Quermassintegrale
i
integrals de curvatura mitja

ART

22 d'octubre de 2012

Resum

En aquesta xerrada intentarem explicar la relació que hi ha entre la mesura de plans que tallen un convex, la integral dels volums (àrees) de les projeccions ortogonals d'aquest convex sobre plans per l'origen i els coeficients de la fórmula de Steiner, que és la fórmula dels volums dels tubs.

1 Notació i volum de les Grassmannianes

Denotarem per

$$\omega_k = \text{Volum de la bola de radi 1 a } \mathbb{R}^k.$$

Així,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2 \\ \omega_2 &= \pi \\ \omega_3 &= \frac{4}{3}\pi \\ &\vdots \end{aligned}$$

Denotarem per

$$O_k = \text{Àrea de l'esfera de radi 1 de } \mathbb{R}^{k+1},\ (S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}).$$

Així,

$$\begin{aligned} O_0 &= 2 \\ O_1 &= 2\pi \\ O_2 &= 4\pi \\ &\vdots \end{aligned}$$

En general

$$O_n = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)}.$$

Com que la derivada del volum és l'àrea es té que

$$\omega_k = \frac{O_{k-1}}{k}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

Denotarem per $G_{n,m}$ la Grassmanniana de m-plans per l'origen a $\mathbb{R}^m$. Associant a cada m-pla el seu complementari ortogonal tenim un isomorfisme entre $G_{n,m}$ i $G_{n,n-m}$.

Identificarem $G_{n,1}$ amb l'esfera unitat amb els punts antipodals identificats, ja que corresponen a la mateixa recta, és a dir $G_{n,1}$ és l'espai projectiu de dimensió $(n-1)$.

La mesura de $G_{n,1}$ s'identifica amb la mesura de S^{n-1} de manera que integrar sobre $G_{n,1}$ serà equivalent a integrar sobre S^{n-1} i dividir per 2.

Observem que per donar un m-pla a$\mathbb{R}^n$, podem donar una referència ortonormal (la qual cosa és equivalent a donar un element del grup ortogonal $O(n)$) i establir que el m-pla és el generat pels primers m vectors. Llavors és clar que qualsevol permutació d'aquests m vectors i qualsevol permutació dels $n-m$ restants, canviarà la referència ortonormal, però no el $m-$pla considerat.

Així doncs podem dir que

$$G_{n,m} = \frac{O(n)}{O(m) \times O(n-m)}.$$

En particular, el volum $V(G_{n,m})$ de la Grassmanniana és

$$V(G_{n,m}) = \frac{V(O(n))}{V(O(m)) \cdot V(O(n-m))}.$$

Però

$$V(O(n)) = O(n-1) \cdot O(n-2) \cdot \cdots \cdot O(1) \cdot O(0),$$

ja que per donar una referència primera elegim un vector arbitrari unitari e_1. La mesura de l'espai on s'agafa aquest vector és $O(n-1)$. A continuació elegim e_2 ortogonal i unitari. La mesura de l'espai on s'agafa aquest vector és $O(n-2)$, etc.

Substituint aquests valors a la fórmula del volum de la Grassmanniana tenim

$$V(G_{n,m}) = \frac{O(n-1) \cdot \cdots \cdot O(n-m)}{O(m-1) \cdot \cdots \cdot O(0)}.$$

2 Fórmula de l'àrea de Cauchy

Sigui K un convex compacte de $\mathbb{R}^n$. Denotem per $V(\partial K)$ el volum $(n-1)-$dimensional de la vora de K.

Per a cada element $L_1 \in G_{n,1}$ (recta per l'origen) denotem $K_{L_1^\perp}$ la projecció ortogonal de K sobre $L_1^\perp$.

Llavors

Teorema 1 (Fórmula de Cauchy)

$$V(\partial K) = \frac{2}{\omega_{n-1}} \int_{G_{n,1}} V(K_{L_1^\perp}) dL_1.$$

També es pot escriure com

$$V(\partial K) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} V(K_{L_1^\perp}) dL_1$$

ben entès que en aquesta segona fórmula dL_1 és l'element d'àrea de S^{n-1}. A la primera es pot pensar com l'element d'àrea del projectiu (mitja esfera).

Abans de demostrar-la mirem el cas particular del pla i l'espai.

$n = 2$. Tenim

$$Longitud(\partial K) = \int_{G_{2,1}} longitud(K_{L_1^\perp}) dL_1.$$

Per exemple si K és el disc de radi R,

$$\int_{G_{2,1}} longitud(K_{L_1^\perp}) dL_1 = \int_{G_{2,1}} 2R\, dL_1 = 2R(Volum\ G_{2,1}) = 2R\pi = Longitud(\partial K).$$

$n = 3$. Tenim

$$\grave{A}rea(\partial K) = \frac{2}{\pi} \int_{G_{3,1}} \grave{a}rea(K_{L_1^\perp}) dL_1.$$

Per exemple si K és la bola de radi R,

$$\frac{2}{\pi} \int_{G_{3,1}} \grave{a}rea(K_{L_1^\perp}) dL_1 = \frac{2}{\pi} \int_{G_{3,1}} \pi R^2\, dL_1 = 2R^2(Volum\ G_{3,1}) = 2R^2 \cdot 2\pi = \grave{A}rea(\partial K).$$

Demostració de la fórmula de Cauchy en el pla

Només s'ha d'observar que si tenim un segment de longitud l que forma un angle θ amb l'eix de les $x's$ i el projectem, la longitud del segment projectat és $\bar{l} = l \cdot |\cos\theta|$.

Si tenim una corba convexa tancada, pensem ∂K, i pensem que la seva longitud ve donada per aproximació de poligonals, $L(\partial K) = \sum l_i$, ens adonem que la longitud de la corba projectada és igual a $1/2$ vegades (la fibra de la projecció té dos punts, genèricament), la suma de les longituds projectades dels segments de poligonal,

$$Longitud\ corba\ projectada = \frac{1}{2} \sum \bar{l_i} = \frac{1}{2} \sum l_i \cdot |\cos\theta_i|.$$

Si ara imaginem que l'eix de les $y's$ va rotant al voltant de l'origen, i que la seva ortogonal, l'eix de les $x's$, va donant lloc en cada cas a una recta $L_1^\perp$, i repetim el procés anterior de projecció ortogonal de la corba donada sobre $L_1^\perp$, obtindrem la mateixa fórmula d'abans

$$Longitud\ corba\ projectada\ sobre\ L_1^\perp = \frac{1}{2} \sum l_i \cdot |\cos\theta_i(L_1^\perp)|.$$

on $\theta_i(L_1^\perp)$ és l'angle entre la normal al segment donat (fix) i la normal a $L_1^\perp$ (mòbil).

Integrem ara aquesta fórmula a $G_{2,1}$ i tenim

$$\int_{G_{2,1}} longitud(K_{L_1^\perp}) dL_1 = \frac{1}{2} \sum l_i \cdot \int_{G_{2,1}} |\cos\theta_i(L_1^\perp)|\, dL_1$$

Ara bé, per a cada i, aquesta integral val 2, ja que dL_1 s'identifica amb la mesura $d\theta$ de S^1, i l'angle a integrar és aquest mateix θ més una constant (angle que forma el segment donat amb l'eix de les x', per exemple.) I

$$\int_0^\pi |\cos\theta| d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = 2.$$

Per tant

$$\int_{G_{2,1}} longitud(K_{L_1^\perp}) dL_1 = \frac{1}{2} \sum l_i \cdot 2 = L(\partial K).$$

2.1 Projecció d'àrees

La mateixa relació que hi ha entre la longitud d'un segment i la longitud del seu projectat (que s'ha de multiplicar pel cosinus) és la relació que hi ha entre l'àrea d'una figura plana i l'àrea de la seva projectada (s'ha de multiplicar pel cosinus).

Veiem-ho a $\mathbb{R}^3$. És ben sabut que l'àrea del rectangle determinat pels vectors $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ està donada per

$$A = |u \wedge v|$$

Equivalentment, $u \wedge v = A\vec{n}$, on $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ és el vector normal unitari al pla $\langle u, v\rangle$.

Si ara projectem aquests vectors sobre $z = 0$ obtenim dos vectors $\bar{u} = (u_1, u_2, 0), \bar{v} = (v_1, v_2, 0)$.

I per tant, l'àrea $\bar{A}$ del rectangle projectat, que és l'àrea del rectangle generat per $\bar{u}$ i $\bar{v}$, és

$$\bar{A} = |\bar{u} \wedge \bar{v}| = A \cdot n_3 = A \cdot (0, 0, 1) \cdot \vec{n} = A \cdot \cos\theta$$

on θ és l'angle entre el vector normal al pla $\langle u, v\rangle$ i la direcció de projecció (en aquest cas ortogonalment sobre el pla x, y).

Aquest resultat és vàlid aplicat a $n - 1$ vectors de R^n, projectant sobre un $(n - 1)$-pla.

2.2 Demostració de la fórmula de Cauchy en el cas general

Lema 2 *Fixem un vector $v \in S^{n-1}$. Llavors tenim*

$$\int_{S^{n-1}} |\langle u, v\rangle| du = 2\omega_{n-1}.$$

Tedi's proof. Per definició d'integral tenim

$$\int_{S^{n-1}} |\langle u, v\rangle| du = \lim_{\mathcal{P}} \sum_i |\langle u_i, v\rangle| \cdot a(A_i),$$

on $a(A_i)$ és l'àrea de petites porcions de l'esfera, que suposo planes (ubicades al pla tangent, si es vol), de la partició $\mathcal{P}$, que anirà aproximant l'esfera, i u_i són les normals a cadascuna d'aquestes petites regions A_i .

Per tant, denotant $a(\bar{A}_i)$ l'àrea de la projecció de A_i, sabem que

$$a(\bar{A}_i) = a(A_i) \cdot |\cos\theta_i| = a(A_i) \cdot |\langle u_i, v\rangle|$$

on θ_i és l'angle entre u_i i v.

Per tant,

$$\int_{S^{n-1}} |\langle u, v\rangle| du = \lim_{\mathcal{P}} \sum_i a(\bar{A}_i) = 2 \cdot \text{àrea esfera projectada} = 2\omega_{n-1}.$$

La darrera igualtat és conseqüència de que quan projectem una esfera S^{n-1} ortogonalment sobre un hiperplà per l'origen obtenim, dos cops, la bola de radi 1 de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Teorema 3 (Fórmula de Cauchy)

$$V(\partial K) = \frac{2}{\omega_{n-1}} \int_{G_{n,1}} V(K_{L_1^\perp}) dL_1.$$

Demostració. Aproximem el convex per poliedres. Suposem un poliedre pròxim P amb cares P_i, àrees (volums) d'aquestes cares $V(P_i) = a_i$, i vectors normals respectius u_i.

$$\int_{G_{n,1}} V(P_{L_1^\perp})dL_1 = \int_{G_{n,1}} \sum_i \frac{1}{2} V((P_i)_{L_1^\perp})dL_1 = \frac{1}{2}\sum_i a_i \int_{G_{n,1}} |\langle u_i, v_L\rangle|\, dL_1,$$

on v_L és el vector unitari director de L_1 Pel lema,

$$\int_{G_{n,1}} V(P_{L_1^\perp})dL_1 = \frac{1}{2}\left(\sum_i a_i\right)\omega_{n-1} = \frac{\omega_{n-1}}{2} V(\partial P)$$

Passant aquest poliedre al límit tenim el resultat. $\square$

3 Fórmula de Cauchy en termes d'esperances

Observem que multiplicant i dividint per $O(n-1)/2$ tenim

$$\begin{aligned} V(\partial K) &= \frac{2}{\omega_{n-1}} \int_{G_{n,1}} V(K_{L_1^\perp})dL_1 \\ &= \frac{O(n-1)}{\omega_{n-1}} \cdot \frac{\int_{G_{n,1}} V(K_{L_1^\perp})dL_1}{O(n-1)/2} \\ &= (n-1)\cdot \frac{O(n-1)}{O(n-2)} \cdot \frac{\int_{G_{n,1}} V(K_{L_1^\perp})dL_1}{V(G_{n,1})} \\ &= (n-1)\cdot \frac{O(n-1)}{O(n-2)} \cdot \mathbb{E}(V(K_{L_1^\perp}) \end{aligned}$$

on $\mathbb{E}(V(K_{L_1^\perp})$ vol dir l'esperança del volum de les projeccions.

Equivalentment,

$$\boxed{V(\partial K) = n\cdot \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \cdot \mathbb{E}(V(K_{L_1^\perp}))} \tag{1}$$

Si $n = 3$, obtenim la tant celebrada fórmula de la estereologia

$$\grave{A}rea\ (\partial K) = 4\cdot \mathbb{E}(\grave{a}rea\ (K_{L_1^\perp}).$$

4 Fórmula de Steiner

Observem que si tenim un quadrat Q de costat a i considerem el conjunt de punts del pla que disten r d'aquest quadrat obtenim una mena de quadrat Q_r amb els vèrtexs arrodonits.

És molt clar que

$$A(Q_r) = A(Q) + Lr + \pi r^2,$$

on $L = 4a$ és el perímetre de Q.

Si fem el mateix però amb un cub C de costat a a l'espai obtenim

$$V(C_r) = V(C) + Ar + 3a\pi r^2 + \frac{4\pi R^3}{3}$$

om $A = 6a^2$ és l'àrea lateral.

En general quan passem d'un convex compacte Q de $\mathbb{R}^n$ al semitub Q_r a distància r ens trobem que el volum de Q_r és un polinomi en r. La gràcia de la fórmula de Steiner és que interpreta aquests coeficients en termes de curvatura de Q.

Teorema 4 (Fórmula de Steiner) *El volum del cos paral·lel Q_r a distància r de Q ve donat per*

$$V(Q_r) = V(Q) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \binom{n}{j} M_{j-1}(\partial Q) r^j \tag{2}$$

on $M_i(\partial Q)$ és (llevat d'una constant que es dóna més endavant) la integral sobre ∂Q de la i-èssima funció simètrica elemental de curvatura.

Demostració. Estudiem de moment els convexos de $\mathbb{R}^3$, però tot funciona essencialment igual a $\mathbb{R}^n$.

Suposarem que Q no té punts plans, de manera que l'aplicació de Gauss $g : \partial K \longrightarrow S^2$ és difeomorfisme. Si denotem dS l'element d'àrea de S^2 i dA l'element d'àrea del compacte, tenim

$$g^*(dS) = K dA$$

on K és, per definició, la curvatura de Gauss.

És sabut que

$$K = k_1 k_2 = \frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2},$$

on k_i són les curvatures principals i ρ_i els radis de curvatura corresponents.

Per tant

$$dA = \rho_1 \rho_2 \ (g^* dS)$$

que es pot escriure com

$$dA = g^*(\tilde{\rho}_1 \tilde{\rho}_2 \ dS)$$

amb $\tilde{\rho}_1 \circ g = \rho_1$. És a dir, $\tilde{\rho}_1 = \rho_1 \circ g^{-1}$ és el radi de curvatura 'pensat' sobre l'esfera.

Denotant per $A(\partial Q)$ l'àrea de la vora de K, i usant el teorema del canvi de variable, tenim

$$A(\partial Q) = \int_{\partial Q} dA = \int_{\partial Q} g^*(\tilde{\rho}_1 \tilde{\rho}_2 \ dS) = \int_{S^2} \tilde{\rho}_1 \tilde{\rho}_2 \ dS.$$

Ara aplicarem aquesta fórmula per calcular l'àrea de Q_r. Només hem d'observar que $Q_r = Q + rN$, on N és la normal exterior a K. Si fixem un punt $P \in Q$, i considerem les direccions principals e_1, e_2 en aquest punt, i tallem Q pel pla $\Pi = \langle N(P), e_i \rangle$, veiem que en aquest pla tenim dues corbes 'paral·leles', $Q \cap \Pi$ i $Q_r \cap Pi$, i que el cercle osculador de la segona en P té el mateix centre i radi augmentat en r que el cercle osculador de la primera.

Així doncs, denotant ρ_i^r els radis de curvatura de Q_r, tenim

$$\rho_i^r = \rho_i + r.$$

Com r és una constant també tenim

$$\widetilde{\rho_i^r} = \widetilde{\rho_i + r} = \tilde{\rho}_i + r$$

I per tant, denotant $\sigma_1 = k_1 + k_2$, $\sigma_2 = K = k_1 k_2$,

$$\begin{aligned}
A(\partial Q_r) &= \int_{S^2} \tilde{\rho_1^r}\tilde{\rho_2^r}\, dS \\
&= \int_{S^2} (\tilde{\rho_1} + r)(\tilde{\rho_2} + r)\, dS \\
&= \int_{S^2} (\frac{1}{\tilde{k_1}} + r)(\frac{1}{\tilde{k_2}} + r)\, dS \\
&= \int_{S^2} \frac{1}{\tilde{K}}(1 + \tilde{k_1} r)(1 + \tilde{k_2} r)\, dS \\
&= \int_{S^2} \frac{1}{\tilde{K}}(1 + \tilde{\sigma_1} r + \tilde{\sigma_2} r^2)\, dS \\
&= \int_{\partial Q} g^*(\frac{1}{\tilde{K}}(1 + \tilde{\sigma_1} r + \tilde{\sigma_2} r^2)\, dS) \\
&= \int_{\partial Q} \frac{1}{K}(1 + \tilde{\sigma}_1 r + \sigma_2 r^2)\, K\, dA \\
&= \sum_{i=0}^{2} \left(\int_{\partial Q} \sigma_i dA \right) r^i.
\end{aligned}$$

Aquest càlcul es generalitza sense dificultat a $\mathbb{R}^n$ no més tenint en compte que ara tenim $(n-1)$ radis de curvatura principals.

Tenim

$$A(\partial Q_r) = \int_{S^{n-1}} (\tilde{\rho}_1 + r) \dots (\tilde{\rho}_1 + r) dS$$

que es pot escriure com

$$A(\partial Q_r) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{\partial Q} \sigma_i dA \right) r^i, \tag{3}$$

on

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= 1 \\
\sigma_1 &= k_1 + \cdots + k_{n-1} \\
\sigma_2 &= k_1 k_2 + k_1 k_3 \cdots + k_{n-2} k_{n-1} \\
&\cdots \\
\sigma_{n-1} &= k_1 \cdot \cdots \cdot k_{n-1} = K.
\end{aligned}$$

Introduïm la notació següent

$$M_i(\partial Q) = \frac{\int_{\partial Q} \sigma_i\, dA}{\binom{n-1}{i}}$$

Per exemple, si $n = 3$,

$$M_0(\partial Q) = \int_{\partial Q} dA = \text{Àrea}(\partial Q).$$

$$M_1(\partial Q) = \frac{\int_{\partial Q} \sigma_1\, dA}{2} = \int_{\partial Q} H\, dA, \qquad H = \text{Curvatura mitjana}.$$

$$M_2(\partial Q) = \int_{\partial Q} \sigma_2\, dA = \int_{\partial Q} K\, dA, \qquad K = \text{Curvatura de Gauss}.$$

El teorema de Gauss-Bonnet diu que

$$\int_{\partial Q} K \; dA = 2\pi\chi(Q)$$

de manera que per a convexos tenim

$$M_2(\partial Q) = 4\pi.$$

Amb aquesta notació la fórmula (3) s'escriu

$$A(\partial Q_r) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} M_i \cdot r^i, \tag{4}$$

Com que en el món dels tubs el volum és la integral de l'àrea, tenim

$$V(Q_r) = V(Q) + \int_0^r A(\partial K_r)\, dr = V(Q) + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \cdot M_i(\partial Q) \cdot \frac{r^{i+1}}{i+1}.$$

Equivalentment,

$$V(Q_r) = V(Q) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \binom{n}{j} \cdot M_{j-1}(\partial Q) \cdot r^j.$$

Per exemple, si $n = 3$,

$$A(\partial Q_r) = M_0(\partial Q) + 2M_1(\partial Q)r + M_2(\partial Q)r^2.$$

Integrant

$$V(Q_r) = V(Q) + M_0(\partial Q)r + M_1(\partial Q)r^2 + \frac{4\pi r^3}{3}.$$

(compareu-les amb el cub inflat)

5 Quermassintegrale

Sigui K un convex compacte de $\mathbb{R}^n$. La quermassintegrale r-èssima $W_r(K)$ és, llevat d'una constant, l'esperança del volum de les projeccions sobre $(n-r)$-plans per l'origen.

Concretament

$$W_r(K) = \frac{\omega_n}{\omega_{n-r}} \, \mathbb{E}(V(K_{E_{n-r}})), \qquad r = 1, 2, \ldots, n-1.$$

La notació $K_{E_{n-r}}$ vol dir la projecció ortogonal de K sobre un $(n-r)$-pla $E_{n-r} \in G_{n,n-r}$, que suposem recorre tota la Grassmanniana.

Per definició d'esperança, també tenim

$$W_r(K) = \frac{\omega_n}{\omega_{n-r}} \, \frac{\int_{G_{n,n-r}} V(K_{E_{n-r}}) dE}{V(G_{n,n-r})}, \qquad r = 1, 2, \ldots, n-1.$$

La notació $V(G_{n,n-r})$ vol dir volum de la Grassmanniana $G_{n,n-r}$, i la notació dE vol dir element de volum de $G_{n,n-r}$. Potser fora més coherent escriure dE_{n-r}, però simplifiquem una mica la notació.

Si $r = 1$ tenim

$$W_1(K) = \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \, \mathbb{E}(V(K_{E_{n-1}}))$$

Identificant els hiperplans amb les seves rectes normals ($E_{n-1} = L_1^{\perp}$) i comparant aquesta fórmula amb (1) tenim

$$\boxed{V(\partial K) = n \cdot W_1(K)}$$

Completem la definició de Quermassintegrale així

$$\begin{aligned} W_n(K) &= \omega_n \\ W_0(K) &= V(K) \end{aligned}$$

Per entendre millor la definició de Quermassintegrale escric el cas particular $n = 3$. A $\mathbb{R}^3$ podem projectar sobre rectes o sobre plans.

$$W_1(K) = \frac{\omega_3}{\omega_2}\,\mathbb{E}(V(K_{E_2})) = \frac{4}{3}\,\mathbb{E}(V(K_{E_2})) = \frac{2}{3\pi}\int_{G_{3,2}} V(K_{E_2})dE.$$

$$W_2(K) = \frac{\omega_3}{\omega_1}\,\mathbb{E}(V(K_{E_1})) = \frac{2\pi}{3}\,\mathbb{E}(V(K_{E_1})) = \frac{1}{3}\int_{G_{3,1}} V(K_{E_1})dE.$$

El primer dE fa referència a mesura de plans i el segon a mesura de rectes (ja hem dit que el primer s'hagués hagut de denotar per dE_2 i el segon dE_1).

Cas particular de l'esfera

$r = 1$.

Observem que si $K = B(0; R)$ tenim

$$W_1(K) = \frac{2}{3\pi}\,\pi R^2 \int_{G_{3,2}} dE = \frac{2R^2}{3} \cdot 2\pi = \frac{4\pi R^2}{3}.$$

Això està d'acord amb la fórmula que posteriorment demostrarem i que diu

$$nW_{j+1}(K) = M_j(\partial K).$$

En efecte, en el nostre cas aquesta fórmula diu

$$W_1(K) = M_0(\partial K)/3,$$

expressió que coincideix amb la obtinguda anteriorment ja que $M_0(\partial K)$ és l'àrea de l'esfera de radi R, $M_0(\partial K) = 4\pi R^2$.

$r = 2$.

$$W_2(K) = \frac{1}{3}\int_{G_{3,1}} V(K_{E_1})dE = \frac{2R}{3}\int_{G_{3,1}} dE = \frac{2R}{3}2\pi = \frac{4}{3}\pi R.$$

Això està d'acord amb la fórmula

$$W_2(K) = M_1(\partial K)/3,$$

expressió que coincideix amb la obtinguda anteriorment ja que $M_1(\partial K)$ és la intgeral de la curvatura mitja de l'esfera de radi R , $M_1(\partial K) = \int_{S^2(R)} \frac{1}{R} dS = 4\pi R$.

Proposició 5

$$W_r(K) = \frac{(n-r)O_{r-1}\dots O_0}{nO_{n-2}\dots O_{n-r-1}} \cdot \int_{G_{n,n-r}} V(K_{E_{n-r}})dE$$

Demostració. Només hem de recordar les fórmules dels volums de les Grasmannianes.

$$W_r(K) = \frac{\omega_n}{\omega_{n-r}}\,\frac{\int_{G_{n,n-r}} V(K_{E_{n-r}})dE}{V(G_{n,n-r})} = \frac{O_{n-1}/n}{O_{n-r-1}/(n-r)}\,\frac{\int_{G_{n,n-r}} V(K_{E_{n-r}})dE}{\frac{O_{n-1}\dots O_{n-r}}{O_{r-1}\dots O_0}}.$$

Simplificant obtenim el resultat. □

6 Fórmula de Kubota

Teorema 6 (Kubota) *Es compleix la següent relació recurrent*

$$W_r(K) = \frac{2}{n \cdot \omega_{n-1}} \int_{G_{n,n-1}} W'_{r-1}(K_{E_{n-1}}) dE$$

on $W'_{r-1}(K_{E_{n-1}})$ és la quermassintegrale $(r-1)$ del convex $K_{E_{n-1}}$ (projecció del convex K sobre un l'hiperplà E_{n-1}) calculada en aquest hiperplà, és a dir, com si fos la quermassintegrale a $\mathbb{R}^{n-1}$.

Demostració per al cas $n = 3$, $r = 2$.
Volem demostrar que

$$\begin{aligned} W_2(K) &= \frac{2}{3\pi} \int_{G_{3,2}} W'_1(K_{E_2}) dE_2 \\ &= \frac{2}{3\pi} \int_{G_{3,2}} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \mathbb{E}(V((K_{E_2})_{E_1})) \right) dE_2 \\ &= \frac{2}{3\pi} \int_{G_{3,2}} \left(\frac{\pi}{2} \mathbb{E}(V((K_{E_2})_{E_1})) \right) dE_2 \\ &= \frac{1}{3} \int_{G_{3,2}} \frac{\int_{G_{2,1}} V(K_{E_2})_{E_1} dE_1}{\pi} dE_2 \end{aligned}$$

Així doncs, per definició de la quermassintegrale $W_2(K)$, hem de demostrar que

$$\int_{G_{3,1}} V(K_{E_1}) dE_1 = \frac{1}{\pi} \int_{G_{3,2}} \int_{G_{2,1}} V(K_{E_2})_{E_1} dE_1 dE_2$$

Abans de continuar mirem que aquesta fórmula és certa quan $K = B(0, R)$. En efecte, en aquest cas el terme de l'esquerra val

$$\int_{G_{3,1}} V(K_{E_1}) dE_1 = \int_{G_{3,1}} 2R \, dE_1 = 2R \cdot 2\pi = 4\pi R$$

I el terme de la dreta val

$$\frac{1}{\pi} \int_{G_{3,2}} \int_{G_{2,1}} V(K_{E_2})_{E_1} dE_1 dE_2 = \frac{1}{\pi} \int_{G_{3,2}} \int_{G_{2,1}} 2R \; dE_1 dE_2 = \int_{G_{3,2}} 2R \; dE_2 = 2R \cdot 2\pi = 4\pi R.$$

Tornem al cas general. A l'esquerra integrem el volum de les projeccions de K sobre totes les rectes per l'origen de $\mathbb{R}^3$. A la dreta primer fixem un pla i integrem el volum de la projecció de *la projecció de K sobre el pla* sobre les rectes per l'origen d'aquest pla. Però la figura que s'obté en projectar K primer sobre un pla i desprès sobre una recta d'aquest pla és la mateixa que s'obté projectant-lo directament sobre la recta.

De manera que integrem el mateix a dreta i esquerra. Però a la dreta integrem primer sobre totes les rectes d'un pla i després fem que aquest pla recorri tos els plans (integrem respecte el pla). Així cada recta està contada tants cops com plans la contenen, és a dir, es compta cada vegada que es considera uns dels plans del feix de plans que contenen aquesta recta. La mesura de plans que contenen un recta és clarament π, i per això a la integral de la dreta hem de dividir per π. Això acaba la demostració.

7 Fórmula de Steiner versió Quermassintegrale

Teorema 7 *Sigui K un convex compacte de $\mathbb{R}^n$. Denotem per K_r el semitub a distància r. Llavors*

$$V(K_r) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} W_i(K) r^i. \tag{5}$$

Demostració. Procedirem per inducció sobre n.

Si $n = 1$,

$$\binom{1}{0} W_0(K) + \binom{1}{1} W_1(K) = V(K) + \omega_1 r = V(K) + 2r$$

i aquest valor és clarament igual a $V(K_r)$, ja que K és un interval tancat i ampliar-lo una distància r segons la normal exterior vol dir ampliar-lo a dreta i esquerra uns distància r.

Suposem el resultat cert per a convexos compactes de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Sigui E un hiperplà de $\mathbb{R}^n$. Denotem K_E la projecció ortogonal de K sobre aquest hiperplà.

Denotem $K_{E,r}$ el paral·lel a distància r de K_E dins de E.

Per hipòtesis d'inducció tenim

$$V(K_{E,r}) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} W_i'(K_E) r^i.$$

on $W_i'(*)$ denota la quermassintegrale dins de E.

Ara integrem respecte de E. És a dir, repetim la construcció anterior per a tot $E \in G_{n,n-1}$ i integrem en aquesta Grassmanniana.

$$\int_{G_{n,n-1}} V(K_{E,r}) dE = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} r^i \cdot \int_{G_{n,n-1}} W_i'(K_E)\, dE.$$

Per la fórmula de Cauchy a l'esquerra i la de Kubota a la dreta tenim

$$\frac{\omega_{n-1}}{2} V(\partial K_r) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} r^i \cdot \frac{n \cdot \omega_{n-1}}{2} \cdot W_{i+1}(K).$$

És a dir,

$$V(\partial K_r) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} n \cdot W_{i+1}(K) \cdot r^i.$$

Finalment, com que en el món dels tubs el volum és la integral de l'àrea, tenim

$$V(K_r) = V(K) + \int_0^r V(\partial K_r)\, dr = V(K) + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \cdot n \cdot W_{i+1}(K) \cdot \frac{r^{i+1}}{i+1}.$$

Que es pot escriure com

$$V(K_r) = V(K) + \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} \cdot n \cdot W_j(K) \cdot \frac{r^j}{j}.$$

Però

$$n \binom{n-1}{j-1} \frac{1}{j} = \binom{n}{j},$$

de manera que tenim

$$V(K_r) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} W_j(K) \cdot r^j.$$

Teorema 8 *Sigui K un convex compacte de $\mathbb{R}^n$.*

$$nW_{i+1}(K) = M_i(\partial K), \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Demostració.
Comparar les fórmules (2) i (5). □

8 Mesura de plans que tallen un convex

Teorema 9 *La mesura de r-plans que tallen un convex K de $\mathbb{R}^n$ és*

$$\int_{L_r \cap K \neq \emptyset} dL_r = c \cdot W_r(K),$$

on la constant c està donada per

$$c = \frac{nO_{n-2} \ldots O_{n-r-1}}{(n-r)O_{r-1} \ldots O_0}$$

Demostració. Així com en el pla tenim que la mesura de rectes per l'origen és la mesura de S^1, $d\theta$, i la mesura de totes les rectes és $dp \wedge d\theta$, on p és la distància de la recta a l'origen, en dimensions arbitràries passa el mateix. La mesura de plans a $\mathbb{R}^3$ és $dp \wedge dS$, on dS és l'element d'àrea de S^2, etc. En general tenim

$$dL_r = dx \wedge dL_{n-r,[0]},$$

on $dL_{n-r,[0]}$ és la mesura de $n-r$ plans per l'origen i x és la la distància de L_r a l'origen. Se suposa L_r ortogonal a $L_{n-r,[0]}$. Només ho podem interpretar com mesura de la corresponent esfera quan tenim rectes o hiperplans (codimensió 1). En general és la mesura a la Grassmanniana corresponent.

Així, doncs,

$$\int_{L_r \cap K \neq \emptyset} dL_r = \int_{L_r \cap K \neq \emptyset} dx \wedge dL_{n-r,[0]} = \int_{G_{n,n-r}} \left(\int_{K_{L_{n-r,[0]}}} dx \right) dL_{n-r,[0]}$$

on $K_{L_{n-r,[0]}}$ és la projecció de K sobre $L_{n-r,[0]}$.
Així

$$\int_{L_r \cap K \neq \emptyset} dL_r = \int_{G_{n,n-r}} V(K_{L_{n-r,[0]}}) dL_{n-r,[0]}.$$

Per la proposició 5, això es pot escriure com

$$\int_{L_r \cap K \neq \emptyset} dL_r = \frac{nO_{n-2} \ldots O_{n-r-1}}{(n-r)O_{r-1} \ldots O_0} \cdot W_r(K). \qquad \square$$

Poseu consultar [4] per trobar una generalització al cas no convex, i [1] per veure resultats recents. La generalització a espais complexos, que ha estat molt difícil i ha requerit d'idees noves, la podeu trobar a [2] i [3].

Referències

[1] Judit Abardia, Eduardo Gallego, and Gil Solanes. The Gauss-Bonnet theorem and Crofton-type formulas in complex space forms. *Israel J. Math.*, 187:287–315, 2012.

[2] A.Bernig and J.H.G.Fu. Hermitian integral geometry. *Annals of Mathematics*, 173:907–945, 2011.

[3] A.Bernig, J.H.G.Fu, and G. Solanes. Integral geometry in complex space forms. *arXiv: 1204.0604*, 2012.

[4] L.A. Santaló. Curvaturas absolutas totales de variedades contenidas en un espacio euclideo. *Actas del 2 Coloquio Internacional sobre Geometria Diferencial, Santiago de Compostela*, 4:29–39, 1967. veure també Acta Ci. Compostelana 4 (1967), 149-158.