma dels volums d'aquests prismes val (àrea de la base per l'altura)

$$V(P) = \frac{b-a}{n} \times \frac{d-c}{m} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_k, y_j)$$

Observem que el doble sumatori vol dir sumar tots els elements de la matriu

$$\begin{pmatrix} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) & \dots & f(x_1, y_m) \\ f(x_2, y_1) & f(x_2, y_2) & \dots & f(x_2, y_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(x_n, y_1) & f(x_n, y_2) & \dots & f(x_n, y_m) \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Si organitzem aquesta suma en files (sumem primer cada fila) tenim

$$V(P) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{d-c}{m} \sum_{j=1}^{m} f(x_k, y_j) \right)$$

Quan $m$ i $n$ són molts grans $V(P)$ és pràcticament igual a $V$, el volum sota la gràfica buscat.

De manera que tenim

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left( \lim_{m\to\infty} \frac{d-c}{m} \sum_{j=1}^{m} f(x_k, y_j) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left( \int_c^d f(x_k, y)\, dy \right) \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx \end{aligned}$$

La primera igualtat es pot considerar com la definició d'integral doble

$$\boxed{\int\int_R f(x,y) dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left( \lim_{m\to\infty} \frac{d-c}{m} \sum_{j=1}^{m} f(x_k, y_j) \right)}$$

Observeu que

$$\int_c^d f(x_k, y)\, dy$$

és una funció de $x_k$.

Resumint,

$$\boxed{\int\int_{[a,b]\times[c,d]} = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy\right) dx}$$

Si repetim els càlculs, però organitzant ara la suma dels elements de la matriu (4.1) en columnes (sumem primer cada columna) tenim

$$V(P) = \frac{d-c}{m} \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_j) \right)$$

Com abans, tindrem

$$\begin{aligned} V &= \lim_{m\to\infty} \frac{d-c}{m} \sum_{j=1}^{m} \left( \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_j) \right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{d-c}{m} \sum_{j=1}^{m} \left( \int_a^b f(x, y_j)\, dx \right) \\ &= \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy \end{aligned}$$

Resumint,

$$\boxed{\int\int_{[a,b]\times[c,d]} = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx\right) dy}$$

D'aquesta manera no sols hem donat dues maneres de calcular una integral doble com dues integrals simples, sinó que també hem demostrat el resultat següent.

**Teorema 4.2.1 (Teorema de Fubini)**

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

**Exemple 4.2.2** *Calculeu*

$$\int\int_Q \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$$

*on* $Q = [0,1] \times [0,1]$.

*Solució.* Sabem que aquesta integral és igual a

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dy \right) dx.$$

Calculem primer la integral que està entre parèntesis (que és una funció de $x$).

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dy &= x\int_0^1 \frac{y}{1+x^2+y^2}\,dy \\ &= x\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2)\right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{x}{2}\ln\frac{2+x^2}{1+x^2} \end{aligned}$$

I ara calculem

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( \frac{x}{2}\ln\frac{2+x^2}{1+x^2} \right) dx \\ = & \int_0^1 \frac{x}{2}\ln(2+x^2) - \int_0^1 \frac{x}{2}\ln(1+x^2) \\ = & \frac{1}{4}\left[(2+x^2)(\ln(2+x^2)-1) - (1+x^2)(\ln(1+x^2)-1)\right]_0^1 \\ = & \frac{1}{4}\ln\frac{27}{16}. \end{aligned}$$

## 4.3 Integració sobre un recinte limitat per les gràfiques de dues funcions

Considerem el recinte $R$ limitat per les gràfiques de les funcions $y = h(x)$ i $y = g(x)$, entre els valors $x = a$ i $x = b$. Volem calcular

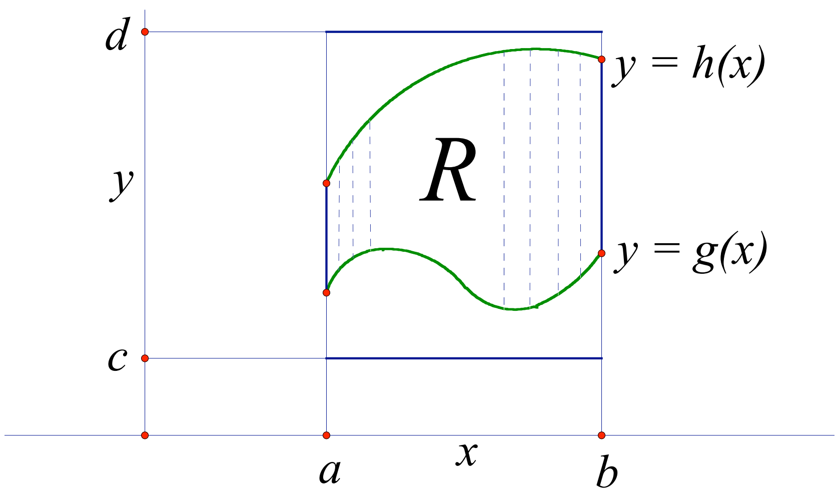
$$\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy$$

per a una certa funció $f(x,y)$.

Com que de moment només sabem integrar sobre rectangles, prenem punts $c, d$ tals que $R \subset Q = [a,b] \times [c,d]$.

Ara ens inventem una funció $\tilde{f}(x,y)$ que coincideixi amb $f(x,y)$ sobre $R$ i valgui zero fora de $R$.

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in R \\ 0 & (x,y) \notin R \end{cases}$$




D'aquesta manera tindrem

$$\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_Q \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x,y)dy\right) dx$$

Però observem que (imagineu $x$ fixat entre $a$ i $b$)

$$\int_c^d \tilde{f}(x,y)dy = \int_c^{g(x)} \tilde{f}(x,y)dy + \int_{g(x)}^{h(x)} \tilde{f}(x,y)dy + \int_{h(x)}^d \tilde{f}(x,y)dy$$

I, com que $\tilde{f}(x,y)$ és zero fora de $R$, només queda la integral del mig, en la qual $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$. És a dir

$$\int_c^d \tilde{f}(x,y)dy = \int_{g(x)}^{h(x)} \tilde{f}(x,y)dy$$

Per tant

$$\boxed{\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx}$$

**Exemple 4.3.1** *Calculeu*

$$\int\int_R xy\,dx\,dy$$

*on $R$ és el quadrilàter de vèrtexs $A = (1,1), B = (4,1), C = (3,2), D = (2,2)$.*

*Solució.* En aquest cas ens resulta més còmode pensar aquest recinte com limitat per dues gràfiques del tipus $x = g(y)$, $x = h(y)$ (i no $y = g(x)$, $y = h(x)$). Els mateixos arguments anteriors ens diuen que

$$\int\int_R xy\,dx\,dy = \int_1^2 \left( \int_{g(y)}^{h(y)} xy\,dx \right) dy$$

on $x = g(y)$ és la funció que té per gràfica la recta $AD$, i $x = h(y)$ és la funció que té per gràfica la recta $BC$.

Observem que la recta $AD$ té equació $y = x$, i la recta $BC$ té equació $y = -x + 5$. Per tant, $g(y) = y$, i $h(y) = 5 - y$.

Així,

$$\begin{aligned}\int\int_R xy\,dx\,dy &= \int_1^2 \left(\int_y^{5-y} xy\,dx\right) dy \\ &= \int_1^2 \left(y\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{5-y}\right) dy \\ &= \int_1^2 y(\frac{(5-y)^2}{2} - \frac{y^2}{2})\,dy \\ &= \int_1^2 y\frac{25-10y}{2} \\ &= \frac{75}{4} - \frac{35}{3}\end{aligned}$$

**Exemple 4.3.2** *Calculeu el volum d'una esfera de radi $R$.*

*Solució.* Si aquesta esfera està centrada a l'origen de $\mathbb{R}^3$, la seva equació és $x^2+y^2+z^2=R^2$. El volum demanat és el volum sota la gràfica de la funció $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ quan $(x,y)$ pertany a la regió

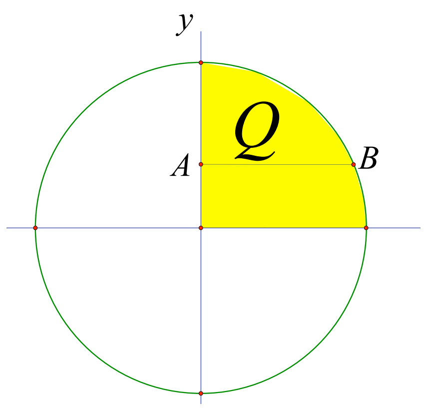
$$R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le R^2\}.$$

Com una esfera té vuit quadrants $Q$ tenim[1]

$$\begin{aligned}V &= 8\int\int_Q \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy \\ &= 8\int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\right) dy\end{aligned}$$

Els límits d'integració es veuen bé en el dibuix, on es veu que per a una $y$ fixada (imaginem que estem en el punt $A=(0,y)$) la $x$ varia des de 0 fins a $\sqrt{R^2-y^2}$ (ja que anem de $A$ a $B$ i $B=(\sqrt{R^2-y^2},y)$)

[1]Considerem un quadrant i no l'esfera sencera directament per simplificar una mica els límits d'integració.




Però la integral entre parèntesis és ben coneguda, i tenim[2]

$$V = \frac{8\pi}{4}\int_0^R (R^2 - y^2)\, dy = 2\pi(R^3 - \frac{R^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

**Observació 4.3.3** *En el cas particular de que $f(x, y)$ sigui la funció constant 1, és a dir, $f(x, y) = 1$, per a tot valor de $(x, y)$, resulta que*

$$\int\int_R 1\, dx\, dy = \int\int_R dx\, dy = \textit{Volum del cilindre de base } R \textit{ i altura } 1$$

*Com que el volum d'un cilindre és igual a l'àrea de la base per l'altura, tenim (denotant per A l'àrea de R)*

$$\int\int_R dx\, dy = A \times 1 = A$$

*De manera que les integrals dobles, que en principi representen volums, es poden usar també per a calcular àrees. Només hem d'integrar la funció 1.*

---

[2]Utilitzant el canvi de variable

$$\begin{aligned} x &= a \sin t \\ dx &= a \cos t\, dt \end{aligned}$$

tenim

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{4} a^2.$$

En el nostre cas $a^2 = R^2 - y^2$.

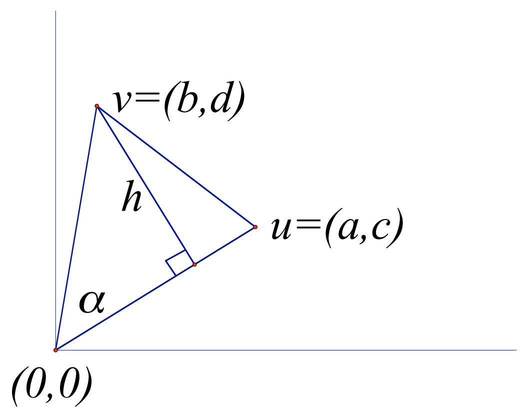
## 4.4 Aplicacions lineals i àrea

Recordem primerament la fórmula següent.

**Teorema 4.4.1** *Siguin* $u = (a, c)$*,* $v = (b, d)$ *dos vectors del pla* $\mathbb{R}^2$*. Llavors l'àrea* $A$ *del triangle de vèrtexs* $(0, 0), (a, c), (b, d)$ *és igual a*

$$A = \frac{1}{2}|\det(u, v)| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}|$$

*Demostració.* Si denotem per $\alpha$ l'angle entre els vectors $u$ i $v$, i per $h$ l'altura corresponent al vèrtex $(b, d)$ tenim




$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}|u| \cdot h = \frac{1}{2}|u| \cdot |v| \cdot \sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}|u| \cdot |v|\sqrt{1 - \left(\frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2} \\ &= \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}| \end{aligned}$$

La última igualtat es deguda a que

$$\begin{aligned} |u|^2 &= a^2 + c^2 \\ |v|^2 &= b^2 + d^2 \\ (u \cdot v)^2 &= (ab + cd)^2 = a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd \end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned} |u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2 &= \\ &= (a^2+c^2)(b^2+d^2) - a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd \\ &= (ad-bc)^2. \end{aligned}$$

**Teorema 4.4.2** *Sigui $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal donada per*

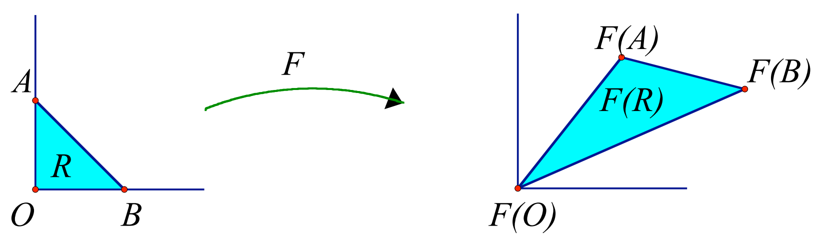
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

*Sigui $R$ una regió de $\mathbb{R}^2$. Llavors*

$$\text{\it Àrea de F(R)} = |\det F| \cdot \text{\it Àrea de R}$$

*Demostració.* Estudiarem només el cas en que $R$ és el triangle de vèrtexs $O = (0,0), A = (1,0), B = (0,1)$. A partir d'aquí i del fet que tota regió és pot dividir en triangles petits obtindríem el resultat general considerat en el teorema.

La imatge per $F$ dels punts $O, A, B$ són respectivament els punts $O = (0,0), A' = (a,c), B' = (b,d)$. Sigui $T'$ el triangle de vèrtexs $O, A', B'$.




Com que les aplicacions lineals porten rectes a rectes, resulta que $F(R) = T'$ i, pel teorema anterior,

$$\text{Àrea de F(R)} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|\det F| = |\det F| \cdot \text{Àrea de R}.$$

**Exemple 4.4.3** *Demostreu que les homotècies de raó $\lambda$ multipliquen les àrees per $\lambda^2$.*

*Solució.* Una homotècia és, per definició,[3] una aplicació lineal donada per

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

I el determinant d'aquesta matriu és $\lambda^2$.

## 4.5 Canvi de variable en integrals dobles

Sigui

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \mapsto & (x,y) \end{array}$$

una aplicació del pla en el pla, que porta el punt de coordenades $(u,v)$ al punt de coordenades $(x,y)$. Com que les coordenades $(x,y)$ de la dreta depenen de les coordenades $(u,v)$ de l'esquerra, també direm que l'aplicació $F$ està donada per les equacions

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Sigui $R \subset \mathbb{R}^2$ un recinte del pla. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció de dues variables.

Es compleix la relació següent.

**Teorema 4.5.1 (Del canvi de variable)**

$$\int\int_{F(R)} f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_R f(x(u,v),y(u,v))|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|\,du\,dv$$

La notació $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ vol dir el determinant

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

i es coneix com el *Jacobià* de $F$.

[3]De fet, l'expressió que donem és la d'una homotècia de raó $\lambda$ que té l'origen $(0,0)$ com a punt fix.

**Observació 4.5.2** *En el cas particular de que $F$ és lineal, és dir, està donada per*

$$\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$$

*tenim que*

$$\text{Jacobià de } F = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det F$$

**Observació 4.5.3** *Si $F$ és lineal i $f(x,y) = 1$, el teorema 4.5.1 diu*

$$\int\int_{F(R)} dx\,dy = \int\int_R |\det F|\,du\,dv$$

*És a dir*

$$\text{Àrea de } F(R) = |\det F| \cdot \text{Àrea de } R$$

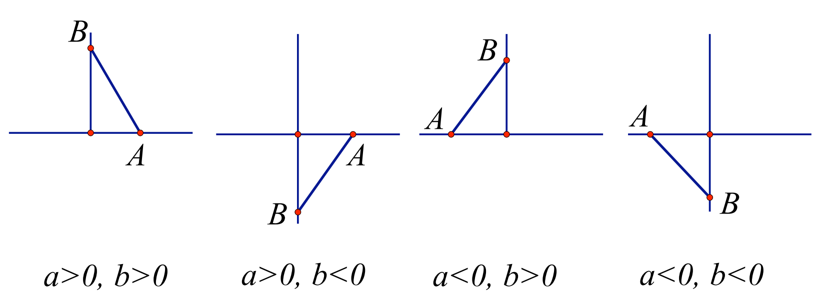
*que és la fórmula 4.4.2.*

**Exemple 4.5.4** *Calculeu independentment les dues integrals que apareixen en el teorema 4.5.1 en el cas particular següent.*

$$\begin{aligned} R &= \textit{Triangle } (0,0),(1,0),(0,1) \\ F(u,v) &= (au, bv) \\ f(x,y) &= x \end{aligned}$$

*Solució.* Observem primerament que la imatge per $F$ del triangle donat $R$ és el triangle $F(R)$ de vèrtexs $(0,0),(a,0),(0,b)$. La recta que uneix els punts $A = (a,0), B = (0,b)$ té equació $y = -\frac{b}{a}x + b$.

La situació és lleugerament diferent segons si $a$ i $b$ tenen el mateix signe o no. Els límits d'integració en cada cas es dedueixen del dibuix següent.



*Primer cas.* $a > 0$, $b > 0$. En aquest cas tenim

$$\begin{aligned}\int\int_{F(R)} x\,dx\,dy &= \int_0^a \left(\int_0^{-\frac{b}{a}x+b} x\,dy\right) dx \\ &= \int_0^a x(-\frac{b}{a}x+b)dx = \frac{ba^2}{6}.\end{aligned}$$

*Segon cas.* $a > 0$, $b < 0$. En aquest cas tenim

$$\begin{aligned}\int\int_{F(R)} x\,dx\,dy &= \int_0^a \left(\int_{-\frac{b}{a}x+b}^{0} x\,dy\right) dx \\ &= -\int_0^a x(-\frac{b}{a}x+b)dx = -\frac{ba^2}{6}.\end{aligned}$$

*Tercer cas.* $a < 0$, $b > 0$. En aquest cas tenim

$$\begin{aligned}\int\int_{F(R)} x\,dx\,dy &= \int_a^0 \left(\int_0^{-\frac{b}{a}x+b} x\,dy\right) dx \\ &= -\int_0^a x(-\frac{b}{a}x+b)dx = -\frac{ba^2}{6}.\end{aligned}$$

*Quart cas.* $a < 0$, $b < 0$. En aquest cas tenim

$$\begin{aligned}\int\int_{F(R)} x\,dx\,dy &= \int_a^0 \left(\int_{-\frac{b}{a}x+b}^{0} x\,dy\right) dx \\ &= -\int_a^0 x(-\frac{b}{a}x+b)dx = \frac{ba^2}{6}.\end{aligned}$$

I el segon terme val (en tots els casos)

$$\int\int_R au{\cdot}|ab|\,du\,dv = \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} au\cdot|ab|\,dv\right) du = \int_0^1 a^2bu(1-u)du = \frac{a|ab|}{6}.$$

**Exercici 4.5.5** *Calculeu independentment les dues integrals que apareixen en el teorema 4.5.1 en el cas particular següent.*

$$\begin{aligned} R &= \textit{Triangle } (0,0),(1,0),(0,1) \\ F(u,v) &= (au, bv) \\ f(x,y) &= px + qy \end{aligned}$$

**Observació 4.5.6** *L'exercici anterior demostra el teorema 4.5.1 per a triangles, quan $F$ i $f$ són lineals. Com que tota regió es pot triangular i les funcions es poden aproximar per funcions lineals (primers termes de Taylor) el teorema 4.5.1 queda gairebé demostrat. No fem els detalls.*

**Exemple 4.5.7** *Calculeu l'àrea del recinte $R'$ limitat per les rectes $y = 3x$, $y = \frac{1}{2}x$, i les hipèrboles $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$.*

*Solució.* Sobre les hipèrboles el producte $xy$ és constant, sobre les rectes per l'origen el quocient $y/x$ és constant.

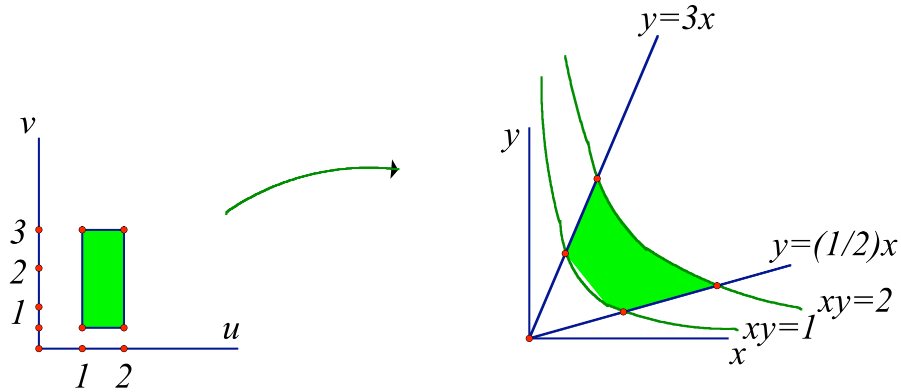
Això suggereix el canvi

$$\begin{aligned} u &= xy \\ v &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

I si volem $x, y$ en funció de $u, v$ (és a dir, les funcions $x = x(u,v)$, $y = (u,v)$), només hem de multiplicar (resp. dividir ) $u$ per $v$.

Tenim

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y &= \sqrt{uv} \end{aligned}$$




Llavors, si denotem

$$F(u,v) = (\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv})$$

veiem que el recinte

$$R = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq u \leq 2, \frac{1}{2} \leq v \leq 3\}$$

compleix que

$$F(R) = R'.$$

Només hem de substituir la $x$ i la $y$ pels seus valors en funció de $u$ i $v$ a la descripció de $R'$:

$$R' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq xy \leq 2, \frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 3\}.$$

El Jacobià val

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{v}} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{u}}{v\sqrt{v}} \\ \\ \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

Denotant per $A$ l'àrea del recinte $R'$, tenim

$$A = \int\int_{R'} dx\,dy = \int\int_R |\frac{1}{2v}|\,du\,dv = \int\int_R \frac{1}{2v}\,du\,dv$$

ja que $v$ és sempre positiu en el recinte d'integració.

Aplicant Fubini

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{3} \left( \int_{1}^{2} \frac{1}{2v}\, du \right) dv = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}(\ln 3 + \ln 2) = \frac{\ln 6}{2}.$$

**Exercici 4.5.8** *Calculeu*

$$\int\int_{R'} x^2 y^2 dx\, dy$$

*on $R'$ és el recinte de l'anterior exemple 4.5.7.*

**Exemple 4.5.9** *Calculeu l'àrea del recinte $R'$ limitat per les quatre rectes, paral·leles dos a dos, $y = x + 1$, $y = x - 1$, $y = -x + 2$, $y = -x + 1$.*

*Solució.* Amb la mateixa filosofia que a l'exemple 4.5.7 fem el canvi de variable

$$\begin{aligned} y - x &= u \\ y + x &= v \end{aligned}$$

ja que $y - x$ és constant sobre les rectes d'una de les famílies de rectes paral·leles i $y + x$ sobre és constant sobre les rectes de l'altre família.

Aïllant tenim

$$\begin{aligned} x &= \frac{v - u}{2} \\ y &= \frac{v + u}{2} \end{aligned}$$

Llavors, si denotem

$$F(u, v) = (\frac{v - u}{2}, \frac{v + u}{2})$$

veiem que el recinte

$$R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq u \leq 1, 1 \leq v \leq 2\}$$

compleix que

$$F(R) = R'.$$

Només hem de substituir la $x$ i la $y$ pels seus valors en funció de $u$ i $v$ a la descripció de $R'$:

$$R' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq y - x \leq 1, 1 \leq y + x \leq 2\}.$$

El Jacobià d'aquest canvi de variables és

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Denotant per $A$ l'àrea de $R'$ tenim

$$R' = \int\int_{R'} dx\, dy = \int\int_{R} |-\frac{1}{2}|\, du\, dv = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\int_{-1}^1 du\right) dv = 1.$$

**Exercici 4.5.10** *Calculeu*

$$\int\int_{R'} (x + y) dx\, dy$$

*on $R'$ és el recinte de l'anterior exemple 4.5.9.*

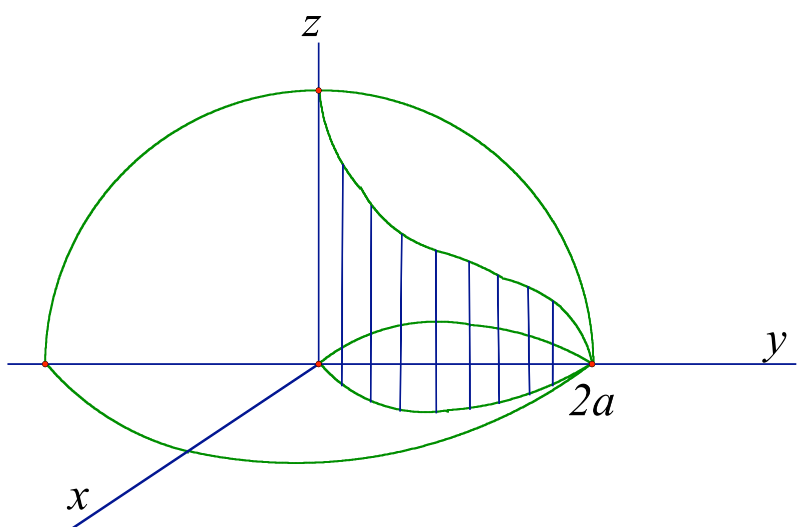
**Exemple 4.5.11** *Calculeu el volum de la volta de Viviani.*

*Solució.* Ens referim al volum del cilindre

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2$$

que està dins de la semiesfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = (2a)^2; \quad z \geq 0.$$




Pensem la semiesfera com la gràfica de la funció

$$z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}.$$

El volum que ens demanen és doncs

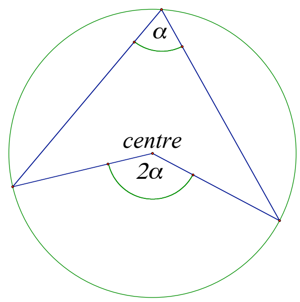
$$V = \int\int_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

on el domini d'integració és el disc $D$ del pla $x - y$ de centre $(0, a)$ i radi $a$.

En coordenades polars $r, \alpha$ aquest disc està descrit pel fet de que $\alpha$ pot variar entre 0 i $\pi$, i per a cadascun d'aquests valors de $\alpha$ el valor de $r$ pot variar des de 0 fina a la distància $OP$ de la figura. Si $r < OP$ estem dins del disc, si $r = OP$ estem a la frontera del disc i si $r > OP$ ja estem fora del disc.

L'angle $OPQ$ de la figura és recte, ja que és un angle inscrit a una circumferència que abraça un diàmetre.

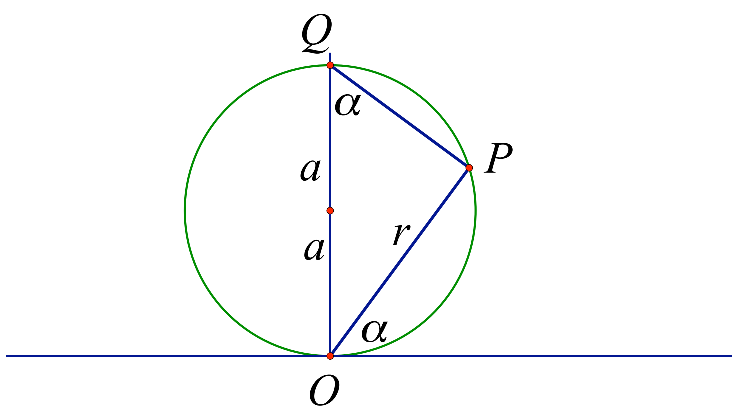
*Recordeu que els angles inscrits valen la meitat dels angles centrals que determinen.*




En particular, l'angle $OQP$ és igual a $\alpha$ (angle que forma $OP$ amb l'eix de les $x's$), per ser angles de costats respectivament perpendiculars.

En particular

$$\sin\alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{r}{2a}$$




Així doncs, aplicant Fubini tenim

$$V = \int_0^{\pi} \left( \int_0^{2a\sin\alpha} \sqrt{4a^2 - r^2}\, r\, dr \right) d\alpha$$

Fent el canvi

$$\begin{aligned} 4a^2 - r^2 &= t^2 \\ -2r\, dr &= 2t\, dt \end{aligned}$$

obtenim

$$\int_0^{2a\sin\alpha} \sqrt{4a^2 - r^2}\, r\, dr = \frac{8a^3}{3}(1 - \cos^3\alpha).$$

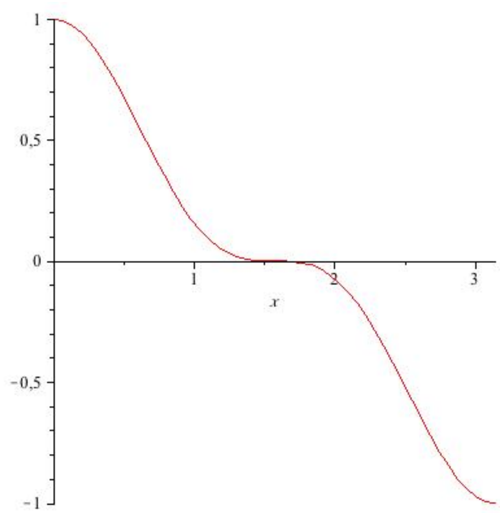
Per tant,

$$V = \int_0^{\pi} \frac{8a^3}{3}(1 - \cos^3\alpha) d\alpha = \frac{8\pi a^3}{3}.$$

Observem que, sense fer càlculs, sabem que

$$\int_0^{\pi} \cos^3\alpha\, d\alpha = 0$$

ja que el valor de la integral d'aquesta funció entre 0 i $\pi/2$ és el mateix, *però canviat de signe*, que el valor de la integral d'aquesta funció entre $\pi/2$ i $\pi$.




# 4.6 Centre de masses

## Cas discret

Els Físics[4] defineixen *Moment* d'una partícula de massa $m$ respecte d'un eix $e$ com

$$m_e = m \cdot d$$

[4]Aquests senyors tan savis.

on $d$ és la distància de la partícula a l'eix.

Si tenim $n$ partícules de masses $m_i$, el *Moment del sistema* respecte de l'eix $e$ és

$$m_e = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i.$$

Observem que si $e$ és l'eix de les $x's$ $(y = 0)$ i les masses $m_i$ estan situades en els punts $P_i = (x_i, y_i)$ tenim

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i.$$

I si $e$ és l'eix de les $y's$ $(x = 0)$, tenim

$$m_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

La observació interessant és que si, per a un sistema de partícules, coneixem $m_x$ i $m_y$, llavors ja coneixem $m_e$ per a qualsevol eix $e$.

En efecte, si l'equació de $e$ és $ax + by + c = 0$, amb $a^2 + b^2 = 1$, tenim

$$\begin{aligned} m_e &= \sum_{i=1}^{n} m_i d_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (a x_i + b y_i + c) \\ &= a m_y + b m_x + c. \end{aligned}$$

**Definició 4.6.1** *El* centre de masses *d'un sistema de partícules és un punt teòric $G$ tal que si tota la massa del sistema estigués concentrada en aquest punt, aquest punt tindria el mateix moment respecte d'un eix donat $e$ que el sistema.*

És equivalent a dir que aquest punt té el mateix moment que el sistema respecte dels eixos $x$ i $y$.

Per tant, si aquest punt té coordenades

$$G = (\bar{x}, \bar{y})$$

tenim

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i &= (\sum_{i=1}^{n} m_i)\bar{x} \\ \sum_{i=1}^{n} m_i y_i &= (\sum_{i=1}^{n} m_i)\bar{y}\end{aligned}$$

Equivalentment, les *coordenades* $\bar{x}$, $\bar{y}$, *del centre de masses* $G$ *de* $n$ *punts* estan donades per:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \\ \bar{y} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\end{aligned}$$

Si totes les partícules tenen la mateixa massa $m$ tenim

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \\ \bar{y} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\end{aligned}$$

Si, a més $n = 2$, tenim

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2}{2}\end{aligned}$$

i es diu que $G = (\bar{x}, \bar{y})$ és el *punt mitjà* de $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$.

Si, $n = 3$, tenim

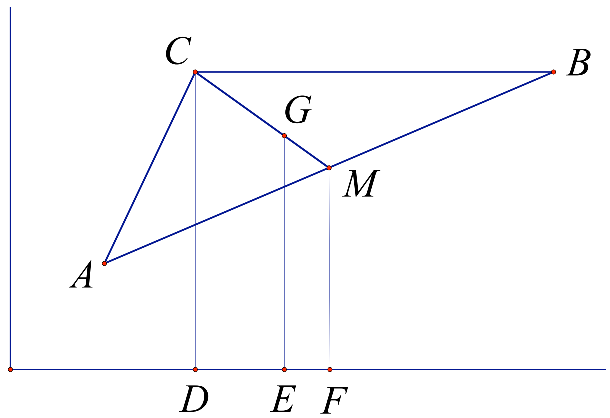
$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\end{aligned}$$

i es diu que $G = (\bar{x}, \bar{y})$ és el *baricentre* de $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3 y_3)$.

**Exemple 4.6.2** *Sigui* $G = (\bar{x}, \bar{y})$ *el baricentre dels punts* $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$. *Sigui* $M$ *el punt mitjà del segment* $AB$. *Demostreu*

$$\frac{MG}{CG} = \frac{1}{2}.$$

*Solució.* Per Tales sabem que




$$\frac{MG}{CG} = \frac{FE}{DE}.$$

Calculem separadament $FE$ i $DE$.

$$FE = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = (x_1 + x_2 - 2x_3)/6.$$

$$DE = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} - x_3 = (x_1 + x_2 - 2x_3)/3.$$

Dividint obtenim el resultat.

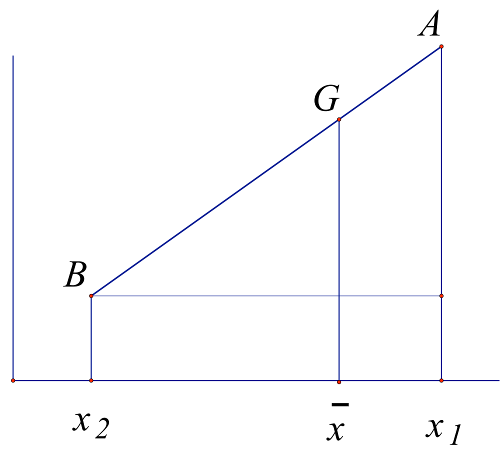
**Exemple 4.6.3** *Suposem que en un punt $A$ tenim una partícula de massa $a \cdot m$, i que en un punt $B$ tenim una partícula de massa $b \cdot m$. Sigui $G = (\bar{x}, \bar{y})$ el centre de masses d'aquest sistema. Demostreu que*

$$\frac{AG}{BG} = \frac{a}{b}.$$

*Solució.* Si $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$, tenim

$$\bar{x} = \frac{amx_1 + bmx_2}{am + bm}$$

Per Tales tenim




$$\frac{AG}{BG} = \frac{x_1 - \bar{x}}{\bar{x} - x_2} = \frac{a}{b}.$$

## Cas continu

El pes d'una làmina rectangular plana de densitat variable $\rho$ es pot trobar fàcilment de la manera següent. Dividim la làmina en petits rectangles com hem fet a la secció 4.2, pàgina 54. Sobre cadascun d'aquests petits rectangles podem suposar $\rho$ constant, de manera que

$$\begin{aligned} \text{Pes de la làmina} &= Mg = \sum \text{Pesos de les làmines petites} \\ = \sum_k m_k g &= \sum a_k \rho_k g \end{aligned}$$

on $a_k$ és l'àrea[5] de la $k$-èssima làmina petita.

Simplificant la $g$ i recordant la definició d'integral doble, pàgina 55, tenim que la massa total $M$ de la làmina rectangular $R$ és

$$M = \int\int_R \rho \, dx \, dy.$$

[5] Massa=Volum$\times$ Densitat; però pensem que la làmina és plana, de manera que canviem volum per àrea. Podem pensar també que la làmina té un espessor petit i homogeni $\epsilon$ de manera que Volum=Àrea$\times\epsilon$. Aquesta $\epsilon$ apareixerà als dos costats de la igualtat i es simplificarà.

De manera anàloga obtenim les coordenades $\bar{x}$, $\bar{y}$, del centre de masses $G$ d'una làmina plana de densitat variable $\rho = \rho(x, y)$.

Concretament

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int\int_R x\rho \, dx \, dy}{\int\int_R \rho \, dx \, dy} \\ \bar{y} &= \frac{\int\int_R y\rho \, dx \, dy}{\int\int_R \rho \, dx \, dy} \end{aligned}$$

Si $\rho$ és constant,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{A}\int\int_R x \, dx \, dy \\ \bar{y} &= \frac{1}{A}\int\int_R y \, dx \, dy \end{aligned}$$

on $A$ és l'àrea de $R$.

**Exemple 4.6.4** *Calculeu el centre de masses d'un semidisc homogeni.*

*Solució.* Suposem que el semidisc $D$ té centre l'origen, radi $R$, i $y > 0$. L'àrea val $(\pi R^2)/2$. Per calcular el centre de masses només hem de calcular $\bar{y}$, ja que $\bar{x} = 0$ per simetria (la funció a integrar, $x$, canvia de signe en canviar $x$ per $-x$).

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{(\pi R^2)/2}\int\int_D y \, dx \, dy = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^\pi \left(\int_0^R r \sin \alpha r \, dr\right) d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R \frac{R^3}{3} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{4R}{3\pi} \end{aligned}$$

Per tant, el centre de masses $G$ és el punt

$$G = (0, \frac{4R}{3\pi}).$$

**Exemple 4.6.5** *Calculeu el centre de masses d'un semidisc de centre l'origen, radi* $1$, $y \geq 0$, *i tal que la seva densitat en cada punt* $(x, y)$ *està donada pel quadrat de la distància entre el punt* $(x, y)$ *i el punt* $(0, -1)$.

*Solució.* La densitat éstà donada per

$$\rho(x, y) = x^2 + (y + 1)^2.$$

Per tant, la massa és

$$M = \int\int_D \rho\, dx\, dy = \int\int_D (x^2 + (y + 1)^2)\, dx\, dy$$

Fent el canvi a polars

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \end{aligned}$$

El Jacobià del canvi és $r$, ja que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \alpha)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix} = r.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 (r^2 + 1 + 2r\sin\alpha) r\, dr\right) d\alpha \\ &= \int_0^\pi (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin\alpha)\, d\alpha \\ &= \frac{3\pi}{4} + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Per calcular el centre de masses només hem de calcular $\bar{y}$, ja que $\bar{x} = 0$ per simetria (la funció a integrar, $x\rho$, canvia de signe en canviar $x$ per $-x$).

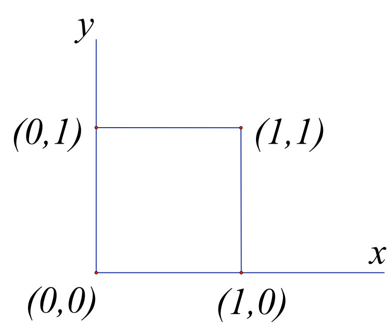
Tenim

$$
\begin{aligned}
M\bar{y} &= \int\int_D y\rho\, dx\, dy = \int_0^\pi \left( \int_0^1 (r^3 + r + 2r^2 \sin\alpha) r \sin\alpha\, dr \right) d\alpha \\
&= \int_0^\pi \left( \int_0^1 (r^4 \sin\alpha) dr \right) d\alpha + \int_0^\pi \left( \int_0^1 (r^2 \sin\alpha) dr \right) d\alpha \\
&+ \int_0^\pi \left( \int_0^1 (2r^3 \sin^2\alpha) dr \right) d\alpha \\
&= \int_0^\pi \sin\alpha \frac{1}{5}\, d\alpha + \int_0^\pi \sin\alpha \frac{1}{3}\, d\alpha + \int_0^\pi 2\sin^2\alpha \frac{1}{4}\, d\alpha \\
&= \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Resumint,

$$
G = (0, \frac{\frac{2}{5} + \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}}{\frac{3\pi}{4} + \frac{4}{3}}) = (0, \frac{12 + 3\pi}{16 + 15\pi})
$$

**Exercici 4.6.6 (Proposat per Girbau en un examen)** *Tenim un quadrat metàl·lic de costat* 1 *metre. El col·loquem sobre dos eixos perpendiculars de coordenades tal com indica la figura.*




*Se sap que la densitat superficial del quadrat és un polinomi de la forma*

$$\rho(x, y) = axy + bx + cy + d.$$

*Se sap que* $\rho(0,0) = 1\, Kg/m^2$, $\rho(1,0) = 2\, Kg/m^2$, $\rho(0,1) = 3\, Kg/m^2$, $\rho(1,1) = 5\, Kg/m^2$.

*Calculeu la massa i el centre de gravetat del quadrat.*

## 4.7 Un teorema de Pappus

Comencem calculant l'ordenada $\bar{y}$ del centre de masses d'una làmina homogènia plana limitada per la gràfica de dues funcions.

Sigui $R$ el recinte limitat per les gràfiques de les funcions $y = f(x)$ i $y = g(x)$, entre els valors $x = a$ i $x = b$. Denotem per $A$ l'àrea d'aquest recinte.

Sabem que

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{A}\int\int_R y\,dx\,dy = \frac{1}{A}\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} y\,dy\right) dx \\ &= \frac{1}{2A}\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\,dx \end{aligned}$$

Per la fórmula del volum d'un cos de revolució, teorema (1.6.6), pàgina 23, tenim

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi}\frac{V}{A}$$

on $V$ és el volum del cos de revolució generat per la làmina la girar al voltant de l'eix de les $x's$.

**Teorema 4.7.1 (Pappus/Guldin)** *El volum $V$ de la figura que s'obté en girar una làmina d'àrea $A$ al voltant d'un eix val*

$$V = A \cdot d$$

*on $d$ és la distància recorreguda en aquest gir pel centre de masses de la làmina.*

Com aplicació repetim l'exercici 4.6.4.

**Exemple 4.7.2** *Calculeu el centre de masses d'un semidisc homogeni.*

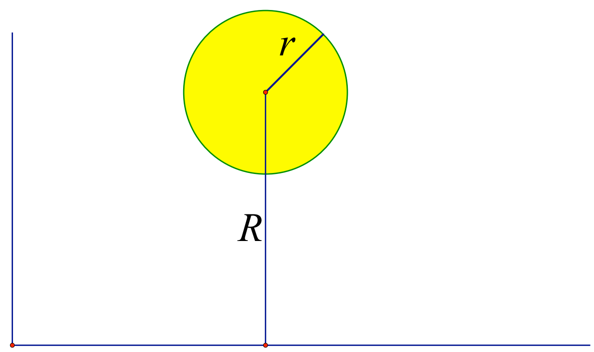
*Solució.* Ara la làmina és el semidisc $x^2 + y^2 \leq R^2; y > 0$, i si gira al voltant de l'eix de les $x's$ genera una esfera que té volum $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Per tant,

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi}\frac{V}{A} = \frac{1}{2\pi}\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi}.$$

**Exemple 4.7.3** *Calculeu el volum d'un tor.*

*Solució.* Un tor és la figura de revolució que s'obté en fer girar un disc de radi $r$ al voltant d'un eix a distància $R$ del centre del disc. El centre del disc és el seu centre de masses.




Per tant,

$$V = (\pi r^2) \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R r^2.$$

Observeu que coincideix amb el volum d'un cilindre recte de base el disc donat i altura $2\pi R$. Aquesta és la figura que obtindríem en taller el tor i posar-lo recte. Aquest procés no conserva distàncies, però casualment[6] sí que conserva el volum.

[6]Res de casualitat. És un dels resultats bàsics de la teoria de *tubs*.

# Capítol 5

# Equacions diferencials de primer ordre

## 5.1 Definició i teorema d'existència i unicitat

Una expressió del tipus
$$y' = f(x, y)$$
on $f$ és una funció diferenciable de dues variables (que anomenem $x, y$) es diu que és una equació diferencial de primer ordre. De moment $y'$ és només un símbol.

Per exemple,
$$\begin{aligned} y' &= x \\ y' &= x + y \\ y' &= y^2 + \sin(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$
són equacions diferencials de primer ordre.

*Resoldre* una equació diferencial de primer ordre $y' = f(x, y)$ vol dir trobar totes les funcions $y = y(x)$ tals que en substituir la variable $y$ per $y(x)$, la variable $y'$ per $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$, obtinguem una identitat certa per a tots els valors de $x$. És a dir, s'ha de complir
$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)).$$

Així, resoldre les anteriors equacions diferencials vol dir trobar funcions $y = y(x)$ tals que

$$\begin{aligned} y'(x) &= x \\ y'(x) &= x + y(x) \\ y'(x) &= y^2(x) + \sin(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Per exemple, $y = e^x$ és una solució de l'equació diferencial

$$y' = y,$$

ja que $y'(x) = \frac{d}{dx}e^x = e^x$. De fet, qualsevol funció del tipus $y = ke^x$ és solució de $y' = y$.

També, $y = \frac{1}{2}x^2$ és una solució de l'equació diferencial

$$y' = x,$$

ja que $y'(x) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x^2) = x$. De fet, qualsevol funció del tipus $y = \frac{1}{2}x^2 + C$ és solució de $y' = x$.

Aquests dos exemples ens fan pensar que les equacions diferencials tenen moltes solucions. Tenim concretament el resultat següent.

**Teorema 5.1.1 (Existència i unicitat)** *L'equació diferencial de primer ordre $y' = f(x, y)$ té infinites solucions, però només una $y = y(x)$ tal que $y(x_0) = y_0$.*

*Comentaris.* Hem de suposar que la funció de dues variables $f(x, y)$ és *prou bona*. Podem pensar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, però podria no estar definida sobre tot $\mathbb{R}^2$. Per exemple, $f(x, y) = \frac{y}{x}$ no està definida quan $x = 0$.

Suposarem que és derivable respecte cadascuna de les dues variables, i,e, si fixem $x$ és derivable respecte $y$, i si fixem $y$ és derivable respecte $x$.

A més el valors $x_0, y_0$ que apareixen a la condició inicial han de pertànyer al domini de definició de $f$.

Tampoc especifiquem quin és el domini de definició de la funció solució $y(x)$.

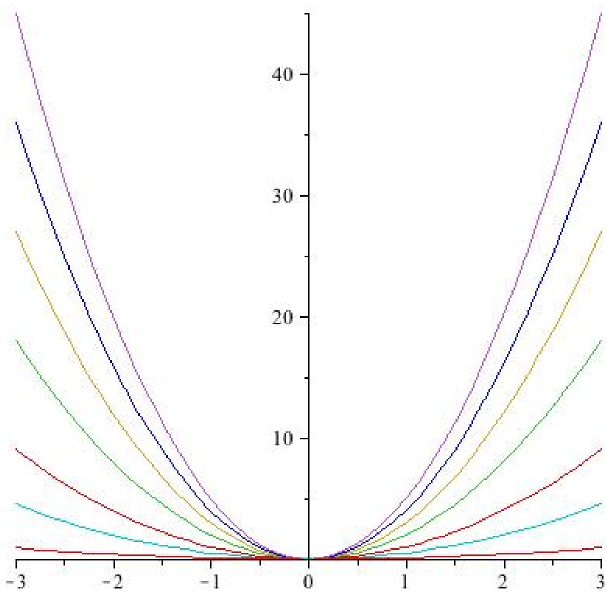
Identificant la funció $y = y(x)$ amb la seva gràfica, el teorema diu que hi ha infinites corbes del pla que són solucions de l'equació diferencial $y' = f(x, y)$, però per cada punt $(x_0, y_0)$ del pla n'hi passa només una.

Per exemple, l'equació diferencial

$$y' = \frac{2y}{x}$$

admet les infinites solucions $y(x) = kx^2$ (comproveu-ho). Infinites perquè n'hi ha una per a cada valor de $k$. Però és clar que per cada punt $(x_0, y_0)$ del pla passa una única paràbola. Per exemple, si volem que passi pel punt $(4, 32)$ hem d'imposar $32 = k4^2$. Tenim $k = 2$, és a dir $y(x) = 2x^2$ és la única solució de l'equació diferencial $y' = \frac{2y}{x}$ tal que $y(4) = 32$.

Queda exclòs d'aquest comentari tot punt del pla amb $x = 0$ (l'eix de les $x$) ja que aquest eix no pertany al domini de definició de la funció $f(x, y) = \frac{2y}{x}$ que determina l'equació diferencial. Observeu en el dibuix com pel punt $(0, 0)$ passen infinites paràboles. Sembla que això vagi en contra de la *unicitat* però no és així, pel que estem dient.




## 5.2 Interpretació geomètrica

Ja hem vist que resoldre una equació diferencial és trobar una funció $y = y(x)$ que compleixi la condició $y'(x) = f(x, y(x))$

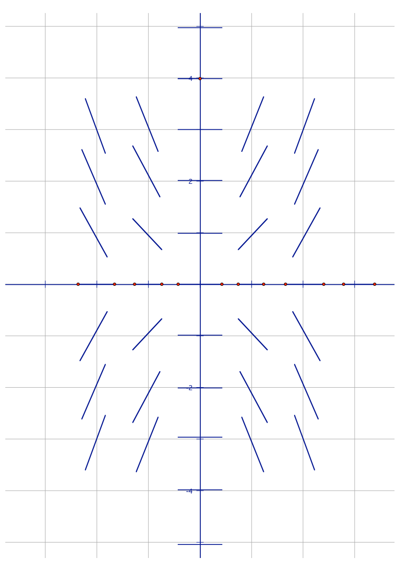
Si identifiquem les funcions amb les seves gràfiques, sabem que $y'(x_0)$ és el pendent de la gràfica de $y = y(x)$ en el punt d'abscissa $x = x_0$. O, equivalentment, en el punt $(x_0, y(x_0))$.

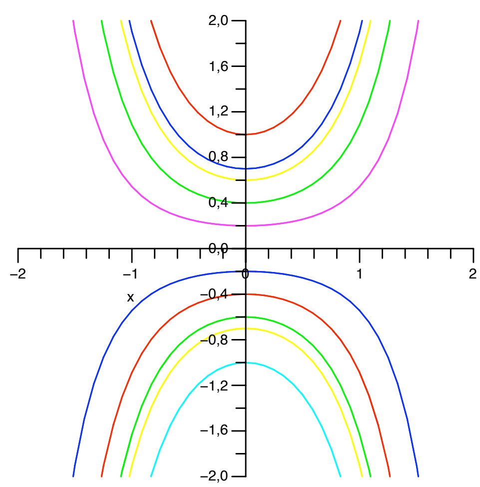
> *Per tant, trobar una solució de $y' = f(x, y)$ que compleixi la* condició inicial *$y(x_0) = y_0$ vol dir trobar una corba del pla $\mathbb{R}^2$, parametritzada per $x$, $(x, y(x))$, (és a dir, la gràfica d'un funció) tal que en el punt $(x_0, y_0)$ tingui pendent donada per $f(x_0, y_0)$.*

Per exemple, resoldre l'equació diferencial $y' = xy$, amb la condició inicial $(x_0, y_0)$, vol dir trobar corbes $(x, y(x))$ tals que la seva pendent en el punt $(x_0, y_0)$ valgui $x_0 y_0$.

Per exemple, si $x_0 = 0$, sigui qui sigui $y_0$, les corbes que busquem tenen pendent $0.y_0 = 0$ en $(0, y_0)$. És a dir, tallen l'eix de les $y's$ amb pendent zero. Si $x_0 = 1$, sigui qui sigui $y_0$, les corbes que busquem tenen pendent $1.y_0 = y_0$ en $(1, y_0)$. És a dir, tallen la recta $x = 1$ amb pendents iguals a la ordenada del punt de tall. Si dibuixem una quadrícula de $\mathbb{R}^2$ i en cada punt $(x_0, y_0)$ de la quadrícula hi dibuixem un petit segment de pendent $x_0 y_0$ ens fem una idea de com han de ser les corbes solució.

A la figura es veu primer aquest esquema i a continuació la veritable solució d'aquesta equació diferencial, formada per les infinites corbes $y = ke^{x^2/2}$, vegeu l'exercici 5.3.1.





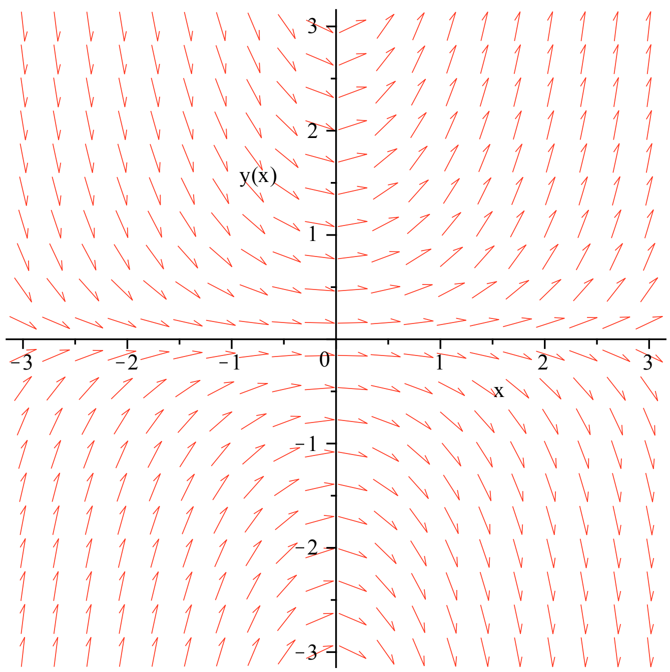
O directament amb Maple

> $with(DEtools):$

> $equacio := diff(y(x), x) = x \cdot y(x);$

$$equacio := \frac{d}{dx} y(x) = x\, y(x) \qquad (1)$$

> $DEplot(equacio, y(x), x=-3..3, y=-3..3);$




>

## 5.3 Equacions de variables separables

En el cas particular de que la funció $f(x, y)$ que defineix l'equació diferencial, sigui producte (o quocient[1]) de dues funcions, una de $x$ i una altre de $y$, l'equació és pot resoldre fàcilment per l'anomenat *mètode de separació de variables*.

Suposem

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Resoldre aquesta equació diferencial vol dir trobar una funció $y = y(x)$ tal que

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y(x))},$$

és a dir

$$h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x).$$

Simplement comparant amb la regla de la cadena[2] veiem que el primer terme és la derivada de la funció composta $H(y(x))$ on $H = H(y)$ és una

---

[1]El quocient de dos nombres es pot pensar com el producte d'un d'ells per l'nvers de l'altre, $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$.

[2]La *regla de la cadena* diu que si tenim una funció d'una variable $H(y)$

$$\begin{array}{rccc} H: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & H(y) \end{array}$$

però la variable $y$ depèn al seu torn d'una altre variable $x$, $y = y(x)$, llavors la derivada de la funció composta $H(y(x))$ està donada per

$$\boxed{(H \circ y)'(x) = H'(y(x)) \cdot y'(x).}$$

Més concretament

$$\frac{d(H(y(x)))}{dx} = \frac{dH}{dy}(y(x)) \cdot \frac{dy}{dx}.$$

La notació $\frac{dH}{dy}(y(x))$ vol dir derivar $H$ respecte de $y$ i a continuació substituir en el resultat $y$ per $y(x)$. Abusant de la notació la regla de la cadena s'escriu com

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dH}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

fàcil de recordar ja que només "multipliquem" i "dividim" per $dy$.

primitiva de $h(y)$, i.e. $H'(y) = h(y)$ o

$$H(y) = \int h(y)dy.$$

Tenim doncs

$$\frac{H(y(x))}{dx} = g(x)$$

Per tant, llevat de constant tenim

$$H(y(x)) = \int g(x)dx.$$

Equivalentment

$$\left(\int h(y)dy\right)(x) = \int g(x)dx$$

La notació de l'esquerra vol dir calcular $\int h(y)dy$ i a la funció que obtinguem substituir $y$ per $y(x)$.

Si tornem a l'equació inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

veiem que tractant el primer terme com un quocient de diferencials ( i no com un signe únic de derivació $\frac{d}{dx}$) l'anterior igualtat dóna

$$h(y)dy = g(x)dx,$$

que integrant a cada costat (i canviant $y$ per $y(x)$) ens dóna el mateix resultat que l'obtingut rigorosament usant la regla de la cadena.

Per resoldre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

posarem a un costat les $y$ i $dy$ i a l'altre les $x$ i $dx$,

$$h(y)dy = g(x)dx,$$

i integrarem a cada costat

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx.$$

**Exemple 5.3.1** *Resoleu l'equació diferencial $y' = xy$.*

*Solució.* Escrivim

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

i separem variables

$$\frac{dy}{y} = x\,dx.$$

Integrant als dos costats, tenim

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C_1; \qquad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_2$$

Per tant

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_3, \qquad C_3 = C_2 - C_1,$$

d'on

$$|y| = C_4\, e^{x^2/2}, \qquad C_4 = e^{C_3}.$$

Observem que $C_4$ és sempre positiva. Però el que busquem és $y$, i no $|y|$. Com que la diferència està només en el signe podem escriure (canviant com sempre $y$ per $y(x)$)

$$y(x) = ke^{x^2/2}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

$\Diamond$

**Exemple 5.3.2 (Refredament d'un cos)** *Suposem que la temperatura de l'aula és de* 20 *graus. Situem un petit objecte sobre la taula a* 100 *graus (amb una planxa de ferro a sota per no cremar la taula i evitar així que el degà s'enfadi). Suposem que al cap de* 20 *minuts la temperatura de l'objecte és de* 60 *graus. Trobeu la temperatura del cos al cap de* 30 *minuts. Quant trigarà en estar a* 30 *graus?*

Informació addicional. *La llei de Newton de refredament d'un cos diu que* un cos es refreda a una velocitat proporcional a la diferència de temperatura entre el propi cos i l'ambient.

*Solució.* Sigui $T(t)$ la temperatura del cos a l'instant $t$. La llei de Newton diu

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - 20), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Separant variables

$$\frac{dT}{T-20} = k\,dt.$$

Integrant

$$\ln(T-20) = kt + C,$$

equivalentment

$$T(t) = 20 + ae^{kt}, \quad a = e^C.$$

Tenim dues constants desconegudes: $a$ i $k$. La $k$ depèn del material, ja que hi ha materials que es refreden més ràpid que altres, i $a$ és una constant que ha aparegut en integrar.

Per tal de determinar-les usarem tota la informació que ens dóna el problema.

La temperatura del cos en el moment de introduir-lo a l'aula és de 100 graus. Això vol dir

$$T(0) = 100 = 20 + ae^{k0} = 20 + a,$$

i per tant $a = 80$.

Al cap de 20 minuts la temperatura del cos és de 60 graus. Això vol dir

$$T(20) = 60 = 20 + 80e^{20k}.$$

Per tant

$$e^{20k} = \frac{1}{2}$$

D'aquí deduïm directament

$$k = \frac{\ln 0.5}{20},$$

però és millor no aïllar $k$ sinó $e^k$ que és el que ens farà falta més endavant. Com que

$$e^{20k} = (e^k)^{20}$$

tenim que

$$e^k = (0.5)^{\frac{1}{20}}$$

Així

$$T(t) = 20 + 80e^{kt} = 20 + 80(e^k)^t = 20 + 80\,(0.5)^{\frac{t}{20}}$$

Observem que quan $t$ es fa molt gran, $(0.5)^{\frac{t}{20}}$ es fa molt petit, i la temperatura del cos tendeix a 20 graus, és a dir, tendeix a igualar-se amb la temperatura de l'aula, com era de preveure sense necessitat de fer cap càlcul.

La temperatura del cos al cap de 30 minuts és

$$T(t) = 20 + 80\,(0.5)^{\frac{30}{20}} \simeq 48,28 \text{ graus}.$$

Finalment, perquè sigui $T(t) = 30$ ha de ser

$$30 = 20 + 80\,(0.5)^{\frac{t}{20}}$$

és a dir

$$\frac{1}{8} = (0.5)^{\frac{t}{20}}.$$

Prenent logaritmes obtenim finalment

$$t = 60 \text{ minuts}.$$

$\diamondsuit$

**Exemple 5.3.3 (Mort del forense)** *La sala de dissecció es manté a una temperatura constant de* 5 *graus. El forense es queda sol treballant per la nit. L'endemà a les* 10 *del matí, l'ajudant del forense arriba a la sala i es troba el forense mort. Comprova que el cadàver està a* 23 *graus.*

*A les* 12 *arriben els mossos d'esquadra i comproven que el cadàver està a* 18.5 *graus. A quina hora va morir el forense?*

Informació addicional. *Suposarem que el forense estava a* 37 *graus de temperatura just abans de morir.*

*Solució.* Sigui $T(t)$ la temperatura del cos del forense a l'instant $t$. Comencem a contar el temps en el moment de la mort, de manera que tindrem $T(0) = 37$. Si entre la mort i les 10 del matí passa un temps (encara desconegut per nosaltres) $t_0$, tenim $T(t_0) = 23$ i $T(t_0 + 2) = 18.5$.

Per la llei de Newton del refredament d'un cos tenim

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - 5)$$

Separant variables

$$\frac{dT}{T-5} = k\,dt.$$

Integrant
$$\ln(T-5) = kt + C,$$
equivalentment
$$T(t) = 5 + ae^{kt}, \quad a = e^C.$$
Com que $T(0) = 37$, tenim $37 = 5 + ae^0$, és a dir, $a = 32$. Així

$$\begin{aligned} T(t_0) &= 23 &= 5 + 32e^{kt_0} \\ T(t_0+2) &= 18.5 &= 5 + 32e^{k(t_0+2)} \end{aligned}$$

Sistema de dues equacions amb dues incògnites, $t_0$ i $k$.

De la primera deduïm
$$e^{kt_0} = \frac{9}{16}$$
i de la segona
$$13.5 = 32 \cdot \frac{9}{16} \cdot e^{2k}$$
Aïllant obtenim
$$k = -0.1438$$
Per tant,
$$t_0 = \frac{1}{k} \ln \frac{18}{32} = 4.00$$
És a dir, el forense va morir a les 6 del matí. $\diamondsuit$

**Exemple 5.3.4 (Elements radioactius)** *Suposem que inicialment tenim* 100 *grams d'una substància radioactiva. Al cap de* 6 *hores la mostra ha disminuït un* 4%*. De quin material es tracta? Quina quantitat de material tindrem al cap de* 24 *hores?*

Informació addicional. *Hauríem de tenir a ma una taula amb la vida mitja dels materials radioactius.*

*Solució.* Sigui $x(t)$ la quantitat de material a l'instant $t$, de manera que $x(0) = 100$ grams. Com que els materials radioactius disminueixen a una velocitat proporcional a la quantitat de material existent en cada moment tenim
$$x'(t) = kx(t),$$

equació diferencial de variables separables

$$\frac{dx}{dt} = kx(x)$$

que es pot escriure com

$$\frac{dx}{x} = k\,dt,$$

que integrant dóna

$$\ln(x(t)) = kt + b, \quad b \text{ una constant.}$$

Per tant,

$$x(t) = e^{kt+b} = ce^{kt}, \quad c = e^b \text{ una constant positiva.}$$

Per calcular $c$ posem

$$100 = x(0) = ce^{k0} = c.$$

Per calcular $k$ posem

$$96 = x(6) = ce^{6k} = 100e^{6k}.$$

Aquesta última equació expressa que al cap de 6 hores ($t = 6$) la matèria a disminuït un 4%, i.e. $x(6) = 100 - 4\%(100) = 96$. Així,

$$k = \frac{1}{6}\ln\frac{96}{100}$$

Com que el logaritme neperià d'un número més petit que 1 és negatiu, la constant $k$ és negativa.

Està molt bé conèixer la $k$, però si som una mica previsors veurem que més que necessitar conèixer $k$ el que realment necessitem és conèixer $e^k$. Com que

$$\frac{96}{100} = e^{6k}$$

tenim

$$e^k = (\frac{96}{100})^{1/6} = \sqrt[6]{\frac{96}{100}}$$

Així l'equació $x(t) = ce^{kt}$ s'escriu com

$$\boxed{x(t) = 100(e^k)^t = 100(\tfrac{96}{100})^{t/6}.}$$

Per tant, al cap de 24 hores tindrem una quantitat de material igual a

$$x(24) = 100(\frac{96}{100})^4 = 84,93 \text{ grams}$$

I la vida mitja $T$ és el temps que triga en reduïr-se a la meitat. És a dir,

$$x(T) = 100(\frac{96}{100})^{T/6} = \frac{1}{2}100.$$

Deduïm,

$$2(\frac{96}{100})^{T/6} = 1.$$
$$\frac{T}{6}\ln(\frac{96}{100}) = \ln\frac{1}{2}.$$

I per tant,

$$T = 6\ \frac{-0.6931}{-0.0408} = 101,92 \text{ hores} \simeq 4 \text{ dies i unes hores.}$$

Un material que té una vida mitja de quasi 4 dies és el *radon* 222. Per tant, és molt probable que el nostre material inicial sigui *radon* 222. Hauríem de saber si hi ha altres materials amb una semblant vida mitja. Hi són?

**Exemple 5.3.5 (Datació)** [3]*L'any* 1950 *es va comprovar que el* $C_{14}$ *present al carbó d'alzina usat per pintar les pintures paleolítiques de Lascaux, es desintegrava a raó de* 0.97 *desintegracions per gram i minut. Quants anys tenen aquestes pintures?*

Informació addicional necessària*: 1) El* $C_{14}$ *present a la fusta viva es desintegra a raó de* 6.68 *desintegracions per gram i minut. 2) La vida mitja del* $C_{14}$ *és d'uns* 5568 *anys.*

*Solució.* Denotem per $x(t)$ la quantitat de carboni 14 present en el carbó d'alzina a l'instant $t$. Prenem com origen del temps el moment en que es mata la fusta, és a dir, quan es fa el carbó, que identificarem amb el moment en que es dibuixen les pintures de Lascaux.

Com que els materials radioactius es desintegren a una velocitat proporcional a la quantitat de material en cada moment, tenim

$$x'(t) = kx(t).$$

[3]Tret del llibre *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*, de M. Braun.

Resolent, obtenim

$$x(t) = ae^{kt}, \quad a, k \in \mathbb{R} \quad \text{constants desconegudes.}$$

La nostra incògnita és el període de temps $T$ transcorregut des de l'inici ($t = 0$) fins el 1950.

Sabem $x'(T) = 0.97$ i $x'(0) = 6.68$ (ja que quan $t = 0$ la fusta encara estava viva.)

Derivant $x(t) = ae^{kt}$ tenim $x'(t) = ake^{kt}$ i per tant

$$\begin{aligned} 0.97 &= ake^{kT} \\ 6.68 &= ak \end{aligned}$$

Dividint tenim

$$\frac{0.97}{6.68} = e^{kT}$$

Així,

$$T = \frac{1}{k} \ln \frac{0.97}{6.68}.$$

Per trobar $k$ hem d'usar la informació sobre la vida mitja:

$$x(5568) = \frac{1}{2}x(0) = \frac{1}{2}a = ae^{5568\,k}.$$

Simplificant $a$ i prenent logaritmes

$$\ln \frac{1}{2} = 5568\,k$$

Per tant

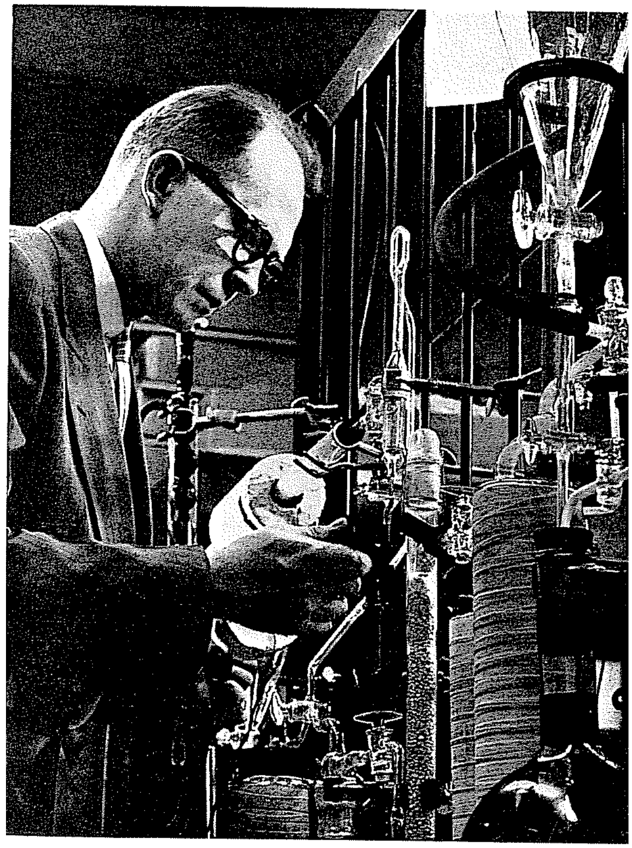
$$\frac{1}{k} = \frac{5568}{-\ln 2}$$

Substituint a (5.1) tenim

$$T = \frac{5568}{-\ln 2} \ln \frac{0.97}{6.68} \simeq 15498 \text{ anys.}$$

$\Diamond$

**Nota 5.3.6** El primer d'estudiar la datació per radiocarboni ($C_{14}$) va ser W. F. Libby. Ell va usar la vida mitja de 5568 anys que es continua usant per raons hitòriques, però és més exacte el valor de 5730.



Doctor Williard F Libby, nacido en el estado de Colorado de Estados Unidos, graduado en la univer sidad de California, premio Nobel de Química, iniciador de la datación radiocarbónica Actualment en el Instituto de Geofísica de la universidad de California, Miembro correspondiente de la Acade mia Nacional de Ciencias de Bolivia.

2 — Libby, Dat radiocar.

**Nota 5.3.7** *Informació de la web de la cova*: Las primeras proposiciones cronológicas.

Henri Breuil y Denis Peyrony establecieron una relación con el Gravetiense. Para Breuil, la cronología del arte parietal paleolítico se basaba en la existencia de dos ciclos, uno auriñaciense-perigordiense, otro solutrense-magdaleniense. Puso en relación con Lascaux las figuras pintadas sobre bloques encontrados en estratigrafía -y bien datados- del abrigo de Labattut (Perigordiense) y del abrigo de Blanchard (Auriñaciense). Una evaluación más matizada fue realizada por Annette Laming, quien señaló que esta iconografía mostraba tantos caracteres que podían ser atribuibles tanto al uno como al otro de estos dos grandes ciclos. Para Séverin Blanc, la mayoría de indicios tendían a atribuir a una parte de este arte un origen más bien solutrense-magdaleniense.

*Primera datación de radiocarbono.* En 1951, un cierto número de fragmentos de carbones de madera que provenían de las excavaciones del Pozo fueron analizados en Chicago, en el laboratorio del Dr. W. Frank Libby, iniciador del método. Los resultados aportaron nuevos argumentos en favor de la última propuesta. La fecha obtenida, en torno a 15.500 años BP, colocaba a Lascaux en la cultura Magdaleniense.

Sala dels torus de Lascaux

André Glory hizo datar nuevas muestras de carbones de madera, tomadas durante las excavaciones en el Pasaje y en el Pozo, que dieron respectivamente 17.190 $\pm$ 140 BP y 16.000$\pm$500 BP, fechas que confirmaban la atribución de los artefactos a un período antiguo del Magdaleniense. André Leroi-Gourhan, se basó en datos estilísticos; los yacimientos de Fourneau du Diable, en Bourdeilles (Dordoña) y de Roc-de-Sers (Charente), bien datados, sirvieron de elementos de referencia. Le permitieron precisar que Lascaux era Solutrense. Sin embargo, algunos años más tarde, el estudio de la industria lítica y ósea, así como el análisis estratigráfico de los cortes practicados por André Glory, introdujeron modificaciones a este esquema. Los trabajos, dirigidos por Arlette Leroi-Gourhan y Jacques Allain, precisaron y estrecharon la estimación cronológica y el conjunto de Lascaux fue atribuido al Magdaleniense II. André Leroi-Gourhan suscribió esta propuesta. Estos ajustes sucesivos muestran las dificultades encontradas para establecer un diagnóstico preciso, suficientemente argumentado.

*1998, 2002, nuevos análisis.* En 1998, y más adelante en 2002, dos dataciones radiocarbónicas realizadas a partir de fragmentos de varilla de cuerno de reno hallados en las excavaciones de Henri Breuil y Séverin Blanc, tienden a envejecer las últimas estimaciones, con una edad situada entre 18.600 y 18900 BP, en el límite entre el Solutrense superior y el Badeguliense.El análisis formal de las figuras de Lascaux hace pensar que este arte pertenecería a una tradición solutrense. Obviamente, estas figuras evocan más bien las obras de Fourneau-du-Diable o de Roc-de-Sers, yacimientos perfectamente datados de este período, que cualquier ejemplo magdaleniense. Los signos geométricos participan en la aproximación del arte de Lascaux con el del Solutrense.

**Nota 5.3.8** El valor de 6.68 desintegracions per gram i minut em sembla molt petit. Hi ha diverses fustes que es mouen sobre 14 o 15 desintegracions per gram i minut. Per exemple, avet blanc, om, roure, etc. Si repetim els càlculs del problema canviant el 6.68 per un valor entre 14 o 15 obtenim per a $T$ un valor pròxim als 20000 anys (en lloc del 15498 obtinguts). Ens movem dintre dels períodes que trobem a la web de la cova.

**Nota 5.3.9** Cada àtom de $C_{14}$ es transforma en un àtom de nitrogen $N_{14}$ i emet una partícula $\beta$ (de fet, un electró), de manera que quan parlem de *desintegracions* per gram i minut (o gram i segon) ens referim al nombre de partícules $\beta$ emeses per tots els àtoms de $C_{14}$ que hi ha en un gram (concretament $0,42 \times 10^{23}$ àtoms, ja que aquest nombre s'obté dividint el número d'Avogadro pel pes atòmic del $C_{14}$ que és $14,003$). Per comptar les partícules $\beta$ es mesura la seva energia amb un comptador Geiger. Cada partícula $\beta$ produeix una energia de $0,156 MeV$.

L'activitat específica del $C_{14}$, segons les taules de propietats nuclears dels elements, és de $1,67 \cdot 10^{11} Bq/g$

La notació $Bq$ vol dir Becquerel. Un cos té una activitat específica d'un Becquerel quan emet una radiació per segon. La notació $Bq/g$ vol dir *Becquerels per gram de $C_{14}$, no per gram de mostra.*

Com que en el problema de Lascaux s'està parlant de 6,68 desintegracions per gram i minut ($0,111$ desintegracions per gram i segon $= 0,111$ $Bq$ per gram) de MOSTRA, això vol dir que que la proporció de Carboni 12 a la mostra és del 66% ja que llavors en un gram de mostra hi ha 0.066 grams de carboni 12, i per tant aproximadament $0.066 \times 10^{-12}$ grams de $C_{14}$.

Per tant, cada gram de mostra emet $(1.67 \times 10^{11}) \times 0.66 \times 10^{-12} = 0,11$ $Bq$ que quadra amb la dada del problema.

**Exemple 5.3.10** *En unes ruïnes es va trobar carbó vegetal que contenia una relació $C_{14}/C_{12}$ igual a la cinquena part de la que es troba en la materia viva. Calculeu l'edat de las ruïnes.*

Informació addicional necessària*: El quocient $C_{14}/C_{12}$ és constant en els éssers vius.*

Informació addicional no necessària*: El quocient $C_{14}/C_{12}$ és igual a $\frac{1}{10^{12}}$ en els éssers vius.*

*Solució.* Denotem per $C_{14}(t)$ la quantitat de $C_{14}$ que hi ha a la mostra de carbó vegetal a l'instant $t$.

La quantitat de $C_{14}$ en els éssers vius és constant. De fet, la velocitat amb que un ésser viu assimila $C_{14}$ de l'atmosfera és igual, però de signe contrari, a la velocitat amb que el perd (per desintegració radioactiva). És a dir, la velocitat global de variació és zero.

Com que el $C_{12}$ no és radioactiu, la seva quantitat en els éssers tan vius com morts és constant, i la denotarem simplement per $C_{12}$.

Un cop l'organisme mort, sabem que l'element radioactiu $C_{14}$ decau seguint la llei

$$C_{14}(t) = C_{14}(0)e^{kt}$$

on

$$k = -\frac{\ln 2}{5730}, \quad 5730 = \text{vida mitja } C_{14}$$

Per tant

$$\frac{C_{14}(t)}{C_{12}} = \frac{C_{14}(0)e^{kt}}{C_{12}} = \frac{C_{14}(0)}{C_{12}}e^{kt}$$

El problema ens diu que en el moment $T$ de l'estudi tenim

$$\frac{C_{14}(T)}{C_{12}} = \frac{1}{5}(\frac{C_{14}(0)}{C_{12}})$$

Comparant aquestes dues últimes igualtats tenim

$$\frac{1}{5} = e^{kT}$$

Per tant,

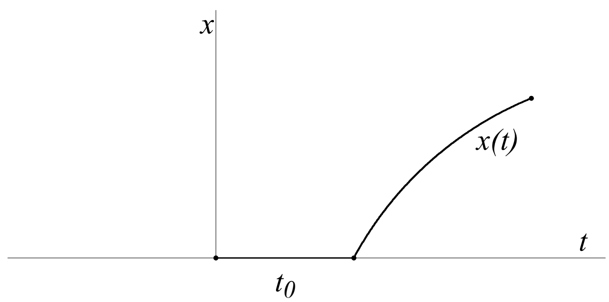
$$T = \frac{1}{k}\ln(\frac{1}{5}) = 8266,642 \cdot 1,6094 = 13304,64$$

**Exemple 5.3.11 (Està nevant)** [4] *Està nevant amb regularitat. A les* 12 *surt una màquina llevaneus. La primera hora recorre* 2 *km, però la segona només* 1 *km (degut als problemes que té en avançar, per la neu acumulada). A quina hora va començar a nevar?*

Informació addicional necessària. *1) La velocitat de la màquina llevaneus és inversament proporcional a l'altura de la neu acumulada (així traduïm l'expressió* degut als problemes que té en avançar … *). 2) L'altura de la neu és proporcional al temps que fa que neva (així traduïm l'expressió* Està nevant amb regularitat.*)*

*Solució.* Sigui $x(t)$ l'espai recorregut per la màquina llevaneus quan han transcorregut $t$ hores des que va començar a nevar.

La gràfica d'aquesta funció serà doncs del tipus




on $t_0$ és la nostra incògnita: el temps que passa des de que comença a nevar ($t = 0$) fins que surt la màquina llevaneus. Com que la màquina surt a les 12, sabem que va començar a nevar a les $(12 - t_0)$ hores.

Si denotem per $h(t)$ l'altura de la neu acumulada a l'instant $t$, tenim

$$h(t) = at, \quad a \text{ una constant.}$$

Això és el que diu la frase *L'altura de la neu és proporcional al temps que fa que neva.*

També tenim

$$x'(t) = \frac{b}{h(t)}, \quad b \text{ una constant.}$$

Això és el que diu la frase *La velocitat de la màquina llevaneus és inversament proporcional a l'altura de la neu.*

[4]Tret del llibre *Ecuaciones Diferenciales* de Puig Adam.

Per tant
$$x'(t) = \frac{c}{t}, \quad c \text{ una constant } (c = b/a).$$

Integrant tenim

$$x(t) = c\ln(t) + k, \quad k \text{ una constant.}$$

Per determinar $c, k, t_0$ necessitem tres equacions. Són les següents:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= 0 = c\ln(t_0) + k \\ x(t_0+1) &= 2 = c\ln(t_0+1) + k \\ x(t_0+2) &= 3 = c\ln(t_0+2) + k \end{aligned}$$

Observem que $x(t_0+2)$ és l'espai recorregut per la màquina dues hores desprès de sortir. Com que la primera hora avança $2\,km$ i la segona $1\,km$, en dues hores ha avançat $3\,km$.

Aïllant $k$ de la primera equació i substituint-la a les altres dues equacions tenim

$$\begin{aligned} 2 &= c\ln(t_0+1) - c\ln(t_0) = c\ln\frac{t_0+1}{t_0} = c\ln(1+\frac{1}{t_0}) \\ 3 &= c\ln(t_0+2) - c\ln(t_0) = c\ln\frac{t_0+2}{t_0} = c\ln(1+\frac{2}{t_0}) \end{aligned}$$

Posem $\tau = \frac{1}{t_0}$. Tindrem

$$\begin{aligned} 2 &= c\ln(1+\tau) \\ 3 &= c\ln(1+2\tau) \end{aligned}$$

Per tant
$$\frac{2}{3} = \frac{\ln(1+\tau)}{\ln(1+2\tau)}$$

Equivalentment,
$$2\ln(1+2\tau) = 3\ln(1+\tau)$$

o bé
$$\ln(1+2\tau)^2 = \ln(1+\tau)^3,$$

i per tant

$$\begin{aligned}
(1+2\tau)^2 &= (1+\tau)^3 \\
1+4\tau+4\tau^2 &= 1+3\tau+3\tau^2+\tau^3 \\
4+4\tau &= 3+3\tau+\tau^2 \\
\tau^2-\tau-1 &= 0
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618..$$

I[5]

$$t_0 = \frac{1}{\tau} = 0,618..$$

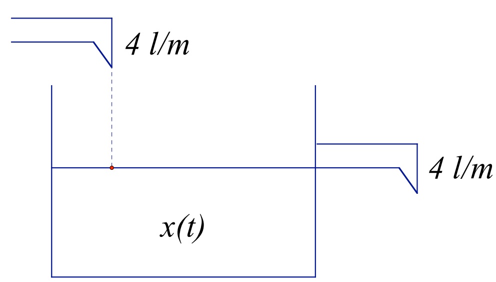
Per tant va començar a nevar a les $12 - 0,618 = 11,382$ hores, i.e. a les 11h 22,8' = 11h 22' 48" aproximadament. $\Diamond$

**Exemple 5.3.12 (Diposits)** *Tenim un dipòsit de* 200 *litres ple d'aigua. Hi tirem* 30 *grams de sal. A continuació obrim una aixeta per la que entra dissolució d'aigua amb sal, que té una concentració de* 1 *gram de sal per litre, a una velocitat de* 4 *litres per minut i obrim al mateix temps una altra aixeta per la que surt el contingut del dipòsit a una velocitat també de* 4 *litres per minut.*

*Suposem que la mescla de les dues dissolucions, la del dipòsit i la que entra, es fa de manera instantània.*

*Estudieu la quantitat de sal que hi ha en el dipòsit en cada moment. En quin moment hi haurà* 60 *grams de sal al dipòsit?*

*Solució.* Sigui $x(t)$ la quantitat de sal dins el dipòsit a l'instant $t$. En particular, $x(0) = 30$ grams.




[5]Casualment ha sortit que $\tau$ és la raó àurea o nombre d'or. Així que ja sabem que val 1.618 i que el seu invers s'obté restant 1, és a dir és igual a $0,618$.

La concentració de la sal al dipòsit (quantitat de sal per litre) és doncs $q(t) = x(t)/200$ grams/litre.

A quina velocitat surt la sal? La dissolució surt a raó de 4 litres/minut, però la dissolució que surt a l'instant $t$ té una concentració de sal $q(t)$, per tant la sal surt a raó de

$$4\ litres/minut\ \times q(t)\ grams/litre\ = 4q(t)\ grams/minut$$

(veure aclariment més avall).

Ara escrivim que la velocitat de variació de la quantitat de sal dins el dipòsit ($x(t)$) és igual a la velocitat en que entra sal (4 grams/minut) menys la velocitat en que surt ($4q(t)$).

$$x'(t) = 4 - 4q(t) = 4 - 4\frac{x(t)}{200} = 4 - \frac{x(t)}{50}.$$

Separant variables

$$\frac{dx}{4 - \frac{x}{50}} = dt,$$

i per tant

$$-50\ln(4 - \frac{x}{50}) = t + C.$$

Equivalentment,

$$\ln(4 - \frac{x}{50})^{-50} = t + C,$$

i per tant

$$(4 - \frac{x}{50})^{-50} = e^{t+C}.$$

Elevant a $-1/50$, tenim

$$4 - \frac{x}{50} = ke^{-t/50}, \quad k = e^{-C/50}.$$

$$\boxed{x(t) = 200 - 50\,k\,e^{-t/50}}$$

Observem que aquesta funció és creixent (sempre hi haurà més de 30 grams de sal al dipòsit), i que a la llarga s'estabilitzarà en 200 grams de sal, és a dir 1 gram de sal per litre, cosa raonable ja que aquesta és la concentració de la sal que entra.

Quan diem *a la llarga* volem dir

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 200,$$

ja que $\lim_{t\to\infty} e^{-t/50} = 0$.

Si ara volem saber quan hi haurà 60 grams de sal al dipòsit només hem de posar

$$60 = 200 - 170e^{-t/50}.$$

Per tant $t = 50 \ln \frac{17}{14} = 9,7$ minuts.

$\diamondsuit$

*Aclariment. La quantitat de sal que surt entre $t_0$ i $t_0 + \Delta t$ és igual a $4\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} q(t)dt$. I per tant, la velocitat de sortida de sal a l'instant $t$ és $4q(t)$.*

En efecte, en l'interval de temps $\Delta t$, surten $4\Delta t$ litres de dissolució. A l'instant $t_0$ està sortint dissolució amb una concentració $q(t_0)$ i a l'instant $t_0 + \Delta t$ està sortint dissolució amb una concentració $q(t_0 + \Delta t)$.

La idea intuïtiva és que com $\Delta t$ és molt petit podem suposar $q(t)$ constant en aquest petit interval. Però precisem-ho millor.

Posem

$$Q(t_0, \Delta t) = \text{Quantitat de sal que surt entre } t_0 \text{ i } t_0 + \Delta t.$$

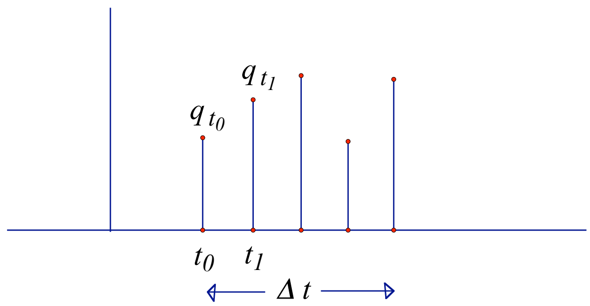
Si dividim l'interval $[t_0, t_0+\Delta t]$ en $n$ parts iguals i considerem $q(t)$ constant en aquests petits intervals tindrem

$$\begin{aligned} Q(t_0, \Delta t) &\simeq \sum_{i=1}^{n} \text{quantitat de sal que surt durant l'interval } [t_{i-1}, t_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} 4\frac{\Delta t}{n}\, q(t_i), \qquad t_i = t_0 + i\frac{\Delta t}{n} \end{aligned}$$

Per canviar el signe $\simeq$ per $=$ només hem de fer que $n$ tendeixi a infinit. Així

$$\begin{aligned} Q(t_0, \Delta t) &= 4 \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta t}{n} \sum_{i=1}^{n} q(t_i) \\ &= 4 \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} q(t)dt. \end{aligned}$$

(La última igualtat és la definició d'integral.)




Si denotem per $y(t)$ la sal que ha sortit al cap de $t$ minuts, la velocitat de sortida de la sal és

$$\begin{aligned}
y'(t_0) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0+\Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{quantitat de sal que surt entre } t_0 \text{ i } t_0+\Delta t}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} q(t)dt}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4\Delta t q(\xi)}{\Delta t}, \quad \xi \in (t_0, t_0+\Delta t) \\
&= 4q(t_0).
\end{aligned}$$

$\Diamond$

## 5.4 Equacions diferencials lineals de primer ordre

Reben aquest nom les equacions diferencials del tipus

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$$

on $p(x), q(x)$ són funcions arbitràries.

Per exemple

$$\begin{aligned} y' + y &= 0 \\ y' + xy &= e^x \\ y' + \sin(x)y &= \cos(x) \\ &\mathit{etc} \end{aligned}$$

El que fa senzilles aquestes equacions és que en el cas particular $q(x) = 0$ l'equació que tenim, $y' + p(x)y = 0$, és de variables separables. Es diu que $y' + p(x)y = 0$ és l'equació diferencial *homogènia* associada a $y' + p(x)y = q(x)$.

Que la homogènia és de variables separables és fàcil de veure ja que

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

i per tant

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

i ja tenim les variables separades. Integrant,

$$\ln y = -\int p(x)dx + C,$$

és a dir

$$y(x) = ke^{-\int p(x)dx}$$

Denotem per $P(x)$ una primitiva de $p(x)$ (en cada cas particular tindrem el problema de calcular explícitament aquesta primitiva $P(x)$), i posem

$$y(x) = ke^{-P(x)}.$$

Es diu que $y(x) = ke^{-P(x)}$ és la *solució general* de l'equació diferencial homogènia $y' + p(x)y = 0$. Pel teorema d'unicitat, *tota solució és d'aquesta forma*, per a un valor adequat de la constant $k$ que es determina a partir de les condicions inicials.

És a dir, que si sabéssim que una certa funció $y = f(x)$ és solució de $y' + p(x)y = 0$, calcularíem $f(x_0)$, per a un cert valor $x_0$, i posaríem $y_0 = f(x_0)$. A continuació buscaríem $k$ per tal de que

$$y(x_0) = ke^{-P(x_0)}, \quad \text{i.e.} \quad k = y(x_0)e^{P(x_0)}$$

Llavors $f(x)$ i $y(x) = ke^{-P(x)}$, amb aquesta $k$ que acabem de trobar, són solucions de la mateixa equació diferencial amb la mateixa condició inicial, i per tant són iguals.

**Proposició 5.4.1** *Si $y_1(x)$ i $y_2(x)$ són dues solucions de l'equació diferencial lineal $y' + p(x)y = q(x)$, llavors existeix $k$ tal que*

$$y_2(x) = y_1(x) + ke^{-\int p(x)dx}.$$

*Demostració.* Només cal veure que $y(x) = y_2(x) - y_1(x)$ és solució de l'equació diferencial homogènia $y' + p(x)y = 0$. Però això és clar, ja que

$$(y_2 - y_1)' + p(x)(y_2 - y_1) = (y_2' - p(x)y_2) - (y_1' + p(x)y_1) = q(x) - q(x) = 0.$$

Com que tota solució de la homogènia és de la forma $ke^{-\int p(x)dx}$, tenim

$$y_2(x) - y_1(x) = ke^{-\int p(x)dx},$$

i hem acabat. □

**Corol·lari 5.4.2** *La solució general de $y' + p(x)y = q(x)$ és igual a una solució particular de $y' + p(x)y = q(x)$ més la solució general de la homogènia $y' + p(x)y = 0$.*

*Demostració.* Conseqüència immediata de la proposició anterior, ja que si coneixem una solució $y_1(x)$ de $y' + p(x)y = q(x)$, la igualtat

$$y_2(x) = y_1(x) + ke^{-\int p(x)dx},$$

ens dóna *qualsevol* solució $y_2(x)$. □

| La solució general de la no homogènia és igual a la solució general de la homogènia més una solució particular de la no homogènia. |
|---|

Per tant, per resoldre $y' + p(x)y = q(x)$ tant sols hem de donar algun mètode que ens permeti trobar una solució particular. Desprès només hi hem de sumar la solució general de la homogènia. Explicarem l'anomenat *mètode de variació de les constants.*

### 5.4.1 Mètode de variació de les constants.

La idea és que si $ke^{-P(x)}$ és solució de la homogènia, la solució de la no homogènia no serà massa diferent d'aquesta. Podem provar si hi ha alguna solució de la no homogènia que sigui del tipus $k(x)e^{-P(x)}$ per a una certa funció $k(x)$ que s'ha de determinar. Com que el que fem és canviar $k$ per $k(x)$ el mètode es diu de *variació de les constants.*

Posem $y_1(x) = k(x)e^{-P(x)}$. Llavors

$$y_1'(x) = k'(x)e^{-P(x)} - k(x)P'(x)e^{-P(x)} = k'(x)e^{-P(x)} - k(x)p(x)e^{-P(x)},$$

i per tant

$$y_1'(x)+p(x)y_1(x) = k'(x)e^{-P(x)}-k(x)p(x)e^{-P(x)}+p(x)k(x)e^{-P(x)} = k'(x)e^{-P(x)}.$$

Com que volem que $y_1' + p(x)y_1$ sigui igual a $q(x)$ *imposem*

$$k'(x)e^{-P(x)} = q(x),$$

és a dir

$$k'(x) = q(x)e^{P(x)},$$

i per tant podem trobar $k(x)$ simplement integrant (en cada cas particular aquesta integral pot ser difícil de calcular)

$$k(x) = \int q(x)e^{P(x)}\,dx$$

Així,

$$y_1(x) = (\int q(x)e^{P(x)}\,dx)e^{-P(x)}$$

és una solució particular de $y' + p(x)y = q(x)$.

**Exemple 5.4.3** *Trobeu la solució general de $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ i la solució particular tal que $y(0) = 2$.*

*Solució.* Resolem primerament l'equació homogènia $y' + 2xy = 0$. Separant variables tenim

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx.$$

Integrant independentment els dos costats d'aquesta igualtat obtenim

$$y = ke^{-x^2}.$$

Ara busquem una solució de $y'+2xy = 2xe^{-x^2}$ que sigui del tipus $y_1(x) = k(x)e^{-x^2}$ (variació de les constants). Derivant tenim

$$y_1'(x) = k'(x)e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}k(x),$$

i per tant

$$y_1' + 2xy_1 = k'(x)e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}k(x) + 2xk(x)e^{-x^2} = k'(x)e^{-x^2}.$$

Ara imposem que $y_1' + 2xy_1$ sigui igual a $2xe^{-x^2}$. Tenim

$$k'(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2},$$

i per tant

$$k(x) = x^2.$$

(En aquest cas ens podem oblidar de la constant d'integració.)

Per tant, la solució particular buscada és

$$y_1(x) = x^2e^{-x^2}$$

i la solució general (suma de la particular més la general de la homogènia) és doncs

$$y(x) = x^2e^{-x^2} + ke^{-x^2} = (k + x^2)e^{-x^2}.$$

Per trobar la solució que compleix $y(0) = 2$ substituïm $x = 2$ a la fórmula solució general i obtenim

$$2 = (k + 0^2)e^{-0^2} = k.$$

Per tan la solució particular demanada és

$$y(x) = (2 + x^2)e^{-x^2}.$$

♢

**Exemple 5.4.4** *Sabent que $y(x) = xe^{-x}$ és solució de $y' + y = e^{-x}$, trobeu la solució de $y' + y = e^{-x}$ tal que $y(0) = 1$.*

*Solució.* La solució general de la homogènia $y' + y = 0$ és $y(x) = ke^{-x}$. Per tan la solució general de la no homogènia és

$$y(x) = xe^{-x} + ke^{-x}.$$

Imposem $y(0) = 1$ i obtenim $k = 1$, de manera que la solució particular demanada és

$$y(x) = (x + 1)e^{-x}.$$

♢

**Exemple 5.4.5** *Trobeu la solució de $y' + y = e^{-x}$ tal que $y(3) = 7$.*

*Solució.* Resolem la homogènia $y' + y = 0$. Es de variables separables. Obtenim $y(x) = ke^{-x}$.

Per trobar una solució particular fem *variació de les constants*. És a dir, busquem una solució del tipus $y(x) = k(x)e^{-x}$. Com que $y'(x) = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}$, tenim

$$y' + y = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = k'(x)e^{-x},$$

i ara imposem $y' + y = e^{-x}$ i tenim

$$k'(x)e^{-x} = e^{-x},$$

és a dir, $k'(x) = 1$ i per tant $k(x) = x$ (podem prescindir de la constant d'integració). La solució particular és doncs $y(x) = xe^{-x}$ i la solució general és doncs

$$y(x) = xe^{-x} + ke^{-x} = (x + k)e^{-x}.$$

Si imposem $y(3) = 7$ tenim

$$7 = (3 + k)e^{-3},$$

d'on $k = 7e^3 - 3$ i per tant la solució buscada és

$$y(x) = xe^{-x} + ke^{-x} = (x + 7e^3 - 3)e^{-x}.$$

$\diamondsuit$

**Exemple 5.4.6** *Trobeu la solució de $y' + \frac{1}{x}y = x$ tal que $y(6) = 20$.*

*Solució.* Resolem la homogènia $y' + \frac{1}{x}y = 0$ que és de variables separables. Tenim

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

d'on

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

que integrant dóna

$$\ln y = -\ln x + C = \ln x^{-1} + C = \ln kx^{-1}, \quad C = \ln k.$$

Per tant
$$y(x) = \frac{k}{x}.$$

Per trobar una solució particular fem *variació de les constants*. És a dir, busquem una solució del tipus
$$y(x) = \frac{k(x)}{x}.$$

Com que $y'(x) = k'(x)\frac{1}{x} - k(x)\frac{1}{x^2}$ tenim
$$y' + \frac{1}{x}y = k'(x)\frac{1}{x} - k(x)\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{k(x)}{x} = k'(x)\frac{1}{x},$$

i ara imposem $y' + \frac{1}{x}y = x$ i tenim
$$k'(x)\frac{1}{x} = x,$$

és a dir
$$k'(x) = x^2$$

i per tant $k(x) = \frac{x^3}{3}$ (podem prescindir de la constant d'integració). La solució particular és doncs
$$y(x) = \frac{\frac{x^3}{3}}{x},$$

i la solució general és doncs
$$y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{k}{x}.$$

Si imposem $y(6) = 20$ tenim
$$20 = \frac{6^2}{3} + \frac{k}{6},$$

d'on $k = 48$ i per tant la solució buscada és
$$y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x}.$$

$\Diamond$

## 5.5 Model de les epidèmies

Suposem[6] que estudiem una població sotmesa a una epidèmia. Per simplificar el model farem diverses hipòtesis raonables.

Concretament acceptarem:

- Si una persona es recupera de la infecció, queda immune.
- El període d'incubació és curt (quan s'agafa la infecció, s'esdevé infecciós immediatament).
- No considerem naixements, ni morts per altres causes, ni emigració ni immigració.
- La tassa de canvi (velocitat de variació) del nombre $S$ de persones susceptibles de contraure la infecció, és proporcional al propi nombre $S$ i al nombre d'infecciosos $I$ (contraure la malaltia depèn del nombre de contactes entre persones sanes (no immunes) i malaltes).
- La tassa de canvi (velocitat de variació) del nombre $R$ de persones retirades (morts, recuperats de la malaltia o aïllats pel sistema sanitari) és proporcional al nombre $I$ d'infecciosos (com més malalts més morts).

Aquestes hipòtesis porten a les equacions següents:

$$\begin{aligned} I+S+R &= N, \quad \text{on } N \text{ és una constant.} \\ \frac{dS}{dt} &= -rSI, \quad \text{on } r \text{ és una constant positiva } (\textit{tassa d'infecció}). \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I, \quad \text{on } \gamma \text{ és una constant positiva } (\textit{tassa de retir}). \end{aligned}$$

Derivant la primera equació tenim

$$\frac{dI}{dt}+\frac{dS}{dt}+\frac{dR}{dt}=0$$

Equivalentment

$$\frac{dI}{dt}=-\frac{dS}{dt}-\frac{dR}{dt}=rSI-\gamma I.$$

[6] Apunts Ferran Cedó.

Volem trobar $I$ com a funció de $S$. Usant la regla de la cadena tenim

$$\frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{dS}{dt}} = \frac{dI}{dS} = \frac{rSI - \gamma I}{-rSI} = -1 + \frac{\gamma}{rS}.$$

Aquesta funció diferencial que té $S$ com a variable independent i $I = I(S)$ com a funció incògnita és de variables separables i es pot resoldre fàcilment.

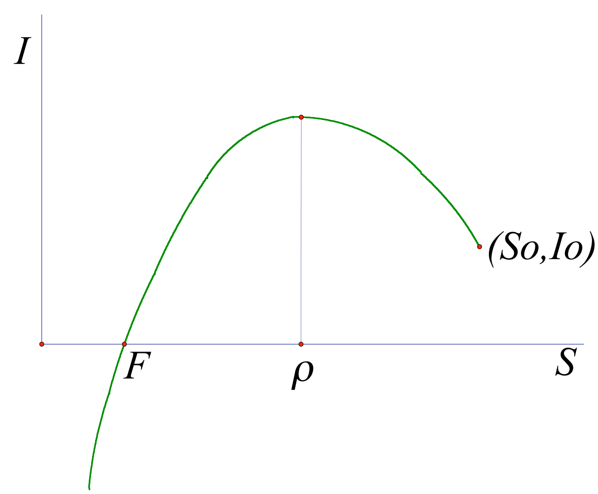
$$dI = (-1 + \frac{\gamma}{rS})dS.$$

Integrant

$$I(S) = -S + \frac{\gamma}{r}\log S + C.$$

Igualem la derivada primera a zero per trobar el màxim.

$$I'(S) = -1 + \frac{\rho}{S} = 0, \quad \rho = \frac{\gamma}{r}$$




Com que

$$I''(\rho) > 0$$

en el punt $S = \rho$ tenim un màxim.

A més

$$\lim_{S\to 0} I(S) = -\infty,$$

per tant existeix un únic punt (quan $S = F$ amb la notació de la figura), en que $I = 0$, i s'acaba l'epidèmia. L'interval positiu $[0, F]$ sobre l'eix $S$

vol dir que quan s'acaba l'epidèmia encara queda una part de la població no infectada.

El punt $(S_0 I_0)$ de la figura correspon a la situació inicial de la població: quan comencem l'estudi ($t = 0$) tenim $S = S_0$ i $I = I_0$. Segons que $S_0$ estigui a la dreta o a l'esquerra de $\rho$ el nombre d'infecciosos augmentarà o ja anirà disminuint.

**Exemple 5.5.1** *En uns documents de l'edat mitjana*[7] *hem trobat algunes dades sobre una epidèmia en una determinada població. D'aquests documents deduïm que quan hi havia* 30.000 *persones susceptibles en aquella població, el nombre d'infectats era de* 200*. Al cap d'un cert temps, quan hi havia* 28.000 *persones susceptibles, el nombre d'infectats era de* 682*. Estimeu aproximadament quin va ser el màxim de persones infectades en aquella epidèmia.*

*Solució.* Imposem les condicions inicials a l'equació

$$I(S) = -S + \rho \log S + C.$$

Tenim

$$\begin{aligned} I(30000) &= 200 = -30000 + \rho \log 30000 + C \\ I(28000) &= 682 = -28000 + \rho \log 28000 + C \end{aligned}$$

Resolent aquest sistema obtenim

$$\begin{aligned} \rho &= 22.002 \\ C &= -196617 \end{aligned}$$

Com que el màxim de la funció $I(S)$ s'agafa quan $S = \rho$, el màxim de persones infectades a l'epidèmia és

$$I(22002) = -22002 + 22002 \log 22002 - 196617 = 1376.$$

[7] Proposat per J. Girbau en un examen el 2003.

# Capítol 6

# Equacions diferencials de segon ordre

## 6.1 Definició i teorema d'existència i unicitat

Una expressió del tipus
$$y'' = f(x, y, y')$$
on $f$ és una funció diferenciable de tres variables (que anomenem $x, y, y'$) es diu que és una equació diferencial de segon ordre. De moment $y''$ és només un símbol.

Per exemple,

$$\begin{aligned} y'' &= x \\ y'' &= x + y + y' \\ y'' &= y^2 + \sin(y) \\ &\vdots \end{aligned}$$

són equacions diferencials de segon ordre.

*Resoldre* una equació diferencial de segon ordre $y'' = f(x, y, y')$ vol dir trobar totes les funcions $y = y(x)$ tals que en substituir la variable $y$ per $y(x)$, la variable $y'$ per $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$, i el símbol $y''$ per $y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$ obtinguem una identitat certa per a tots els valors de $x$. És a dir, s'ha de complir

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = f(x, y(x), y'(x)).$$

La notació $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}$ vol dir $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}(y(x))$, i es llegeix *derivada segona de* $y(x)$.

Així, resoldre les anteriors equacions diferencials vol dir trobar funcions $y = y(x)$ tals que

$$\begin{aligned} y''(x) &= x \\ y''(x) &= x + y(x) + y'(x) \\ y''(x) &= y^2(x) + \sin(y(x)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Per exemple, $y = e^x$ és una solució de l'equació diferencial

$$y'' = \frac{1}{2}(y + y'),$$

ja que $y'(x) = \frac{d}{dx}e^x = e^x$, i $y''(x) = \frac{d^2e^x}{dx^2} = e^x$, i per tant

$$y''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^x).$$

També, $y = \frac{1}{6}x^3$ és una solució de l'equació diferencial

$$y'' = x,$$

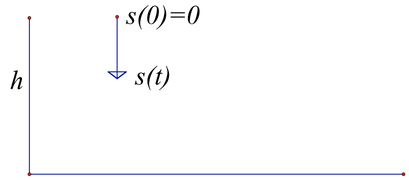
ja que $y'(x) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{6}x^3) = \frac{1}{2}x^2$, i $y''(x) = \frac{d^2(\frac{1}{6}x^3)}{dx^2} = x$, i per tant

$$y''(x) = x.$$

**Exemple 6.1.1 (Caiguda d'un cos)** *Suposem que deixo caure un guix des d'una altura de dos metres. Quant triga a caure? Quina velocitat porta quan toca el terra?*

Informació addicional. *Suposarem que no hi ha fregament, és a dir que la única força que actua és el pes del guix.*

*Solució.* Denotem per $s(t)$ l'espai recorregut pel guix des del moment en que el deixem caure, és a dir $s(0) = 0$.



La llei de la gravitació universal de Newton diu que la relació entre l'acceleració que adquireix un cos de massa $m$ sotmès a una força total $F$ és

$$F = ma.$$

En general és una igualtat vectorial ($\vec{F} = m\vec{a}$) però com que en el nostre cas el problema és unidimensional (el moviment és vertical) podem prescindir de la notació vectorial.

Com que estem acceptant que la única força és la de la gravetat, tenim

$$mg = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

ja que l'acceleració és la derivada segona de l'espai (la derivada primera de la velocitat). Recordem que $g = 9.8m/s^2$.

Hem de reosldre doncs l'equació diferencial de segon ordre

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g.$$

Una primera integració als dos costats d'aquesta igualtat ens diu

$$\frac{ds}{dt} = gt + C.$$

Si acceptem que el guix el deixem caure, és a dir, no el tirem contra el terra, tindrem que la velocitat inicial $\frac{ds}{dt}_{t=0} = 0$, i per tant l'anterior constant $C$ val zero. Tenim doncs l'equació diferencial de primer ordre

$$\frac{ds}{dt} = gt.$$

Integrant a cada costat obtenim

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C.$$

Novament aquesta constant $C$ queda determinada per la condició inicial $s(0) = 0$. Ha de ser, doncs, $C = 0$, i per tant tenim

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

Ara ja podem respondre les preguntes del problema. Per saber quant triga a caure posem

$$s(t_0) = h = \frac{1}{2}gt_0^2,$$

i aïllem $t$. Obtenim

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{4}{g}} = 1.13 \text{ segons}.$$

Per saber la velocitat que porta el guix quan arriba a terra, substituïm aquest valor de $t$ a l'expressió de la velocitat. Obtenim

$$v(t_0) = \frac{ds}{dt}_{t_0} = gt_0 = 11.07 \text{ metres/segon}.$$

$\diamondsuit$

**Teorema 6.1.2 (Existència i unicitat)** *L'equació diferencial de segon ordre $y'' = f(x, y, y')$ té infinites solucions, però només una $y = y(x)$ tal que $y(x_0) = y_0$ i $y'(x_0) = y'_0$.*

*Comentaris.* Hem de suposar que la funció de tres variables $f(x, y, y')$ és *prou bona*. Podem pensar $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, però podria no estar definida sobre tot $\mathbb{R}^3$. Per exemple, $f(x, y, y') = \frac{yy'}{x}$ no està definida quan $x = 0$.

Suposarem que és derivable respecte cadascuna de les tres variables, i,e, si fixem $x, y$ és derivable respecte $y'$, si fixem $x, y'$ és derivable respecte $y'$ i si fixem $y, y'$ és derivable respecte $x$.

A més el valors $x_0, y_0, y'_0$ que apareixen a la condició inicial han de pertànyer al domini de definició de $f$.

Observem que $y'_0$ no és en principi la derivada de res, és simplement un valor donat. Posteriorment existeix una funció $y(x)$ tal que la seva derivada en $x_0$ val justament aquest valor donat $y_0'$. Potser no és una notació molt afortunada però és la habitual.

Tampoc especifiquem quin és el domini de definició de la funció solució $y(x)$.

## 6.2 Equacions de segon ordre lineals

La generalització natural de les equacions diferencials lineals de primer ordre a equacions diferencials lineals de segon ordre seria canviar $y' + p(x)y = q(x)$ per $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$. Però com que aquesta última equació pot ser difícil de resoldre en aquest capítol només estudiarem el cas particular en que les funcions $p(x)$ i $q(x)$ són constants. És a dir, estudiarem les equacions del tipus

$$\boxed{y'' + by' + c = q(x), \quad b, c \in \mathbb{R}; \quad q(x) \text{ una certa funció de } x}$$

**Proposició 6.2.1** *Si $y_1(x)$ i $y_2(x)$ són dues solucions de l'equació diferencial lineal de segon ordre $y'' + by' + cy = q(x)$, llavors $y(x) = y_2(x) - y_1(x)$ és solució de $y'' + by' + cy = 0$.*

*Demostració.* En efecte,

$$\begin{aligned}(y_2 - y_1)'' + b(y_2 - y_1)' + c(y_2 - y_1) &= (y_2'' + by_2' + cy_2) - (y_1'' + by_1' + cy_1) \\ &= q(x) - q(x) = 0. \quad \square\end{aligned}$$

L'equació diferencial lineal de segon ordre $y'' + by' + cy = 0$ es diu equació *homogènia* associada a $y'' + by' + cy = q(x)$.

**Corol·lari 6.2.2** *La solució general de $y'' + by' + cy = q(x)$ és igual a una solució particular de $y'' + by' + cy = q(x)$ més la solució general de la homogènia $y'' + by' + cy = 0$.*

*Demostració.* Conseqüència immediata de la proposició anterior, ja que si coneixem una solució $y_1(x)$ de $y'' + by' + cy = q(x)$, qualsevol solució $y_2(x)$ és de la forma

$$y_2(x) = y_1(x) + \text{solució general de la homogènia.} \quad \square$$

| |
|---|
| *La solució general de la no homogènia és igual a la solució general de la homogènia més una solució particular de la no homogènia.* |

## 6.3 Solució de la homogènia

Anem a resoldre l'equació homogènia $y'' + by' + cy = 0$.

Observem primerament que la suma de solucions és solució i que el producte d'una solució per un número és també solució.

En efecte, si $y_1(x)$ i $y_2(x)$ són solucions, llavors

$$\begin{aligned} & (y_1(x) + y_2(x))'' + b(y_1(x) + y_2(x))' + c(y_1(x) + y_2(x)) \\ = \; & [y_1(x)'' + by_1(x)' + cy_1(x)] + [y_2(x)'' + by_2(x)' + cy_2(x)] \\ = \; & 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Si $y_1(x)$ és solució, llavors $\lambda y_1(x)$ també és solució ja que

$$(\lambda y_1(x))'' + b(\lambda y_1(x))' + c\lambda y_1(x) = \lambda[y_1(x)'' + by_1(x)' + c] = 0.$$

Introduïm ara la notació $D = \frac{d}{dx}$ de manera que l'anterior equació s'escriu com

$$(D^2 + bD + c)y = 0,$$

on, evidentment, $D^2$ vol dir aplicar dos cops l'operador $D$:

$$D^2 y = D(D(y)) = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}y = y''$$

El polinomi $X^2 + bX + c$ es diu polinomi característic de l'equació diferencial $y'' + by' + cy = 0$.

El mètode per resoldre aquesta equació diferencial varia lleugerament segons que el polinomi característic tingui arrels reals simples, una arrel real múltiple o arrels complexes.

*Arrels reals simples.* Siguin $\lambda, \mu$ les arrels reals diferents. Sabem $X^2 + bX + c = (X - \lambda)(X - \mu)$. Per tant, també tenim

$$(D^2 + bD + c)y = (D - \lambda)(D - \mu)y = 0.$$

Si trobem $y = y(x)$ tal que

$$(D - \mu)y(x) = 0$$

també serà

$$(D - \lambda)(D - \mu)y(x) = 0$$

i ja tindrem doncs una solució de l'equació diferencial donada.

Però com que

$$(D-\lambda)(D-\mu)y = (D-\mu)(D-\lambda)y$$

també qualsevol solució de

$$(D-\lambda)y = 0$$

serà solució de l'equació diferencial donada.

Però la solució de $(D-\lambda)y = 0$ és $y(x) = C_1 e^{\lambda x}$ i la solució de $(D-\mu)y = 0$ és $y(x) = C_2 e^{\mu x}$.

Pel comentari que hem fet sobre la suma de solucions i el producte d'un numero per una solució resulta que

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\mu x}}$$

és solució de $y'' + by' + cy = 0$ per a qualsevol valor de les constants $C_1, C_2$.

Es diu que és la *solució general* de l'equació homogènia.

La observació fonamental és que qualsevol altra solució de la homogènia és d'aquest tipus.

En efecte, com a conseqüència del teorema d'unicitat, si tenim una solució amb $y(x_0) = y_0$ i $y'(x_0) = y'_0$ i també tenim una solució del tipus

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\mu x}$$

amb aquestes mateixes condicions inicials, aquestes dues solucions han de coincidir. La pregunta és doncs si existeixen valors de $C_1$ i $C_2$ que fan que la corresponent solució compleixi les condicions inicials donades.

Concretament hem de tenir

$$\begin{aligned} C_1 e^{\lambda x_0} + C_2 e^{\mu x_0} &= y_0 \\ C_1 \lambda e^{\lambda x_0} + C_2 \mu e^{\mu x_0} &= y'_0 \end{aligned}$$

Però aquest sistema és de Cramer (té solució única) perquè el determinant

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda x_0} & e^{\mu x_0} \\ \lambda e^{\lambda x_0} & \mu e^{\mu x_0} \end{vmatrix}$$

anomenat Wronskià, és diferent de zero. De fet val

$$(\mu - \lambda) e^{(\lambda+\mu)x_0} \neq 0.$$

Per això és fonamental haver-nos restringit al cas $\lambda \neq \mu$.

*Arrel real múltiple.* Sigui $\lambda$ l'arrel real doble. Sabem $X^2 + bX + c = (X - \lambda)^2$. Per tant, també tenim

$$(D^2 + bD + c)y = (D - \lambda)(D - \lambda)y = 0.$$

Si trobem $y = y(x)$ tal que

$$(D - \lambda)y(x) = 0$$

també serà

$$(D - \lambda)(D - \lambda)y(x) = 0$$

i ja tindrem doncs una solució de l'equació diferencial donada. Concretament $y(x) = C_1 e^{\lambda x}$.

Ara hem de trobar una solució "essencialment" diferent d'aquesta. Volem dir una solució tal que el Wronskià (determinant format per les solucions i les seves derivades) sigui diferent de zero.

Per analogia amb el mètode de variació de les constants assajarem la solució

$$y(x) = xe^{\lambda x}.$$

Tenim

$$\begin{aligned} (D - \lambda)(D - \lambda)(xe^{\lambda x}) &= (D - \lambda)(D(xe^{\lambda x}) - \lambda xe^{\lambda x}) \\ &= (D - \lambda)[e^{\lambda x} + \lambda xe^{\lambda x} - \lambda xe^{\lambda x}] \\ &= (D - \lambda)e^{\lambda x} = 0 \end{aligned}$$

Així doncs la solució general en aquest cas està donada per

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 xe^{\lambda x}}$$

Com en el cas anterior aquí estan *totes* les solucions de l'equació diferencial ja que sempre podem ajustar les constants per tenir una condició inicial donada.

En aquest cas el Wronskià val

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x} + \lambda xe^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} \neq 0$$

i per tant el sistema a què dóna lloc la condició inicial

$$\begin{aligned} C_1 e^{\lambda x_0} + C_2 x e^{\lambda x_0} &= y_0 \\ C_1 \lambda e^{\lambda x_0} + C_2 (e^{\lambda x_0} + \lambda x e^{\lambda x_0}) &= y_0' \end{aligned}$$

té solució única.

*Arrels complexes.* Suposem que les arrels del polinomi característic són $z = p + iq$ i $\bar{z} = p - iq$. Recordem que han de ser conjugades. Com en el cas d'arrels real diferents tenim

$$(D^2 + bD + c)y = (D - z)(D - \bar{z})y = 0.$$

I també com en el cas real, veiem que qualsevol solució de

$$(D - z)y = 0, \qquad \text{o bé de } (D - \bar{z})y = 0$$

serà solució de l'equació diferencial donada.

Però ara, si plantegem

$$(D - z)y = y' - zy = 0$$

tenim una equació diferencials amb coeficients complexos. No tenim més remei que pensar que $y(x)$ és també una funció complexa

$$y(x) = y_1(x) + iy_2(x),$$

és a dir

$$\begin{aligned} y: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto y(x) \end{aligned}$$

Si la resolem com en el cas real tindrem

$$\frac{dy}{dx} = zy$$

que separant variables dóna

$$\frac{dy}{y} = z dx.$$

Integrant[1] als dos costats obtenim

$$\ln y = zx + C$$

[1] El logaritme neperià d'un nombre complex es defineix bé a partir de la notació $z = re^{i\alpha}$ ja que llavors, si volem que es conservin les propietats fonamentals dels logaritmes, ha de ser $\ln z = \ln(re^{i\alpha}) = \ln r + \ln e^{i\alpha} = \ln r + i\alpha$. Observem que amb aquesta definició té sentit parlar del logaritmes de nombres negatius. Per exemple, $\ln(-1) = \pi i$.

i per tant

$$y(x) = ke^{zx}, \qquad k = e^C.$$

En particular, quan $k = 1$, tenim que

$$y(x) = y_1(x) + iy_2(x) = e^{zx} = e^{(p+iq)x} = e^{px}e^{iqx} = e^{px}(\cos qx + i \sin qx)$$

és solució de $(D - z)y = y' - zy = 0$. I per tant, solució de

$$y'' + by' + cy = (D - \bar{z})(D - z)y = 0.$$

De fet, demostrar directament (ara que sabem el resultat!) que $y = e^{zx}$ és solució de $y'' + by' + cy = 0$ és trivial, ja que $y' = ze^{zx}$ i $y'' = z^2e^{zx}$, de manera que

$$y'' + by' + cy = (z^2 + bz + c)e^{zx} = 0$$

ja que $z$ és un zero del característic. Com que estem pensant $y = y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$, la igualtat $y'' + by' + cy = 0$ dóna lloc a dues igualtats: una en igualar las parts reals i una altre en igualar les parts imaginàries (el 0 de la dreta és el 0 de $\mathbb{C}$, es a dir, $0 = 0 + i0$)

Com que $b, c \in \mathbb{R}$ tenim $y_1'' + by_1' + cy_1 = 0$ i $y_2'' + by_2' + cy_2 = 0$ amb

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{px} \cos qx \\ y_2(x) &= e^{px} \sin qx \end{aligned}$$

D'aquesta manera hem aconseguit dues solucions *reals* de l'equació diferencial donada. A més el Wronskià és diferent de zero, de manera que pels mateixos arguments esgrimits en els casos anteriors podem afirmar que tota solució de $y'' + by' + cy = 0$, quan les arrels del característic són el nombres complexos $p \pm iq$, $q \neq 0$, són

$$y(x) = C_1e^{px} \cos qx + C_2e^{px} \sin qx$$

que escriurem com

$$\boxed{y(x) = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)}$$

on $C_1$ i $C_2$ són constants reals arbitràries.

El Wronskià val concretament

$$\begin{vmatrix} e^{px} \cos qx & e^{px} \sin qx \\ pe^{px} \cos qx - qe^{px} \sin qx & pe^{px} \sin qx + qe^{px} \cos qx \end{vmatrix} = qe^{2px} \neq 0,$$

ja que estem suposant $q \neq 0$.

**Exemple 6.3.1** *Trobeu la solució general de l'equació* $y'' - 5y' + 6y = 0$.

*Solució.* El polinomi característic $X^2 - 5X + 6$ té dues arrels reals diferents $\lambda = 2$ i $\mu = 3$. Per tant, la solució general és

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

$\diamondsuit$

**Exemple 6.3.2** *Trobeu la solució general de l'equació* $y'' - 6y' + 9y = 0$.

*Solució.* El polinomi característic $X^2 - 6X + 9$ té l'arrel real doble $\lambda = 3$. Per tant, la solució general és

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

$\diamondsuit$

**Exemple 6.3.3** *Trobeu la solució general de l'equació* $y'' - 4y' + 13y = 0$.

*Solució.* El polinomi característic $X^2 - 4X + 13$ té les arrels complexes $2 \pm 3i$. Per tant, la solució general és

$$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

$\diamondsuit$

**Exemple 6.3.4** *Trobeu totes les solucions de l'equació* $y'' - 5y' + 6y = 0$ *tals que* $y(0) = 0$.

*Solució.* Sabem que la solució general és

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Imposem

$$y(0) = 0 = C_1 e^{2 \cdot 0} + C_2 e^{3 \cdot 0} = C_1 + C_2$$

Per tant, tota solució del tipus

$$y(x) = C_1(e^{2x} - e^{3x}).$$

complix la condició demanada. $\diamondsuit$

**Exemple 6.3.5** *Trobeu totes les solucions de l'equació $y'' - 6y' + 9y = 0$ tals que $y(0) = 0$.*

*Solució.* Sabem que la solució general és

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Imposem

$$y(0) = 0 = C_1 e^{3\cdot 0} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{3\cdot 0} = C_1.$$

Per tant, tota solució del tipus

$$y(x) = C_2 x e^{3x}$$

complix la condició demanada. $\Diamond$

**Exemple 6.3.6** *Trobeu totes les solucions de l'equació $y'' - 4y' + 13y = 0$ tals que $y(0) = 0$.*

*Solució.* Sabem que la solució general és

$$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Imposem

$$y(0) = 0 = e^{2\cdot 0}(C_1 \cos(3 \cdot 0) + C_2 \sin(3 \cdot 0)) = C_1.$$

Per tant, tota solució del tipus

$$y(x) = C_2 e^{2x} \sin 3x$$

complix la condició demanada. $\Diamond$

**Exemple 6.3.7** *Trobeu la única solució de l'equació $y'' - 5y' + 6y = 0$ tal que $y(0) = 0$ i $y'(0) = 1$.*

*Solució.* Sabem que la solució general i la seva derivada són

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \\ y'(x) &= 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} \end{aligned}$$

Imposant la condició inicial obtenim

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 \\ 1 &= 2C_1 + 3C_2 \end{aligned}$$

Per tant, $C_1 = -1$ i $C_2 = 1$, i la solució buscada és

$$y(x) = -e^{2x} + e^{3x}.$$

$\Diamond$

**Exemple 6.3.8** *Trobeu la única solució de l'equació $y'' - 6y' + 9y = 0$ tal que $y(0) = 0$ i $y'(0) = 1$.*

*Solució.* Sabem que la solució general i la seva derivada són

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} \\ y'(x) &= 3C_1 e^{3x} + C_2(e^{3x} + 3xe^{3x}) \end{aligned}$$

Imposant la condició inicial obtenim

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \\ 1 &= 3C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Per tant, $C_1 = 0$ i $C_2 = 1$, i la solució buscada és

$$y(x) = xe^{3x}.$$

$\Diamond$

**Exemple 6.3.9** *Trobeu la única solució de l'equació $y'' - 4y' + 13y = 0$ tal que $y(0) = 0$ i $y'(0) = 0$.*

*Solució.* Sabem que la solució general i la seva derivada són

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \\ y'(x) &= 2e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{2x}(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) \end{aligned}$$

Imposant la condició inicial obtenim

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \\ 1 &= 2C_1 + 3C_2 \end{aligned}$$

Per tant, $C_1 = 0$ i $C_2 = 1/3$, i la solució buscada és

$$y(x) = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x.$$

$\Diamond$

## 6.4 Solució particular en el cas no homogeni

La idea intuïtiva per trobar una solució particular de $y'' + by' + cy = q(x)$ és molt senzilla. Si $q(x)$ és un polinomi buscarem una solució que sigui també un polinomi. Si $q(x)$ és una exponencial buscarem una solució que sigui també una funció exponencial, i si $q(x)$ és un sinus o un cosinus buscarem una solució que sigui combinació de sinus i cosinus.

Estudiarem només els casos en que $q(x)$ és una de les funcions de la taula de la pàgina 136: polinomi, exponencial, polinomi per exponencial, exponencial per sinus i cosinus o polinomi per exponencial per sinus i cosinus.

*Funcionament de la taula de la pàgina 136.* Si $q(x)$ és un polinomi de grau $m$ buscarem una solució que també sigui un polinomi de grau $m$ (primera línia de la taula). Però si dóna la casualitat de que 0 és arrel del característic amb multiplicitat 1, l'anterior mètode no funciona i hem de buscar una solució que sigui un polinomi de grau $m+1$ sense terme independent, és a dir $x$ mutiplicat per un polinomi de grau $m$ (segona línia de la taula). Si dóna la casualitat de que 0 és arrel del característic amb multiplicitat 2, els anteriors mètodes no funcionen i hem de buscar una solució que sigui un polinomi de grau $m+2$ sense terme independent ni terme lineal, és a dir $x^2$ mutiplicat per un polinomi de grau $m$ (tercera línia de la taula).

**Exemple 6.4.1** *Trobeu una solució particular de $y'' - 5y' + 6y = x^2$.*

*Solució.* Com que 0 no és arrel del característic busquem una solució que sigui del tipus $y(x) = ax^2 + bx + c$. Tenim

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2ax + b \\ y''(x) &= 2a \end{aligned}$$

i per tant

$$y'' - 5y' + 6y = 2a - 10ax - 5b + 6ax^2 + 6bx + 6c = x^2$$

Igualant coeficients

$$\begin{aligned} 6a &= 1 \\ -10a + 6b &= 0 \\ 2a - 5b + 6c &= 0 \end{aligned}$$

i per tant $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{5}{18}$ i $c = \frac{19}{108}$. Així, el polinomi

$$y(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$$

és una solució particular de l'equació donada. $\Diamond$

**Exemple 6.4.2** *Trobeu una solució particular de $y'' + y' = x^2$.*

*Solució.* Com que 0 és arrel del característic amb multiplicitat 1 busquem una solució que sigui del tipus $y(x) = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$. Tenim

$$\begin{aligned} y'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ y''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

i per tant

$$y'' + y' = 3ax^2 + 2bx + c + 6ax + 2b = x^2$$

Igualant coeficients

$$\begin{aligned} 3a &= 1 \\ 2b + 6a &= 0 \\ c + 2b &= 0 \end{aligned}$$

i per tant $a = \frac{1}{3}$, $b = -1$ i $c = 2$. Així, el polinomi

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$$

és una solució particular de l'equació donada. $\Diamond$

**Exemple 6.4.3** *Trobeu una solució particular de $y'' = x^2$.*

*Solució.* Com que 0 és arrel del característic amb multiplicitat 2 busquem una solució que sigui del tipus $y(x) = x^2(ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2$. Tenim

$$\begin{aligned} y'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx \\ y''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c \end{aligned}$$

i per tant

$$y'' = 12ax^2 + 6bx + 2c = x^2$$

Igualant coeficients

$$\begin{aligned} 12a &= 1 \\ 6b &= 0 \\ 2c &= 0 \end{aligned}$$

i per tant $a = \frac{1}{12}$, $b = 0$ i $c = 0$. Així, el polinomi

$$y(x) = \frac{1}{12}x^4$$

és una solució particular de l'equació donada. $\Diamond$

*Funcionament de la taula de la pàgina 136 [continuació].* Si $q(x)$ és un polinomi de grau $m$ multiplicat per una exponencial, $q(x) = p_m(x)e^{\alpha x}$, buscarem una solució que també sigui un polinomi de grau $m$ multiplicat per l'exponencial $e^{\alpha x}$(quarta línia de la taula). Però si dóna la casualitat de que $\alpha$ és arrel del característic amb multiplicitat 1, l'anterior mètode no funciona i hem de buscar una solució que sigui un polinomi de grau $m+1$ sense terme independent, és a dir $x$ mutiplicat per un polinomi de grau $m$, multiplicat per $e^{\alpha x}$ (cinquena línia de la taula). Si dóna la casualitat de que $\alpha$ és arrel del característic amb multiplicitat 2, els anteriors mètodes no funcionen i hem de buscar una solució que sigui un polinomi de grau $m+2$ sense terme independent ni terme lineal, és a dir $x^2$ mutiplicat per un polinomi de grau $m$, multiplicat per $e^{\alpha x}$ (sisena línia de la taula).

**Exemple 6.4.4** *Trobeu una solució particular de $y'' + y = e^{3x}$.*

*Solució.* Com que 3 no és arrel del polinomi característic $X^2 + 1$, buscarem una solució del tipus $ke^{3x}$. Observem que estem aplicant la quarta línia de la taula en el cas de que el polinomi $p_m(x)$ que multiplica a l'exponencial $e^{3x}$ és una constant, és a dir, un polinomi de grau $m = 0$. Tenim

$$\begin{aligned} y(x) &= ke^{3x} \\ y'(x) &= 3ke^{3x} \\ y''(x) &= 9ke^{3x} \end{aligned}$$

Així, $y'' + y = (9k + k)e^{3x} = e^{3x}$ i per tant $k = \frac{1}{10}$. La solució buscada és

$$y(x) = \frac{1}{10}e^{3x}.$$

$\Diamond$

**Exemple 6.4.5** *Trobeu una solució particular de $y'' - 5y' + 6y = e^{3x}$.*

*Solució.* Com que 3 és arrel del polinomi característic $X^2 - 5X + 6$ amb multiplicitat 1, buscarem una solució del tipus $kxe^{3x}$. Observem que estem aplicant la cinquena línia de la taula en el cas de que el polinomi $p_m(x)$ que multiplica a l'exponencial $e^{3x}$ és una constant, és a dir, un polinomi de grau $m = 0$, que hem, de multiplicar per $x$. Tenim

$$\begin{aligned} y(x) &= kxe^{3x} \\ y'(x) &= 3kxe^{3x} + ke^{3x} \\ y''(x) &= 9kxe^{3x} + 3ke^{3x} + 3ke^{3x} \end{aligned}$$

Així, $y'' - 5y' + 6y = 9kxe^{3x} + 6ke^{3x} - 5(3kxe^{3x} + ke^{3x}) + 6kxe^{3x} = e^{3x}$. Simplificant l'exponencial i igualant coeficients tenim

$$\begin{aligned} 9k - 15k + 6k &= 0, \quad \text{que no diu res} \\ 6k - 5k = 1 & \end{aligned}$$

Per tant, $k = 1$, i la solució buscada és

$$y(x) = xe^{3x}.$$

$\Diamond$

**Exemple 6.4.6** *Trobeu una solució particular de $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$.*

*Solució.* Com que 3 és arrel del polinomi característic $X^2 + 1$ amb multiplicitat 2, buscarem una solució del tipus $kx^2e^{3x}$ (sisena línia de la taula).

$$\begin{aligned} y(x) &= kx^2e^{3x} \\ y'(x) &= 3kx^2e^{3x} + 2kxe^{3x} \\ y''(x) &= 9kx^2e^{3x} + 6kxe^{3x} + 2ke^{3x} + 6kxe^{3x} \end{aligned}$$

Així $y''-6y'+9y = 9kx^2e^{3x}+12kxe^{3x}+2ke^{3x}-6(3kx^2e^{3x}+2kxe^{3x})+9kx^2e^{3x}$. Simplificant l'exponencial i igualant coeficients tenim

$$\begin{aligned} 9k-18k+9k &= 0, \quad \text{que no diu res} \\ 12k-12k &= 0, \quad \text{que no diu res} \\ 2k &= 1 \end{aligned}$$

Per tant, $k=\frac{1}{2}$, i la solució buscada és

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{3x}.$$

$\diamondsuit$

*Funcionament de la taula de la pàgina 136 [continuació].* Si $q(x)$ és el producte d'una exponencial $e^{\alpha x}$ per un sinus o un cosinus de $\beta x$ (o una combinació lineal d'aquests) llavors hem de buscar una solució que sigui exactament d'aquest tipus o d'aquest tipus multiplicat per $x$, segons que el nombre complex $\alpha \pm i\beta$ sigui o no arrel del característic.

**Exemple 6.4.7** *Trobeu una solució particular de $y''+y = e^x \cos x$.*

*Solució.* En aquest cas $\alpha=\beta=1$. Com que $1\pm i$ no és arrel del característic hem de buscar una solució del tipus

$$y(x) = e^x(A\cos x + B\sin x).$$

Tenim

$$\begin{aligned} y(x) &= e^x(A\cos x + B\sin x) \\ y'(x) &= e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) \\ y''(x) &= e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) \\ &\quad +e^x(-A\sin x + B\cos x) + e^x(-A\cos x - B\sin x) \end{aligned}$$

Per tant, $y''+y = e^x((A+2B)\cos x+(-2A+B)\sin x) = e^x\cos x$. Simplificant l'exponencial veiem que la igualtat es compleix quan

$$\begin{aligned} A+2B &= 1 \\ -2A+B &= 0 \end{aligned}$$

D'aquí deduïm $A = 1/5$ i $B = 2/5$, de manera que la solució buscada és

$$y(x) = e^x(\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x).$$

$\Diamond$

**Exemple 6.4.8** *Trobeu una solució particular de* $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x$.

*Solució.* En aquest cas $\alpha = \beta = 1$. Com que $1 \pm i$ és arrel del característic hem de buscar una solució del tipus

$$y(x) = xe^x(A\cos x + B\sin x).$$

Tenim

$$\begin{aligned} y(x) &= xe^x(A\cos x + B\sin x) \\ y'(x) &= e^x\cos x(A + (A+B)x) + e^x \sin x(B + (B-A)x) \\ y''(x) &= e^x(2A + 2B + 2Bx) + e^x \sin x(-2A + 2B - 2Ax) \end{aligned}$$

Per tant $y'' - 2y' + 2y = 2Be^x\cos x - 2Ae^x \sin x$. Deduïm $A = 0$ i $B = 1/2$ de manera que la solució buscada és

$$y(x) = \frac{1}{2}xe^x \sin x.$$

$\Diamond$

Taula per trobar una solució particular de

$$y'' + by' + cy = q(x), \qquad b, c \text{ constants}$$

| q(x) | característic=$p_c(x) = x^2 + bx + c$ | Solució particular |
|---|---|---|
| $p_m(x)$ | 0 no és arrel de $p_c(x)$ | $\tilde{p}_m(x)$ |
| $p_m(x)$ | 0 és arrel de $p_c(x)$ amb multiplicitat 1 | $x\,\tilde{p}_m(x)$ |
| $p_m(x)$ | 0 és arrel de $p_c(x)$ amb multiplicitat 2 | $x^2\,\tilde{p}_m(x)$ |
| $p_m(x)e^{\alpha x}$ | $\alpha$ no és arrel de $p_c(x)$ | $\tilde{p}_m(x)e^{\alpha x}$ |
| $p_m(x)e^{\alpha x}$ | $\alpha$ és arrel de $p_c(x)$ amb multiplicitat 1 | $x\,\tilde{p}_m(x)e^{\alpha x}$ |
| $p_m(x)e^{\alpha x}$ | $\alpha$ és arrel de $p_c(x)$ amb multiplicitat 2 | $x^2\,\tilde{p}_m(x)e^{\alpha x}$ |
| $e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ | $\alpha \pm i\beta$ no són arrels de $p_c(x)$ | $e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ |
| $e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ | $\alpha \pm i\beta$ són arrels de $p_c(x)$ | $x\,e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ |
| $e^{\alpha x}(p_n(x) \cos \beta x + q_m(x) \sin \beta x)$ | $\alpha \pm i\beta$ no són arrels de $p_c(x)$ | $e^{\alpha x}(\tilde{p}_k(x) \cos \beta x + \tilde{q}_k(x) \sin \beta x)$ |
| $e^{\alpha x}(p_n(x) \cos \beta x + q_m(x) \sin \beta x)$ | $\alpha \pm i\beta$ són arrels de $p_c(x)$ | $x\,e^{\alpha x}(\tilde{p}_k(x) \cos \beta x + \tilde{q}_k(x) \sin \beta x)$ |

*Agustí Reventós*

- $\alpha$ i $\beta$ són nombres reals donats.
- $k =$ max $(m, n)$; $\tilde{p}_k(x)$ i $\tilde{q}_k(x)$ polinomis de grau $k$ que s'han de trobar.
- $p_m(x)$ és un polinomi de grau $m$ donat.
- $\tilde{p}_m(x)$ és un polinomi de grau $m$ que s'ha de trobar.
- $c_1$ i $c_2$ constants donades; $A$ i $B$ constants a determinar.

# Capítol 7

# Sitemes d'equacions diferencials lineals

L'objectiu d'aquest capítol es donar la fórmula general de la solució del sistema d'equacions diferencials $X' = AX$.

## 7.1 Valors i vectors propis

Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

definim:

- *Traça* de A= Suma dels elements de la diagonal de A.

  Tindrem, doncs,

  $$\text{traça}(A) = a + d.$$

- *Determinant* de $A$= Producte dels elements de la diagonal menys producte dels elements de la diagonal secundària.

  Tindrem, docs,

  $$\det(A) = ad - bc.$$

- *Polinomi característic* de $A$= $p_A(x)$ =det $\begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$.

Tindrem, doncs,

$$p_A(x) = x^2 - (\text{traça}A)x + \det A = x^2 - px + q,$$

amb $p = a + d$ i $q = ad - bc$.

- *Valors propis.* Les arrels dels polinomi característic $p_A(x)$ es diuen *valors propis* de $A$. Per tant, els valors propis $\lambda$ i $\mu$ de $A$ són

$$\lambda = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad \mu = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Si,

$$\begin{array}{lcll} p^2 - 4q & > & 0 & \text{tenim dos valors propis reals diferents,} \\ p^2 - 4q & = & 0 & \text{tenim un únic valor propi,} \\ p^2 - 4q & < & 0 & \text{tenim dos valors propis complexos conjugats.} \end{array}$$

- *Vectors propis.* Es diu que el vector $u = (u_1, u_2)$, $u \neq \vec{0}$, és un vector propi de $A$, de valor propi $\lambda$, si $Au = \lambda u$.

Equivalentment $(A - \lambda I)u = \vec{0}$, on

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Així, doncs, per trobar $u$ tan sols hem de resoldre el sistema (compatible indeterminat)

$$\boxed{\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Les dues equacions a que dóna lloc aquest sistema són equivalents, i per tant, només cal considerar-ne una de elles, de manera que podem dir que el vector propi de valor propi $\lambda$ està determinat (llevat d'un escalar) per l'equació

$$(a - \lambda)u_1 + bu_2 = 0.$$

Per tant, podem agafar com vector propi de valor propi $\lambda$

$$\boxed{u = (b, \lambda - a)} \tag{7.1}$$

- Observem que la suma dels valors propis de $A$ és la traça de $A$ i que el producte dels valors propis és el determinant.

$$\begin{aligned}\lambda + \mu &= p = \text{traça}(A)\\ \lambda \cdot \mu &= q = \det(A)\end{aligned}$$

**Proposició 7.1.1** *Vectors propis de valors propis diferents són linealment independents.*

*Demostració.* Suposem $Au = \lambda u$ i $Av = \mu v$ amb $\lambda \neq \mu$. Si tenim una combinació lineal d'ells igual a zero:

$$au + bv = 0, \quad a, b, 0 \in \mathbb{R}(\text{o } \mathbb{C})$$

llavors, aplicant $A$ a aquesta igualtat tenim

$$a\lambda u + b\mu v = 0.$$

Resolent el sistema

$$\begin{aligned}au + bv &= 0\\ a\lambda u + b\mu v &= 0\end{aligned}$$

obtenim $(\mu - \lambda)bv = 0$, i per tant $b = 0$. Això implica $a = 0$, i per tant $u$ i $v$ són linealment independents. □

**Exemple 7.1.2** *Trobeu els vectors propis de*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

*Solució.* Traça de $A$: $3 + 7 = 10$.
Determinant de $A$: 26.
Polinomi característic: $x^2 - 10x + 26$.
Valors propis: $\lambda = 5 + i$, $\mu = 5 - i$.
Vector propi de valor propi $\lambda$: Resolem

$$\begin{pmatrix} 3-5-i & 5 \\ -1 & 7-5-i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $u = (5, 2+i)$ (o qualsevol múltiple d'aquest).

Vector propi de valor propi $\mu$: Resolem

$$\begin{pmatrix} 3-5+i & 5 \\ -1 & 7-5+i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim $u = (5, 2-i)$ (o qualsevol múltiple d'aquest).

## 7.2 Sistema d'equacions diferencials

L'objectiu és trobar dues funcions $x = x(t)$ i $y = y(t)$ de les quals sabem únicament que les seves derivades són combinació lineal d'elles mateixes.

Concretament tenim

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= ax(t) + by(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= cx(t) + dy(t) \end{aligned}$$

que escrivim simplement com

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

on $a, b, c, d$ són nombres reals coneguts.

És útil usar notació matricial i escriure aquest sistema com

$$X' = AX$$

on

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad X' = \frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

**Teorema 7.2.1 (Existència i unicitat)** *El sistema d'equacions diferencials $X' = AX$ té infinites solucions però només una $X = X(t)$ tal que $X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.*

Una altra observació important és que *la combinació lineal de solucions de $X' = AX$ és també solució*. En efecte, si $X(t)$ és solució, llavors $Z(t) = \lambda X(t)$ és també solució, ja que

$$Z'(t) = \lambda X'(t) = \lambda AX(t) = A(\lambda X(t)) = AZ(t).$$

I si $X(t)$ i $Y(t)$ són solucions, llavors $Z(t) = X(t) + Y(t)$és també solució, ja que

$$Z'(t) = X'(t) + Y'(t) = AX(t) + AY(t) = A(X(t) + Y(t)) = AZ(t).$$

## 7.3 Cinètica química

En CINÈTICA QUÍMICA[1] apareixen diagrames com el següent que presentem, que modelen situacions de descomposició de materials en altres materials.

$$A \quad \underset{k_3}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} \quad B \xrightarrow{\quad k_2 \quad} C$$

*Un material $A$ és transforma en un material $B$. Aquest es transforma en els materials $A$ i $C$. Trobeu $A(t)$ (concentració molar[2] de $A$ a l'instant $t$) i $B(t)$ (concentració molar de $B$ a l'instant $t$).*

*Solució.* L'equació que regeix la descomposició dels materials és $x'(t) = kx(t)$. Per tant, la situació del problema es regeix per

$$\begin{aligned} A'(t) &= -k_1 A(t) + k_3 B(t) \\ B'(t) &= k_1 A(t) - (k_2 + k_3) B(t) \end{aligned}$$

En efecte, la velocitat de variació de $A$ ($A'(t)$) és proporcional a la quantitat de $A$ que hi ha en cada moment ($A(t)$) i aquesta constant és negativa ($-k_1$) perquè $A(t)$ és decreixent. Però $A(t)$ augmenta per la part de $B$ que es transforma en $A$. Aquesta part és proporcional a la quantitat de $B$ que

[1] Veure *Ecuaciones diferenciales para las ciencias químicas y físicas*, F. Balibrea, V, Jiménez, ICE Universidad de Murcia, (2000).

[2] $A(t) = n_A(t)/V$, on $n_A(t)$ és el nombre de mols de $A$ a l'instant $t$ i $V$ és el volum del sistema, que se suposa constant.

hi ha en cada moment ($B(t)$) i aquesta constant és positiva ($k_3$) perquè $A(t)$ augmenta.

Un argument similar justifica la segona equació. La velocitat de variació de $B$ ($B'(t)$) es la suma de les velocitats en les que el cos $B$ es transforma en $A$ (que és proporcional a quantitat de cos $B$ que tenim ($B(t)$) amb constant de proporcionalitat $k_3$), de la velocitat en la que el cos $B$ es transforma en $C$ (que és proporcional a quantitat de cos $B$ que tenim ($B(t)$) amb constant de proporcionalitat $k_2$) i a la velocitat en la que el cos $A$ es transforma en $B$. És a dir:

$$B'(t) = k_1 A(t) - k_2 B(t) - k_3 B(t).$$

## 7.4 El característic té arrels reals diferents

Volem resoldre el sistema

$$X' = AX$$

en el cas en que el polinomi característic de $A$, tingui dues arrels reals diferents $\lambda, \mu$.

La solució general està donada per

$$\boxed{X(t) = C_1 e^{\lambda t} u + C_2 e^{\mu t} v}$$

amb

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

essent $u$ vector propi de $A$ de valor propi $\lambda$ ($Au = \lambda u$), i $v$ vector propi de $A$ de valor propi $\mu$ ($Av = \mu v$).

És a dir

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\mu t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}$$

o, equivalentment,

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda t} u_1 + C_2 e^{\mu t} v_1 \\ y(t) &= C_1 e^{\lambda t} u_2 + C_2 e^{\mu t} v_2 \end{aligned} \tag{7.2}$$

*Justificació.*[3] Demostrar que

$$X(t) = C_1 e^{\lambda t} u + C_2 e^{\mu t} v$$

és soució de $X' = AX$ és molt senzill ja que, derivant, tenim

$$\begin{aligned} X'(t) &= C_1 e^{\lambda t} \lambda_1 u + C_2 e^{\mu t} \mu v \\ &= C_1 e^{\lambda t} A u + C_2 e^{\mu t} A v \\ &= A(C_1 e^{\lambda t} u + C_2 e^{\mu t} v) \\ &= AX. \end{aligned}$$

**Nota 7.4.1** *Com que sabem que la combinació lineal de solucions és solució, és suficient demostrar que $X(t) = e^{\lambda t} u$ i $X(t) = e^{\mu t} v$ són solució.*

**Nota 7.4.2** *Atenció, perquè no és el mateix dir que qualsevol combinació lineal de $e^{\lambda t} u$ i $e^{\mu t} v$ és solució, que dir qualsevol solució que se'ns pugui ocórrer és d'aquest tipus. Això és conseqüència del teorema d'unicitat 5.1.1 i del fet que els vectors propis són linealment independents.*

*En efecte, donada una solució qualsevol amb*

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

*sempre podem ajustar les constants $C_1$ i $C_2$ per tal de que una solució del tipus $C_1 e^{\lambda t} u + C_2 e^{\mu t} v$ compleixi aquesta condició inicial, i coincideixi doncs (per la unicitat), amb la solució donada.*

*Per trobar $C_1$ i $C_2$ hem de resoldre el sistema*

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 e^{\lambda t_0} u_1 + C_2 e^{\mu t_0} v_1 \\ y_0 &= C_1 e^{\lambda t_0} u_2 + C_2 e^{\mu t_0} v_2 \end{aligned}$$

*el qual té solució única perquè*

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda t_0} u_1 & e^{\mu t_0} v_1 \\ e^{\lambda t_0} u_2 & e^{\mu t_0} v_2 \end{vmatrix} = e^{(\lambda + \mu) t_0} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

*ja que l'exponencial no s'anul·la mai i els vectors propis son linealment independents.*

[3]Vegeu la secció 7.9, pàgina 160.

**Exemple 7.4.3** *Resoleu el sistema*

$$X' = AX$$

*on*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Trobeu també la solució particular tal que* $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

*Solució.* Polinomi característic: $x^2 - 6x + 8$.

Arrels del característic (valors propis) $\lambda = 2$, $\mu = 4$.

*Càlcul del vector propi de valor propi* 2.

Hem de resoldre el sistema

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Equival a resoldre la única equació

$$u_1 + u_2 = 0.$$

Per tant, tot vector que tingui la primera component igual a la segona canviada de signe és vector propi de valor propi 2.

Prendrem, doncs, com a vector propi de valor propi $\lambda = 2$ el vector $u = (1, -1)$

*Càlcul del vector propi de valor propi* 4.

Hem de resoldre el sistema

$$\begin{pmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Equival a resoldre la única equació

$$-u_1 + u_2 = 0.$$

Per tant, tot vector que tingui la primera component igual a la segona és vector propi de valor propi 4.

Prendrem, doncs, com a vector propi de valor propi $\mu = 4$ el vector $u = (1, 1)$

Per tant, la solució general del sistema

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\mu t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

és igual, en el nostre cas, a

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Equivalentment

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \\ y(t) &= -C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \end{aligned} \tag{7.3}$$

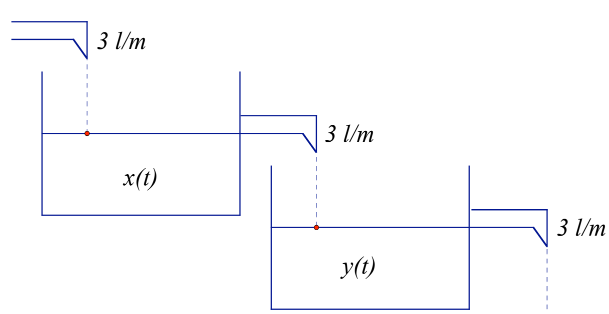
Si ara volem la solució particular amb $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ només hem de resoldre el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 \\ 1 &= -C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Per tant, $C_1 = -1/2$, $C_2 = 1/2$ i la solució buscada és

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{4t} \\ y(t) &= \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{4t} \end{aligned}$$

**Exemple 7.4.4** *Un dipòsit conté inicialment* 100 *litres d'aigua i* $10Kg$ *de sal. A aquest dipòsit hi entra aigua a raó de* 3 *litres per minut, i surt disolució (aigua amb sal) a raó també de* 3 *litres per minut. Aquesta disolució va a parar a un segon dipòsit que conté inicialment 50 litres d'aigua i del qual surt disolució (aigua amb sal) a raó també de 3 litres per minut. En quin moment serà màxima la quantitat de sal en el segon dipòsit?*



*Solució.* Si diem $x(t)$ a la quantitat de sal en el primer dipòsit i $y(t)$ a la quantitat de sal en el segon dipòsit tenim:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -3\,\frac{x(t)}{100} \\ y'(t) &= 3\,\frac{x(t)}{100} - 3\,\frac{y(t)}{50} \end{aligned}$$

amb $x(0) = 10$ i $y(0) = 0$.

Observem que $x(t)/100$ és la *concentració* de sal del primer dipòsit (quantitat de sal per litre) i que $y(t)/50$ és la *concentració* de sal del segon dipòsit. Com que la velocitat de sortida de dissolució del primer dipòsit és de 3 litres per minut, i cada litre conté $x(t)/100$ Kg de sal, la velocitat de sortida de sal del primer dipòsit ($x'(t)$) és igual (en valor absolut) a $3(x(t)/100)$. El signe menys de la primera equació ($x'(t) = -3\frac{x(t)}{100}$) prové del fet que la funció $x(t)$ és decreixent, i per tant , té derivada negativa. Un argument similar justifica la segona equació del sistema anterior.

La matriu associada al sistema és

$$\begin{pmatrix} -3/100 & 0 \\ 3/100 & -3/50 \end{pmatrix}.$$

Vector propi de valor propi $\lambda = -3/100$: $u = (1, 1)$.

Vector propi de valor propi $\lambda = -3/50$: $v = (0, 1)$.

Per tant:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-3/100t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3/50t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En imposar les condicions inicials $x(0) = 10$, $y(0) = 0$, obtenim $C_1 = 10$, $C_2 = -10$. En imposar $y'(t) = 0$, obtenim

$$2e^{(-3/50)t} = e^{(-3/100)t},$$

és a dir,

$$2 = e^{(3/100)t},$$

i per tant $t = (100/3)\ln 2 = 23,1$ minuts.

## 7.5 El característic té arrels complexes

Volem resoldre el sistema

$$X' = AX$$

en el cas en que el polinomi característic de $A$, tingui dues arrels complexes $\lambda, \bar{\lambda}$.

La solució general està donada per

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \Re\left[e^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right] + C_2 \Im\left[e^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right]} \tag{7.4}$$

on $\Re$ vol dir "part real" i $\Im$ vol dir "part imaginària"[4], i

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

és el vector propi de valor propi $\lambda$. Com que $\lambda$ és un nombre complex, tant $u_1$ com $u_2$ són també nombres complexos. $C_1$ i $C_2$ són constants reals.

*Justificació.* El fet de que les arrels del característic siguin complexes ens 'obliga' a considerar el sistema $X' = AX$ com un sistema complex: les entrades de la matriu $X$, i per tant també les de $X'$, són nombres complexos.

Tindrem

$$\begin{pmatrix} x'(t) + ip'(t) \\ y'(t) + iq'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) + ip(t) \\ y(t) + iq(t) \end{pmatrix}.$$

Com que els elements de la matriu $A$ són reals, la igualtat de matrius complexes anteriors implica, considerant la part real i la part imaginaria als dos costats de la igualtat, les dues igualtats de matrius reals següents

$$\Re \begin{pmatrix} x'(t) + ip'(t) \\ y'(t) + iq'(t) \end{pmatrix} = A \Re \begin{pmatrix} x(t) + ip(t) \\ y(t) + iq(t) \end{pmatrix}.$$

$$\Im \begin{pmatrix} x'(t) + ip'(t) \\ y'(t) + iq'(t) \end{pmatrix} = A \Im \begin{pmatrix} x(t) + ip(t) \\ y(t) + iq(t) \end{pmatrix}.$$

[4] Així $\Re(a + bi) = a$, i $\Im(a + bi) = b$. Anàlogament

$$\Re \begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \Im \begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} p'(t) \\ q'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}.$$

*És a dir, la part real i la part imaginària d'una solució complexa de $X' = AX$ són solucions reals de $X' = AX$.*

El mateix argument que en el cas real (pàgina 143) ens diu que si $u$ és un vector propi de valor propi $\lambda$ (tant $\lambda$ com les dues components de $u$ nombres complexos), llavors

$$X(t) = e^{\lambda t} u$$

és solució del sistema $X' = AX$.

Per tant,

$$\Re(e^{\lambda t} u), \quad \text{i} \quad \Im(e^{\lambda t} u)$$

són solucions *reals* de $X' = AX$.

Per tant, qualsevol combinació lineal de elles és també solució, i la fórmula (7.4) queda justificada.

**Nota 7.5.1** *Atenció, perquè no és el mateix dir que qualsevol combinació lineal de $\Re(e^{\lambda t} u)$ i $\Im(e^{\lambda t} u)$ és solució, que dir qualsevol solució que se'ns pugui ocórrer és d'aquest tipus. Això és conseqüència del teorema d'unicitat 5.1.1 i del fet que les dues components (complexes) del vector propi $u$ són linealment independents sobre $\mathbb{R}$.*

*En efecte, donada una solució qualsevol $X(t)$ amb*

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \qquad x_0, y_0 \in \mathbb{R}$$

*sempre podem ajustar les constants $C_1$ i $C_2$ per tal de que una solució del tipus $C_1 \Re(e^{\lambda t} u) + C_2 \Im(e^{\lambda t} u)$ compleixi aquesta condició inicial, i coincideixi doncs (per la unicitat), amb la solució donada.*

*Per trobar $C_1$ i $C_2$ hem de resoldre el sistema*

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 \Re(e^{\lambda t_0} u_1) + C_2 \Im(e^{\lambda t_0} u_1) \\ y_0 &= C_1 \Re(e^{\lambda t_0} u_2) + C_2 \Im(e^{\lambda t_0} u_2) \end{aligned}$$

*el qual té solució única perquè*

$$\begin{vmatrix} \Re(e^{\lambda t_0} u_1) & \Im(e^{\lambda t_0} u_1) \\ \Re(e^{\lambda t_0} u_2) & \Im(e^{\lambda t_0} u_2) \end{vmatrix} \neq 0$$

*com es veurà*[5] *a continuació,* **??**.

## Explicitem la fórmula (7.4)

Si posem

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} + iu_{12} \\ u_{21} + iu_{22} \end{pmatrix}$$

llavors

$$e^{\lambda t} u = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} u_1 \\ e^{\lambda t} u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}(u_{11} + iu_{12}) \\ e^{\lambda t}(u_{21} + iu_{22}) \end{pmatrix}.$$

Posem $\lambda = \alpha + i\beta$ i calculem les dues components de la darrera matriu.

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} u_1 &= e^{\alpha t} e^{\beta i t}(u_{11} + iu_{12}) \\ &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))(u_{11} + iu_{12}) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} u_2 &= e^{\alpha t} e^{\beta i t}(u_{21} + iu_{22}) \\ &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))(u_{21} + iu_{22}). \end{aligned}$$

Així

[5] Aquest determinant val

$$e^{2\alpha t_0} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix},$$

amb $\lambda = \alpha + i\beta$ i $u = (u_1, u_2) = (u_{11} + iu_{12}, u_{21} + iu_{22})$. I

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$$

és el determinant format pels dos vectors de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}\, u_1$ i $u_2$ (les dues components complexes de $u$). La fórmula (7.1) ens diu que podem pensar sempre $u_1$ real i $u_2$ complex, de manera que és evident que són linealment independents sobre $\mathbb{R}$.

$$\Re\left[e^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \Re(e^{\lambda t}u_1) \\ \Re(e^{\lambda t}u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}(u_{11}\cos\beta t - u_{12}\sin\beta t) \\ e^{\alpha t}(u_{21}\cos\beta t - u_{22}\sin\beta t) \end{pmatrix}$$
$$= e^{\alpha t}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta t \\ -\sin\beta t \end{pmatrix}.$$

$$\Im\left[e^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \Im(e^{\lambda t}u_1) \\ \Im(e^{\lambda t}u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}(u_{11}\sin\beta t + u_{12}\cos\beta t) \\ e^{\alpha t}(u_{21}\sin\beta t + u_{22}\cos\beta t) \end{pmatrix}$$
$$= e^{\alpha t}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

Per tant, l'equació (**??**) també es pot escriure com

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\left[C_1 P\begin{pmatrix} \cos\beta t \\ -\sin\beta t \end{pmatrix} + C_2 P\begin{pmatrix} \sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix}\right]} \tag{7.5}$$

amb

$$P = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

També es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t}P\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

De manera que quan volem imposar les condicions inicials ($x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$) per trobar $C_1$ i $C_2$ ens trobem amb un sistema de Cramer, ja que el determinant del sistema és $e^{2\alpha t}\det P$, i $\det P \neq 0$, com veiem fàcilment a continuació.

En efecte, segons la fórmula (7.1) sempre podem agafar $u = (b, \lambda - a)$ de manera que

$$P = \begin{pmatrix} b & 0 \\ \alpha - a & \beta \end{pmatrix}.$$

Això ens permet veure directament que $\det P = b\beta \neq 0$ ja que $\beta \neq 0$ és la hipòtesi que estem fent de que els valors propis són complexos. Anàlogament ha de ser $b \neq 0$, ja que la matriu

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

té valors propis reals (que són $a$ i $d$, ja que el característic és $(a-x)(d-x)$).

*La solució del sistema $X' = AX$ en el cas $Au = \lambda u$, amb $\lambda = \alpha + i\beta$, $u = (u_{11} + iu_{12}, u_{21} + iu_{22})$ està donada pel producte de matrius*

$$X(t) = H(\alpha t)PG(\beta t)C$$

*on*

$$\begin{aligned} H(\alpha t) &= \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}, \quad \textit{homotècia de raó } e^{\alpha t}, \\ P &= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}, \quad \textit{matriu de les components del vector propi}, \\ G(\beta t) &= \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}, \quad \textit{gir d'angle } \beta t, \\ C &= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Nota 7.5.2** *Com que les entrades de la matriu $A$ són reals, si $A$ té el valor propi complex $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$), també té el valor propi conjugat $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. I el vector propi de valor propi $\bar{\lambda}$ és justament el conjugat $\bar{u}$ de $u$. Només cal conjugar la igualtat $Au = \lambda u$; com que $A$ és real obtenim: $A\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u}$.*

*Es compleix també que*

$$\Re(e^{\bar{\lambda}t}\bar{u}), \quad i \quad \Im(e^{\bar{\lambda}t}\bar{u})$$

*són solucions* reals *de $X' = AX$.*

*Repetint els càlculs anteriors obtindríem* [6]

$$X(t) = H(\alpha t)\bar{P}G(-\beta t)C$$

[6] En conjugar, $\alpha$ no canvia, $\beta$ canvia de signe, $u_{11}$ i $u_{21}$ no canvien, i $u_{12}$ i $u_{22}$ canvien de signe.

*on*

$$
\begin{aligned}
H(\alpha t) &= \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}, \quad \textit{homotècia de raó } e^{\alpha t}. \\
\bar{P} &= \begin{pmatrix} u_{11} & -u_{12} \\ u_{21} & -u_{22} \end{pmatrix}, \quad \textit{matriu de les components del vector propi.} \\
G(-\beta t) &= \begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}, \quad \textit{gir d'angle } -\beta t. \\
C &= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

*Però aquest producte de matrius coincideix amb el considerat en el requadre anterior simplement canviant $C_2$ per $-C_2$. Com $C_2$ és una constant arbitrària, aquesta solució és essencialment igual a la ja obtinguda, és a dir, és el mateix escriure la solució general* (7.5) *a partir de la parella* $(\lambda, u)$ *que a partir de la parella* $(\bar{\lambda}, \bar{u})$.

**Exemple 7.5.3** *Resoleu el sistema*

$$X' = AX$$

*amb*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

*Solució.*

Polinomi característic: $x^2 - 2x + 17$.
Arrels del característic (valors propis) $\lambda = 1 + 4i, \bar{\lambda} = 1 - 4i$.
Si posem $\lambda = \alpha + i\beta$, tenim $\alpha = 1$, $\beta = 4$.

*Càlcul de vector propi de valor propi $\lambda = 1 + 4i$.*
Hem de resoldre el sistema

$$\begin{pmatrix} 1-(1+4i) & 4 \\ -4 & 1-(1+4i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aquest sistema es redueix a l'equació $-4iu_1 + 4u_2 = 0$. Si $u_1 = 1$, ha de ser $u_2 = i$. Per tant, podem agafar com vector propi $u = (1, i)$.

*Solució a partir de la fórmula* (7.4).

Calculem

$$\Re[e^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}], \quad \text{i} \quad \Im[e^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}]$$

Tenim

$$\begin{aligned}
\Re(e^{\lambda t}u_1) &= \Re(e^{(1+4i)t}\cdot 1) = e^t\cos(4t)\\
\Re(e^{\lambda t}u_2) &= \Re(e^{(1+4i)t}\cdot i) = -e^t\sin(4t)\\
\Im(e^{\lambda t}u_1) &= \Im(e^{(1+4i)t}\cdot 1) = e^t\sin(4t)\\
\Im(e^{\lambda t}u_2) &= \Im(e^{(1+4i)t}\cdot i) = e^t\cos(4t)
\end{aligned}$$

Per tant, la solució general

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\Re\left[e^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right] + C_2\Im\left[e^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right]}$$

és ara

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^t\cos(4t) \\ -e^t\sin(4t) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^t\sin(4t) \\ e^t\cos(4t) \end{pmatrix}} \tag{7.6}$$

*Solució a partir de la fórmula* (7.5).

Amb la notació de la fórmula (7.5) tenim

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja que $1 = 1 + 0i$ (primera fila) i $i = 0 + 1$ i (segona fila).

Per tant la solució és

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t\left[C_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(4t) \\ -\sin(4t) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(4t) \\ \cos(4t) \end{pmatrix}\right]$$

És a dir,

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t\left[C_1\begin{pmatrix} \cos(4t) \\ -\sin(4t) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin(4t) \\ \cos(4t) \end{pmatrix}\right]}$$

que coincideix amb (7.6). Equivalentment,

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^t(C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t))\\
y(t) &= e^t(-C_1\sin(4t) + C_2\cos(4t))
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

**Exemple 7.5.4** *Trobeu la solució de l'anterior sistema tal que* $x(0) = 0$ *i* $y(0) = 1$.

*Solució.* Només hem d'imposar

$$\begin{aligned} 0 = x(0) &= e^0(C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)) \\ 1 = y(0) &= e^0(-C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0)) \end{aligned}$$

és a dir,

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \\ 1 &= C_2 \end{aligned}$$

i, per tant, la solució és

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t \sin(4t) \\ y(t) &= e^t \cos(4t) \end{aligned}$$

$\Diamond$

## 7.6 El característic té una arrel real doble i hi ha un únic vector propi

Volem resoldre el sistema

$$X' = AX$$

en el cas en que el polinomi característic de $A$, tingui una arrel real doble $\lambda$.

La solució general està donada per

$$\boxed{X(t) = C_1 e^{\lambda t} u + (C_1 t + C_2) e^{\lambda t} v}$$

amb

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

essent $v$ l' únic vector propi de $A$ de valor propi $\lambda$ ($Av = \lambda v$), i $u$ és un vector que compleix

$$\boxed{Au = \lambda u + v}$$

Equivalentment
$$(A - \lambda I)u = v,$$
on $I$ és la matriu identitat $2 \times 2$. Observem que aquesta igualtat vectorial és un sistema lineal de dues equacions amb dues incògnites: les dues components $u_1, u_2$ del vector $u$, que es poden trobar doncs fàcilment.

És important notar que aquest sistema és compatible indeterminat. Això és conseqüència del teorema Rocuhé-Frobenius ja que
$$\operatorname{rang}(A - \lambda I) = \operatorname{rang}(A - \lambda I|v).$$

En efecte, com que estem estudiant el cas en que el polinomi característic de
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$
que, recordem que val $x^2 - (a+d)x + ad - bc$, té una arrel real doble, això vol dir que el seu discriminant és zero, i per tant
$$\lambda = \frac{a+d}{2}.$$
El vector propi $v$ és ara fàcil de calcular. Obtenim $v = (2b, d-a)$. Així
$$\operatorname{rang}(A - \lambda I|v) = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{cc|c} \frac{a-d}{2} & b & 2b \\ c & \frac{d-a}{2} & d-a \end{array}\right) = \operatorname{rang}(A - \lambda I),$$
ja que la tercera columna és un múltiple de la segona.

Així doncs sempre existeix aquest vector $u$ tal que $(A - \lambda I)u = v$, essent $v$ el vector propi, i per tant la solució general del sistema en aquest cas serà
$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + (C_1 t + C_2) e^{\lambda t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}$$

o, equivalentment,
$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda t} u_1 + (C_1 t + C_2) e^{\lambda t} v_1 \\ y(t) &= C_1 e^{\lambda t} u_2 + (C_1 t + C_2) e^{\lambda t} v_2 \end{aligned}$$

*Justificació.* Demostrar que
$$X(t) = C_1 e^{\lambda t} u + (C_1 t + C_2) e^{\lambda t} v$$

és soució de $X' = AX$ és molt senzill ja que, derivant, i tenint en compte que $Au = \lambda u + v$, tenim

$$\begin{aligned} X'(t) &= C_1 e^{\lambda t} \lambda u + (C_1 t + C_2) e^{\lambda t} \lambda v + C_1 e^{\lambda t} v \\ &= C_1 e^{\lambda t} (\lambda u + v) + (C_1 t + C_2) e^{\lambda t} A v \\ &= C_1 e^{\lambda t} A u + (C_1 t + C_2) e^{\lambda t} A v \\ &= A(C_1 e^{\lambda t} u + (C_1 t + C_2) e^{\lambda t} v) \\ &= AX. \end{aligned}$$

**Exemple 7.6.1** *Resoleu el sistema*

$$X' = AX$$

*on*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

*Solució.* Polinomi característic: $x^2 - 4x + 4$. Arrels del característic: $\lambda = 2$ amb multiplicitat dos. Observeu que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

*Càlcul del vector propi de valor propi* 2: Resolem el sistema

$$\begin{pmatrix} 0-2 & -4 \\ 1 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aquest sistema es redueix a l'equació $x + 2y = 0$, i per tant, podem agafar com a vector propi de valor propi 2 el vector $v = (-2, 1)$. Fixeu-vos que qualsevol múltiple $\lambda v$ d'aquest vector, $((4, -2), (-10, 5), ....)$ és també vector propi de valor propi 1

Busquem ara $u$ tal que $Au = 2u + v$. Equivalentment,

$$\begin{pmatrix} 0-2 & -4 \\ 1 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aquest sistema és equivalent a la única equació $u_1 + 2u_2 = 1$. Per tant, podem agafar per exemple $u = (1, 0)$.

La solució serà doncs

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (C_1 t + C_2) e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Equivalentment

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{2t}(C_1 - 2(C_1 t + C_2)) \\ y(t) &= e^{2t}(C_1 t + C_2) \end{aligned}$$

**Exemple 7.6.2** *Un dipòsit conté inicialment 100 litres d'aigua i 10 Kg de sal. A aquest dipòsit hi entra aigua a raó de 3 litres per minut, i surt disolució (aigua amb sal) a raó també de 3 litres per minut. Aquesta dissolució va a parar a un segon dipòsit que conté inicialment 100 litres d'aigua i del qual surt disolució (aigua amb sal) a raó també de 3 litres per minut. En quin moment serà màxima la quantitat de sal en el segon dipòsit?*

*Solució.* Es deixa al lector. $\Diamond$

## 7.7 El característic té una arrel real doble i hi ha dos vectors propis

Volem resoldre el sistema

$$X' = AX$$

en el cas en que el polinomi característic de $A$, tingui una arrel real doble $\lambda$, però hi hagin dos vectors propis de valor propi $\lambda$, $u$, $v$ linealment independents.

Si passa això, llavors qualsevol vector es vector propi de valor propi $\lambda$. De manera que aquesta situació es dóna només si la matriu $A$ és diagonal, i.e. $A = \lambda I$.

La solució general està donada per

$$\boxed{X(t) = e^{\lambda t} u}$$

amb

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

essent $u$ un vector qualsevol.

*Justificació.* Demostrar que

$$X(t) = e^{\lambda t} u$$

és solució de $X' = AX$ és molt senzill ja que, derivant, tenim

$$\begin{aligned} X'(t) &= e^{\lambda t} \lambda u \\ &= \lambda X(t) \\ &= \lambda I X(t) \\ &= AX. \end{aligned}$$

**Exemple 7.7.1** *Resoleu el sistema*

$$X' = AX$$

*amb*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*Solució.* Polinomi característic: $(x-2)^2$. Arrels del característic: $\lambda = 2$ amb multiplicitat dos. Com que $A = 2I$ tot vector es vector propi de valor propi 2.

La solució serà doncs

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

per a qualsevol valor de $u_1$ i de $u_2$.

## 7.8 Mètode alternatiu: Pas d'un sistema $2\times 2$ de primer ordre a una equació de segon ordre

Els sistemes d'equacions diferencials lineals $2\times 2$ amb coeficients constants es poden reduir a equacions diferencials lineals de segon ordre amb coeficients constants. En particular, podem resoldre aquests sistemes sense parlar de matrius, valors propis etc., com acabem de fer a les seccions anteriors.

Concretament, donat el sistema

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

amb $a, b, c, d$ constants, derivem la primera equació i obtenim

$$x'' = ax' + by' = ax' + b(cx + dy) = ax' + bcx + bd\frac{1}{b}(x' - ax)$$

(La última igualtat prové d'aïllar $y$ a la primera equació).

És a dir, tenim l'equació de segon ordre

$$x'' - (a+d)x' + (ad - bc)x = 0,$$

que sabem resoldre pels mètodes explicats a les seccions anteriors. Un cop coneguda la funció $x(t)$ podem trobar $y(t)$ resolent la segona equació $y' - dy = cx(t)$ que és lineal.

També podem trobar $y(x)$ observant que el mateix càlcul anterior però derivant la segona equació en lloc de la primera ens dóna

$$y'' - (a+d)y' + (ad - bc)y = 0.$$

Curiosament, doncs, $x(t), y(t)$, són solucions de la *mateixa* equació diferencial.

Observem que si denotem per

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

l'equació diferencial que compleixen tant $x(t)$ com $y(t)$ es pot escriure com

$$\boxed{x'' - (\text{traça} A)x' + (\det A)x = 0.}$$

Resolem per aquest mètode el mateix exercici 7.4.3.

**Exemple 7.8.1** *Resoleu el sistema*

$$X' = AX$$

*on*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Solució.* L'equació diferencial que compleixen tant $x(t)$ com $y(t)$ és

$$x'' - 6x' + 8x = 0.$$

Les arrels són 2 i 4 i per tant

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \\ y(t) &= C_3 e^{2t} + C_4 e^{4t} \end{aligned}$$

Ara bé, les constants no són independents. Com que la primera equació dels sistema és $x'(t) = 3x(t) + y(t)$ s'ha de complir que

$$2C_1e^{2t} + 4C_2e^{4t} = 3(C_1e^{2t} + C_2e^{4t}) + C_3e^{2t} + C_4e^{4t}.$$

Igualant els coeficients de les dues exponencials tenim

$$\begin{aligned} 2C_1 &= 3C_1 + C_3 \\ 4C_2 &= 3C_2 + C_4 \end{aligned}$$

Per tant, $C_3 = -C_1$ i $C_4 = C_2$. Així que la solució és

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1e^{2t} + C_2e^{4t} \\ y(t) &= -C_1e^{2t} + C_2e^{4t} \end{aligned}$$

d'acord amb el resultat obtingut a la pàgina 145, equació (7.3).

## 7.9 Mètode alternatiu: Diagonalització

Una de les aplicacions més interessants dels conceptes de vector i valor propi és la següent.

**Definició 7.9.1** *Direm que una matriu $A$ és diagonalitzable si existeix una matriu invertible $P$ tal que la matriu*

$$D = P^{-1}AP$$

*és una matriu diagonal.*

Recordem que una matriu es diu *diagonal* quan tots els termes fora de la diagonal són zero.

Per exemple, les matrius

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

són diagonals.

Estudiarem només el cas de matrius $2 \times 2$, ja que de moment estem interessats només en resoldre sistemes d'equacions diferencials de dues equacions amb dues incògnites.

Sigui doncs $A$ una matriu $2 \times 2$ i suposem que té un vector propi $u$ de valor propi $\lambda$ i un altre vector propi $v$ de valor propi $\mu$. És a dir,

$$Au = \lambda u, \quad Av = \mu v.$$

Si $u = (u_1, u_2)$ i $v = (v_1, v_2)$, les anteriors igualtats s'escriuen

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu v_1 \\ \mu v_2 \end{pmatrix}$$

Recordant com funciona el producte de matrius[7] veiem que les dues igualtats anteriors es poden expressar en una de sola posant

$$A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Denotant per $P$ la matriu formada pels vectors propis

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

tenim

$$AP = PD, \quad \text{amb} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Si els vectors propis són linealment independents, $P$ és invertible, $(\det P \neq 0)$, i tenim

$$D = P^{-1}AP$$

Resumint, *si una matriu* $2 \times 2$ *té dos vectors propis independents, diagonalitza. La matriu* $P$ *que realitza aquesta diagonalització* ($P^{-1}AP$ *diagonal)*

[7]La primera (resp. segona) columna de la matriu producte $AB$ s'obté multiplicant $A$ per la primera (resp. segona) columna de $B$. En el nostre cas

$$A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \left( A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \lambda u_1 & \mu v_1 \\ \lambda u_2 & \mu v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

*té per columnes les components dels vectors propis. La diagonal de la matriu $D = P^{-1}AP$ està formada pels valors propis de $A$.*

**Exemple 7.9.2** *Diagonalitzeu la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

*Solució.* Característic: $x^2 - 5x - 2$.

Arrels del característic (valors propis): $\lambda = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$, $\mu = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$

Vector propi de valor propi $\lambda$: $u = (1, \frac{3+\sqrt{33}}{4})$.

Vector propi de valor propi $\mu$: $v = (1, \frac{3-\sqrt{33}}{4})$.

Per tant, si prenem

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3+\sqrt{33}}{4} & \frac{3-\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix}$$

tenim

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}.$$

$\Diamond$

**Exemple 7.9.3** *Diagonalitzeu la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

*Solució.* Hem vist a l'exemple 7.1.2 que $A$ no té valors propis reals. Per tant, *$A$ no diagonalitza sobre els reals*: no hi ha cap matriu $2 \times 2$ amb coeficients reals, invertible , tal que $P^{-1}AP$ sigui una matriu diagonal.

En canvi, si prenem

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix}$$

(les columnes són els vectors propis calculats a l'exercici 7.1.2) tenim

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5+i & 0 \\ 0 & 5-i \end{pmatrix}$$

És a dir, *$A$ sí que diagonalitza sobre els complexos.* $\Diamond$

**Exemple 7.9.4** *Diagonalitzeu la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Solució.* L'únic valor propi d'aquesta matriu és $\lambda = 2$, ja que el polinomi característic és $(2-x)^2$. Per calcular el vector o vectors propis associats al valor propi $\lambda = 2$ posem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'aquí deduïm que l'únic vector propi és $u = (0,1)$ (i, com sempre, qualsevol múltiple d'aquest). Per tant no podem construir la matriu $P$ invertible formada per dos vectors propis de $A$. Això vol dir que $A$ no diagonalitza (no sobre els reals, ni sobre els complexos).[8] $\lozenge$

## Aplicació de la diagonalització a resoldre $X' = AX$

Suposem que volem resoldre el sistema d'equacions diferencials

$$X' = AX$$

on $A$ és una matriu $2 \times 2$ diagonalitzable.

És a dir, busquem funcions $x(t), y(t)$ tals que

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Que $A$ sigui diagonalitzable vol dir que existeix una matriu $2\times 2$ invertible $P$, (formada pels vectors propis de $A$) tal que $D = P^{-1}AP$ és diagonal (els elements de la diagonal són els valors propis de $A$).

Llavors $A = PDP^{-1}$ i per tant

$$X' = AX = PDP^{-1}X$$

Multiplicant per $P^{-1}$,

$$P^{-1}X' = DP^{-1}X.$$

[8] Demostreu directament, sense recorre a vectors i valors propis, que no hi ha cap matriu invertible $P$ tal que $AP = PD$ amb $D$ diagonal ($A$ la matriu de l'exemple).

Posem, $Z = P^{-1}X$. Com que $P$ és constant, al derivar tenim $Z' = P^{-1}X'$ i per tant

$$Z' = DZ$$

Però resoldre aquest sistema és ara trivial ja que si

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

aquest sistema està format en realitat per dues equacions diferencials independents. Concretament

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

equival a

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= \lambda z_1(t) \\ z_2'(t) &= \mu z_2(t) \end{aligned}$$

que té solució

$$\begin{aligned} z_1(t) &= C_1 e^{\lambda t} \\ z_2(t) &= C_2 e^{\mu t} \end{aligned}$$

I, per tant, la solució del sistema és

$$X(t) = PZ(t) = P \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda t} \\ C_2 e^{\mu t} \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

Com que sabem que $P$ és la matriu que té per columnes les components dels vectors propis,

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

i per tant

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda t} u_1 + C_2 e^{\mu t} v_1 \\ y(t) &= C_1 e^{\lambda t} u_2 + C_2 e^{\mu t} v_2 \end{aligned}$$

d'acord amb el resultat obtingut a la fórmula (7.2) de la pàgina 142.

*Si la matriu $A$ del sistema $X' = AX$ és diagonalitzable, llavors la solució és*

$$X = PZ, \quad amb \quad D = P^{-1}AP$$

*essent $Z$ la solució del sistema diagonal $Z' = DZ$.*

**Exemple 7.9.5 (Veure exemple 7.4.3)** *Resoleu el sistema*

$$X' = AX$$

*on*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Solució.* Sabem que $u = (1, -1)$ és un vector propi de $A$ de valor propi 2, i que $v = (1, 1)$ és un vector propi de $A$ de valor propi 4. Sabem que si posem

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

llavors la matriu $D = P^{-1}AP$ és diagonal, i la diagonal està formada pels valors propis, es a dir

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Segons acabem de veure, igualtat (7.7), la solució del sistema és

$$X(t) = P \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_2 e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_2 e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \\ -C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \end{pmatrix},$$

és a dir

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \\ y(t) &= -C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \end{aligned}$$

d'acord amb el resultat obtingut a la pàgina 145, equació (7.3).
$\Diamond$

El punt dèbil d'aquesta manera de procedir és que *no tota matriu és diagonalitzable.* Necessitem, en el cas $2 \times 2$, que la matriu $P$ formada pels vectors propis sigui invertible. Equivalentment, necessitem tenir dos vectors propis linealment independents. Vegeu l'exemple 7.9.4.

## 7.10 Cas no homogeni

Volem resoldre el sistema d'equacions diferencials

$$X' = AX + B$$

on

$$B = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}.$$

Tenim el resultat següent.

**Teorema 7.10.1** *La solució general del sistema*

$$X' = AX + B$$

*és igual a la solució general del sistema homogeni $X' = AX$ més una solució particular del sistema no homogeni $X' = AX + B$.*

*Demostració.* En efecte, la diferència de dues solucions del no homogeni és una solució del sistema homogeni. L'argument és essencialment el mateix que l'utilitzat a 5.4.2 i a 6.2.2. □

**Corol·lari 7.10.2** *La solució del sistema*

$$X' = AX + C,$$

*amb $C$ constant, és igual a la solució del sistema homogeni $X' = AX$ menys $A^{-1}C$.*

*Demostració.* El vector constant

$$Y(t) = -A^{-1}C$$

és una solució particular del sistema $X' = AX + C$. En efecte,

$$Y'(t) = 0 = A(-A^{-1}C) + C.$$

**Exemple 7.10.3** *Considerem*[9] *la reacció química*

$$A \underset{k_3}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} B \underset{k_4}{\overset{k_2}{\rightleftarrows}} C$$

*amb* $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 1, k_4 = 3$*, i suposem que tenen concentracions inicials* $A(0) = 4, B(0) = 3, C(0) = 3$ *mmol/l. Demostreu que les concentracions de* $A, B, C$ *tendeixen a estabilitzar-se.*

*Solució.* Pels arguments que acabem d'explicar, amb la petita modificació que ara l'element $C$ també dóna lloc a l'element $B$ a velocitat $k_4$, tenim

$$\begin{aligned} A'(t) &= -A(t) + 2B(t) \\ B'(t) &= A(t) - (1+2)B(t) + 3(10 - A(t) - B(t)) \end{aligned}$$

ja que sempre es compleix $A(t) + B(t) + C(t) = constant = A(0) + B(0) + C(0) = 10$. Hem de resoldre doncs el sistema

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2y \\ y' &= -2x - 6y + 30 \end{aligned}$$

Per fer això trobarem la solució del sistema homogeni associat

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2y \\ y' &= -2x - 6y \end{aligned}$$

pels mètodes que veurem tot seguit, i la modificarem com indica el teorema.

En el nostre cas

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Així

$$Y(t) = X(t) - A^{-1}C = X(t) - \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix},$$

[9] Veure *Balibrea-Jiménez*, pàg. 34.

on $X(t)$ és la solució del sistema homogeni $X' = AX$ que trobarem pels mètodes ja explicats a la secció anterior. Concretament s'obté

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-5t} + 6, \\ y(t) &= -(C_1/2) e^{-2t} - 2C_2 e^{-5t} + 3. \end{aligned}$$

Quan $t$ és gran $x(t)$ s'estabilitza en el valor 6 i $y(t)$ s'estabilitza en el valor 3.

**Exemple 7.10.4** *Resoleu el sistema*

$$\begin{aligned} x' &= 3x + y + t \\ y' &= x + 3y + e^t \end{aligned}$$

*Solució.* Sabem (exemple 7.4.3, pàgina 144) que la solució del sistema homogeni associat és

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ -e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Per tal de trobar la solució del no homogeni fem *variació de les constants.* Posem

$$Z(t) = S(t)C(t), \quad S(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ -e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

Llavors imposem

$$Z' = S'C + SC' = AZ + B, \tag{7.8}$$

amb

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Com que $X(t) = S(t)C(t_0)$ és solució del sistema homogeni, per a qualsevol valor fixat $t_0$, tenim

$$X'(t) = S'(t)C(t_0) = AS(t)C(t_0), \quad \forall t_0$$

En particular, prenent derivades en $t = t_0$, tenim

$$S'(t_0)C(t_0) = AS(t_0C(t_0))$$

i com que aquesta igualtat és certa per a tot $t_0$ tenim

$$S'(t)C(t) = AZ(t).$$

Substituint a (7.8) tenim

$$S(t)C'(t) = B(t)$$

que permet calcular $C(t)$ integrant

$$C'(t) = S(t)^{-1}B(t).$$

Tenim

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} \\ e^{-4t} & e^{-4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Un parell d'integrals senzilles, usant que

$$\int te^{at}\,dt = \frac{at-1}{a^2}e^{at}$$

ens donen

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1+2t}{8}e^{-2t} \\ c_2(t) &= -\frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1+4t}{32}e^{-4t} \end{aligned}$$

Per tant la solució particular buscada és

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ -e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^t - \frac{5+12t}{32} \\ \\ -\frac{2}{3}e^t + \frac{3+4t}{32} \end{pmatrix}$$

i la general

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{4t} \\ -C_1e^{2t} + C_2e^{4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^t - \frac{5+12t}{32} \\ \\ -\frac{2}{3}e^t + \frac{3+4t}{32} \end{pmatrix}$$

$\Diamond$