Notes sobre geometria projectiva clàssica

Agustí Reventós Tarrida

2019

Índex

Capítol 1

Introducció

Resumiré aquí els resultats clàssics de geometria projectiva, seguint el llibre [1], però ho faré en el pla euclidià, és a dir, sense introduir els elements a l'infinit, cosa pròpia de la Geometria Projectiva. Arribarem fins a estudiar, mitjançant aquest punt de vista, les propietats més conegudes de les còniques.

1.1 Raó simple i raó doble

Definim la raó simple de tres punts alineats A, B, C del pla com

$$(A, B, C) = \pm \frac{AC}{BC}$$

amb signe $-$ si i només si C està entre A i B.[1]

La raó doble de quatre punts alineats es defineix simplement com el quocient de raons simples:

$$(A, B, C, D) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)}.$$

Podeu estudiar el signe i els diversos valors que s'obtenen en permutar aquests punts, per exemple a [3].

Definició 1.1.1 *Siguin r, r' dues rectes del pla. Direm que una aplicació $f : r \longrightarrow r'$ és una* projectivitat *si conserva la raó doble.*

[1] La notació AB en aquest context vol dir la longitud del segment AB. Per les propietats de la relació "està entre" vegeu [2].

No és necessari que el domini de f sigui tot r, però no ho especifiquem per no carregar la notació.[2]

Per exemple, sigui r l'eix de les y $(x = 0)$ i sigui r' l'eix de les x $(y = 0)$ i considerem f la projecció de r sobre r' des del punt $(1, 1)$. Concretament

$$f(0, a) = (\frac{2-a}{a-1}, 0).$$

Comproveu que f conserva la raó doble (no la raó simple). El punt $(0, 1)$ no té imatge. Per raons òbvies es diu que és un *punt límit.*

De fet $f : r \setminus (0, 1) \longrightarrow r' \setminus (-1, 0)$ és bijectiva amb inversa

$$f^{-1}(b, 0) = (0, \frac{b+2}{b+1}).$$

Exercici 1.1.2 *Demostreu que l'aplicació* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *donada per*

$$f(t) = \frac{at+b}{ct+d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

conserva la raó doble. És cert el recíproc?

Solució. La primera part és un càlcul directe. Per veure el recíproc, identificant els punts de $\mathbb{R}$ amb la seva coordenada, podem suposar conegudes les imatges t_1', t_2', t_3' de tres punts t_1, t_2, t_3 respectivament. Per tot $t \in \mathbb{R}$ tenim

$$(t_1, t_2, t_3, t) = (t_1', t_2', t_3', t')$$

on $t' = f(t)$. Equivalentment

$$\frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} : \frac{t - t_1}{t - t_2} = \frac{t_3' - t_1'}{t_3' - t_2'} : \frac{t' - t_2'}{t' - t_1'}.$$

Aïllant t' tenim el resultat. $\square$

Així doncs les projectivitats estan definides per a tots els punts de r o per a tots els punts de r menys un (el de coordenades $-d/c$, $c \neq 0$, de l'exercici anterior).

[2]El mateix passa en Anàlisi quan es parla de funcions reals de variable real que s'escriu $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i a continuació s'estudia el domini de f.

Definició 1.1.3 *Si una projectivitat $f : r \longrightarrow r$ té dos punts fixos M, N es defineix la seva* característica *per*

$$(M, N, X, f(X))$$

on X és un punt qualsevol de r.

Per veure que aquesta raó doble no depèn de X, i que per tant l'anterior és una bona definició, prenem dos punts arbitraris $A, B \in r$ i tenim

$$(M, N, A, B) = (M, N, f(A), f(B))$$

Equivalentment,

$$\frac{MA}{NA} : \frac{MB}{NB} = \frac{Mf(A)}{Nf(A)} : \frac{Mf(B)}{Nf(B)}$$

i per tant

$$\frac{MA}{NA} : \frac{Mf(A)}{Nf(A)} = \frac{MB}{NB} : \frac{Mf(B)}{Nf(B)}$$

és a dir

$$(M, N, A, f(A)) = (M, N, B, f(B)),$$

com volíem veure.

A més d'estudiar aplicacions entre rectes també estudiarem aplicacions del pla.

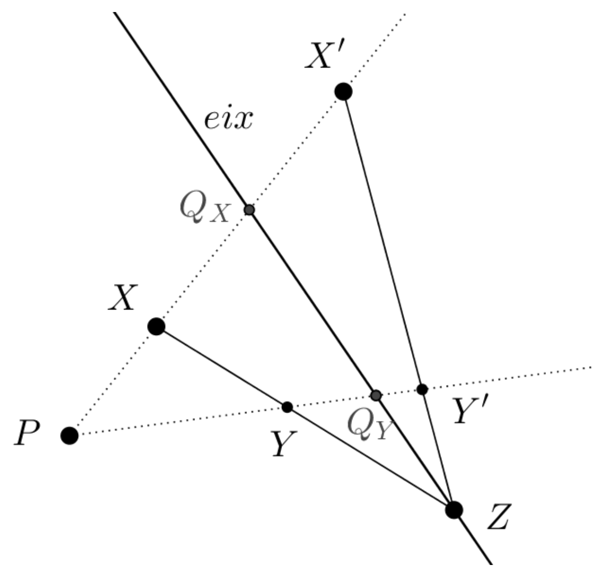
Definició 1.1.4 *Una* projectivitat *del pla és una aplicació del pla en el pla que porta punts alineats a punts alineats i conserva la raó doble.*[3]

Quan tenen un punt fix P i una recta e de punts fixos, amb $P \notin e$, es diuen *homologíes generals*. I té sentit parlar llavors també de la seva *característica* com (P, Q_X, X, X'), on Q_X és el punt d'intersecció de la recta PX amb l'eix e.

Es veu, com en el cas d'aplicacions de la recta, que aquest valor no depèn del punt X. En efecte, si P, X, Y estan alineats, estem en el cas anterior, d'aplicacions de la recta en la recta, amb dos punts fixos P i $Q_X = Q_Y$ i tenim doncs com abans, $(P, Q_X, X, X') = (P, Q_Y, Y, Y')$.

[3]El teorema fonamental de la geometria projectiva diu que si una aplicació del pla en el pla porta rectes a rectes ja conserva automàticament la raó doble. No ens preocupem aquí d'aquests resultats, vegeu [3].

Si X, Y no estan alineats només cal adonar-se de que les rectes XY i $X'Y'$ s'han de tallar sobre l'eix (si són paral·leles Tales resol), ja que si $Z = XY \cap e$ la imatge de la recta ZXY és la recta $ZX'Y'$, per ser Z fix. Llavors $(P, Q_X, X, X') = (P, Q_Y, Y, Y')$ per projecció des de Z.



1.2 Projectivitats de la recta.

Sigui $f : r \longrightarrow r$ una projectivitat de la recta r. Siguin $A, B, C \in r$ i denotem $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$. Suposem aquests tres punts donats i les seves imatges conegudes (equival a conèixer f). L'objectiu d'aquesta secció és, donat $D \in r$ construir $D' = f(D)$ i, en particular trobar els punts dobles, és a dir, aquells punts $M \in r$ tals que $M' = M$.

La tècnica auxiliar que utilitzarem aquí i en situacions similars consisteix en fixar un punt $V \notin r$ i una circumferència $\mathcal{C}$ que passi per V.

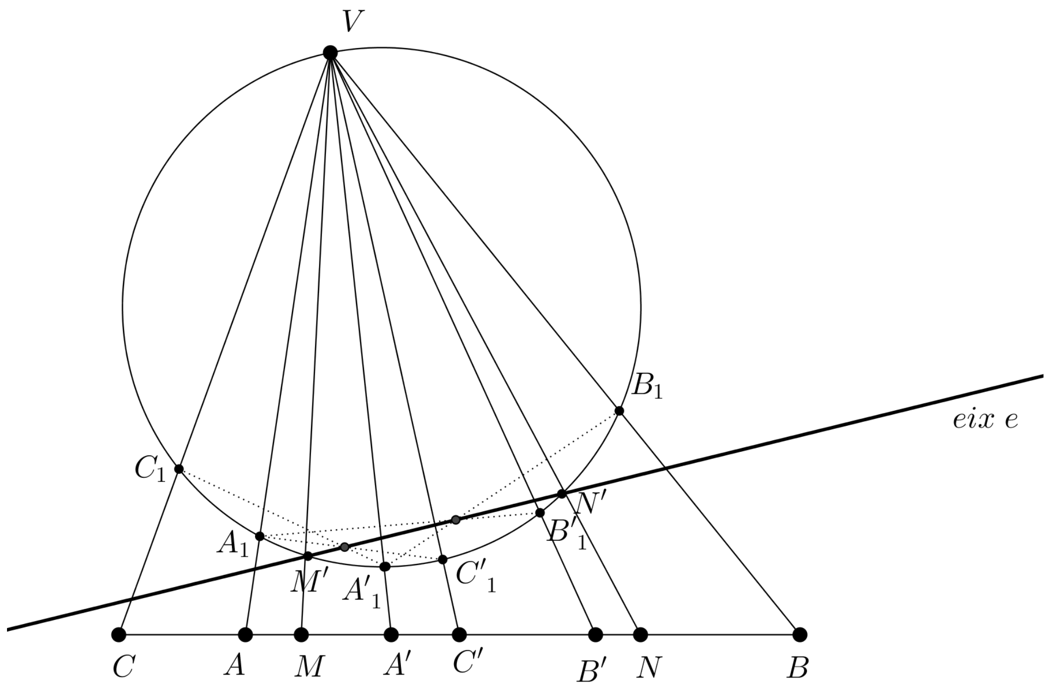
A continuació construïm els punts

$$\begin{aligned} A_1 &= VA \cap \mathcal{C}, \\ B_1 &= VB \cap \mathcal{C}, \\ C_1 &= VC \cap \mathcal{C}. \end{aligned}$$

intersecció de la circumferència amb les semirectes VA, VB, VC respectivament.

Anàlogament construïm

$$\begin{aligned} A_1' &= VA' \cap \mathcal{C}, \\ B_1' &= VB' \cap \mathcal{C}, \\ C_1' &= VC' \cap \mathcal{C}. \end{aligned}$$



De fet, la situació és que l'aplicació $f : r \longrightarrow r$ indueix $\tilde{f} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ donada per $\tilde{f}(X) = Y$ si i només si

$$f(VX \cap r) = VY \cap r. \tag{1.1}$$

Quan X s'acosta a V la recta VX tendeix a la tangent de manera que $\tilde{f}(V) = V'$ si i només si

$$f((\text{tangent a } \mathcal{C} \text{ per } V) \cap r) = VV' \cap r.$$

En principi $\tilde{f}$ no està definida sobre el punt Z en que la paral·lela a r per V talla $\mathcal{C}$. Per continuïtat, podem definir $\tilde{Z} = Z$ quan f no té punts límit (el seu domini de definició és tota la recta) i té per imatge la intersecció amb $\mathcal{C}$ de la recta VL on L és el punt límit de f^{-1} en cas contrari.

Proposició 1.2.1 *L'aplicació $\tilde{f} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ induïda per una projectivitat $f : r \longrightarrow r$ sobre el cercle auxiliar $\mathcal{C}$ per la fórmula* (1.1) *és una projectivitat.*

Demostració. Hem de veure que conserva la raó doble. Recordem que la raó doble de quatre punts $X_i \in \mathcal{C}$ està definida per la raó doble de les quatre rectes

$$(X_1, X_2, X_3, X_4) = (VX_1, VX_2, VX_3, VX_4).$$

Es pot veure que aquesta raó doble no depèn del punt V elegit a $\mathcal{C}$.[4]

Denotant $Y_i = \tilde{f}(X_i)$ i usant que f conserva la raó doble tenim

$$\begin{aligned}
(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) &= (VY_1, VY_2, VY_3, VY_4) \\
&= (VY_1 \cap r, VY_2 \cap r, VY_3 \cap r, VY_4 \cap r) \\
&= (f(VX_1 \cap r), f(VX_2 \cap r), f(VX_3 \cap r), f(VX_4 \cap r)) \\
&= (VX_1 \cap r, VX_2 \cap r, VX_3 \cap r, VX_4 \cap r) \\
&= (X_1, X_2, X_3, X_4),
\end{aligned}$$

i per tant $\tilde{f}$ és una projectivitat. $\square$

Per calcular $f(D)$, amb $D \in r$, observem que la igualtat (1.1) es pot escriure com

$$f(D) = V\tilde{f}(D_1) \cap r \tag{1.2}$$

on $D_1 = VD \cap \mathcal{C}$. Per tant, per conèixer $f(D)$ tan sols hem de conèixer $\tilde{f}(D_1)$ i això és fàcil si coneixem l'eix de $\tilde{f}$. En efecte, les projectivitats sobre el cercle es comporten com les projectivitats sobre rectes en el sentit que queden pràcticament conegudes quan es coneix el seu eix. Vegeu la definició i propietats de l'eix d'una projectivitat a [3]. Concretament tenim el resultat següent.

Teorema 1.2.2 *Si una aplicació $\tilde{f} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ és una projectivitat els punts*

$$P_1\tilde{f}(P_2) \cap P_2\tilde{f}(P_1)$$

en variar P_1, P_2 a $\mathcal{C}$, estan alineats.[5] *D'aquesta recta se'n diu* eix *de $\tilde{f}$.*

---

[4] Això serà cert per a qualsevol cònica; en aquest cas la cònica és una circumferència i la independència del punt és conseqüència de la propietat dels angles inscrits. De fet

$$(A, B, C, D) = \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}$$

on $A, B, C, D \in \mathcal{C}$ i $a = VA, b = VB, c = VC, d = VD$ per a qualsevol punt $V \in \mathcal{C}$

[5] Això serà cert per a a qualsevol cònica, vegeu el teorema 2.0.7.

Demostració. Left to the reader. I am the reader.

Prenem $A_1, B_1, C_1 \in \mathcal{C}$ i denotem $A_1' = \tilde{f}(A_1), B_1' = \tilde{f}(B_1), C_1' = \tilde{f}(C_1)$. Considerem la recta PQ (serà l'eix e que busquem) amb

$$\begin{aligned} P &= A_1'B_1 \cap A_1B_1' \\ Q &= A_1'C_1 \cap A_1C_1'. \end{aligned}$$

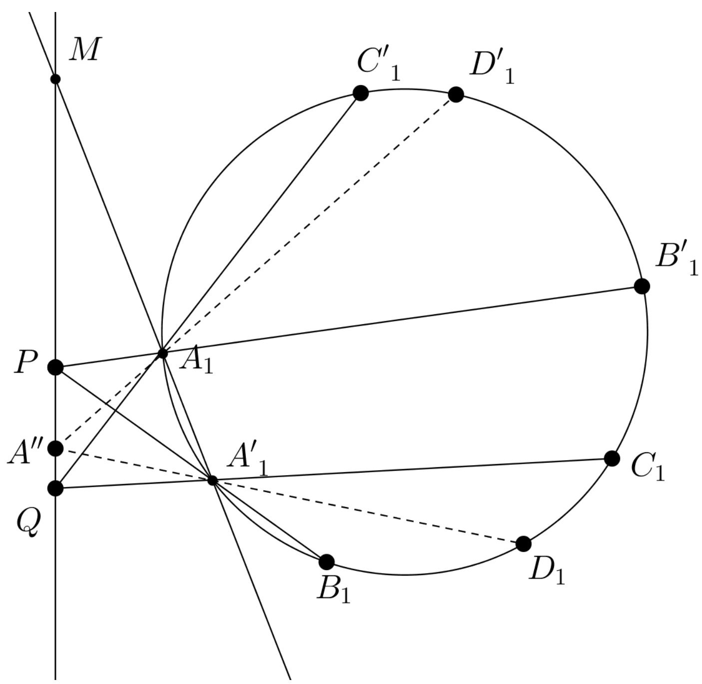
Prenem un quart punt $D_1 \in \mathcal{C}$. El punt $D_1' = \tilde{f}(D_1)$ està caracteritzat per la condició $(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_1', B_1', C_1', D_1')$. Construirem un punt D_1' que complirà aquesta condició. Definim

$$A'' = A_1'D_1 \cap e,$$

i a continuació prenem

$$D_1' = A_1A'' \cap \mathcal{C}, \quad A_1 \neq D_1'.$$

(la recta A_1A'' talla $\mathcal{C}$ en dos punts, un dels quals és A_1.)



Tenim doncs

$$(A_1, B_1, C_1, D_1) \;=\; (A_1'A_1, A_1'B_1, A_1'C_1, A_1'D_1)$$

ja que $A_1' \in \mathcal{C}$. Tallant amb l'eix e tenim

$$\begin{aligned}(A_1, B_1, C_1, D_1) &= (A_1'A_1, A_1'B_1, A_1'C_1, A_1'D_1) \\ &= (M, P, Q, A'') \\ &= (A_1M, A_1P, A_1Q, A_1A'')\end{aligned}$$

que tallant amb $\mathcal{C}$ ens dóna

$$\begin{aligned}(A_1, B_1, C_1, D_1) &= (A_1'A_1, A_1'B_1, A_1'C_1, A_1'D_1) \\ &= (M, P, Q, A'') \\ &= (A_1M, A_1P, A_1Q, A_1A'') \\ &= (A_1', B_1', C_1', D_1').\end{aligned}$$

Com D és un punt qualsevol i s'ha complert que $AD' \cap A'D \in e$ el teorema queda demostrat. $\square$

Tornem ara al problema inicial. És a dir, suposem que tenim una projectivitat $f : r \longrightarrow r$ de la qual coneixem les imatges A', B', C' de tres punts diferents A, B, C de r. Sigui $D \in r$. Volem construir $D' = f(D)$. Seguim els passos següents.

1) Construïm $A_1 = VA \cap \mathcal{C}$, $B_1 = VB \cap \mathcal{C}$, $C_1 = VC \cap \mathcal{C}$, $D_1 = VD \cap \mathcal{C}$.

2) Construïm l'eix e de $\tilde{f}$. És la recta determinada pels punts $P = A_1'B_1 \cap A_1B_1'$ i $Q = A_1'C_1 \cap A_1C_1'$.

3) Sigui $P = D_1\tilde{f}(A_1) \cap e$.

4) Construïm $\tilde{f}(D_1) = PA_1 \cap \mathcal{C}$.

5) Construïm $f(D) = V\tilde{f}(D_1) \cap r$

En particular, si apliquem aquests passos als punts $M = VM' \cap r$, $N = VN' \cap r$ on M', N' són els punts d'intersecció de e i $\mathcal{C}$, obtenim $f(M) = M$ i $f(N) = N$. Quan es dóna aquesta situació, és a dir que l'eix e de $\tilde{f}$ talla $\mathcal{C}$ en dos punts, es diu que la projectivitat és *hiperbòlica*. Si l'eix és tangent a $\mathcal{C}$ tenim un únic punt fix i la projectivitat és diu *parabòlica*, i si l'eix no talla $\mathcal{C}$ no hi ha punts fixos i la projectivitat es diu *el·líptica*.

1.3 Involucions. Punt de Frégier

Definició 1.3.1 *Una* involució $f : r \longrightarrow r$ *és una projectivitat bijectiva tal que* $f^2 = id$.

Observem que la característica d'una involució amb dos punts fixos és -1. En efecte, si M i N són fixos tenim (aplicant f)

$$(M, N, X, f(X)) = (M, N, f(X), X)$$

i això implica $k = 1/k$ i per tant, o bé és la identitat o $k = -1$.

Això ens diu que el punt mitjà P entre M i N no té imatge (es parla de 'punt límit')[6] ja que

$$-1 = (M, N, P, f(P)) = \frac{(M, N, P)}{(M, N, f(P))} = \frac{-1}{(M, N, f(P))}$$

i això no es pot donar (ens hi acostem quan $f(P)$ tendeix a infinit).

Exercici 1.3.2 *Demostreu que*

$$f(t) = \frac{at + b}{ct + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

és involució diferent de la identitat si i només si $a + d = 0$. *Trobeu els punt fixos.*

Solució. La primera part és un càlcul directe. Per trobar els punts fixos posem

$$\frac{at + b}{ct - a} = t,$$

d'on

$$ct^2 - 2at - b = 0.$$

Per tant, si $c = 0$ (que implica $a \neq 0$), $t = -b/2a$ és l'únic punt fix. Si $c \neq 0$, resolem l'equació de segon grau i tenim que si $a^2 + bc > 0$ hi ha dos punts fixos i si $a^2 + bc < 0$ no hi ha cap punt fix. □

Per estudiar les involucions observem primer que queden determinades quan sabem la imatge de dos punts.[7]

[6] Es diu que el punt mitjà és el conjugat harmònic del punt de l'infinit.

[7] Es pot veure analíticament.

En efecte, donats A, B i les seves imatges A', B' si volem saber la imatge X' d'un punt donat X només hem d'escriure

$$(A, B, A', X) = (A', B', A, X')$$

i adonar-nos que la única incògnita és X', que la podem trobar doncs fàcilment.

Construcció del punt de Frégier

Utilitzarem la mateixa tècnica del *cercle auxiliar* que hem emprat a la secció 1.2.

Suposem coneguts $A, B, A' = f(A), B' = f(B)$ per a una certa involució f d'una recta r. Considerem un punt $V \notin r$ i una circumferència $\mathcal{C}$ que passi per V. Portem aquests punts sobre $\mathcal{C}$ definint

$$\begin{aligned} A_1 &= VA \cap \mathcal{C} \\ B_1 &= VB \cap \mathcal{C} \\ A'_1 &= VA' \cap \mathcal{C} \\ B'_1 &= VB' \cap \mathcal{C} \end{aligned}$$

La involució f indueix una involució $\tilde{f} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ per la fórmula (1.1) i denotarem $\tilde{f}(A_1) = A'_1, \tilde{f}(B_1) = B'_1$.

Tenint en compte el teorema 1.2.2 construïm l'eix de $\tilde{f}$ així: construïm els punts

$$\begin{aligned} M &= A_1B'_1 \cap A'_1B_1 \\ N &= A_1(B'_1)' \cap A'_1B'_1 \end{aligned}$$

($(B'_1)' = B_1$ per ser $\tilde{f}$ involució) i llavors l'eix és la recta $e = MN$.

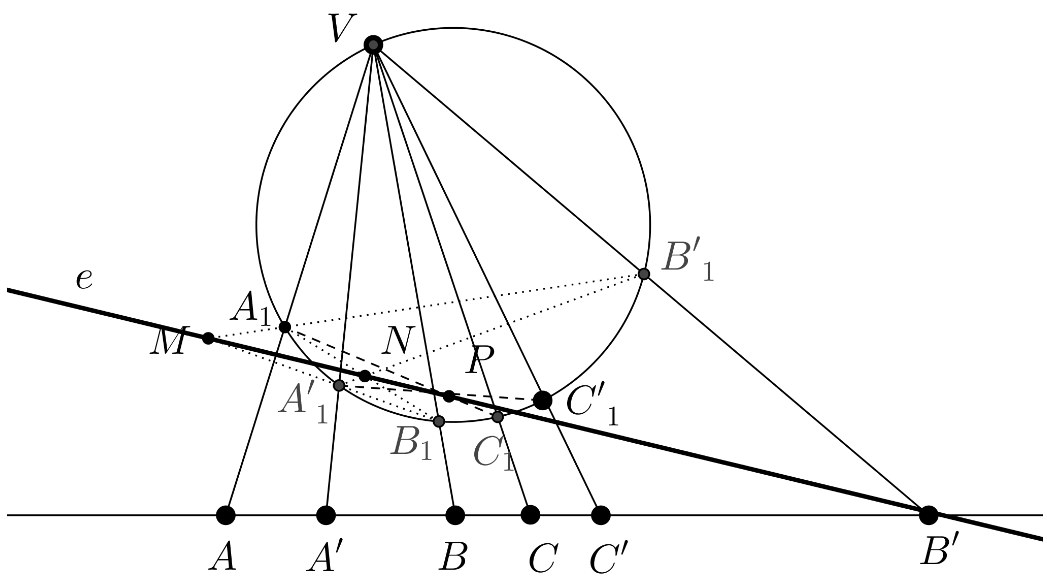
Un cop construït l'eix $e = MN$ la imatge de qualsevol punt $C \in r$ es troba fàcilment construint primer $C_1 = VC \cap \mathcal{C}$ i a continuació $P = A_1C_1 \cap e$. Llavors

$$C'_1 = \tilde{f}(C_1) = A'_1P \cap \mathcal{C}.$$

Finalment

$$f(C) = VC'_1 \cap r$$

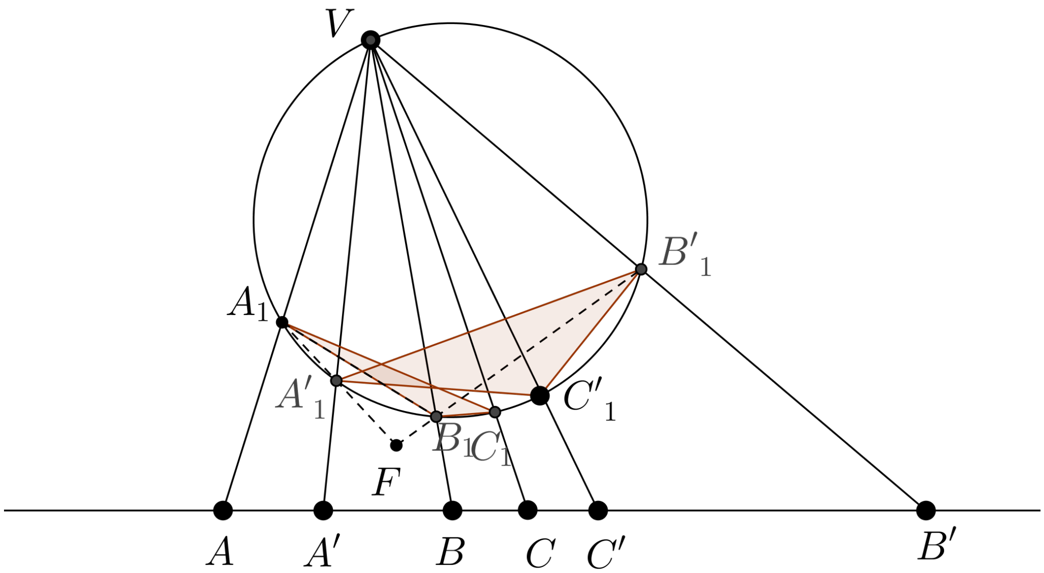
i així $f(C)$ ha quedat conegut a partir de A, B i les seves imatges.



Els triangles $A_1B_1C_1$ i $A_1'B_1'C_1'$ són Desarguesians (els costats corresponents es tallen en punts alineats, en aquest cas es tallen sobre l'eix). Per tant les rectes que uneixen els vèrtex corresponents es tallen en un punt

$$F = A_1A_1' \cap B_1B_1' = A_1A_1' \cap C_1C_1'$$

anomenat *punt de Frégier*.



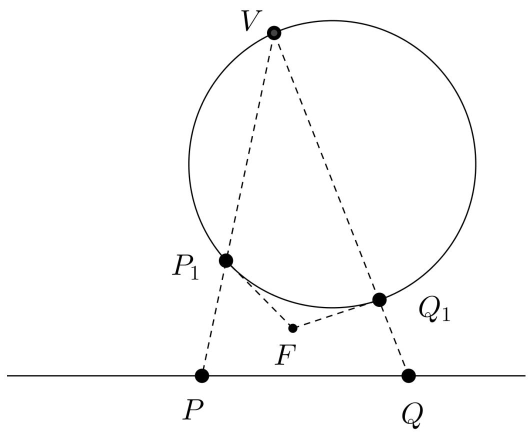
Observem doncs que un punt arbitrari $C_1 \in \mathcal{C}$ i la seva imatge C_1' estan sempre alineats amb F, per tant un cop trobat F (només hem de tallar A_1A_1' amb B_1B_1') per calcular $\tilde{f}(C_1) = C_1'$ només hem de tallar la recta FC_1 amb $\mathcal{C}$, és a dir,

$$C_1' = FC_1 \cap \mathcal{C}.$$

Ara $f(C) = VC_1' \cap r$, ha quedat determinat.

Punts fixos

Finalment notem que quan F és exterior a $\mathcal{C}$ les tangents a $\mathcal{C}$ des de F donen dos punts P_1, Q_1 fixos per $\tilde{f}$, i per tant $P = VP_1 \cap r$ i $Q = VQ_1 \cap r$ són els punts fixos per f.

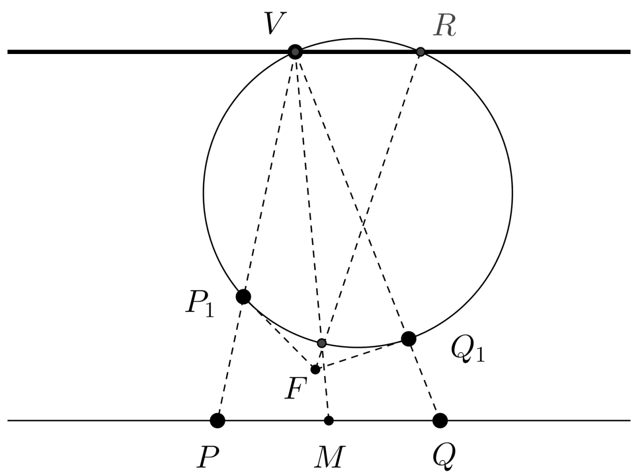


Ara bé, si VQ_1 és paral·lela a r tenim només un punt fix. Aquesta situació es dóna quan $f(t) = -t + cte$. En ambdós casos es diu que la involució és *hiperbòlica*. Si el punt de Frégier és interior a $\mathcal{C}$ no tenim punts fixos i diem que la involució és *el·líptica*. Si el punt de Frégier F està a $\mathcal{C}$ la projectivitat f porta tots el punts a un únic punt $VF \cap r$ i no conserva la raó doble. Així les involucions només són hiperbòliques o el·líptiques.

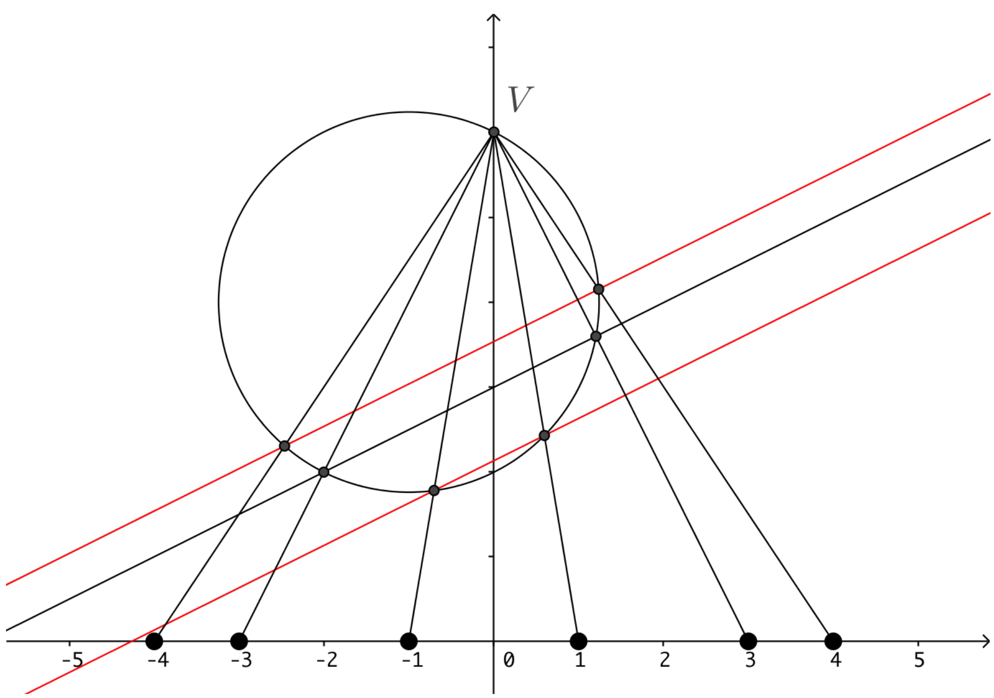
Punt mitjà entre punts fixos

Notem que, denotant R el punt d'intersecció de la paral·lela a r per V podem trobar el punt mitjà entre els punts fixos P i Q unint R amb el punt de Frégier F i tallant el segment FR amb $\mathcal{C}$; la recta formada per aquest punt i V talla r en el punt mitjà M.

En efecte, sabem que per tot X, $(P, Q, X, f(X)) = -1$, o equivalentment $(VP, VQ, VX, Vf(X)) = -1$. Quan X és el punt mitjà de PQ aquesta igualtat no és certa, a menys que $f(X)$ tendeixi a infinit. Per la construcció donada això vol dir que $X_1' = \tilde{f}(X_1)$, on $X_1 = VX \cap \mathcal{C}$, tendeix a R.



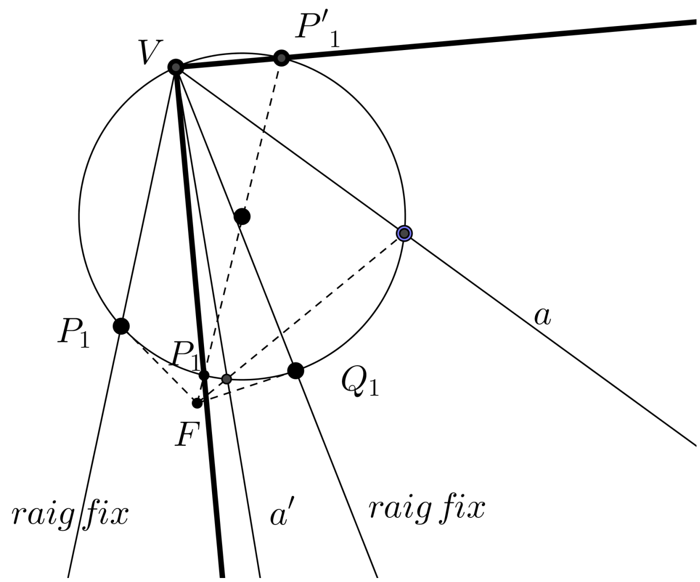
Nota 1.3.3 Observem que el punt de Frégier pot no existir[8] com es veu en la figura on $f(x) = -x$ i prenem V sobre l'eix y.



[8]És a l'infinit, en llenguatge clàssic.

1.3.1 Feixos involutius

Si tenim una projectivitat involutiva definida en un feix de rectes de vèrtex V podem trobar raigs fixos, imatges de raigs, etc procedint com anteriorment, és a dir, tallant tots els raigs per una circumferència $\mathcal{C}$ que passi per V. Un cop trobat el punt de Frégier F la imatge d'un raig a, que talla la circumferència en un punt A_1 és el raig a' que passa per $A_1' = FA_1 \cap \mathcal{C}$.



En particular, si considerem la recta determinada pel punt de Frégier F i el centre de la circumferència, i la tallem amb la circumferència, obtenim dos punts P_1 i P_1', i per la construcció anterior el raig VP_1 té com imatge per la involució el raig VP_1'; aquests raigs, que són clarament ortogonals, es diuen *raigs principals*.

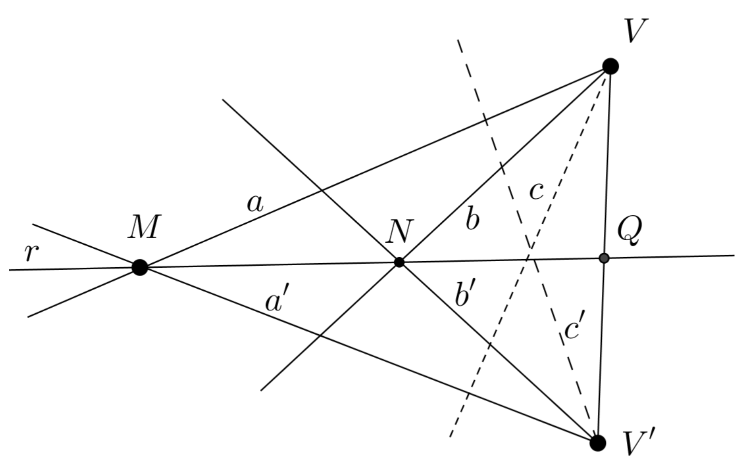
Si F coincidís amb els centre de la circumferència tot el raigs són principals. i es diu que la involució és *rectangular*.

Capítol 2

Còniques

Definició 2.0.1 *Siguin V, V' dos punts diferents del pla. Suposem que hi ha una projectivitat bijectiva entre el feix de rectes per V i el feix de rectes per V', i que el raig VV' no és doble. El lloc geomètric dels punts d'intersecció de raigs homòlegs es diu* cònica.

Nota 2.0.2 Si el raig VV' va a parar al raig $V'V$ (és a dir, la recta VV' és doble) llavors el lloc geomètric dels punts d'intersecció de raigs homòlegs és una recta. En efecte, considerem la recta r determinada pels punt d'intersecció de dos raigs homòlegs donats. Això vol dir que si a, b són raigs per V que van a parar als raigs a', b' per V', r és la recta que passa pels punts $M = a \cap a'$, $N = b \cap b'$.



Sigui $Q = VV' \cap r$. Sigui P la intersecció amb r d'un raig c per V i sigui P' la intersecció amb r del raig $c' = f(c)$. Llavors (per ser els feixos projectius i tallant amb r)

$$(Q, M, N, P) = (VQ, VM, VN, VP) = (V'Q, V'M, V'N, V'P') = (Q, M, N, P')$$

per tant $P = P'$, que implica que $P = c \cap c'$ i, com c és arbitrari, això vol dir que tots els raigs homòlegs es tallen en punts d'una mateixa recta, com volíem. $\diamond$

De manera anàloga es demostra que *si una cònica té tres punts alineats és una recta.* En efecte, suposem $P, Q, R \in \mathcal{C}$ alineats sobre una recta r. Sigui $X \in \mathcal{C}$. Això vol dir que el raig VX va a parar al raig $V'X$. Siguin $A = VX \cap r, A' = V'X \cap r$. Llavors

$$(A, P, Q, R) = (VA, VP, VQ, VR) = (V'A, V'P, V'Q, V'R) = (A', P, Q, R)$$

i per tant $A = A'$, que implica $X \in r$. $\diamond$

Teorema 2.0.3 *Suposem que hi ha una projectivitat bijectiva entre el feix de rectes per V i el feix de rectes per V'. Llavors V i V' pertanyen a la cònica determinada per aquests feixos i la imatge per la projectivitat de la recta VV' és tangent a la cònica.*

Demostració. El raig VV' va a parar a un raig per V' diferent del $V'V$. La intersecció d'aquests raigs, que és V', pertany a la cònica. Considerant la inversa de la projectivitat es permuten els papers jugats per V i V'.

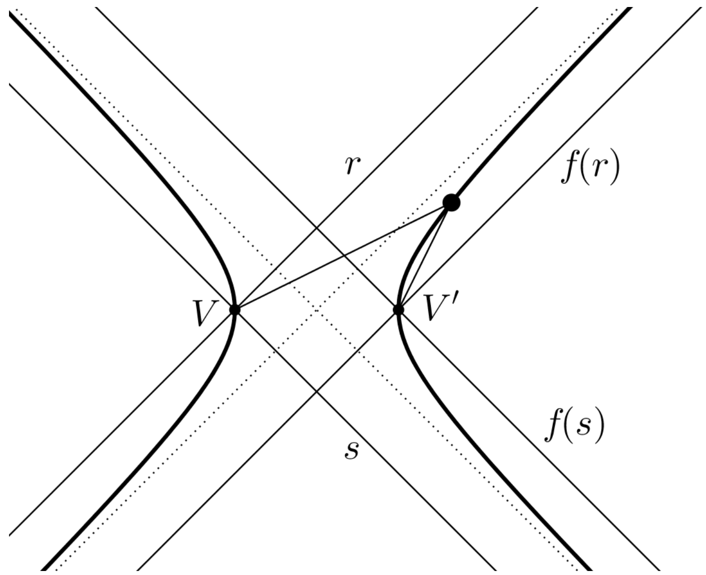
La imatge de VV' és un raig per V' que no conté cap més punt de la cònica que V'.[9] És clar per continuïtat que és posició límit de secants. $\square$

De fet, podem prendre com definició de tangent a la cònica en V' la recta $f(VV')$.

Si cada raig per V talla al seu homòleg per V', la cònica es diu *el·lipse.* Si hi ha un i només un raig per V paral·lel al seu homòleg per V' la cònica es diu *paràbola.* D'aquesta direcció se'n diu direcció de l'eix de la paràbola. Si hi ha dos raigs per V paral·lels als seus homòlegs per V' la cònica es diu *hipèrbola.* D'aquestes direccions se'n diuen direccions asimptòtiques.

[9] La recta $x = 0$ només té un punt en comú amb la paràbola $y = x^2$ i no és tangent.

El dibuix representa una hipèrbola perquè els raigs r i s per V van a parar respectivament al raigs $f(r)$ i $f(s)$ per V', amb r paral·lel a $f(r)$ i s paral·lel a $f(s)$.[10]



És fàcil veure que si hi ha tres raigs paral·lels amb els seu homòlegs tots ho són i la cònica es buida.

És clar que una circumferència és una cònica i que cinc punts (no tres alineats) determinen una cònica.

El paper jugat per V i V' pot ser jugat per dos punts qualssevol de la cònica. Això diu el següent resultat:

Teorema 2.0.4 (Steiner) *Projectant els punts d'una cònica des de dos punts qualssevol d'ella, s'obtenen feixos projectius.*

Demostració. Left to the reader. □

[10] Comproveu que l'aplicació entre el feix de rectes per $(-1, 0)$ i el feix de rectes per $(1, 0)$ que porta a una recta del primer feix de pendent m sobre la recta del segon feix de pendent $1/m$ és una projectivitat. Podeu usar la fórmula del sinus de l'angle que formen dues rectes a, c en termes de les pendents:

$$\sin ac = \frac{m_c - m_a}{\sqrt{(1+m_a^2)(1+m_c^2)}}$$

Aquest resultat permet parlar de la raó doble de quatre punts sobre la cònica, de manera anàloga al que hem comentat al peu de pàgina 4, pàgina 10, per al cas de circumferències, malgrat les còniques no tinguin la propietat de l'angle inscrit. Només hem de definir $(A, B, C, D) = (VA, VB, VC.VD)$, on $V \in \mathcal{C}$, i aquest valor no depèn de V pel Teorema de Steiner.

I té sentit doncs la definició següent.

Definició 2.0.5 *Una aplicació $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ és una projectivitat de la cònica $\mathcal{C}$ si i només si conserva la raó doble.*

Com passa amb les projectivitats de la recta pot ser que una projectivitat d'una cònica no estigui definida en un punt o dos punts, els *punts límit*.

Per exemple si $\mathcal{C}$ és la paràbola $y = x^2$ l'aplicació

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & (x, x^2) & \mapsto & (1/x, 1/x^2) \end{array}$$

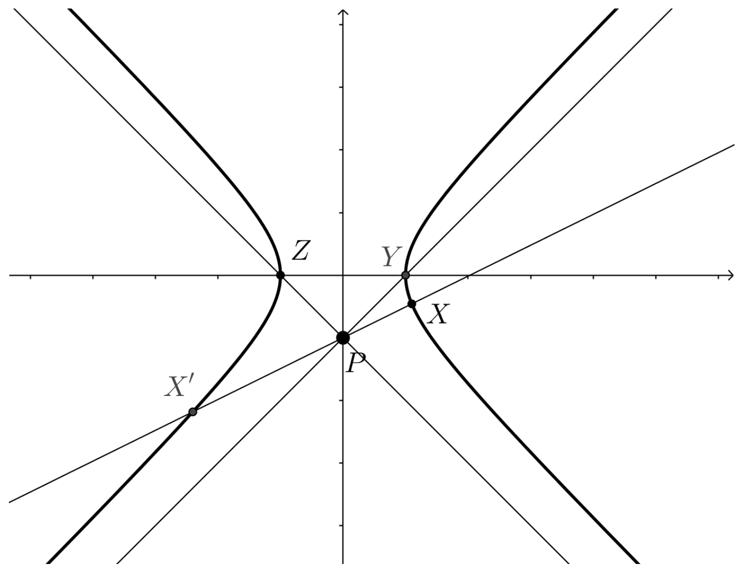
conserva la raó doble[11], i per tant és una projectivitat, però no està definida en $(0, 0)$. Equivalentment, la imatge d'aquest punt és el punt de l'infinit.

Anàlogament, si $\mathcal{C}$ és la hipèrbola $x^2 - y^2 = 1$ l'aplicació

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & (x, y) & \mapsto & (\frac{x}{y}, \frac{1}{y}) \end{array}$$

conserva la raó doble i per tant és una projectivitat, però no està definida en $(1, 0)$ ni en $(-1, 0)$. Equivalentment, la imatge d'aquests punts són punts de l'infinit.

[11] La raó doble de quatre punts de la paràbola A, B, C, D, és la raó doble de les quatre rectes OA, OB, OC, OD, on O és l'origen de coordenades. Si els pendents d'aquestes rectes són m_A, m_B, m_C, m_D, els pendents de les rectes OA', OB', OC', OD', on $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)$, són $1/m_A, 1/m_B, 1/m_C, 1/m_D$; llavors la fórmula del peu de pàgina 10, pàgina 23, conclou.



Els punts Y, Z no tenen imatge.

Aquesta aplicació consisteix en tallar la hipèrbola amb les rectes que passen pel punt $(0,-1)$. Deixem com exercici veure que efectivament conserva la raó doble.[12]

Caracterització de les tangents

Proposició 2.0.6 *Una recta r és tangent a una cònica $\mathcal{C}$ si i només si $r \cap \mathcal{C}$ és un sol punt, i r no és paral·lela a la direcció de l'eix de la paràbola o a les*

[12] Per exemple si prenem els punts

$$A = (2, \sqrt{3}), B = (3, \sqrt{8}), C = (4, \sqrt{15}), D = (5, \sqrt{24})$$

les seves imatges són

$$A' = (2/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), B' = (3/\sqrt{8}, 1/\sqrt{8}), C' = (4/\sqrt{15}, 1/\sqrt{15}), D' = (5/\sqrt{24}, 1/\sqrt{24})$$

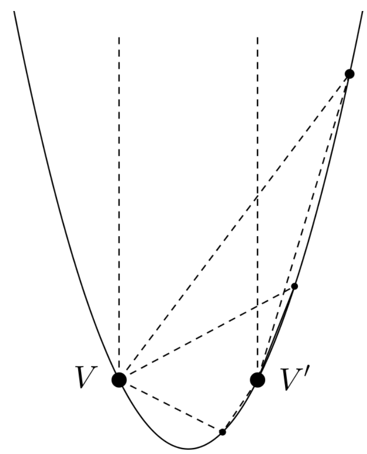
i les rectes VA, VB, VC, VD, amb $V = (-1, 0)$ tallen l'eix $x = 0$ en punts d'ordenades $\sqrt{3}/3, \sqrt{8}/4, \sqrt{15}/5, \sqrt{24}/6$ i les rectes VA', VB', VC', VD' el tallen en punts d'ordenades $\frac{1}{2+\sqrt{3}}, \frac{1}{3+\sqrt{8}}, \frac{1}{4+\sqrt{15}}, \frac{1}{5+\sqrt{24}}$, i és fàcil veure que

$$(\sqrt{3}/3, \sqrt{8}/4, \sqrt{15}/5, \sqrt{24}/6) = (\frac{1}{2+\sqrt{3}}, \frac{1}{3+\sqrt{8}}, \frac{1}{4+\sqrt{15}}, \frac{1}{5+\sqrt{24}}) = 1.33685....$$

Feu els càlculs en general.

direccions asimptòtiques de la hipèrbola.

Demostració. Suposem $\mathcal{C}$ donada per una projectivitat bijectiva entre els feixos de rectes pels punts V i V'. Ja sabem que la tangent talla en un únic punt. Pel recíproc raonarem en el punt V' ja que, pel teorema de Steiner, tots els punts de $\mathcal{C}$ poden jugar aquest paper. Si a' és una recta per V' existeix una recta a per V tal que $f(a) = a'$ i $a \cap a'$ és un punt de la cònica o bé a i a' són paral·leles, casos que apareixen a la paràbola i a la hipèrbola i que hem exclos per hipòtesis.



Si $a \cap a'$ és l'únic punt que té a' comú amb $\mathcal{C}$, aquest punt ha de ser V', i a' ha de ser la imatge per la projectivitat que defineix la cònica de la recta VV' i per tant a' és tangent. $\square$

De fet, es pot veure que per cada punt d'una paràbola passen dues rectes que la tallen en un únic punt, la tangent i la paral·lela a l'eix.[13] I per cada punt d'una hipèrbola passen tres rectes que la tallen en un únic punt, la tangent i les paral·leles a les asímptotes.

2.0.1 Pol i polar

Donada una cònica $\mathcal{C}$ considerem un punt $P \notin \mathcal{C}$. Farem essencialment la mateixa construcció que en el teorema 1.2.2.

[13] Aquesta afirmació per a les rectes per V i V' és evident. Per als altres punts es desprèn del teprema de Steiner, que permet reduir sempre la situació a l'anterior.

Teorema 2.0.7 *Sigui $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ una projectivitat involutiva de la cònica $\mathcal{C}$. Llavors el conjunt de punts $XY' \cap YX'$, amb $X' = f(X), Y' = f(Y)$, quan X, Y varien a $\mathcal{C}$, estan sobre una recta, anomenada eix de f.*

El punt $XX' \cap YY'$ no depèn dels punts X, Y elegits sobre $\mathcal{C}$[14] i es diu punt de Frégier de f.[15]

Demostració. Prenem dos punts $A, B \in \mathcal{C}$ i les seves imatges $A' = f(A), B' = f(B)$.

Considerem els punts[16]

$$
\begin{aligned}
P &= AA' \cap BB' \\
M &= AB' \cap A'B \\
N &= AB \cap A'B'.
\end{aligned}
$$

Denotem la recta MN per e. Per la propietat del quadrangle complet

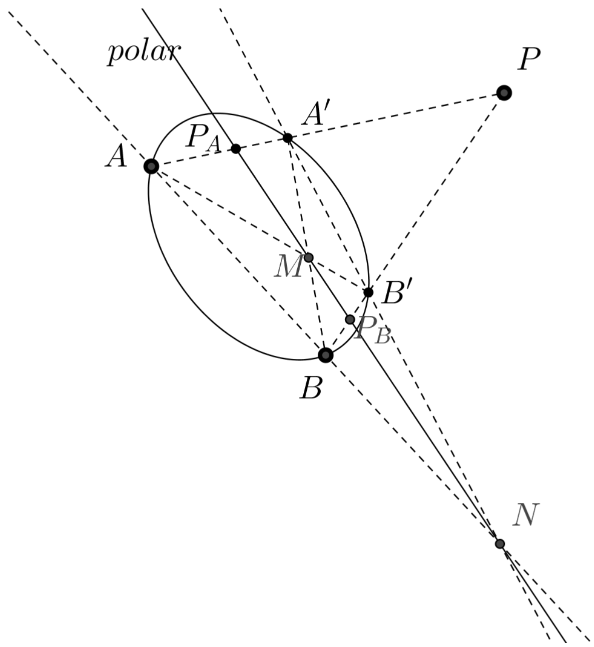
$$(P, P_A, A, A') = (P, P_B, B, B') = -1$$

on P_A i P_B són respectivament les interseccions amb e de les rectes PA i PB.

[14]Però han d'estar òbviament en el domini de definició de f.

[15]Pot ser el punt de l'infinit corresponent a la direcció de les rectes XX' , YY' quan aquestes són paral·leles. El teorema diu que les rectes XX', YY', independentment de quins siguin els punts $X, Y \in \mathcal{C}$ són paral·leles. En aquest cas l'eix s'anomena *diàmetre* corresponent a la direcció XX'.

[16]Tota la demostració val igual si les rectes AA' i BB' són paral·leles. Es diu que P és el punt de l'infinit (la seva direcció). Vegeu la definició 2.0.10.



Sigui $Z \in \mathcal{C}$. Veiem com podem construir $Z' = f(Z)$. Com, aplicant f,

$$(A, A', B, Z) = (A', A, B', Z')$$

tenim, per definició de raó doble per a punts sobre una cònica,

$$(B'A, B'A', B'B, B'Z) = (BA', BA, BB', BZ')$$

que tallant amb e dóna (denotem $R = BB' \cap MN$)

$$(M, N, R, B'Z \cap e) = (M, N, R, BZ' \cap e)$$

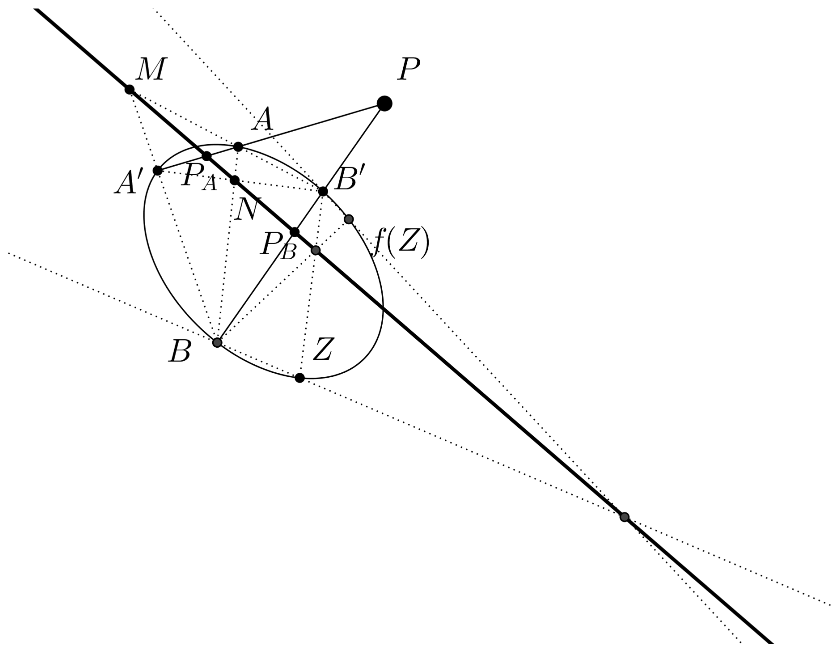
per tant $B'Z \cap BZ' \in e$.

Aplicant aquesta construcció no a Z sinó a Z', i recordant que $f^2(Z) = Z$, tenim que

$$B'Z' \cap BZ \in e, \qquad \forall Z \in \mathcal{C}.$$

A més $ZZ' \cap BB' = P$. En efecte, sigui P_1 el punt d'intersecció de les rectes ZZ' i BB'. Per formar Z, Z', B, B' un quadrangle complet tenim $(P_1, P_B, B, B') = -1$. Com $(P, P_B, B, B') = -1$ ha de ser $P = P_1$ com volíem veure.[17]

[17]Si les rectes AA' i BB' són paral·leles, aquest darrer paràgraf diu simplement que les rectes ZZ' i BB' són paral·leles.



Com el paper jugat per B el pot jugar qualsevol punt de $\mathcal{C}$ el teorema queda demostrat. $\square$

Tot punt $P \notin C$ indueix una involució f_P sobre $\mathcal{C}$ definint $f_P(X)$ com la intersecció amb $\mathcal{C}$ de la recta PX, diferent de X si aquesta intersecció té dos punts o el propi X si PX és tangent.[18]

El Teorema de Frégier ens diu que aquesta involució és una projectivitat, en el sentit de que conserva la raó doble dels punts de la cònica, i estem doncs en les hipòtesis del teorema anterior.

Teorema 2.0.8 (Teorema de Frégier) *Una aplicació $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ és una projectivitat involutiva si i només si existeix un punt $P \notin \mathcal{C}$ tal que per tot $X \in \mathcal{C}$ en el domini de f, la recta PX talla la cònica $\mathcal{C}$ en dos punts, X i $f(X)$.*

Demostració. Que si f és una projectivitat involutiva existeix un punt $P \notin \mathcal{C}$ tal que per tot $X \in \mathcal{C}$ del domini de definició de f, la recta PX talla la cònica $\mathcal{C}$ en dos punts, X i $f(X)$, és el que hem vist en el teorema 2.0.7.

Pel recíproc, suposem que existeix un punt $P \notin \mathcal{C}$ tal que per tot $X \in \mathcal{C}$, del domini de f, la recta PX talla la cònica $\mathcal{C}$ en dos punts, X i $f(X)$. Això

[18] Si PX té la direcció de l'eix de la paràbola o de l'asímptota d'una hipèrbola, X no pertany al domini de definició de f_P.

ja implica que f és involutiva. Però s'ha de veure que conserva la raó doble. Per a això considerem la homologia general $\tilde{f}$ (pàgina 7) de centre aquest punt P, d'eix la polar de P respecte la cònica, i característica -1.

Demostrarem que $\tilde{f}$, restringida a la cònica $\mathcal{C}$, coincideix amb f en el seu domini, i per tant f conserva la raó doble.

Prenem un punt $X \in \mathcal{C}$ i del domini de f. Sigui Q_X la intersecció de la recta PX amb la polar de P. Sabem que $(P, Q_X, X, f(X)) = -1$. Com també $(P, Q_X, X, \tilde{f}(X)) = -1$, deduïm $\tilde{f}(X) = f(X)$ com volíem.

Si $X = f(X)$, la recta PX és tangent[19] a $\mathcal{C}$ i per tant X pertany a la polar de P, que és l'eix de $\tilde{f}$, i per tant $X = \tilde{f}(X) = f(X)$, com abans.

□

Aquest punt P queda unívocament determinat per a cada projectivitat involutiva de la cònica i es diu punt de Frégier, que pot ser un punt de l'infinit (una direcció).

Definició 2.0.9 (Pol i polar) *Sigui P un punt que no pertany a una cònica $\mathcal{C}$.La recta* polar *de P respecte la cònica $\mathcal{C}$ és l'eix de la involució f_P induïda per P a $\mathcal{C}$. Es diu que P és el* pol *d'aquesta recta.*

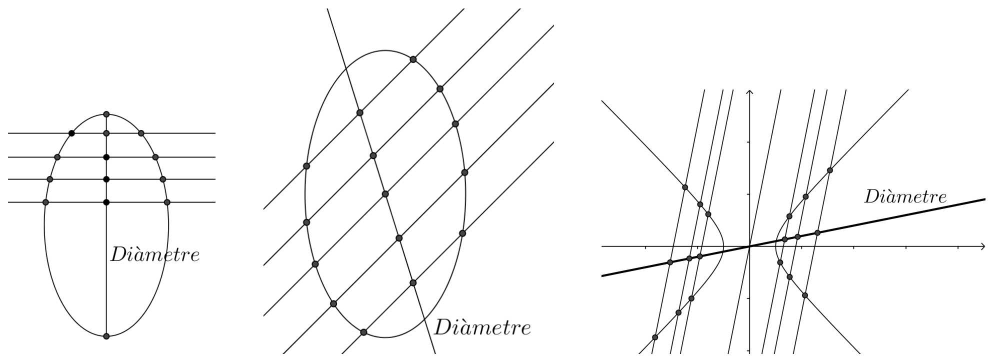
Observem que, per la construcció feta en els anteriors teoremes 2.0.7 i 2.0.8, *la polar de P respecte $\mathcal{C}$ és el lloc geomètric dels conjugats harmònics de P respecte els punts d'intersecció amb la cònica de qualsevol recta per P.*

Quan P és el punt de l'infinit, vegeu el peu de pàgina 27, que això vol dir únicament que fixem una direcció, *la polar de P respecte $\mathcal{C}$ és el lloc geomètric dels punts mitjans dels punts d'intersecció amb la cònica de les rectes paral·lels a la direcció donada.* Es diu que aquesta polar és el *diàmetre* de la cònica en aquesta direcció. Amb el llenguatge habitual de la geometria projectiva on s'equiparen *direccions* amb *punts de l'infinit* els diàmetres són *les polars dels punts de l'infinit.*

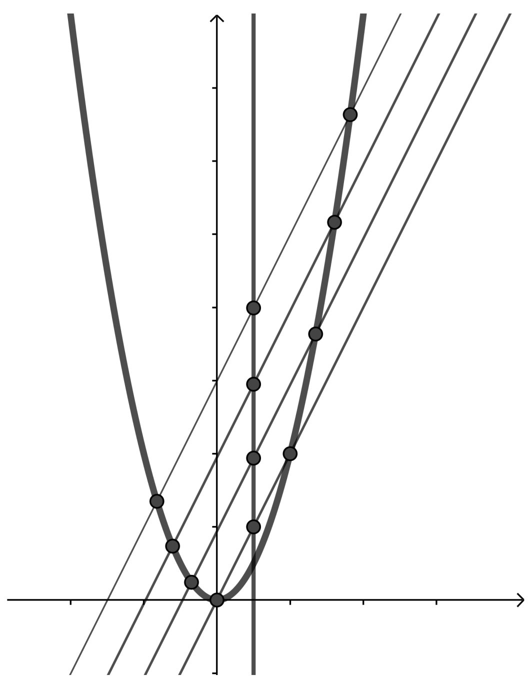
Per continuïtat, quan $P \in \mathcal{C}$ la polar de P és la tangent a la cònica per P.

Definició 2.0.10 *Els* diàmetres *d'una cònica són les rectes polars dels punts de l'infinit.*

[19]No pot tenir la direcció de l'eix de la paràbola ni de les asímptotes de la hipèrbola com hem comentat al peu de pàgina 18.



El cas de la paràbola té la particularitat de que els diàmetres corresponents a direccions diferents són paral·lels. A la figura tenim la direcció donada per les rectes paral·les a $y = 2x$ que donen lloc al diàmetre $x = 1$. Si la recta és $y = mx$ el diàmetre és $x = m/2$.



Observem també que hem vist que si dues rectes per P tallen la cònica en punts X, X' i Y, Y' respectivament llavors les rectes XY, $X'Y'$ es tallen sobre la polar de P. Deixant X fix i fent tendir Y a X veiem que les tangents a la cònica per X, X' es tallen sobre la polar.

També es pot construir la polar amb les tangents. En efecte tenim el resultat següent.

Proposició 2.0.11 *Els punts de tall de la polar de P respecte la cònica $\mathcal{C}$, amb la pròpia cònica, cas que hi siguin, són els punts de contacte de les tangents a $\mathcal{C}$ des de P.*

Demostració. Siguin M, N els punts de tall de la polar de P amb $\mathcal{C}$. Prenem un punt $A \in \mathcal{C}$ i el fem tendir a M. Tindrem, amb la notació de la pàgina 27,

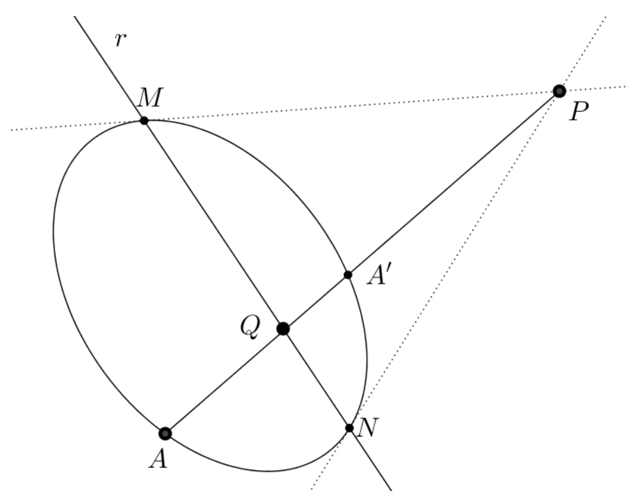
$$(P, P_A, A, A') = -1$$

i en particular

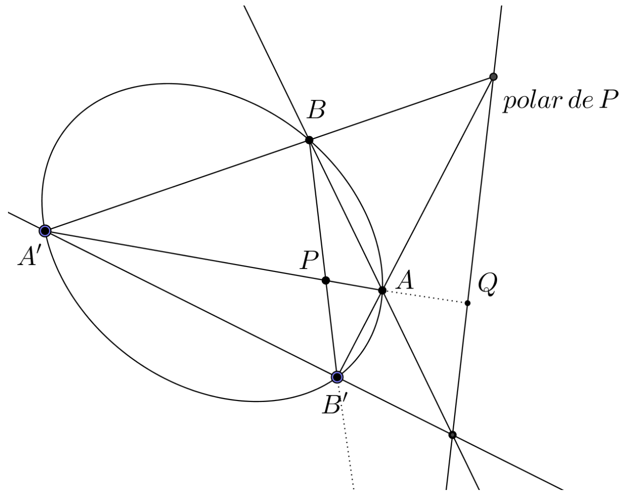
$$\lim_{A \to M} \frac{PA}{P_A A} : \frac{PA'}{P_A A'} = -1$$

i com $P_A A$ tendeix a zero (tots dos punts tendeixen aM) ha de ser que que $P_A A'$ també tendeixi a zero, és a dir que A' tendeix també a M. $\square$

Podem donar doncs com caracterització de polar, quan per P hi ha dues tangents, com *la recta que uneix els punts de tangència de les tangents a la cònica per P.*



Però pot ser que la polar no talli la cònica, com es veu a la figura següent, en la que $(P, Q, A, A') = -1$.



Així com a partir d'un punt sabem calcular la seva polar, també donada una recta podem construir el seu pol, és a dir, el punt que la té com a polar.

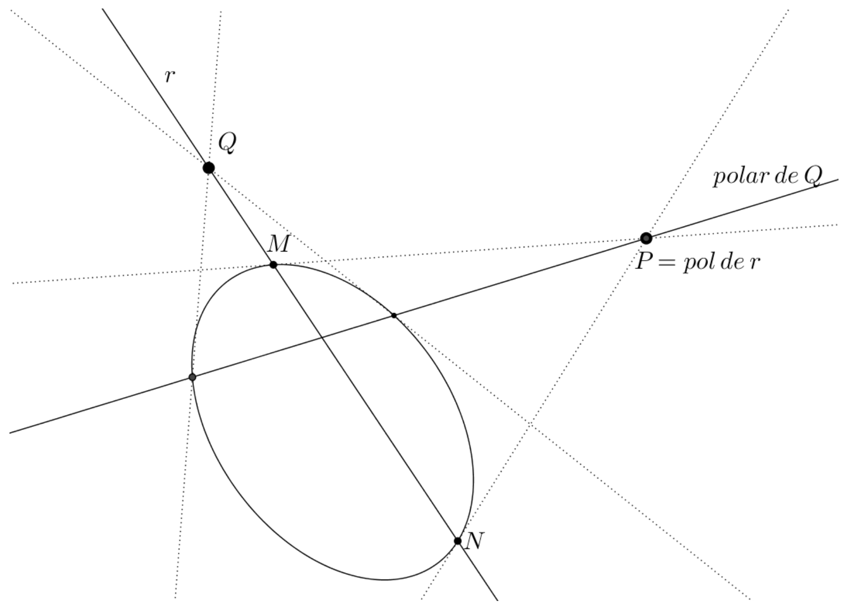
Si r talla la cònica $\mathcal{C}$ en punts M, N llavors el pol de r és el punt d'intersecció d'aquestes tangents.

Si r no talla $\mathcal{C}$, prenem dos punts qualssevol A, B de r, i llavors el pol de r és el punt P d'intersecció de les polars de A i B respectivament. Efectivament, les parelles P, A i P, B són conjugades respectivament respecte els punts en que les rectes PA i PB tallen $\mathcal{C}$. Per tant A i B pertanyen a la polar de P que ha de ser doncs r.

Equivalentment, per un punt de r tracem dues rectes que tallen $\mathcal{C}$ en punts A, A' i B, B' respectivament. Llavors $AA' \cap BB'$ és el pol de r.

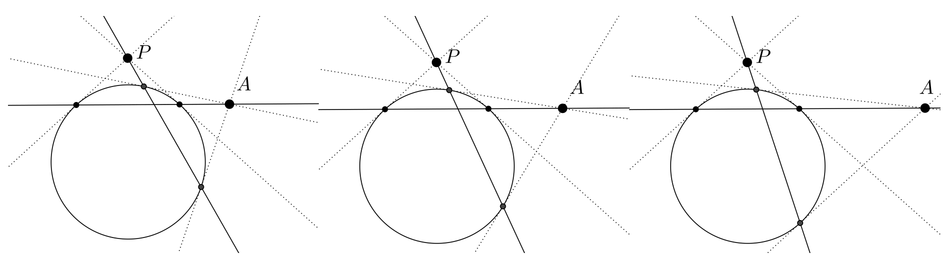
Teorema 2.0.12 *Sigui A un punt situat sobre una recta r. Llavors la polar de A passa pel pol de r.*

Demostració. Sigui P el pol de r respecte una certa cònica $\mathcal{C}$. Si la recta PA talla la cònica en punts C_1, C_2 llavors P i A són conjugats harmònics respecte C_1 i C_2, i per tant P pertany a la polar de A (lloc geomètric dels conjugats harmònics).



Si la recta PA no talla la cònica només hem de recordar que P és el punt de tall de les tangents a la cònica en els punts $r \cap \mathcal{C}$ [20] però hem vist a la pàgina 31 que aquest punt pertany a la polar de A. $\square$

Veiem el cas de la circumferència quan A es va desplaçant per la polar de P. Es veu que quan A tendeix a infinit la polar tendeix al diàmetre de la circumferència. Això és cert per a qualsevol cònica, com hem comentat a la pàgina 30.



Es dedueix fàcilment d'aquest resultat *r passa pel pol de s si i només si s passa pel pol de r.* Donem la definició següent.

Definició 2.0.13 *Diem que dos punts són* conjugats *respecte una cònica $\mathcal{C}$ quan un pertany a la polar de l'altre. Diem que dues rectes són conjugades respecte $\mathcal{C}$ quan una passa pel pol de l'altra.*

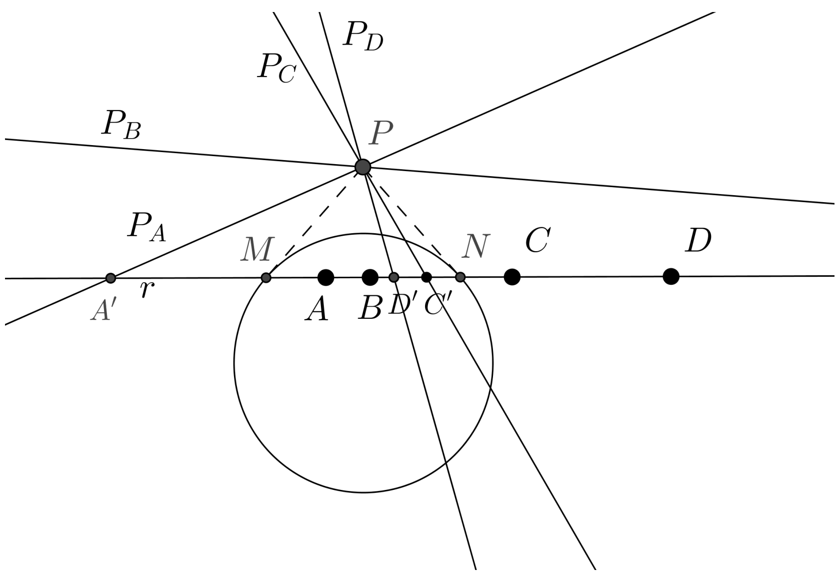
[20] Què passa si no es tallen?

Proposició 2.0.14 *Sigui P el pol d'una recta r respecte una cònica $\mathcal{C}$. Llavors l'aplicació $f : r \longrightarrow \mathcal{F}_P$ que assigna a cada punt $X \in r$ la seva polar (que pel teorema 2.0.12 passa per P) és una projectivitat. És a dir*

$$(A, B, C, D) = (p_A, p_B, p_C, p_D)$$

on $A, B, C, D \in r$ i p_A, p_B, p_C, p_D són les seves polars.

Demostració.. Siguin A', B', C', D' els punts de tall de r amb les respectives rectes polars.



Volem veure $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$. Siguin M, N el punts de tall de r amb $\mathcal{C}$. Sabem que

$$(A, A', M, N) = (B, B', M, N) = (C, C', M, N) = (D, D', M, N) = -1.$$

Prenent per simplificar coordenades a r de manera que $M = 0$, $N = 1$ veiem que (identificant els punts amb les seves coordenaes)

$$X' = \frac{X}{2X - 1}, \quad X = A, B, C, D,$$

que és una homografia (vegeu l'exercici 1.1.2) i per tant conserva la raó doble.
$\square$

Corol·lari 2.0.15 *Donades dues rectes a, b, i una cònica $\mathcal{C}$, l'aplicació $f : a \longrightarrow b$ donada per*

$$f(X) = p_X \cap b, \quad \forall X \in r$$

on p_X és la polar de X, és una projectivitat.

Demostració. Conseqüència de l'anterior proposició, tallant b amb les polars dels punts de a. □

Aquest resultat té una formulació dual:

Corol·lari 2.0.16 *Donades dos punts A, B, i una cònica $\mathcal{C}$, l'aplicació entre feixos de rectes $f : \mathcal{F}_A \longrightarrow \mathcal{F}_B$ donada per*

$$f(r) = BQ, \quad \forall r \in \mathcal{F}_A$$

on Q és el pol de r, és una projectivitat.

Demostració. Com que no hem parlat del principi de dualitat en podem donar una demostració directa. Només cal adonar-se que f descompon en composició de projectivitats

$$\mathcal{F}_A \longrightarrow p_A \longrightarrow p_B \longrightarrow \mathcal{F}_B$$

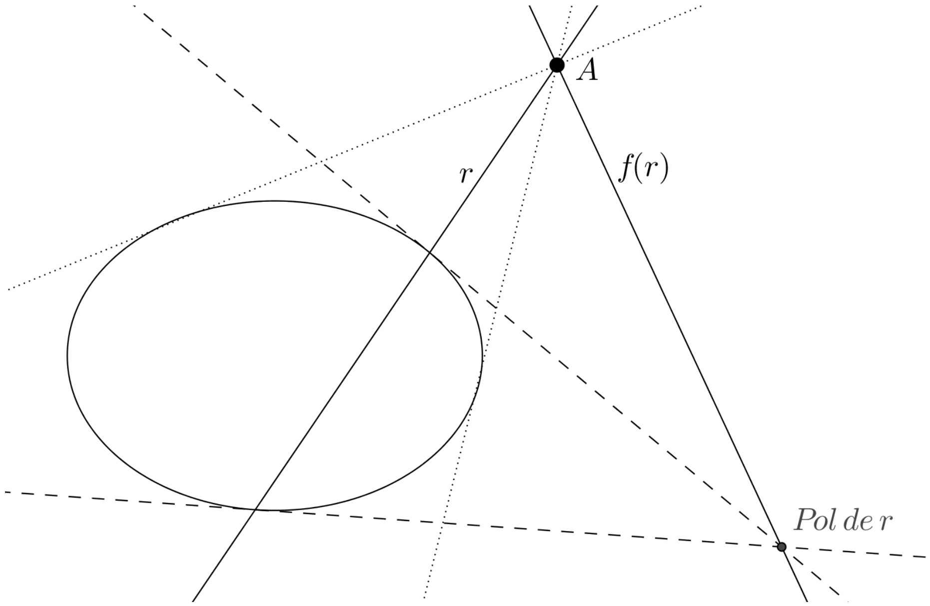
donades la primera per intersecció de les rectes del feix amb la polar corresponent, la segona és la donada al corol·lari 2.0.15 i la tercera és simplement unir els punts de p_B amb B. □

Corol·lari 2.0.17 (Involució de raigs) *Donat un punt A i una cònica $\mathcal{C}$, l'aplicació del feix de rectes per A en ell mateix $f : \mathcal{F}_A \longrightarrow \mathcal{F}_A$ donada per*

$$f(r) = AQ, \quad \forall r \in \mathcal{F}_A$$

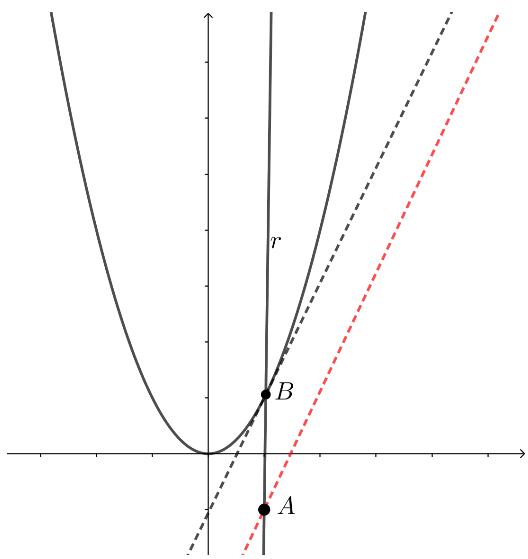
on Q és el pol de r, és una projectivitat.

Demostració. Cas particular de l'anterior corol·lari amb $A = B$. □



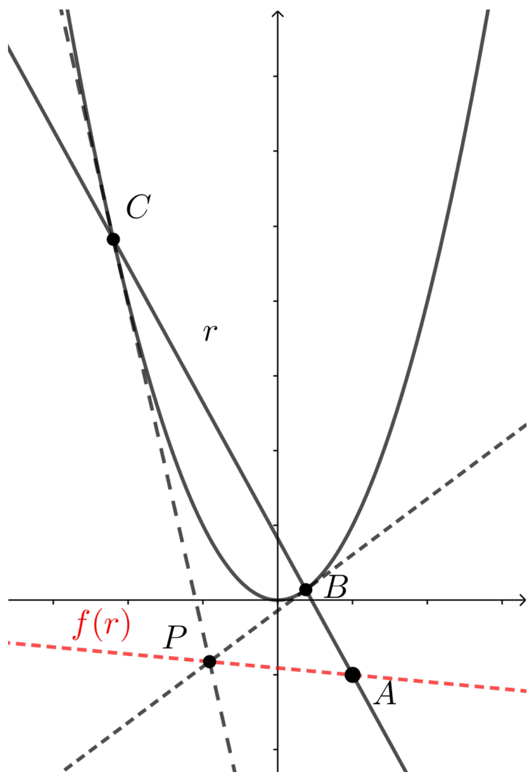
Les rectes r i $f(r)$ es diuen *conjugades*.

Per trobar la polar en el cas de la paràbola observem que *la polar d'una recta r que passa per un punt A i té la direcció de l'eix de la paràbola és la paral·lela a r per A.*



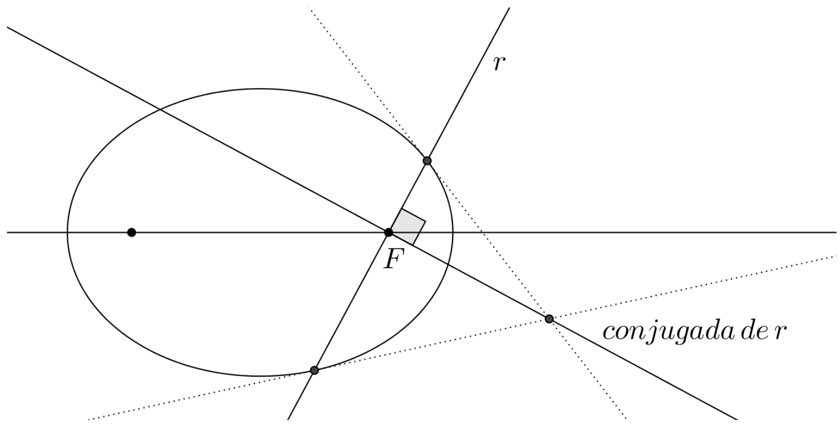
A la figura següent hem representat el cas particular de la paràbola $y = x^2$ i el punt $A = (1, -1)$, però l'argument val en general. El pol de $r : y + 1 =$

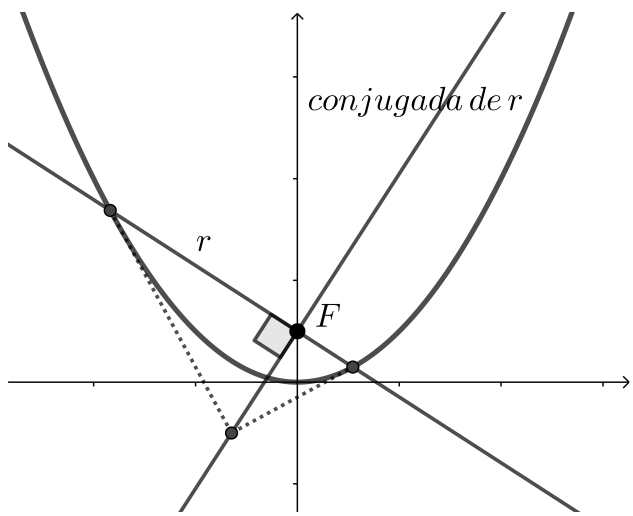
$m(x-1)$ és el punt $P = (m/2), -3(1+m)$, de manera que quan m tendeix a infinit (r tendeix a ser paral·lela a l'eix) P tendeix a infinit, és a dir la tangent per B i $f(r)$ són paral·leles.



Definició 2.0.18 *Diem que F és un focus de la cònica $\mathcal{C}$ quan la* involució de raigs *definida en el feix de rectes per F és rectangular, és a dir, quan cada raig és ortogonal al seu conjugat.*

Per exemple en el cas de l'el·lipse i la paràbola tenim les figures següents.





Vegeu l'existència dels focus a la pàgina 42, teorema 2.0.22.

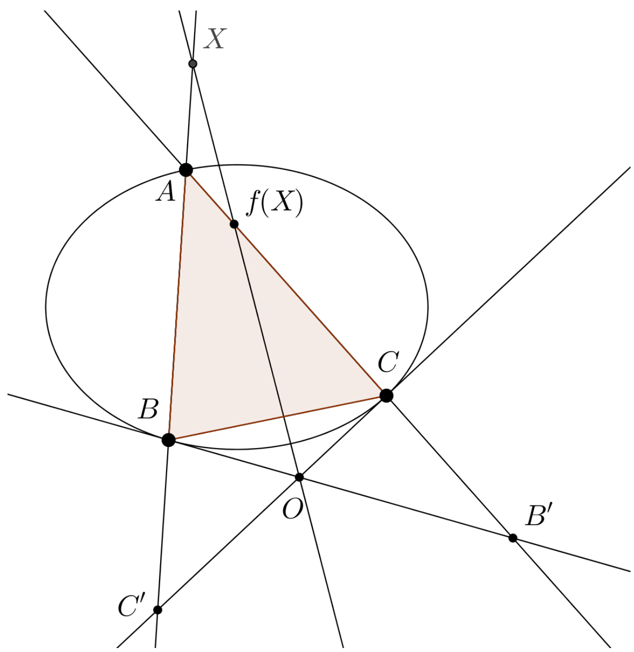
Teorema 2.0.19 *Sigui $\triangle ABC$ un triangle inscrit en una cònica $\mathcal{C}$. Tota recta conjugada del costat BC talla els altres dos costats en punts conjugats.*

Demostració. Definim $f : AB \longrightarrow AC$ per

$$f(X) = p_X \cap AC,$$

que sabem pel corol·lari 2.0.15 que és una projectivitat. Sigui O el pol del costat BC i denotem $C' = AB \cap p_C$, $B' = AC \cap p_B$. Recordem que les polars p_B i p_C de B i C respectivament són les tangents a la cònica en aquests punts, Llavors $f(A) = A$, $f(B) = B'$ i $f(C') = C$. Tenim doncs una projectivitat entre dues rectes amb el punt d'intersecció fix. Això vol dir que aquesta projectivitat és una perspectivitat de centre $Bf(B) \cap C'f(C') = O$, vegeu [3], pàgina 72.

Per tant, la imatge d'un punt $X \in AC$ és el punt $X' = f(X) = OX \cap AC$, com es veu a la figura adjunta.

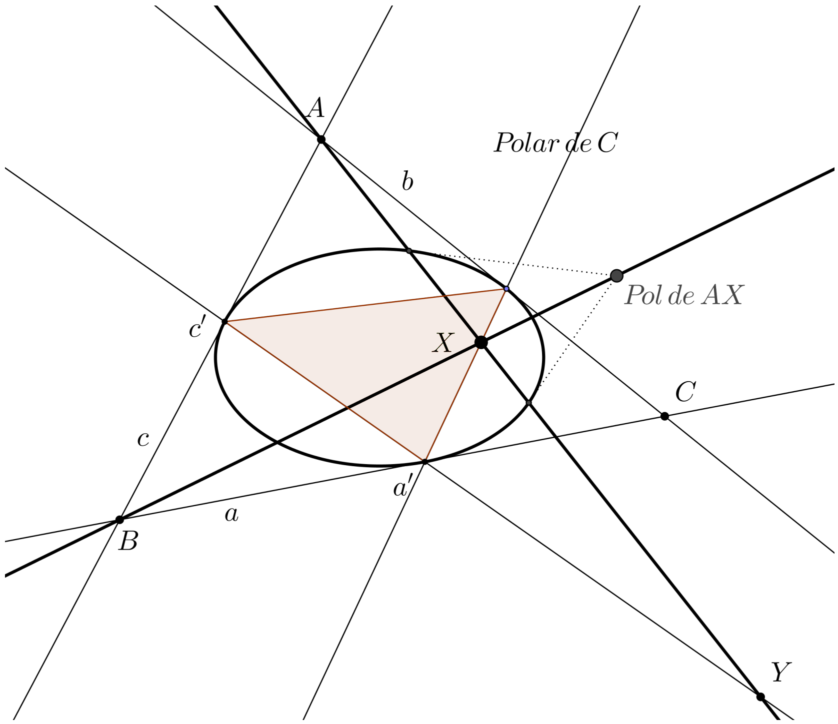


Com $f(X)$ pertany per definició a la polar de X, queda demostrat que X i X' són conjugats. □

Tenim una versió dual de l'anterior resultat.

Teorema 2.0.20 *Siguin a, b, c els tres costats d'un triangle circumnscrit en una cònica $\mathcal{C}$. Tot punt conjugat a un dels vèrtexs dóna lloc, en unir-lo als altres dos vèrtexs, a rectes conjugades.*

Demostració. Sigui X un punt qualsevol de la polar del vèrtex $C = ab$. Siguin $A = bc, B = ac$ els altres dos vèrtexs. Volem veure que el pol de la recta AX pertany a la recta BX o equivalentment que el pol de BX pertany a AX.



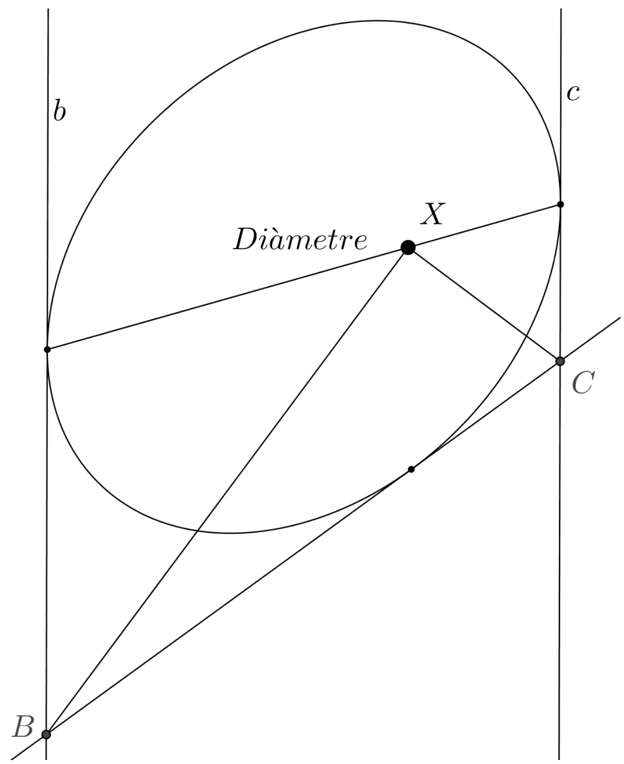
Apliquem el teorema anterior al triangle format pels punts de contacte de a, b, c amb la cònica. Denotem aquests punts respectivament per a', b', c'.

Sabem doncs que la recta AX talla el costat $a'c'$ en un punt Y conjugat a X (la polar de X passa per Y i recíprocament). Però $a'c'$ és justament la polar de B, de manera que Y pertany a la polar de B i a la polar de X. Pel teorema 2.0.12 això vol dir que tant B com X pertanyen a la polar de Y, és a dir $p_Y = BX$. Per tant, el pol de BX, que és Y, pertany a AX com volíem veure. $\square$

Passant al límit és veu que aquest resultat és cert quan un dels vèrtexs, per exemple A, se'n va a infinit, és a dir quan les rectes b, c són paral·les.

Llavors el teorema anterior diu:

Corol·lari 2.0.21 *Siguin b, c dues rectes paral·leles tangents a una cònica $\mathcal{C}$. Per cada punt X del diàmetre corresponent a aquesta direcció les rectes XB, XC, on BC és una tangent qualsevol a $\mathcal{C}$ amb $B \in b, C \in c$, són conjugades.*



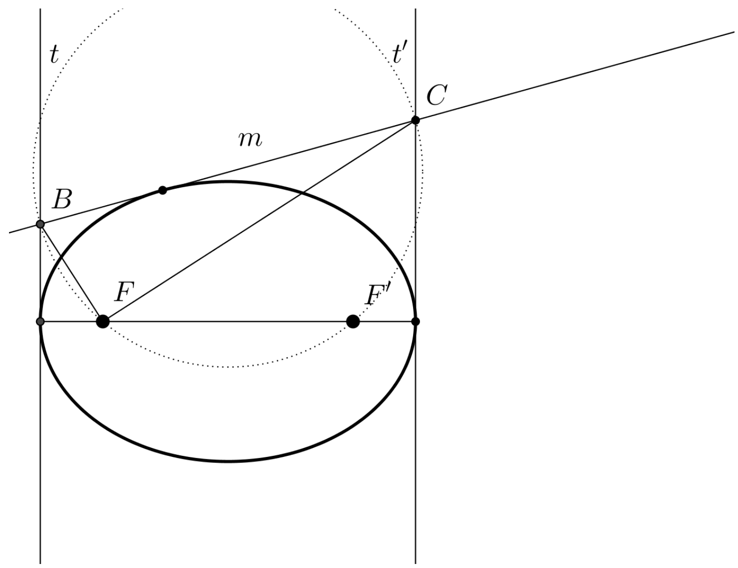
Equivalentment, la involució de raigs en el feix $\mathcal{F}_X$ definida en el corol·lari 2.0.17 és tal que $f(XC) = XB$. Observem que B, C van variant sobre les respectives tangents, amb la condició de que la recta BC sigui tangent a la cònica. Podem pensar doncs que tot raig per X és de la forma XC per a alguna C, i així la involució de raigs està ben definida.

Teorema 2.0.22 (Existència del focus) *Existeix almenys un punt F on la involució de diàmetres és ortogonal.*

Demostració. Per còniques amb centre si existeix el focus ha d'estar sobre l'eix. En efecte, si O és el centre FO és un diàmetre, corresponent a una certa direcció (recordem que els diàmetres són rectes polars de punts de l'infinit). La conjugació de raigs des de F porta FO a la recta per O i direcció la *corresponent* al diàmetre FO (no la direcció del diàmetre!). Per ser focus aquestes rectes són ortogonals i per tant FO és un eix.

Pel cas de la paràbola vegeu la secció 2.1.

Per trobar el focus, ara que ja sabem que està sobre l'eix, construïm un triangle circumscrit m, t, t' amb t, t' perpendiculars a l'eix, i tallem l'eix amb la circumferència de diàmetre BC, amb $B = m \cap t$, $C = m \cap t'$.



D'aquesta manera l'angle $\angle BFC$ és recte. La involució de raigs des de F porta el raig FB al seu conjugat FC i aquests formen angle recte. Però hem de veure que *tot* raig per F és ortogonal al seu conjugat.

És a dir, hem de veure que quan la tangent m va variant, i per tant també els punts B i C sobre t i t', l'angle $\angle BFC$ es manté sempre recte.

Seguint els comentaris de la secció 1.3.1 busquem el punt de Frègier de la involució de raigs en el feix $\mathcal{F}_F$ definida per la cònica: a cada raig el seu conjugat.

Prenem com circumferència auxiliar per F (seguint com hem dit la secció 1.3.1) justament la que acabem de construir a la figura adjunta. Llavors el punt de Frégier pertany a la recta BC ja que la imatge de FB és FC. La imatge del raig per F paral·lel a t, t' és l'eix FF' per tant el punt de Frégier pertany al diàmetre de la circumferència auxiliar QF', on Q és la intersecció de l'anterior raig amb la circumferència auxiliar. QF' és diàmetre perquè l'angle $\angle QFF'$ és recte. Com BC també és diàmetre, el punt de Frégier és el centre de la circumferència auxiliar, i per tant la involució és ortogonal. $\square$

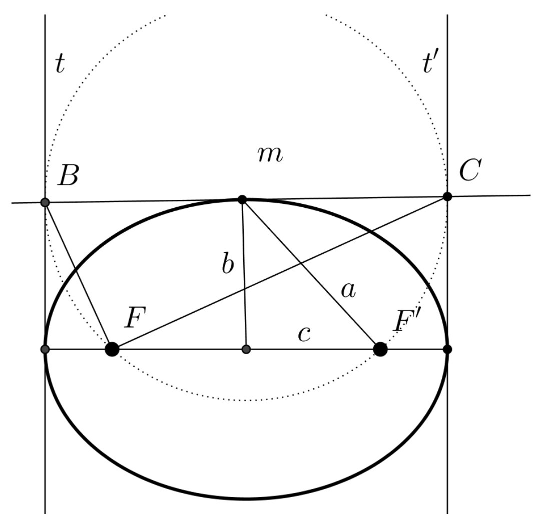
En el cas de l'el·lipse, si prenem la tangent[21] paral·lela al diàmetre veiem

[21]Recordem que per traçar la tangent en un punt P d'una el·lipse de focus F, F' hem de fer la perpendicular en P a la bisectriu de l'angle $\angle FPF'$.

que la relació entre els semiexos a, b i la semi distància focal c és

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Observem que el semieix a coincideix amb el radi de la circumferència auxiliar.

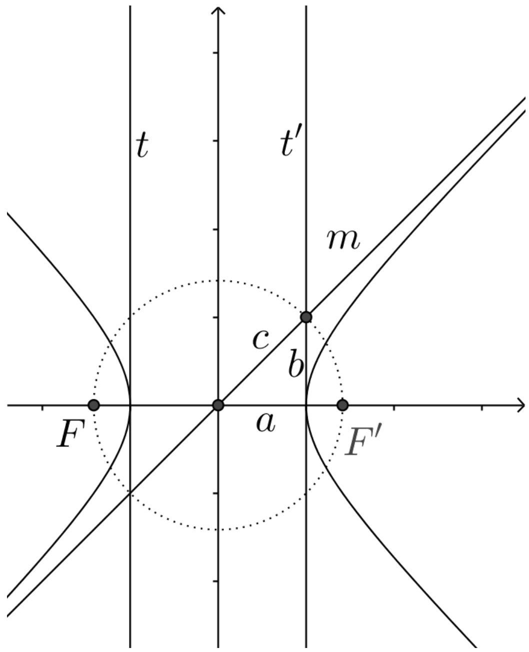


En el cas de la hipèrbola prenem m com asímptota (tangent a l'infinit) i tenim

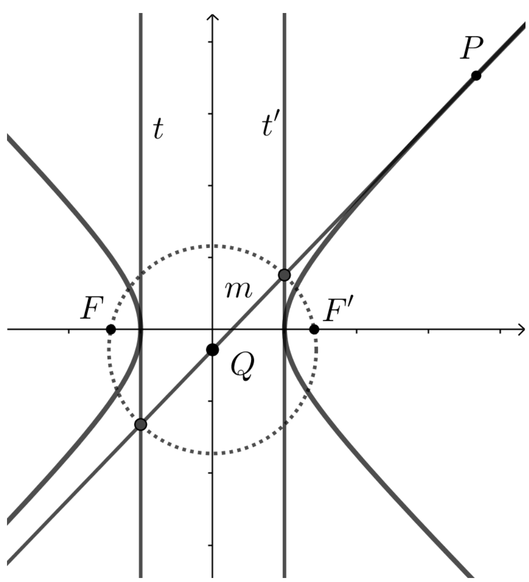
$$c^2 = a^2 + b^2$$

on a és el semieix, c la semi distància focal i b és l'ordenada del punt $m \cap t'$.

Observem que la semi distància focal c coincideix amb el radi de la circumferència auxiliar.

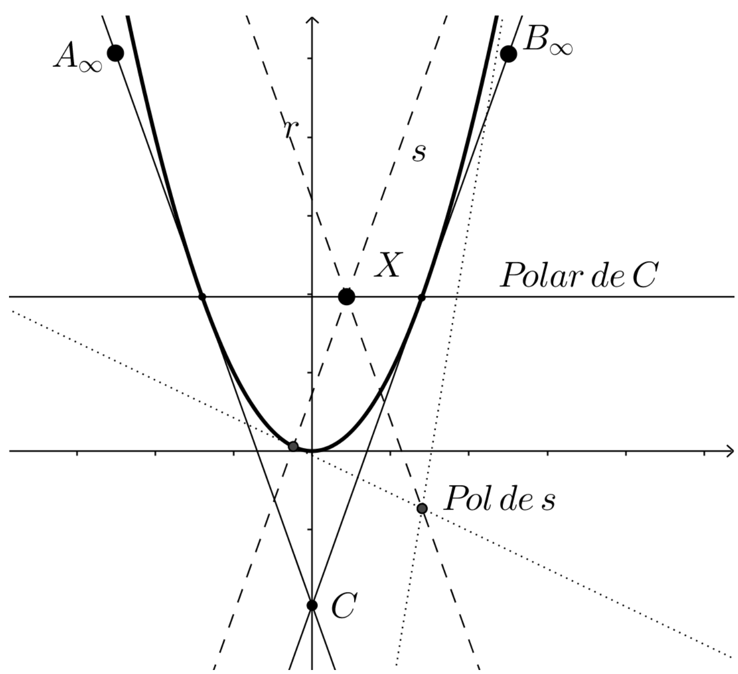


Aquesta situació és simplement la situació de la figura següent quan P tendeix a infinit (i per tant Q tendeix a l'orígen).

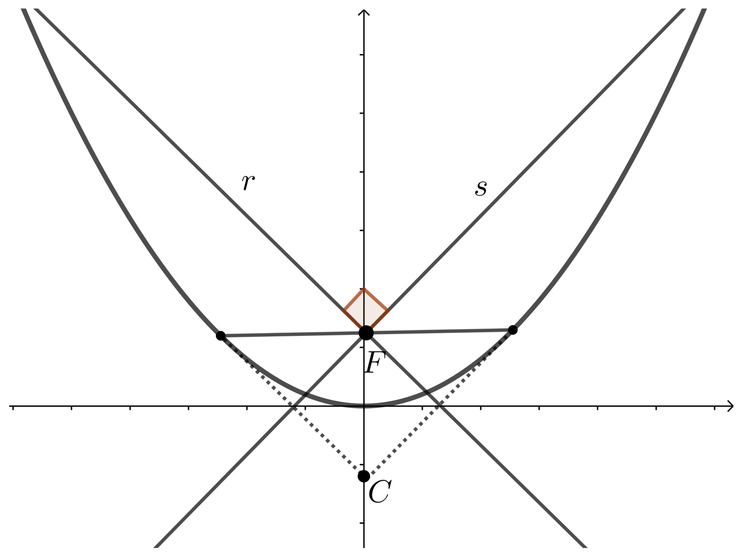


2.1 Paràbola

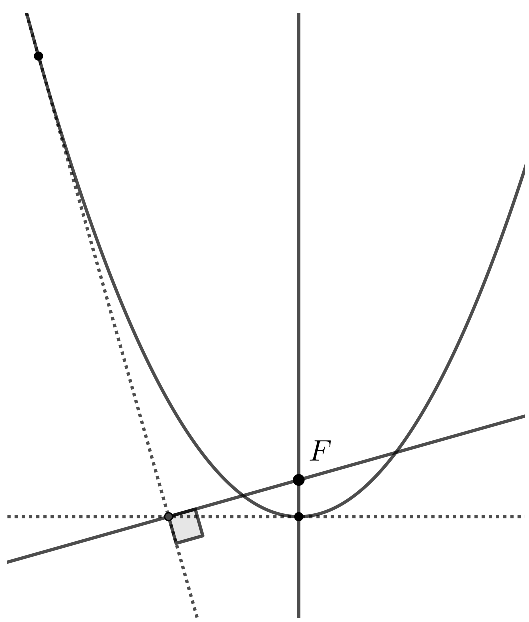
Pel cas de la paràbola el teorema 2.0.20 diu que per a qualsevol punt X de la polar de C les rectes r, s per X paral·leles a les tangents a la paràbola per C són conjugades. En el dibuix es veu com en calcular el pol de s obtenim un punt de r.



En el cas particular de que X coincideixi amb el focus les rectes r i s són perpendiculars com ja sabíem.



Per tant per construir el focus d'una paràbola traçarem la tangent pel vèrtex i una segona tangent qualsevol. La perpendicular a aquesta segona tangent en el punt d'intersecció de les dues tangents talla l'eix en el focus.



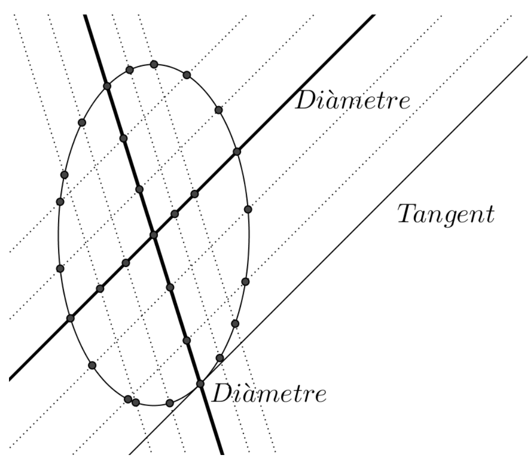
Un cop construït F d'aquesta manera es veu, amb un argument similar al cas de còniques amb centre, que la involució del feix de rectes per F induït per la paràbola, és ortogonal. Només hem de construir una circumferència auxiliar amb centre l'eix que passi per F. Com la recta conjugad de l'eix és la recta per F paral·lela a la tangent pel vèrtex, el punt de Frégier és sobre un diàmetre de la circumferència, el corresponent a l'eix, i com la conjugada a la paral·lela a la tangent per F és ortogonal a ella, el punt de Frégier també està sobre un segon diàmetre, per tant és el centre de la circumferència i la involució és ortogonal.

Diàmetres conjugats

Hem definit diàmetre en una direcció com el lloc geomètric dels punts mitjans en que les paral·leles a aquesta direcció tallen la cònica. S'ha vist que és una recta.

No s'ha de confondre la direcció del diàmetre amb la direcció que ens ha definit el diàmetre, que en direm direcció *corresponent* al diàmetre.

Ara podem repetir el procés tallant la cònica amb les paral·leles a quest diàmetre. Els punts mitjans d'aquestes interseccions és un nou diàmetre anomenat conjugat de l'anterior. Observem que el diàmetre conjugat a un donat és paral·lel a la tangent a la cònica en el punt de tall del primer diàmetre. És conseqüència de la Proposició 2.0.11 i un argument de continuïtat.

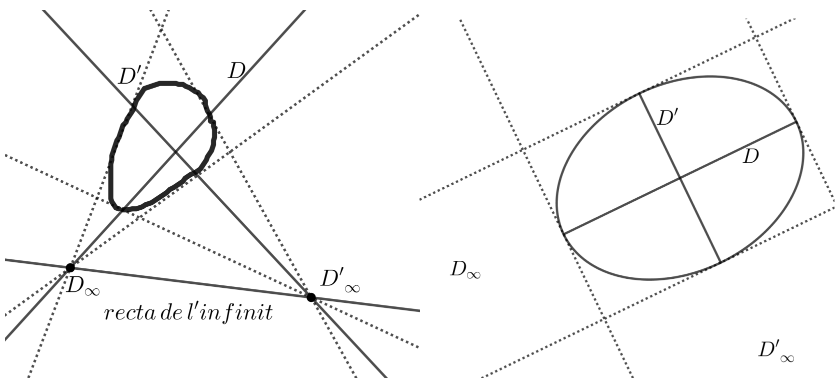


Definició 2.1.1 *Dos diàmetres es duen* conjugats *quan un és paral·lel a la direcció* corresponent *de l'altra.*

En llenguatge projectiu, on els punts de l'infinit són les direccions tenim la definició clàssica següent.

Definició 2.1.2 *Dos diàmetres es duen* conjugats *quan un passa pel pol de l'altre.*

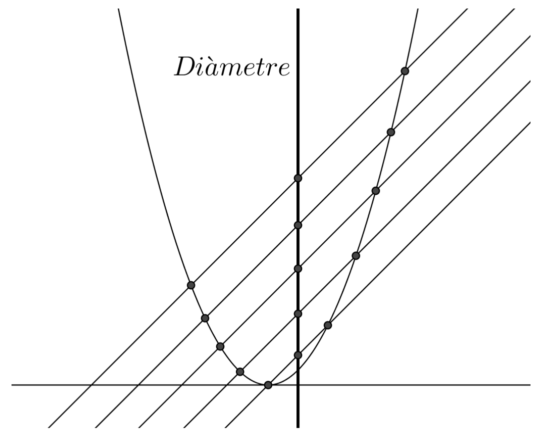
La figura següent representa la versió projectiva i afí de diàmetres conjugats.



Definició 2.1.3 *El* centre *d'una cònica és el punt d'intersecció de dos diàmetres.*

El teorema 2.0.12 ens diu que no depèn de quins dos diàmetres triem. En efecte, si pensem que en l'enunciat d'aquest teorema, pàgina 33, la recta r és la recta de l'infinit, llavors el punt $A \in r$ representa una direcció i el teorema ens diu que la polar d'aquest punt, que és doncs un diàmetre, passa pel pol de la recta de l'infinit que és el centre. Més concretament, es tallen dos diàmetres i es considera la involució corresponent al punt d'intersecció. Denotem O el punt d'intersecció i X, X' i Y, Y' els corresponents diàmetres. Pel teorema 2.0.7 les rectes XY' i $X'Y$ són paral·leles. Si fixem X i fem variar Y obtenim totes les direccions, és a dir, en llenguatge projectiu, obtenim tota la recta de l'infinit. Prenem un punt Z de la cònica i Z' la seva imatge per la involució. Les rectes XZ' i $X'Z$ són paral·leles (teorema 2.0.12) i el diàmetre corresponent a aquesta direcció passa per $XX' \cap ZZ' = O$. Per tant, tots els diàmetres es tallen a O.

Observem que aquest procés no es pot fer amb la paràbola ja que tots els diàmetres són paral·lels a l'eix. Les paràboles, doncs, no tenen centre (o està l'infinit).



Definició 2.1.4 *Els eixos d'una cònica amb centre són els diàmetres conjugats*[22] *ortogonals.*

La secció 1.3.1 demostra l'existència d'eixos (raigs principals).

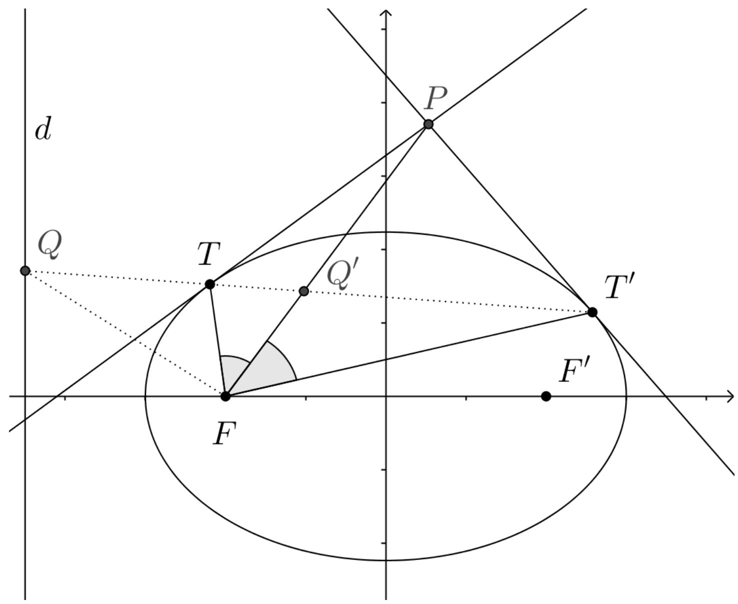
2.2 Definició clàssica de cònica

Teorema 2.2.1 *Les rectes que uneixen el focus F d'una cònica amb el punt P de contacte de dues tangents formen angles iguals amb la recta FP.*

Demostració. Denotem per T, T' els punts de tangència de les dues tangents que es tallen a P, i per Q, Q' les interseccions de la recta T, T' amb la directriu d i la recta FP respectivament.

La recta TT' és, doncs, la polar de P. Tota recta per P té el pol sobre TT'. En particular, el pol de la recta PF està sobre TT', Però com és una recta per F el seu pol és sobre d, per tant Q és el pol de PF. Per tant, les rectes FP, FQ són conjugades, i com F és focus, són ortogonals.

[22] La conjugació és en el feix de rectes pel centre.



Com $(Q, Q', T, T') = -1$ la raó doble de les rectes FQ, FQ', FT, FT' és també -1. Aplicant la fórmula que ens dóna aquesta raó doble en funció dels sinus dels angles que formen aquestes rectes (pàgina 10) i tenint en compte que

$$\begin{aligned} \angle QFT &= \pi/2 - \angle TFQ' \\ \angle QFT' &= \pi/2 + \angle Q'FT' \end{aligned}$$

tenim (tenim en compta la posició de les rectes per al signe de la raó doble)

$$\frac{\sin\angle QFT}{\sin\angle TFQ'} : \frac{\sin\angle QFT'}{\sin\angle TFT'} = \cot\angle TFQ' : \cot\angle Q'FT' = 1$$

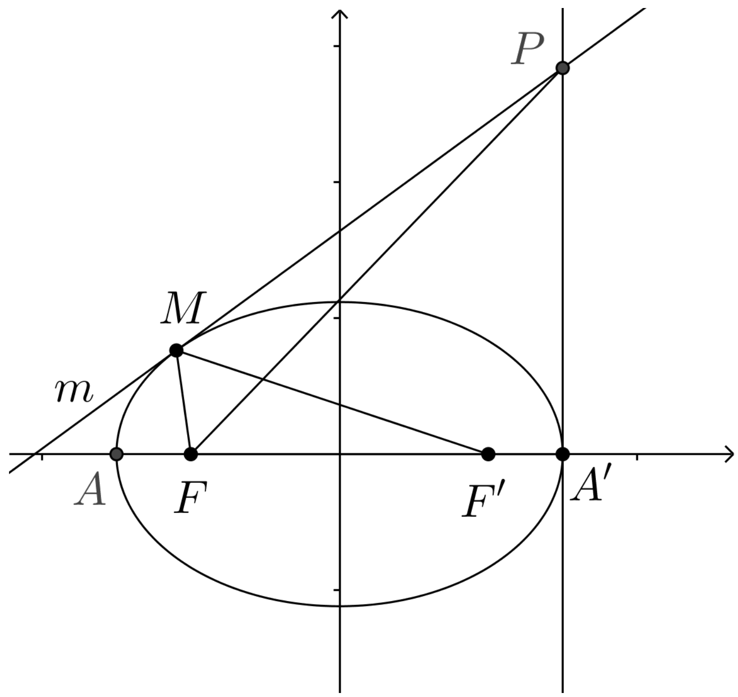
d'on $\angle TFQ' = \angle Q'FT'$ com volíem. $\square$

Teorema 2.2.2 *La tangent a una cònica en un punt M és bisectriu de l'angle*[23] *entre les rectes MF i MF', on F, F' són els focus de la cònica.*

Demostració.. Sigui m la tangent a la cònica en el punt M. Sigui P la intersecció de m amb la tangent a la cònica en un vèrtex [RECORDAR DEFINIR]] Pel teorema anterior FP és bisectriu de $\angle MFA'$, i $F'P$ és bisectriu de $\angle MF'A'$.

[23] Sobre l'el·lipse la tangent és la perpendicular a la bisectriu de $\angle FPF'$. Sobre la hipèrbola la tangent és la bisectriu de l'angle $\angle FPF'$.

Així P equidista de les rectes FM i FA' i també equidista de les rectes MF' i FA'; per tant la distància de P a FM és igual a la distància de P a MF', i per tant P pertany a la bisectriu de l'angle $\angle FMF'$ com volíem demostrar. $\square$



Definició 2.2.3 *La directriu d'una cònica es la polar del focus.*

Si hi ha dos focus hi ha, doncs, dues directrius.

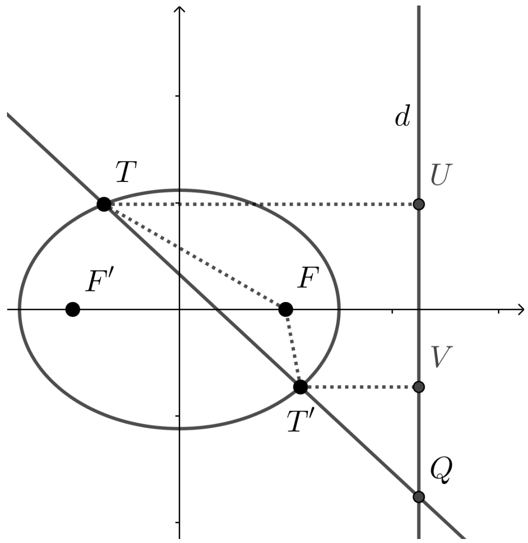
Teorema 2.2.4 *El quocient de les distàncies d'un punt de la cònica al focus i a la directriu és constant.*

Demostració. Siguin T, T' dos punts qualssevol de la cònica. Volem veure que

$$\frac{d(T,d)}{d(T,F)} = \frac{d(T',d)}{d(T',F)},$$

on F és el focus i d la directriu corresponent al focus F. Sigui Q el punt en que la recta TT' talla d. Del teorema 2.2.1 i la seva demostració tenim que FQ és bisectriu exterior de l'angle $\angle T'FT$. Pel teorema de la bisectriu

$$\frac{FT}{FT'} = \frac{QT}{QT'}.$$



Siguin U, V els punts en que les perpendiculars a d per T i T' respectivament tallen d. Per Tales

$$\frac{QT}{QT'} = \frac{TU}{T'V}.$$

Per tant,

$$\frac{FT}{FT'} = \frac{TU}{T'V}.$$

I així

$$\frac{FT}{TU} = \frac{T'F}{T'V},$$

com volíem veure. □

Amb aquest teorema arribem a la definició clàssica de cònica i donem per acabades aquestes notes.

Bibliografia

[1] A. Gil Azpeitia and Orellana E., *Elementos de Geometria Proyectiva*, Nuevas Graficas SA, Madrid, 1941.

[2] Agustí Reventós, *Geometria Axiomàtica*, Institut d'Estudis Catalans; Arxius de les Seccions de Ciències, CVI, Secció de Ciències i Tecnologia, 1993.

[3] ———, *Geometria Projectiva*, Universitat Autònoma de Barcelona, 2000, Col·lecció Materials UAB, Vol. 85.

[4] José M. Rodríguez-Sanjurjo and José M. Ruíz, *Lecciones de Geometría Proyectiva*, Sanz y Torres, 2009.