

LA CIÈNCIA ABSOLUTA
DE L'ESPAI

János Bolyai

Publicacions de la SCM
Volum 7



LA CIÈNCIA ABSOLUTA DE L'ESPAI

János Bolyai

Obra traduïda i comentada per Agustí Reventós

Barcelona, 2020

Bolyai, János, 1802-1860, autor

[Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens. Català]

La Ciència absoluta de l'espai. — Primera edició. — (Publicacions de la SCM ; 7)

Bibliografia

ISBN 9788499655345

I. Reventós, Agustí, traductor, editor literari II. Societat Catalana de Matemàtiques

III. Títol IV. Col·lecció: Publicacions de la SCM ; 7

1. Geometria no euclidiana

514.13

© János Bolyai

© Agustí Reventós, per a la traducció i comentaris

© Societat Catalana de Matemàtiques, filial de l'Institut d'Estudis Catalans,
per a aquesta edició

Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició: maig de 2020

Text revisat lingüísticament per la Unitat de Correcció del Servei Editorial de l'IEC

ISBN: 978-84-9965-534-5



Aquesta obra és d'ús lliure, però està sotmesa a les condicions de la llicència pública de *Creative Commons*. Es pot reproduir, distribuir i comunicar l'obra sempre que se'n reconegui l'autoria i l'entitat que la publica i no se'n faci un ús comercial ni cap obra derivada. Es pot trobar una còpia completa dels termes d'aquesta llicència a l'adreça:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/deed.ca>.

APPENDIX
Scientiam Spatii Absolute Veram Exhibens;
a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei
(a priori haud unquam decidenda)
independentem;
adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli
geometrica

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem

Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio
Austriaco Castrensiu[m] Capitaneo

Agropoli sive Maros-Vásárhelyini:
1832

Typis Collegii Reformato[rum] per
Josephum et Simeonem Kali de Felső-Vista.

Traducció a càrrec d'Agustí Reventós

Índex

| | |
|---|-----------|
| Pròleg | 7 |
| La ciència absoluta de l'espai: traducció | 9 |
| Explicació de la notació | 13 |
| La ciència absoluta de l'espai | 15 |
| La ciència absoluta de l'espai: versió lliure | 51 |
| Explicació de la notació | 53 |
| 1 Definició de semirectes paral·leles | 55 |
| 2 Independència del punt | 56 |
| 3 Paral·leles a una mateixa recta, diferents, no es tallen | 56 |
| 4 Transport d'angles | 56 |
| 5 Existència de punts isogonals | 57 |
| 6 Propietat simètrica del paral·lelisme | 58 |
| 7 Propietat transitiva del paral·lelisme | 58 |
| 8 Propietat de la mediatriu | 60 |
| 9 Cinquè postulat per a plans | 60 |
| 10 Transitivitat de la isogonalitat | 61 |
| 11 Horoesfera i horocicle | 62 |
| 12 Sobre els eixos d'horoesferes i horocicles | 63 |
| 13 Angles alterns interns iguals | 63 |
| 14 Angles alterns interns diferents | 65 |
| 15 Geometria euclidiana i no-euclidiana | 65 |
| 16 Horocicles euclidians | 66 |
| 17 Rectes i superfícies uniformes | 66 |
| 18 Cercles sobre l'horoesfera | 67 |
| 19 Tangent a l'horocicle | 68 |
| 20 Dos punts de l'horoesfera determinen un horocicle | 68 |
| 21 La geometria de l'horoesfera és euclidiana | 69 |

| | | |
|----|---|-----|
| 22 | Equidistant a un horocicle | 70 |
| 23 | Longitud dels horocicles | 70 |
| 24 | Funció exponencial | 71 |
| 25 | Teorema del sinus | 72 |
| 26 | Teorema del sinus esfèric | 73 |
| 27 | Longitud d'equidistants | 74 |
| 28 | Angle de paral·lelisme. Primera expressió | 76 |
| 29 | Angle de paral·lelisme. Segona expressió | 77 |
| 30 | Longitud del cercle | 79 |
| 31 | Trigonometria | 82 |
| 32 | Geometria diferencial | 84 |
| 33 | Recopilació | 97 |
| 34 | Construcció de l'angle de paral·lelisme | 98 |
| 35 | Construcció del segment de paral·lelisme | 99 |
| 36 | Construcció de la intersecció de rectes i plans | 100 |
| 37 | Construcció dels punts de l'horocicle | 101 |
| 38 | Construcció de $\ln 2$ | 103 |
| 39 | Suma d'angles de triangles mixtilinis | 103 |
| 40 | Triangles amb la mateixa àrea i un costat igual | 105 |
| 41 | Àrea i defecte | 107 |
| 42 | L'àrea depèn linealment del defecte | 108 |
| 43 | Àrea del triangle i del cercle | 109 |

Bibliografia

115

Pròleg

La importància del treball de Bolyai en la història de la matemàtica és absolutament indubtable. No repetiré ara els arguments que podeu trobar a diverses fonts, potser la més coneguda de les quals és el llibre de R. Bonola *Non-Euclidean geometry. A critical and historical study of its development* [4], que conté una traducció a l'anglès, per G. B. Halsted, tant del treball de Bolyai com del de Lobatxevski. També és important el treball de F. Kárteszi i B. Szénássy, «János Bolyai: *Appendix: The theory of space*» [6].

Recordem que el treball de János es coneix com l'*Apèndix*, ja que va ser publicat com un apèndix del *Tentamen juventutem studiosam in elementa mathe-seos purae [...] introducendi*, llibre de text de matemàtiques publicat pel seu pare, Farkas Bolyai [2]. El fet que Farkas fos amic de Gauss, des que van coincidir com a companys d'estudis a Göttingen, ha donat lloc a moltes conjetures i estudis sobre els inicis de la geometria no-euclidiana. Vegeu l'article «What did Gauss read in the *Appendix*?» [1].

En clau catalana recordem que l'any 2002, amb motiu de la commemoració dels 200 anys del naixement de János Bolyai, la Societat Catalana de Matemàtiques va publicar una notícia sobre la seva vida i obra, vegeu «La revolució de János Bolyai», d'András Prékopa [8].

Podeu trobar un extens comentari sobre l'*Apèndix* a la secció D1 del llibre *Una lectura del 'Disquisitiones generales circa superficies curvas' de C. F. Gauss* [9].

A la traducció que presentem s'han tingut sempre presents, a part de la versió original en llatí de Bolyai [3], a la qual s'ha procurat ser fidel, les traduccions angleses de Halsted i Kárteszi i la francesa d'Hoüel [5]. Els dubtes que puguin sorgir al lector en una primera lectura del treball de Bolyai espero que li puguin ser aclarits en la versió lliure que presento de la traducció d'aquest treball a partir de la pàgina 51.

Agustí Reventós, 2018

La ciència absoluta de l'espai

Traducció

APÈNDIX
La ciència absoluta de l'espai;
independent
de la veritat o falsedat de l'axioma XI d'Euclides
(la qual cosa no es pot decidir mai *a priori*);
s'adjunta, en cas de falsedat, la quadratura geomètrica
del cercle

Autor:
Johanne Bolyai

Capità dels Geòmetres Castrenses
a l'Armada Imperial Reial Austríaca

Agropoli o Maros-Vásárhelyini¹

1832

Imprès al Collegii Reformatorem per
Josephum i Simeonen Kali, de Felső-Vista

¹ Tîrgu Mures, Romania; en hongarès, Marosvásárhely, anomenada *Agropolis* pels grecs.

Explicació de la notació

| | | |
|------------------------|-----------|---|
| \overline{AB} | significa | el conjunt de tots els punts situats en línia recta amb els punts A i B . ² |
| \overrightarrow{AB} | | aquella meitat de la recta \overline{AB} que comença al punt A i conté el punt B . ³ |
| \overline{ABC} | | el conjunt de tots els punts situats en el mateix pla que els tres punts (no alineats) A, B, C . |
| \overrightarrow{ABC} | | la meitat del pla \overline{ABC} que comença a la recta \overline{AB} i conté el punt C . |
| ABC | | la porció <i>més petita</i> en les quals el pla \overline{ABC} és partit per les línies $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$, o l'angle que té per costats $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$. |
| $ABCD$ | | (el punt D situat a ABC , i $\overline{BA}, \overline{CD}$ no s'intersequen) la porció de ABC compresa entre $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$; mentre que $BACD$ denota la porció de \overline{ABC} compresa entre \overline{AB} i \overline{CD} . ⁴ |
| \perp | | perpendicular. ⁵ |
| \sphericalangle | | un angle. ⁶ |
| R | | un angle recte. ⁷ |
| \equiv | | congruència. ⁸ |
| $AB \simeq CD$ | | $CAB = ACD$. |
| $x \dashrightarrow a$ | | x convergeix cap al límit a . ⁹ |
| $\bigcirc r$ | | la circumferència del cercle de radi r . |
| $\odot r$ | | àrea del cercle de radi r . |

2 Bolyai usa un símbol similar a \widetilde{AB} .

3 Bolyai usa un símbol similar a $A\tilde{B}$.

4 Aquí apareix el segment BC tot i que Bolyai no dona la definició de segment. A la versió anglesa de Halsted s'hi afegeix aquesta definició.

5 Bolyai usa \perp . I al llarg del text apareix $\perp riter$, $\perp re$, etc.

6 Bolyai usa \sphericalangle . I al llarg del text apareix $\sphericalangle lum$, $\sphericalangle lo$, etc.

7 La negreta és meva.

8 Denotem la congruència geomètrica amb el símbol que el gran geòmetra GAUSS utilitza per a *nombres congruents*: no cal témer cap ambigüitat. (Nota de l'autor.)

9 Bolyai usa un signe més o menys com aquest: $x \frown a$.

La ciència absoluta de l'espai

§1

(Figura 1). Si la recta \overrightarrow{AM} no és tallada per la recta \overrightarrow{BN} , situada en el mateix pla, però és tallada per qualsevol altra \overrightarrow{BP} (a ABN), ho indicarem per $BN \parallel\parallel AM$.

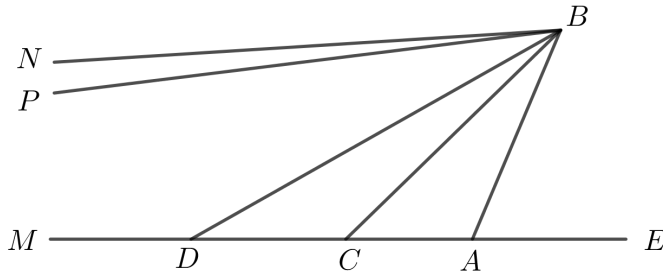


Figura 1

És fàcil veure que *existeix una única* \overrightarrow{BN} que passa per un punt arbitrari B (fora de AM), i que la suma dels angles BAM i ABN no pot ser $> 2R$; en efecte, movent BC al voltant de B fins a arribar a tenir

$$BAM + ABC = 2R,$$

en algun lloc \overrightarrow{BC} serà el *primer* a no tallar \overrightarrow{AM} , i és llavors que es tindrà $BC \parallel\parallel AM$.

És clar, al mateix temps, que $BN \parallel\parallel EM$, sigui quin sigui el punt E agafat sobre \overrightarrow{AM} (suposant en tots els casos $AM > AE$). I si mentre el punt C a \overrightarrow{AM} va cap a l'infinit, es pren sempre $CD = CB$, sempre tindrem $CDB = (CBD < NBC)$, però $NBC \rightarrow 0$, i per tant $ADB \rightarrow 0$.

§2

(Figura 2). Si $BN \parallel\parallel AM$ també és $CN \parallel\parallel AM$.

En efecte, sigui D un punt qualsevol de $MACN$. Si C està a \overrightarrow{BN} , \overrightarrow{BD} talla \overrightarrow{AM} (ja que $BN \parallel\parallel AM$), i així també \overrightarrow{CD} talla \overrightarrow{AM} . Però si C està a \overrightarrow{BP} prenem $BQ \parallel\parallel CD$; \overrightarrow{BQ} està dins ABN (§1), i talla \overrightarrow{AM} ; i per tant, també \overrightarrow{CD} talla \overrightarrow{AM} . Per tant, cada \overrightarrow{CD} (a ACN) talla, en cada cas, \overrightarrow{AM} , sense que \overrightarrow{CN} talli \overrightarrow{AM} . Per tant, sempre $CN \parallel\parallel AM$.

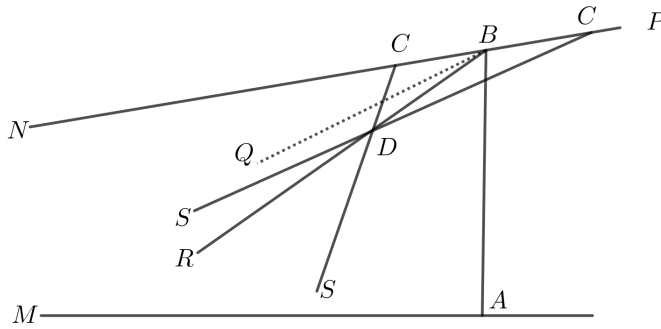


Figura 2

§3

(Figura 2). Si tant BR com CS són $\parallel AM$ i C no està sobre \overrightarrow{BR} , llavors \overrightarrow{BR} i \overrightarrow{CS} no es tallen.

En efecte, si \overrightarrow{BR} i \overrightarrow{CS} tinguessin un punt en comú D , llavors (§2) DR i DS haurien de ser simultàniament $\parallel AM$, \overrightarrow{DS} (§1) coincidiria amb \overrightarrow{DR} i C estaria sobre \overrightarrow{BR} (en contra de la hipòtesi).

§4

(Figura 3). Si $MAN > MAB$ hi haurà, per cada punt B de \overrightarrow{AB} , un punt C de \overrightarrow{AM} tal que $BCM = NAM$.

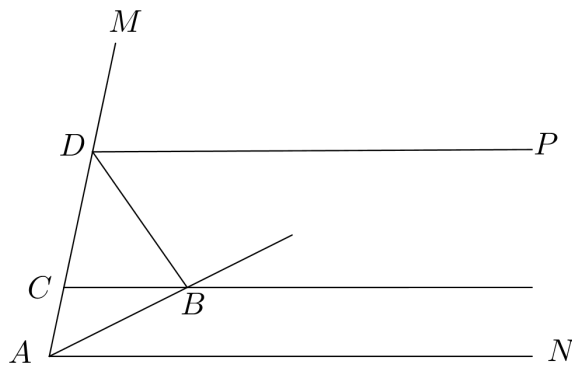


Figura 3

En efecte, es pot (§1) traçar BD de manera que $BDM > NAM$, i fent $MDP = MAN$, B estarà a $NADP$. Si transportem NAM al llarg de AM fins que \overrightarrow{AN} coincideixi amb \overrightarrow{DP} , serà necessari que \overrightarrow{AN} hagi passat per B i que s'hagi tingut $BCM = NAM$.

§5

(Figura 1). Si $BN \parallel AM$, hi ha un punt F a \overline{AM} tal que $FM \simeq BN$.

En efecte, podem fer (§1) de manera que $BCM > CBN$, i si $CE = CB$, en resultarà que $EC \simeq BC$, d'on $BEM < EBN$. Movem el punt P sobre EC , i anomenem sempre u l'angle BPM i sempre v l'angle PBN ; evidentment u és al principi menor que el corresponent v , però acabarà per ser més gran. En efecte, u augmenta *contínuament* des de BEM fins a BCM , ja que (per §4) no existeix cap angle $> BEM$ i $< BCM$ que no sigui en algun moment igual a u . Igualment v decreix contínuament des de EBN fins a CBN . Hi ha, per tant, sobre EC un punt F tal que $BFM = FBN$.

§6

Si $BN \parallel AM$ i E és un punt qualsevol de \overline{AM} , i G és un punt qualsevol de \overline{BN} , llavors $GN \parallel EM$ i $EM \parallel GN$.

En efecte, (per §1) $BN \parallel EM$, d'on (per §2) $GN \parallel EM$. Si fem ara $FM \simeq BN$ (§5), llavors $MFBN \equiv NBFM$, i per tant (ja que $BN \parallel FM$), també $FM \parallel BN$ i (pel que precedeix) $EM \parallel GN$.

§7

(Figura 4). Si tant BN com CP són $\parallel AM$ i C no està a \overline{BN} , també serà $BN \parallel CP$.

En efecte, \overrightarrow{BN} i \overrightarrow{CP} no es tallen (§3). Per altra banda, AM, BN i CP estan o no estan en un mateix pla, i en el primer cas AM està o no està a l'interior de $BNCP$.

Si AM, BN, CP estan en un mateix pla i AM cau dintre de $BNCP$, qualsevol \overrightarrow{BQ} (a NBC) talla \overrightarrow{AM} en algun punt D (ja que $BN \parallel AM$); a més, com que $DM \parallel CP$ (§6), clarament \overrightarrow{DQ} tallarà \overrightarrow{CP} i així $BN \parallel CP$.

Si BN i CP estan del mateix costat respecte a AM , una d'elles, per exemple CP , cau *entre* les altres rectes $\overline{BN}, \overline{AM}$. Llavors, cada \overrightarrow{BQ} (a NBA) talla \overrightarrow{AM} i així també \overrightarrow{CP} . Per tant, $BN \parallel CP$.

Si MAB, MAC fan entre ells un angle, llavors CBN i ABN tenen en comú només \overline{BN} , mentre que \overrightarrow{AM} (a ABN) i \overrightarrow{BN} , i per tant també NBC i \overrightarrow{AM} , no tenen res en comú.

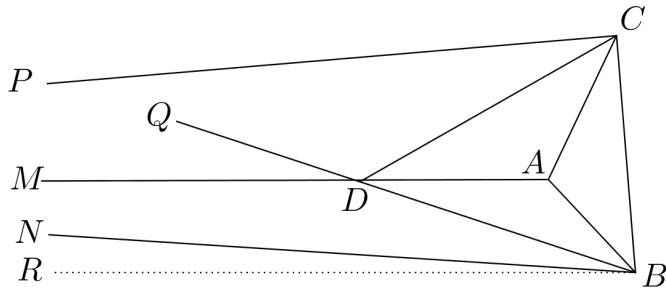


Figura 4

Ara, \overrightarrow{BCD} traçat a partir de qualsevol \overrightarrow{BD} (a NBA) talla \overrightarrow{AM} , ja que \overrightarrow{BQ} talla \overrightarrow{AM} (ja que $BN \parallel AM$). Fent moure, doncs, \overrightarrow{BCD} al voltant de BC fins que comença a deixar \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{BCD} vindrà a coincidir finalment amb \overrightarrow{BCN} . Per la mateixa raó aquest mateix semiplà vindrà a coincidir amb \overrightarrow{BCP} ; per tant, BN està a BCP .

A més, si $BR \parallel CP$ llavors (ja que també $AM \parallel CP$) per un raonament semblant BR està a BAM , i també (ja que $BR \parallel CP$) a BCP . Per tant, \overline{BR} , essent comuna a MAB, PCB , és per descomptat \overline{BN} , i per tant $BN \parallel CP$.¹⁰

Per tant, si $CP \parallel AM$ i B és exterior a \overline{CAM} , la intersecció \overline{BN} de BAM i BCP compleix que $BN \parallel CP$.

§8

(Figura 5). Si $BN \parallel$ i $\simeq CP$ (o més breument $BN \parallel \simeq CP$), i AM (a $NBCP$) biseca \perp el segment BC ; llavors $BN \parallel AM$.

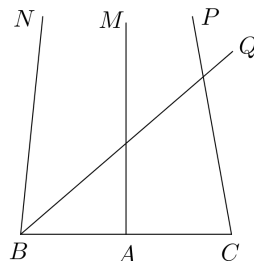


Figura 5

¹⁰ Posant aquest tercer cas davant els dos precedents, aquests es podrien demostrar conjuntament amb més brevetat i elegància, com el cas 2 de §10. (Nota de l'autor.)

En efecte, si \overrightarrow{BN} tallés \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{CP} tallaria \overrightarrow{AM} en el mateix punt (ja que $MABN \equiv MACP$) i aquest punt seria comú a $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$, mentre que al contrari $BN \parallel CP$. D'altra banda, tot \overrightarrow{BQ} (a CBN) talla \overrightarrow{CP} ; i per tant, \overrightarrow{BQ} talla també \overrightarrow{AM} . Consegüentment, $BN \parallel AN$.

§9

(Figura 6). Si $BN \parallel AM$ i $MAP \perp MAB$ i l'angle que NBD fa amb NBA (en el costat de $MABN$ on es troba MAP) és $< \mathbf{R}$, llavors MAP i NBD es tallen.

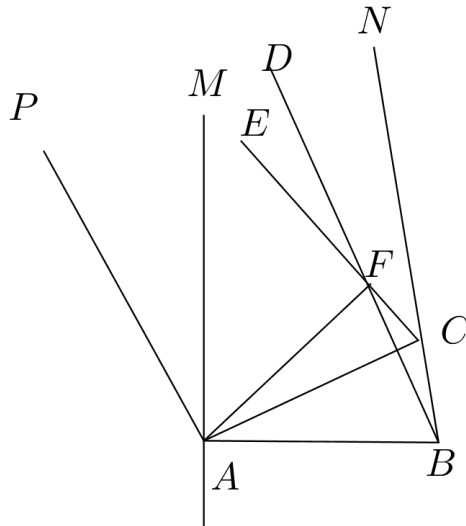


Figura 6

En efecte, sigui $BAM = \mathbf{R}$, i $AC \perp BN$ (tant si C coincideix amb B com si no), i $CE \perp BN$ (a NBD); tenim (per hipòtesi) $ACE < \mathbf{R}$ i $AF (\perp CE)$ caurà dins ACE . Sigui \overrightarrow{AP} la intersecció de $\overrightarrow{ABF}, \overrightarrow{AMP}$ (els quals tenen el punt A en comú); tindrem $BAP = BAM = \mathbf{R}$ (ja que $BAM \perp MAP$).

Si, finalment, \overrightarrow{ABF} es fa moure (amb A i B fixats) fins que coincideixi amb \overrightarrow{ABM} , \overrightarrow{AP} anirà a parar sobre \overrightarrow{AM} ; i com que $AC \perp BN$, i $AF \perp CE$, evidentment AF tindrà el seu extrem entre \overrightarrow{BN} i \overrightarrow{AM} , i així BF caurà a l'interior de ABN . Però en aquesta posició \overrightarrow{BF} talla \overrightarrow{AM} (ja que $BN \parallel AM$), i així \overrightarrow{AP} i \overrightarrow{BF} es tallen també en la posició original, i el punt de tall és comú a \overrightarrow{MAP} i \overrightarrow{NBD} . Per tant, \overrightarrow{MAP} i \overrightarrow{NBD} es tallen.

Es conclou fàcilment que \overrightarrow{MAP} i \overrightarrow{NBD} es tallen sempre que la suma dels angles interiors que fan amb $MABN$ sigui $< 2\mathbf{R}$.

§10

(Figura 7). Si BN i CP són tots dos $\parallel \simeq AM$ també és $BN \parallel \simeq CP$.

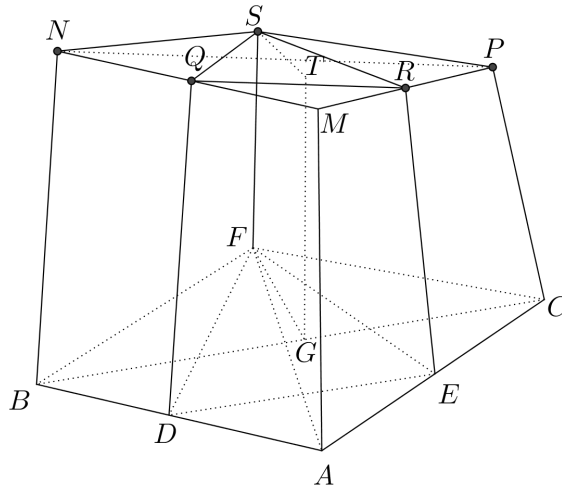


Figura 7

En efecte, o bé MAB i MAC formen entre ells un angle o estan en un mateix pla.

En el primer cas, tracem \overline{QDF} que bisequi perpendicularment el segment AB . Llavors $DQ \perp AB$ i així $DQ \parallel AM$ (§8); anàlogament, si \overline{ERS} biseca perpendicularment el segment AC tenim $ER \parallel AM$; per tant (§7), $DQ \parallel ER$.

Es conclou fàcilment (per §9) que \overline{QDF} i \overline{ERS} es tallen i la seva intersecció (§7) \overline{FS} és $\parallel DQ$, i també (pel fet de ser $BN \parallel DQ$) $FS \parallel BN$. A més (per a cada punt de \overline{FS}) $FB = FA = FC$ i la recta \overline{FS} està en el pla \overline{TGF} que biseca perpendicularment el segment BC .

Però (§7) (pel fet de ser $FS \parallel BN$) també $GT \parallel BN$. De la mateixa manera es prova que $GT \parallel CP$. Però GT biseca perpendicularment el segment BC , i així $TGBN \equiv TGCP$ (§1), i $BN \parallel \simeq CP$.

Si BN , AM i CP estan en un mateix pla, sigui (fora d'aquest pla) $FS \parallel \simeq AM$; llavors (pel que precedeix) $FS \parallel \simeq$ tant a BN com a CP , i així $BN \parallel \simeq CP$.

§11

Considerem el conjunt format pel punt A i tots els punts B tals que si $BN \parallel AM$ es compleixi que $BN \simeq AM$; denotem aquest conjunt amb \mathbf{F} , i denotem amb \mathbf{L} la intersecció de \mathbf{F} amb un pla qualsevol que contingui el segment AM . \mathbf{F} té un

punt, i només un, sobre cada recta $\parallel AM$; i evidentment L és dividit pel raig AM en dues parts congruents.

Direm que \overrightarrow{AM} és l'eix de L . Evidentment també, en qualsevol pla que contingui el segment AM hi ha un únic L amb eix AM . Tota línia L així definida es dirà la L de \overrightarrow{AM} (ben entès, en el pla que es consideri). És evident que la revolució de L al voltant de la recta AM descriu una F l'eix de la qual és \overrightarrow{AM} , i que és, recíprocament, la F de l'eix \overrightarrow{AM} .

§12

Sigui B un punt qualsevol de la L de \overrightarrow{AM} , i $BN \parallel \simeq AM$ (§11); llavors la L de \overrightarrow{AM} i la L de \overrightarrow{BN} coincideixen.

En efecte, sigui L' la L de \overrightarrow{BN} i sigui C un punt qualsevol de L' , i $CP \parallel \simeq BN$ (§11). Com que $BN \parallel \simeq AM$, tindrem també $CP \parallel \simeq AM$ (§10), i així C està situat a la L de AM . I si C és un punt qualsevol de L i $CP \parallel \simeq AM$, llavors també $CP \parallel \simeq BN$ (§10), i així C està igualment situat a L' (§11). Així L i L' són idèntics, i tot \overrightarrow{BN} ($\parallel AM$) és un nou eix de L i és \simeq respecte de tots els eixos de L .

De la mateixa manera es demostra aquesta propietat per a F .

§13

(Figura 8). Si $BN \parallel AM$, $CP \parallel DQ$ i $BAM + ABN = 2R$, llavors també $DCP + CDQ = 2R$.

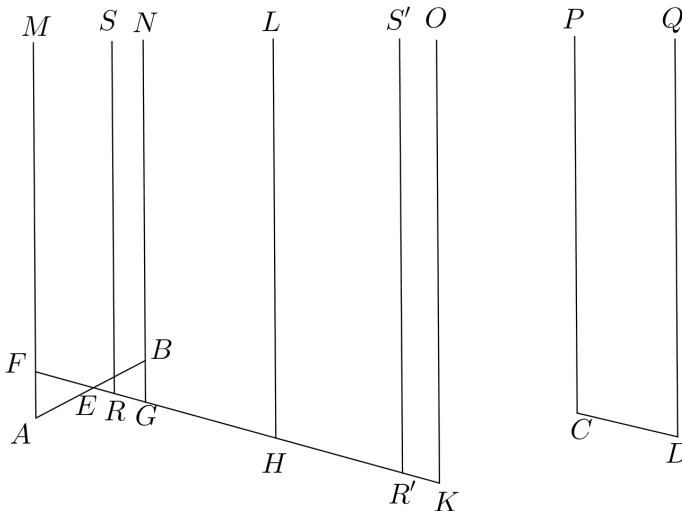


Figura 8

En efecte, sigui $EA = EB$ i $EFM = DCP$ (§4). Com que

$$BAM + ABN = 2\mathbf{R} = ABN + ABG,$$

tindrem $EBG = EAF$; i així, si prenem $BG = AF$, serà

$$\triangle EBG \equiv \triangle EAF, \quad BEG = AEF,$$

i G caurà sobre el raig FE . A més

$$GFM + FGN = 2\mathbf{R}$$

(ja que $EGB = EFA$). També $GN \parallel FM$ (§6). Per tant, si $MFRS \equiv PCDQ$, llavors $RS \parallel GN$ (§7), i R cau dins o fora del segment FG (a menys que $CD = FG$, cas en què la proposició és evident).

I. En el primer cas, FRS no és $>$ que $2\mathbf{R} - RFM = FGN$, ja que $RS \parallel FM$. Però, com que $RS \parallel GN$, tampoc FRS no és $<$ FGN . Per tant, $FRS = FGN$, i

$$RFM + FRS = GFM + FGN = 2\mathbf{R}.$$

Per tant, també

$$DCP + CDQ = 2\mathbf{R}.$$

II. Si R cau fora del segment FG , llavors $NGR = MFR$. Sigui

$$MFGN \equiv NGHL \equiv LHKO,$$

i així successivament fins que FK sigui $= FR$ o comenci a ser $> FR$. Llavors tindrem també $KO \parallel HL \parallel FM$ (§7).

Si K coincideix amb R llavors KO coincideix amb RS (§1), i per consegüent

$$RFM + FRS = KFM + FKO = KFM + FGN = 2\mathbf{R}.$$

Però si R cau dins del segment HK , llavors (per **I**)

$$RHL + KRS = 2\mathbf{R} = RFM + FRS = DCP + CDQ.$$

§14

Si $BN \parallel AM$, $CP \parallel DQ$ i $BAM + ABN < 2\mathbf{R}$, llavors també $DCP + CDQ < 2\mathbf{R}$.

En efecte, si $DCP + CDQ$ no fos $< 2\mathbf{R}$ seria (per §1) $= 2\mathbf{R}$ i (per §13) $BAM + ABN = 2\mathbf{R}$, contra la hipòtesi.

§15

A la llum de §13 i §14, denotarem amb Σ *el sistema de geometria que es basa sobre la hipòtesi de l'axioma XI d'Euclides, i per \mathbf{S} el sistema fundat sobre la hipòtesi contrària.*

Tots els resultats que enunciarem sense dir expressament si tenen lloc en el sistema Σ o en el sistema \mathbf{S} s'han de considerar com a enunciats d'una manera absoluta, és a dir, que s'afirma que són certs tant si estem en el sistema Σ com en el \mathbf{S} .

§16

(Figura 5). Si AM és l'eix d'una \mathbf{L} , llavors aquesta \mathbf{L} , en el sistema Σ , és una recta $\perp AM$.

En efecte, sigui BN un eix per un punt qualsevol B de \mathbf{L} ; a Σ tindrem

$$BAM + ABN = 2\mathbf{R}$$

i així $BAM = \mathbf{R}$.

I si C és qualsevol punt de la recta AB i $CP \parallel AM$, llavors (per §13) $CP \simeq AM$, i així C està a \mathbf{L} (§11).

Però, a \mathbf{S} , no existeixen ni a \mathbf{L} ni a \mathbf{F} tres punts alineats. En efecte, algun dels eixos AM, BN, CP (per exemple AM) està entre els altres dos, i llavors (§14) BAM i CAM són, cadascun d'ells, $< \mathbf{R}$.

§17

\mathbf{L} a \mathbf{S} és una línia, i \mathbf{F} una superfície.

En efecte, (per §11) qualsevol pla perpendicular a l'eix AM (a través de qualsevol punt de \mathbf{F}) talla \mathbf{F} en una circumferència, el pla de la qual (per §14) no és perpendicular a cap altre eix BN . Si girem \mathbf{F} al voltant de BN tot punt de \mathbf{F} (per §12) restarà sobre \mathbf{F} , i la secció de \mathbf{F} per un pla no perpendicular a \overline{BN} descriurà una superfície. De fet, siguin quins siguin els punts A, B agafats sobre \mathbf{F} , \mathbf{F} es pot fer coincidir *amb ella mateixa* de manera que A vagi a B (per §12). Per tant, \mathbf{F} és una *superfície uniforme*.

Es dedueix d'això (§11 i §12) que \mathbf{L} és una *línia uniforme*.¹¹

¹¹ No és necessari restringir la demostració al sistema \mathbf{S} ; es pot establir fàcilment que és certa d'una manera absoluta per a \mathbf{S} i Σ . (Nota de l'autor.)

§18

(Figura 7). *La intersecció amb F de qualsevol pla, traçat a través d'un punt A de F obliquament a l'eix AM, és, a S, una circumferència.*

En efecte, prenem A, B, C tres punts d'aquesta secció, i BN, CP eixos; $AMBN$ i $AMCP$ fan un angle, ja que en cas contrari el pla determinat per A, B, C (per §16) contindria AM (contra la hipòtesi). Per tant, els plans que bissequen perpendicularment els segments AB, AC es tallen (§10) en algun eix \overline{FS} (de F) i $FB = FA = FC$.

Fem $AH \perp FS$, i girem FAH al voltant de FS ; A descriurà una circumferència de radi HA , que passa per B i C , i situada a la vegada a F i a \overline{ABC} ; a més, F i \overline{ABC} no tenen en comú més que $\bigcirc HA$ (§16).

És també evident que girant la porció FA de la línia L (com a radi) a F al voltant de F , la seva extremitat descriurà $\bigcirc HA$.

§19

(Figura 5). *La perpendicular BT a l'eix BN de L (en el pla de L) és, a S, tangent a L.*

En efecte, l'únic punt de \overrightarrow{BT} que està a L és B (§14), però si BQ cau a TBN llavors el centre de la secció del pla per BQ perpendicular a TBN , amb la F de \overrightarrow{BN} (§18), està evidentment situat sobre BQ ; i si BQ és un diàmetre, evidentment \overrightarrow{BQ} talla en Q la línia L de \overrightarrow{BN} .

§20

Dos punts qualssevol de F determinen una línia L (§11 i §18); i com que (per §16 i §19) L és \perp a tots els seus eixos, tot angle de línies L a F és igual a l'angle dels plans traçats pels seus costats perpendicularment a F.

§21

(Figura 6). Dues L línies, \overrightarrow{AP} i \overrightarrow{BD} , a la mateixa F, formant amb una tercera L línia, AB , una suma d'angles interiors $< 2R$, es tallen (per \overrightarrow{AP} a F entenem la L línia que passa per A i P , i per \overrightarrow{AP} la meitat de \overrightarrow{AP} que comença a A i conté P).

En efecte, si AM, BN són eixos de F, $\overrightarrow{AMP}, \overrightarrow{BND}$ es tallen (§9), i F talla la seva intersecció (per §7 i §11), i així també \overrightarrow{AP} i \overrightarrow{BD} es tallen.

Resulta d'això que l'axioma XI i totes les conseqüències que se'n dedueixen en geometria i trigonometria (plana) es compleixen de *manera absoluta* a **F**, fent les **L** línies el paper de les línies rectes; per tant, les funcions trigonomètriques tenen aquí el mateix significat que a Σ , i la longitud de la circumferència, a **F**, de radi una **L** línia de longitud r és $2\pi r$, i igualment l'àrea del cercle amb aquest radi (a **F**) és $\odot r = \pi r^2$ (per π s'entén $(1/2) \odot 1$, o el conegut 3,1415926...).

§22

(Figura 9). Si \overrightarrow{AB} és la **L** línia d'eix \overrightarrow{AM} , C un punt de \overrightarrow{AM} , i CAB (format per \overrightarrow{AM} i la **L** línia \overrightarrow{AB}) es transporta primerament al llarg de \overrightarrow{AB} i després sobre \overrightarrow{BA} , en els dos casos fins a l'infinit, llavors la trajectòria \overline{CD} del punt C serà la **L** línia de \overline{CM} .

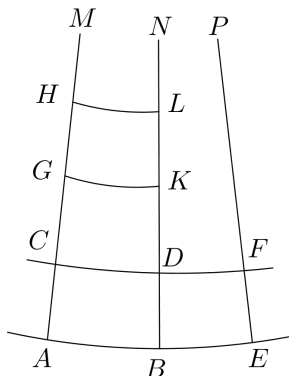


Figura 9

En efecte (anomenem **L'** aquesta última línia), sigui D un punt qualsevol de \overline{CD} , sigui $DN \parallel CM$ i sigui B el punt de **L** sobre la recta DN . Tindrem $BN \simeq AM$ i $AC = BD$, i així $DN \simeq CM$ i D està a **L'**. Per altra banda, si D és a **L'** i $DN \parallel CM$ i B és el punt de **L** sobre \overline{DN} , tindrem $AM \simeq BN$ i $CM \simeq DN$, per tant, manifestament, $BD = AC$, i D estarà a la trajectòria del punt C ; per tant, **L'** i la línia CD són la mateixa.

Representarem la relació d'una tal línia **L'** amb **L** per $L' \parallel L$.

§23

(Figura 9). Si la **L** línia CDF és $\parallel ABE$ (§22), i $AB = BE$, i $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{EP}$ són eixos, clarament $CD = DF$; i si tres punts qualssevol A, B, E estan a \overline{AB} i $AB =$

$n \cdot CD$, també tindrem $AE = n \cdot CF$; i per tant (inclús evidentment en el cas de AB, AE, DC incommensurables), $AB : CD = AE : CF$. La relació $AB : CD$ és, doncs, *independent de AB i està completament determinada per AC* . Denotarem el valor d'aquesta relació amb la lletra majúscula (com a X) corresponent a la lletra minúscula (com a x) amb la qual representem AC .

§24

Qualsevol que siguin x, y tindrem $Y = X^{\frac{y}{x}}$ (§23).

En efecte, o bé una de les quantitats x, y és un múltiple de l'altra (per exemple, y de x) o no ho és.

Si $y = nx$, prenem $x = AC = CG = GH = \dots$ fins que tinguem $AH = y$. A més, prenem $CD \parallel GK \parallel HL$. Tenim (§23)

$$X = AB : CD = CD : GK = GK : HL,$$

i així,

$$\frac{AB}{HL} = \left(\frac{AB}{CD} \right)^n,$$

és a dir, $Y = X^n = X^{\frac{y}{x}}$.

Si x, y són múltiples de i , suposem $x = mi$ i $y = ni$, (pel que precedeix) $X = I^m, Y = I^n$, consegüentment $Y = X^{\frac{n}{m}} = X^{\frac{y}{x}}$.

El mateix s'estén fàcilment al cas de la incommensurabilitat de x i y .

Però si $q = y - x$, manifestament, tenim $Q = Y : X$.

També és evident que a Σ , per a cada x , tenim $X = 1$, però a \mathbf{S} és $X > 1$ i per a valors *qualsevol* de AB i ABE existeix una línia $CDF \parallel ABE$ tal que $CDF = AB$, d'on es dedueix que $AMBN \equiv CMFP$ malgrat que la primera figura és un múltiple de la segona: resultat singular, però per descomptat no prova l'absurditat del sistema \mathbf{S} .

§25

(Figura 10). *En qualsevol triangle rectilini, les circumferències amb radi igual als costats són entre elles com els sinus dels angles oposats.*

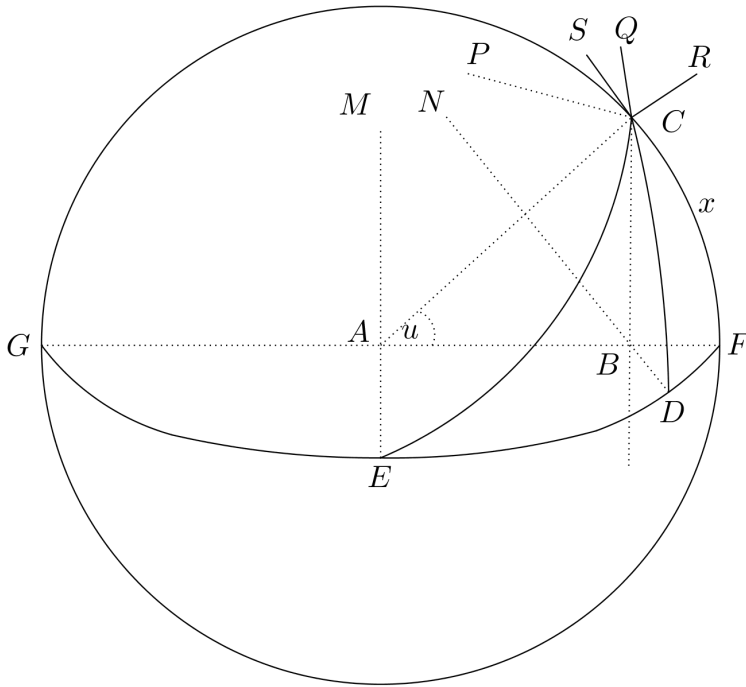


Figura 10

En efecte, suposem $ABC = \mathbf{R}$, i $AM \perp BAC$ i BN i $CP \parallel AM$; tindrem $CAB \perp AMBN$, i així (ja que $CB \perp BA$) $CB \perp AMBN$, i consegüentment $CPBN \perp AMBN$.

Suposem que la F de \overrightarrow{CP} talla les rectes \overline{BN} , \overline{AM} en D i E respectivament, i a les bandes $CPBN$, $CPAM$, $BNAM$ en les L línies CD , CE , DE . Llavors (§20) $CDE = a$ l'angle entre NDC i NDE , i per tant $= \mathbf{R}$; anàlogament $CED = CAB$. Però (§21) en el L triangle $\triangle CDE$ (suposant sempre aquí radi = 1)

$$EC : DC = 1 : \sin DEC = 1 : \sin CAB.$$

També (per §21)

$$EC : DC = \odot EC : \odot DC(aF) = \odot AC : \odot BC \quad (§18);$$

i així,

$$\odot AC : \odot BC = 1 : \sin CAB;$$

ara el teorema és evident per a cada triangle.

§26

En qualsevol triangle esfèric, els sinus dels costats són entre ells com els sinus dels angles oposats.

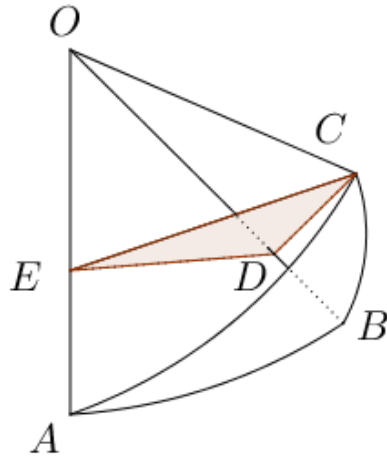


Figura 11

En efecte, prenem (figura 11) $ABC = \mathbf{R}$, i $CED \perp$ al radi OA de l'esfera. Tindrem $CED \perp AOB$, i (com que $BOC \perp BOA$), $CD \perp OB$. Però en els triangles CEO, CDO (per §25)

$$\odot EC : \odot OC : \odot DC = \sin COE : 1 : \sin COD = \sin AC : 1 : \sin BC;$$

mentre que també (§25)

$$\odot EC : \odot DC = \sin CDE : \sin CED.$$

Per tant,

$$\sin AC : \sin BC = \sin CDE : \sin CED;$$

però $CDE = \mathbf{R} = CBA$, i $CED = CAB$. Consegüentment,

$$\sin AC : \sin BC = 1 : \sin A.$$

La trigonometria esfèrica, que se segueix d'aquí, ha quedat establerta, doncs, independentment de l'axioma XI.

§27

(Figura 12). Si AC i BD són $\perp AB$, i CAB es trasllada al llarg de \overline{AB} tindrem, denotant amb CD la trajectòria del punt C ,

$$CD : AB = \sin u : \sin v.$$

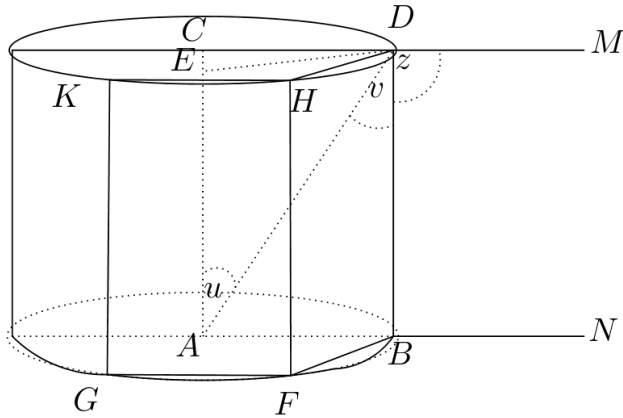


Figura 12

En efecte, sigui $DE \perp CA$; en els triangles ADE, ADB (per §25)

$$\bigcirc ED : \bigcirc AD : \bigcirc AB = \sin u : 1 : \sin v.$$

Girant $BACD$ al voltant de AC , B descriu $\bigcirc AB$, i D descriu $\bigcirc ED$; i denotem aquí amb $\bigcirc CD$ el camí de l'esmentat CD . A més, sigui $BFG \dots$ qualsevol polígon inscrit a $\bigcirc AB$.

Traçant plans a través de tots els costats $BF, FG, \dots \perp$ a $\bigcirc AB$ es forma a $\bigcirc CD$ una altra figura poligonal amb el mateix nombre de costats i podem demostrar, com a §23, que

$$\mathbf{CD} : AB = \mathbf{DH} : BF = \mathbf{HK} : FG \dots$$

i així,

$$\mathbf{DH} + \mathbf{HK} \dots : BF + FG \dots = \mathbf{CD} : AB.$$

Si cadascun dels costats BF, FG, \dots es fa tendir cap al límit zero, és clar que tindrem

$$\begin{aligned} BF + FG + \dots &\dashrightarrow \bigcirc AB \quad \text{i} \\ \mathbf{DH} + \mathbf{HK} + \dots &\dashrightarrow \bigcirc ED. \end{aligned}$$

Per tant, també

$$\bigcirc ED : \bigcirc AB = \mathbf{CD} : AB.$$

Però tenim

$$\bigcirc ED : \bigcirc AB = \sin u : \sin v.$$

Consegüentment,

$$\mathbf{CD} : AB = \sin u : \sin v.$$

Si AC s'allunya de BD cap a l'infinit, $CD : AB$, i per tant també $\sin u : \sin v$, es manté *constant*; però $u \dashrightarrow \mathbf{R}$ (§1), i si

$$DM \parallel\parallel BN, \quad v \dashrightarrow z;$$

per tant,

$$CD : AB = 1 : \sin z.$$

Denotarem aquest camí CD amb $CD \parallel AB$.

§28

(Figura 13). Si $BN \parallel\parallel \overrightarrow{AM}$, i C està a \overrightarrow{AM} , i $AC = x$, tindrem

$$X = \sin u : \sin v.$$

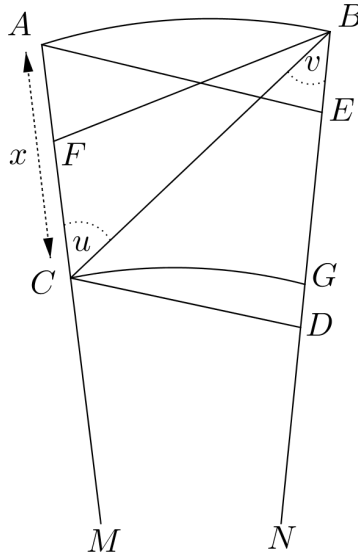


Figura 13

En efecte, si CD i AE són $\perp BN$, i $BF \perp AM$, tindrem (com a §27)

$$\odot BF : \odot DC = \sin u : \sin v.$$

Però evidentment $BF = AE$; per tant,

$$\odot EA : \odot CD = \sin u : \sin v.$$

Però a les superfícies F de AM i CM (tallant $AMBN$ per AB i CG) (per §21)

$$\odot EA : \odot CD = AB : CG = X.$$

Per tant, també

$$X = \sin u : \sin v.$$

§29

(Figura 14). Si $BAM = \mathbf{R}$, $AB = y$ i $BN \parallel AM$ tindrem, a \mathbf{S} ,

$$Y = \cot \frac{1}{2} u.$$

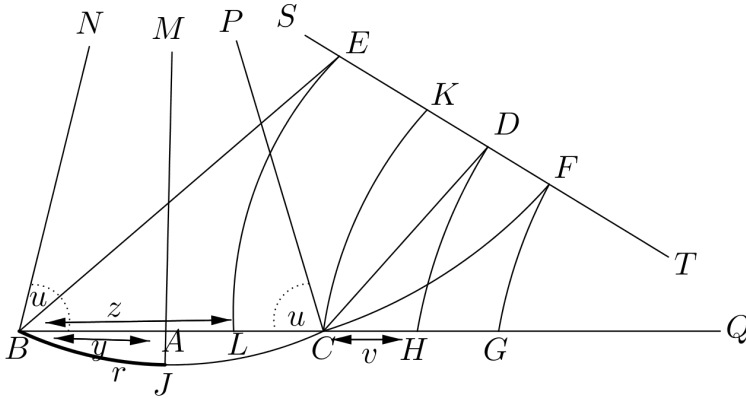


Figura 14

En efecte, si suposem $AB = AC$, $CP \parallel AM$ (i per tant $BN \parallel CP$), i

$$PCD = QCD,$$

podem traçar (§19) $DS \perp \overrightarrow{CD}$ de manera que $DS \parallel CP$, i així (§1) $DT \parallel CQ$. A més, si $BE \perp \overrightarrow{DS}$, com que (§7) $DS \parallel BN$, tenim (§6) $BN \parallel ES$, i (ja que $DT \parallel CG$) $BQ \parallel ET$; consegüentment (§1),

$$EBN = EBQ.$$

Sigui BCF una \mathbf{L} -línia de BN , i FG, DH, CK, EL , \mathbf{L} -línies de FT, DT, CQ i ET ; evidentment (§22) $HG = DF = DK = HC$; per tant,

$$CG = 2CH = 2v.$$

Anàlogament és evident que $BG = 2BL = 2z$. Però $BC = BG - CG$; per tant, $y = z - v$, i així (§24) $Y = Z : V$.

Finalment (§28),

$$Z = 1 : \sin \frac{1}{2} u, \quad V = 1 : \sin \left(\mathbf{R} - \frac{u}{2} \right).$$

Per tant,

$$Y = \cot \frac{1}{2} u.$$

§30

(Figura 15). No obstant això, és fàcil veure (per §25) que la solució del problema de trigonometria plana, a **S**, requereix l'expressió del cercle en funció del radi; però això es pot obtenir per la rectificació de **L**.

Siguin $AB, CM, C'M'$ perpendiculars a \overline{AC} i B en qualsevol lloc de \overline{AB} ; tindrem (§25)

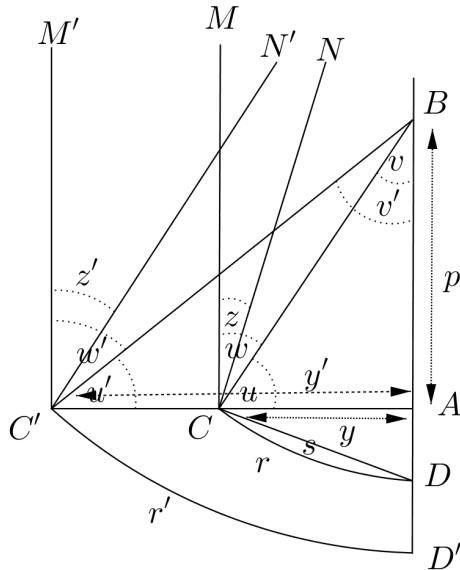


Figura 15

$$\begin{aligned} \sin u : \sin v &= \odot p : \odot y, \\ \sin u' : \sin v' &= \odot p' : \odot y', \end{aligned}$$

i per tant,

$$\frac{\sin u}{\sin v} \odot y = \frac{\sin u'}{\sin v'} \odot y'.$$

Però (per §27) $\sin v : \sin v' = \cos u : \cos u'$; consegüentment,

$$\frac{\sin u}{\cos u} \odot y = \frac{\sin u'}{\cos u'} \odot y'$$

o

$$\odot y : \odot y' = \tan u' : \tan u = \tan w : \tan w'.$$

A més, siguin CN i $C'N'$ $\parallel AB$, i $CD, C'D'$ \perp a \overline{AB} ; tindrem també (§21) $\odot y : \odot y' = r : r'$, i així,

$$r : r' = \tan w : \tan w'.$$

Ara suposem que p , començant des de A , augmenta fins a l'infinit; llavors $w \rightarrow z$ i $w' \rightarrow z'$, i per tant també $r : r' = \tan z : \tan z'$.

Denotem amb i la constant $r : \tan z$ (independent de r); quan $y \rightarrow 0$,

$$\frac{r}{y} = \frac{i \tan z}{y} \rightarrow 1,$$

i així,

$$\frac{y}{\tan z} \rightarrow i.$$

Per §29, $\tan z = 1/2(Y - Y^{-1})$; per tant,

$$\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \rightarrow i,$$

o (§24)

$$\frac{2yI^{\frac{y}{i}}}{I^{\frac{2y}{i}} - 1} \rightarrow i.$$

Però sabem que el límit d'aquesta expressió (quan $y \rightarrow 0$) és

$$\frac{i}{\text{nat. log } I}.$$

Per tant,

$$\frac{i}{\text{nat. log } I} = i,$$

i

$$I = e = 2.7182818\dots,$$

nombre que brilla també aquí de manera remarcable. Denotant a partir d'ara amb i la distància a la qual correspon una I igual a e , tindrem

$$r = i \tan z.$$

Però (§21) $\odot y = 2\pi r$; per tant,

$$\begin{aligned} \odot y &= 2\pi i \tan z = \pi i (Y - Y^{-1}) = \pi i \left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}} \right) \\ &= \frac{\pi y}{\text{nat. log } Y} (Y - Y^{-1}), \quad (\text{per §24}). \end{aligned}$$

§31

(Figura 16). Per a la resolució trigonomètrica de tots els triangles rectangles (a partir de la qual la resolució de tots els triangles és fàcil), a **S**, són suficients tres equacions: concretament (a, b denoten els costats, c la hipotenusa i α, β els angles oposats als costats) aquestes equacions seran les que expressaran les relacions

1r, entre a, c, α ;

2n, entre a, α, β ;

3r, entre a, b, c .

D'aquestes equacions se n'obtenen tres més per eliminació.

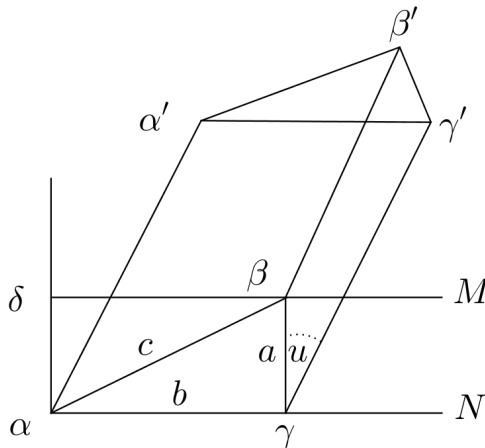


Figura 16

I. De §25 i §30 resulta que

$$1 : \sin \alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1}) = (e^{c/i} - e^{-c/i}) : (e^{a/i} - e^{-a/i})$$

(equació per a c, a, α).

II. De §27 es dedueix que (si $\beta M \parallel \gamma N$)

$$\cos \alpha : \sin \beta = 1 : \sin u;$$

però, per §29,

$$1 : \sin u = \frac{1}{2}(A + A^{-1});$$

per tant,

$$\cos \alpha : \sin \beta = \frac{1}{2}(A + A^{-1}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}})$$

(equació per a α, β i a).

III. Si $\alpha\alpha' \perp \beta\alpha\gamma$, i $\beta\beta'$ i $\gamma\gamma'$ són $\parallel \alpha\alpha'$ (§27), i $\beta'\alpha'\gamma' \perp \alpha\alpha'$, manifestament, (com a §27)

$$\begin{aligned} \frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} &= \frac{1}{\sin u} = \frac{1}{2}(A + A^{-1}); \\ \frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'} &= \frac{1}{2}(B + B^{-1}); \\ \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} &= \frac{1}{2}(C + C^{-1}); \end{aligned}$$

consegüentment,

$$\frac{1}{2}(C + C^{-1}) = \frac{1}{2}(A + A^{-1}) \frac{1}{2}(B + B^{-1}),$$

o

$$(e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}})(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}})$$

(equació per a, b, c).

Si $\gamma\alpha\delta = \mathbf{R}$, i $\beta\delta \perp \alpha\delta$, serà

$$\begin{aligned} \bigcirc c : \bigcirc a &= 1 : \sin \alpha, \text{ i} \\ \bigcirc c : \bigcirc (d = \beta\delta) &= 1 : \cos \alpha \end{aligned}$$

i així (denotant amb $\bigcirc x^2$, per tot x , el producte $\bigcirc x \cdot \bigcirc x$) tindrem evidentment

$$\bigcirc a^2 + \bigcirc d^2 = \bigcirc c^2.$$

Però (per §27 i II)

$$\bigcirc d = \bigcirc b \cdot \frac{1}{2}(A + A^{-1}),$$

consegüentment,

$$(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}})^2 = \frac{1}{4}(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}})^2 \cdot (e^{\frac{b}{i}} - e^{-\frac{b}{i}})^2 + (e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}})^2$$

una *altra* equació per a a, b i c (el segon terme de la qual es pot reduir fàcilment a una forma *simètrica o invariable*).

Finalment, de

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{2}(A + A^{-1})$$

i

$$\frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}(B + B^{-1})$$

obtenim (per III)

$$\cot \alpha \cot \beta = \frac{1}{2}(e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}}).$$

§32

Encara falta mostrar breument la manera de resoldre *problemes* a **S**. Després d'haver-ho explicat (a través dels exemples més evidents), veurem finalment què pot donar aquesta teoria.

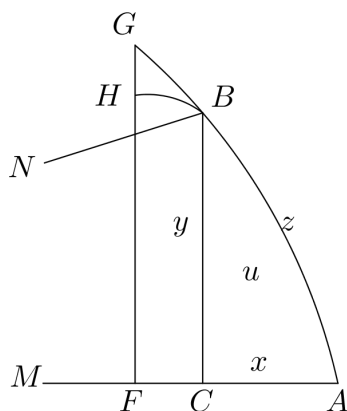


Figura 17

I. (Figura 17). Sigui AB una línia en un pla i $y = f(x)$ la seva equació en coordenades rectangulars, denotem amb dz qualsevol increment de z , i respectivament dx, dy, du els increments de x , de y i de l'àrea u corresponent a aquests dz . Prenem $\mathbf{BH} \parallel CF$ i expressem (a partir de §31) $\frac{\mathbf{BH}}{dx}$ mitjançant y i prenem el límit de $\frac{dy}{dx}$ quan dx tendeix cap al límit zero (cosa que sempre se sobreentén quan busquem límits d'aquest tipus). Es coneixerà llavors també el límit de $\frac{dy}{\mathbf{BH}}$, i així tan HBG ; i (com que HBC no pot ser evidentment ni $<$ ni $>$ que \mathbf{R} , ha de ser $= \mathbf{R}$) la *tangent* a B de BG està determinada per y .

II. Es pot demostrar

$$\frac{dz^2}{dy^2 + \mathbf{BH}^2} \dashrightarrow 1.$$

Es dedueix d'aquí el límit de $\frac{dz}{dx}$, i per tant, per integració, z (expressada en termes de x).

Donada una corba *concreta*, podem trobar la seva equació a **S**, per exemple la d'una línia **L**. En efecte, sigui \overrightarrow{AM} l'eix de **L**; llavors qualsevol \overrightarrow{CB} que parteixi de \overrightarrow{AM} talla **L** (ja que (per §19) tot raig per **A** excepte \overrightarrow{AM} tallarà **L**); però (si **BN** és eix)

$$X = 1 : \sin CBN \quad (\S 28)$$

i

$$Y = \cot \frac{1}{2} CBN \quad (\S 29),$$

per tant,

$$Y = X + \sqrt{X^2 - 1}$$

o

$$e^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{x}{i}} + \sqrt{e^{\frac{2x}{i}} - 1}$$

l'equació buscada.

Per tant, tenim

$$\frac{dy}{dx} \dashrightarrow X(X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

i $\frac{\mathbf{BH}}{dx} \dashrightarrow 1 : \sin CBN = X$, i així,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{\mathbf{BH}} &\dashrightarrow (X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \\ 1 + \frac{dy^2}{\mathbf{BH}^2} &\dashrightarrow X^2(X^2 - 1)^{-1} \\ \frac{dz^2}{\mathbf{BH}^2} &\dashrightarrow X^2(X^2 - 1)^{-1} \\ \frac{dz}{\mathbf{BH}} &\dashrightarrow X(X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{dz}{dx} &\dashrightarrow X^2(X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

per tant, per integració, obtenim (com a §30)

$$z = i(X^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = i \cot CBN.$$

III. Manifestament,

$$\frac{du}{dx} \dashrightarrow \frac{HFCBH}{dx},$$

la qual (si no està donada en funció de y) s'ha d'expressar primer en termes de y , i després s'obté u per integració.

Si posem, amb la notació de la figura 17, $AB = p, AC = q, CD = r$, i $CABDC = s$ es pot veure (com a II) que

$$\frac{ds}{dq} \dashrightarrow r$$

quantitat igual a

$$\frac{1}{2}p(e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}})$$

i, integrant,

$$s = \frac{1}{2}pi(e^{\frac{q}{i}} - e^{-\frac{q}{i}}).$$

Es pot també establir aquest resultat sense integració. Si establím, per exemple, l'equació del cercle (de §31, III), de la recta (de §31, II), d'una cònica (del que precedeix), es podran expressar també les àrees limitades per aquestes línies.

Sabem que una superfície t , paral·lela a una figura plana p (a distància q), és a p com la raó de potències segones de línies homòlogues, és a dir, com la raó

$$\frac{1}{4} \left(e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}} \right)^2 : 1.$$

És fàcil veure, a més, que el càlcul del volum, tractat de la mateixa manera, exigeix dues integracions (ja que la mateixa diferencial no es pot determinar més que per integració); cal, abans de tot, investigar el volum contingut entre p i t , i el conjunt de totes les rectes $\perp p$ que uneixen les vores de p i t . Es troba, per al volum d'aquest sòlid (sigui mitjançant la integració, sigui d'una altra manera),

$$\frac{1}{8}pi \left(e^{\frac{2q}{i}} - e^{-\frac{2q}{i}} \right) + \frac{1}{2}pq.$$

Les superfícies de cossos es poden determinar també a **S**, així com les *curvatures*, les *involutas* i *evolutes* de qualsevol línia, etc.

Referent a la curvatura, en el sistema **S**, o bé serà la curvatura de la mateixa línia **L** o es determinarà sigui pel radi d'un cercle, sigui per la *distància* d'una recta a la corba equidistant a aquesta recta; i és fàcil veure, després de tot el que precedeix, que no hi ha, en un pla, altres línies uniformes més que les línies **L**, les línies circulars i les corbes equidistants a línies rectes.

IV. Pel cercle (com a III)

$$\frac{d\odot x}{dx} \dashrightarrow \odot x$$

per tant (per §29), integrant,

$$\odot x = \pi i^2 (e^{\frac{x}{i}} - 2 + e^{-\frac{x}{i}}).$$

V. Per l'àrea $CABDC = u$ (figura 9) (acotada per una L línia $AB = r$, l'equidistant a aquesta, $CD = y$ i els segments $AC = BD = x$)

$$\frac{du}{dx} \rightarrow y;$$

i (§24)

$$y = r e^{-\frac{x}{r}}$$

i així, integrant,

$$u = r i (1 - e^{-\frac{x}{r}}).$$

Si x creix fins a infinit, llavors, a **S**, $e^{-\frac{x}{r}} \rightarrow 0$, i així $u \rightarrow r i$. És aquest límit el que anomenarem *grandor* de $MABN$.

Anàlogament es troba que, si p és una figura de **F**, l'espai inclòs per p i el conjunt d'eixos traçats pels diversos punts de la vora de p és igual a $\frac{1}{2} p i$.

VI. Siguin $2u$ l'angle en el centre del casquet esfèric z (figura 10), p la circumferència d'un cercle màxim, i x l'arc FC (de l'angle u). Es tindrà (§25)

$$1 : \sin u = p : \bigcirc BC,$$

d'on

$$\bigcirc BC = p \sin u.$$

També tenim

$$x = \frac{p u}{2\pi}, \quad dx = \frac{p du}{2\pi}.$$

A més,

$$\frac{dz}{dx} \rightarrow \bigcirc BC,$$

i per tant,

$$\frac{dz}{du} \rightarrow \frac{p^2}{2\pi} \sin u,$$

i, integrant,

$$z = \frac{\sin u}{2\pi} p^2.$$

Imaginem la superfície **F** sobre la qual està situada la circumferència p (passant pel centre F del casquet esfèric). Tracem per AF i AC els plans FEM i CEM , perpendiculars a **F**, i tallant **F** seguint FEG i CE ; i considerem la L línia **CD** (traçada per C perpendicularment a FEG), i la L línia **CF**. Tindrem (§20) $CEF = u$, i (§21)

$$\frac{FD}{p} = \frac{\sin u}{2\pi},$$

i així $z = FD \cdot p$.

Però (§21) $p = \pi \cdot FGD$; per tant, $z = \pi \cdot \mathbf{FD} \cdot FDG$. Però (§21) $\mathbf{FD} \cdot \mathbf{FDG} = \mathbf{FC} \cdot \mathbf{FC}$; consegüentment, $z = \pi \cdot \mathbf{FC} \cdot \mathbf{FC} = \odot \mathbf{FC}$, a \mathbf{F} .

Ara sigui (figura 14) $BJ = CJ = r$; (§30) $2r = i(Y - Y^{-1})$, i així (§21)

$$\odot 2r \text{ (a } \mathbf{F}) = \pi i^2 (Y - Y^{-1})^2.$$

També (IV)

$$\odot 2y = \pi i^2 (Y^2 - 2 + Y^{-2}),$$

per tant,

$$\odot 2r \text{ (a } \mathbf{F}) = \odot 2y,$$

i així *la superfície z d'un casquet esfèric és igual a la superfície del cercle descrit amb la corda FC com a radi.*

Per tant, la superfície total de l'esfera és

$$= \odot FG = FDG \cdot p = \frac{p^2}{\pi},$$

i així *les superfícies d'esferes són entre elles com les segones potències dels seus cercles màxims.*

VII. Es troba anàlogament que, a \mathbf{S} , el volum de l'esfera de radi x és

$$= \frac{1}{2} \pi i^3 (X^2 - X^{-2}) - 2\pi i^2 x;$$

la superfície generada per revolució de la línia CD (figura 12) al voltant de AB és

$$= \frac{1}{2} \pi i p (Q^2 - Q^{-2});$$

i el sòlid engendrat per $CABDC$ és

$$= \frac{1}{4} \pi i^2 p (Q - Q^{-1})^2.$$

Suprimirem, per abreujar, el mètode pel qual es poden obtenir sense integració tots els resultats obtinguts des de (IV) fins aquí.

Es pot demostrar que el límit de tota expressió que contingui la lletra i (i basada, doncs, en la hipòtesi que existeix una magnitud i), quan i creix fins a l'infinit, expressa òbviament la quantitat per Σ (i per consegüent, sota la hipòtesi que no existeix la magnitud i) si és que les equacions no es tornen idèntiques.

Però no s'ha de creure pas que *el sistema es pot canviar a voluntat (ja que està completament determinat en ell mateix i per ell mateix)*; és únicament la *hipòtesi* que pot variar, i que es pot canviar successivament, sempre que això no porti a una absurditat.

*Suposant, doncs, que en una tal expressió, la lletra i , en el cas que \mathbf{S} sigui la realitat, denota l'única quantitat tal que la seva $I = e$, però si és Σ el que és realment cert, el límit en qüestió se suposa que s'ha d'agafar en lloc de l'expressió primitiva. Llavors és evident que *totes les expressions originades a partir de la hipòtesi de la realitat de \mathbf{S} seran (en aquest sentit) certes absolutament, encara que sigui completament desconegut si Σ és la realitat o no*. Així, per exemple, de l'expressió obtinguda a §30 s'obté fàcilment (sigui per diferenciació, sigui d'una altra manera) el valor conegut a Σ*

$$\bigcirc x = 2\pi x.$$

D'I (§31) es conclou, per transformacions convenients,

$$I : \sin \alpha = c : a;$$

de II es dedueix

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = 1,$$

i per tant,

$$\alpha + \beta = \mathbf{R}.$$

La primera equació de III esdevé idèntica, i per tant és certa a Σ , encara que no hi determini res. De la segona deduïm

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Aquestes són les equacions fonamentals conegudes de la trigonometria plana a Σ . Es troba a més (a partir de §32) a Σ , per l'àrea i el volum a III, el mateix valor pq . Tenim, a partir de IV,

$$\bigodot x = \pi x^2.$$

De VII, l'esfera de radi x és $= \frac{4}{3}\pi x^3$, etc. Els teoremes enunciats al final de VI són evidentment *certs sense condicions*.

§33

Falta encara exposar (com hem enunciat a §32) quin és el significat d'aquesta teoria.

I. Falta decidir si Σ o algun \mathbf{S} és el que té lloc a la realitat.

II. Totes les coses deduïdes de la hipòtesi de la falsedat de l'axioma XI (sempre en el sentit de §32) són *absolutament certes*, i així, en aquest sentit, *no es*

basen sobre cap hipòtesi. Hi ha, doncs, una *trigonometria plana* a priori, en la qual quin és l'únic sistema cert resta desconegut, i per tant on romanen desconegudes únicament les magnituds *absolutes* en les expressions, però on un sol cas conegut fixaria evidentment tot el sistema. La trigonometria esfèrica, contràriament, està establerta de manera absoluta a §26.

(I tenim, a **F**, una geometria completament anàloga a la geometria plana de Σ).

III. Si s'hagués establert que és el sistema Σ el que és vàlid, no restaria res desconegut. Però si s'hagués establert que el sistema Σ no és vàlid, llavors (§31), per exemple, *donats de manera concreta* els costats x, y i l'angle rectilini que comprenen, és clar que seria impossible resoldre totalment el triangle, és a dir, determinar *a priori* els altres angles i les relacions del tercer costat als dos costats donats, a menys que no es determinin les quantitats X, Y . Per a això caldria tenir *sota una forma concreta* alguna longitud a de la qual la seva A fos coneguda. Llavors i seria *la unitat natural de longitud* (de la mateixa manera que e és la base dels logaritmes *naturals*). Si l'existència d'aquesta quantitat i està determinada, veurem com es pot construir, almenys amb una gran aproximació, a la pràctica.

IV. En el sentit explicat a I i II, és evident que totes les coses de l'espai es poden resoldre pel mètode analític modern (molt lloable, quan s'utilitza dins de límits convenients).

V. Finalment, al lector benèvol no li semblarà inacceptable, en el cas que sigui el sistema **S**, i no el sistema Σ , el que és vàlid, que es pugui construir una figura rectilínia igual a un cercle.

§34

(Figura 12). Per D podem traçar $DM \parallel AN$ de la manera següent. Des del punt D abaixem $DB \perp AN$; des de qualsevol punt A de la recta \overline{AB} aixequem $AC \perp AN$ (a DBA), i deixem caure $DC \perp AC$. Tindrem (§27)

$$\circ CD : \circ AB = 1 : \sin z,$$

sempre que $DM \parallel BN$. Però $\sin z$ no és > 1 , i per tant AB no és $> DC$. Així doncs, un quadrant descrit a partir del centre A a BAC , amb radi $= DC$, tindrà un punt B o O en comú amb \overrightarrow{BD} . En el primer cas, clarament $z = \mathbf{R}$; però en el segon cas (§25)

$$(\circ AO = \circ CD) : \circ AB = 1 : \sin AOB,$$

i així $z = AOB$.

Si, per tant, prenem $z = AOB$, llavors serà $DM \parallel BN$.

§35

(Figura 18). Si és el sistema **S** el que té lloc, podem, com segueix, traçar una línia recta \perp a un costat d'un angle agut i \parallel a l'altre.

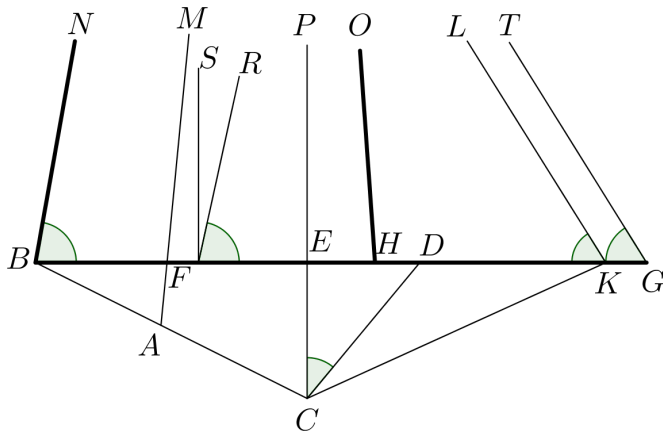


Figura 18

Sigui $AM \perp BC$ i suposem $AB = AC$ suficientment petit (§19) perquè, si tracem $BN \parallel AM$ (§34), ABN sigui $>$ que l'angle donat. Tracem, a més, $CP \parallel AM$ (§34), i siguin NBG, PCD iguals l'un i l'altre a l'angle donat. Llavors \overrightarrow{BG} i \overrightarrow{CD} es trobaran; en efecte, si \overrightarrow{BG} (que cau *per construcció* a l'interior de NBC) talla \overrightarrow{CP} en E , es tindrà (ja que $BN \simeq CP$) $EBC < ECB$, i per tant $EC < EB$.

Siguin $EF = EC, EFR = ECD$ i $FS \parallel EP$; FS caurà dins l'angle BFR , ja que, com que $BN \parallel CP$, d'on $BN \parallel EP$, i $BN \parallel FS$, es tindrà (§14) $FBN + BFS < 2R = FBN + BFR$. Per tant, $BFS < BFR$. Per consegüent, \overrightarrow{FR} talla \overrightarrow{EP} , i per tant \overrightarrow{CD} talla també \overrightarrow{EG} en algun lloc en D .

Sigui ara $DG = DC$ i $DGT = DCP = GBN$. Es tindrà (pel fet de ser $CD \simeq GD$) $BN \simeq GT \simeq CP$. Sigui K (§19) el punt on la línia **L** de BN troba \overrightarrow{BG} , i KL l'eix d'aquesta línia **L**. Es tindrà $BN \simeq KL$, i per tant $BKL = BGL = DCP$. A més, $KL \simeq CP$. Per tant, K cau evidentment sobre G , i $GT \parallel BN$. Si ara aixequem $HO \perp$ sobre el punt mitjà de BG , s'haurà construït $HO \parallel BN$.

§36

(Figura 10). Donats la recta \overrightarrow{CP} i el pla \overline{MAB} , prenem $CB \perp$ al pla \overline{MAB} , BN (a BCP) $\perp BC$, i $CQ \parallel BN$ (§34); la intersecció de \overrightarrow{CP} (si aquest raig cau dintre BCQ) amb \overrightarrow{BN} (a \overline{CBN}), i per consegüent amb \overline{MAB} , es pot determinar. I

si es donen els dos plans $\overline{PCQ}, \overline{MAB}$, i es té $CB \perp \overline{MAB}, CR \perp \overline{PCQ}$, i (a BCR), $BN \perp BC, CS \perp CR, BN$ caurà a \overline{MAB} , i CS a \overline{PCQ} ; i quan s'hagi trobat la intersecció de \overline{BN} i \overline{CS} (si té lloc), la perpendicular traçada per aquesta intersecció, a \overline{PCQ} , a \overline{CS} serà evidentment la intersecció de \overline{MAB} i de \overline{PCQ} .

§37

(Figura 7). Sobre la recta $AM \parallel BN$, es troba un punt A tal que $AM \simeq BN$.

Si (per §34) construïm fora de \overline{NBM} , $GT \parallel BN$, i tal que $BG \perp GT, GC = GB$ i $CP \parallel GT$; tracem \overline{TGD} de tal manera que faci amb \overline{TGB} un angle igual al que fa \overline{PCA} amb \overline{PCB} ; busquem a continuació (§36) la recta intersecció \overline{DQ} de \overline{TGD} amb \overline{NBA} , i sigui finalment $BA \perp DQ$. Es tindrà, a causa de la semblança de triangles de \mathbf{L} línies traçats sobre la \mathbf{F} de BN (§21), manifestament, $DB = DA$ i $AM \simeq BN$.

És fàcil concloure d'això que (les \mathbf{L} línies donades només pels seus extrems) es pot obtenir d'aquesta manera, a \mathbf{F} , una quarta proporcional, o una mitjana proporcional, i executar, sense recórrer a l'axioma XI, totes les construccions geomètriques que es fan sobre el pla a Σ . Així, per exemple, es pot dividir geomètricament $4\mathbf{R}$ en un nombre qualsevol de parts iguals, si se sap fer aquesta divisió a Σ .

§38

(Figura 14). Si construïm (per §37) per exemple $NBQ = \frac{1}{3}\mathbf{R}$, i fem (per §35), a \mathbf{S} , $AM \perp$ a \overline{BQ} i $\parallel BN$, i determinem (per §37) $IM \simeq BN$, tindrem, si $IA = x$, (§28),

$$X = 1 : \sin\left(\frac{1}{3}\mathbf{R}\right) = \mathbf{2},$$

i x serà construït *geomètricament*.

I NBQ es pot calcular de manera que IA difereixi de i tan poc com es vulgui, cosa que succeeix per $\sin NBQ = 1/e$.

§39

(Figura 19). Si (en un pla) \mathbf{PQ} i \mathbf{ST} són \parallel a la recta MN (§27), i AB, CD són perpendiculars a MN iguals, manifestament, $\triangle DEC \equiv \triangle BEA$; i així els angles (potser mixtilineals) ECP, EAT coincidiran, i $EC = EA$. Si, a més, $CF = AG$ llavors $\triangle ACF \equiv \triangle CAG$, i cadascun d'ells és la meitat del *quadrilàter* $FAGC$.

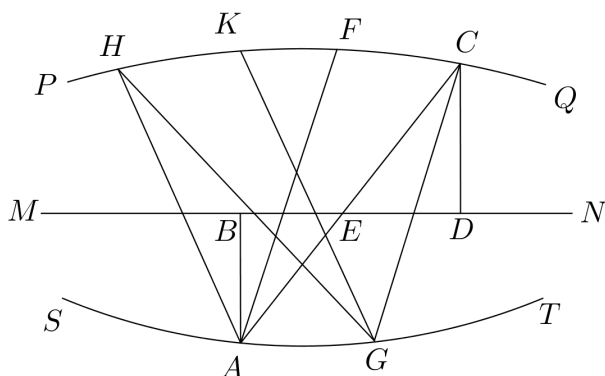


Figura 19

Si $FAGC, HAGK$ són dos quadrilàters d'aquest tipus sobre AG , entre PQ i ST , la seva equivalència (com a Euclides) és evident, com també l'equivalència dels triangles AGC, AGH , amb la mateixa base AG i amb vèrtexs sobre la línia PQ .

A més, $ACF = CAG, GCQ = CGA$ i

$$ACF + ACG + GCQ = 2R \quad (§32);$$

i així també

$$CAG + ACG + CGA = 2R;$$

per tant, en qualsevol triangle $\triangle ACG$ d'aquest tipus, la suma dels tres angles és $= 2R$.

Però, tant si la recta AG coincideix amb AG ($\parallel MN$) com si no, *l'equivalència* dels triangles rectilinis AGC, AGH , tant per ells mateixos com *per la suma dels seus angles*, és evident.

§40

(Figura 20). *Triangles equivalents* ABC, ABD (per tant, rectilinis) amb un costat igual tenen les sumes dels seus angles iguals.

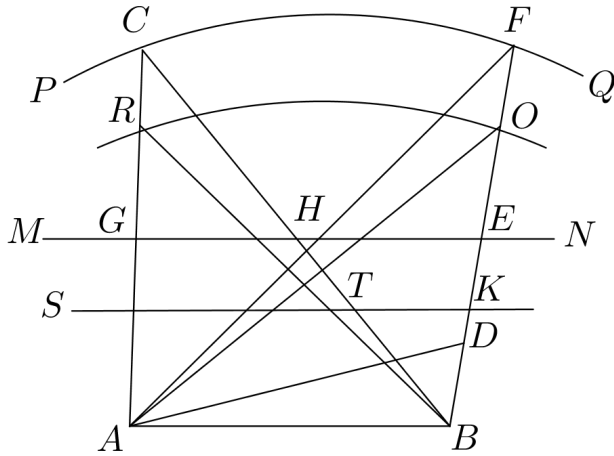


Figura 20

En efecte, tracem MN pels punts mitjans de AC i BC i sigui (pel punt C) $PQ \parallel MN$; el punt D estarà sobre la línia PQ , ja que si \overrightarrow{BD} talla \overline{MN} en el punt E , i per tant (§39) talla la línia PQ a la distància $EF = EB$, es tindrà $\triangle ABC = \triangle ABF$, i per tant també $\triangle ABD = \triangle ABF$, d'on es dedueix que D cau sobre F .

Però si el raig BD no talla la recta MN , sigui C el punt on la perpendicular en el punt mitjà de AB talla PQ , i sigui $GS = HT$ de manera que la línia ST talli \overrightarrow{BD} prolongat, en un cert punt K (la qual cosa, és evident, es pot fer com s'ha vist a §4); sigui, a més, $SR = SA$, $RO \parallel ST$, i O la intersecció del raig BK amb RO ; llavors

$$\triangle ABR = \triangle ABO \quad (§39)$$

i així $\triangle ABC > \triangle ABD$, contra la hipòtesi.

§41

(Figura 21). *Triangles equivalents* ABC, DEF tenen les sumes dels seus angles iguals.

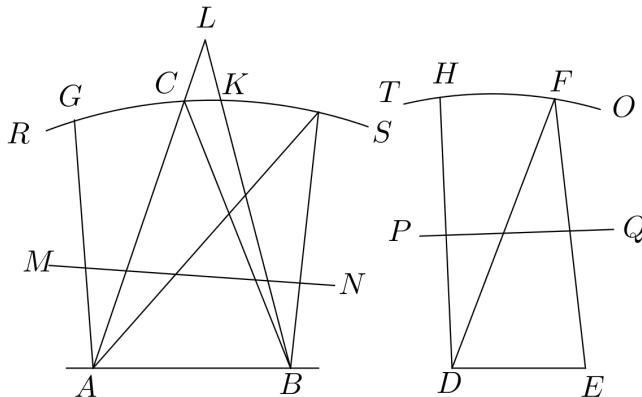


Figura 21

En efecte, tracem MN pels punts mitjans de AC i BC , i PQ pels punts mitjans de DF i FE ; i prenem $RS \parallel MN$ i $TO \parallel PQ$; la perpendicular AG a RS serà o bé igual a la perpendicular DH a TO o una d'elles, per exemple DH , serà la més gran.

En cada cas, la $\odot DF$, amb centre A , té amb \overrightarrow{GS} algun punt K en comú, i (§39)

$$\triangle ABK = \triangle ABC = \triangle DEF.$$

Però el $\triangle AKB$ (per §40) té la mateixa suma d'angles que $\triangle DFE$, i (per §39) la mateixa que $\triangle ABC$. Per tant, també els triangles ABC, DEF tenen cadascun la mateixa suma d'angles.

A **S** el recíproc d'aquest teorema és cert. En efecte, siguin ABC, DEF dos triangles amb la mateixa suma d'angles i

$$\triangle BAL = \triangle DEF;$$

aquests tindran (pel que precedeix) igual suma d'angles i per tant també la tindran $\triangle ABC$ i $\triangle ABL$, i per tant, manifestament,

$$BCL + BLC + CBL = 2R.$$

No obstant això (per §31), la suma d'angles de qualsevol triangle, a **S**, és $< 2R$. Per tant, L cau sobre C .

§42

(Figura 22). Sigui u el suplementari de la suma d'angles de $\triangle ABC$, i v de $\triangle DEF$; llavors

$$\triangle ABC : \triangle DEF = u : v.$$

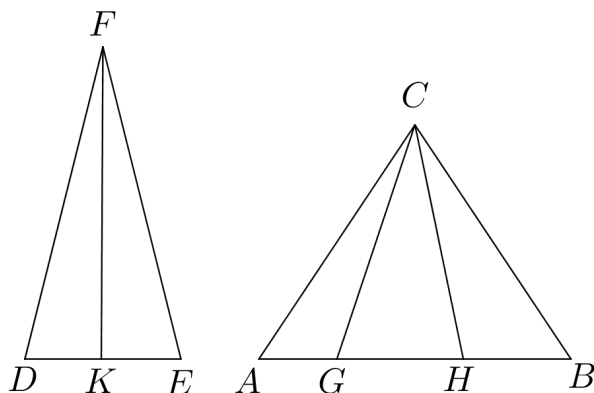


Figura 22

En efecte, si p és l'àrea de cadascun dels triangles ACG , GCH , HCB , DFK , KFE , i $\triangle ABC = m \cdot p$, i $\triangle DEF = n \cdot p$, i s la suma d'angles de qualsevol triangle equivalent a p , manifestament,

$$2\mathbf{R} - u = m \cdot s - (m - 1)2\mathbf{R} = 2\mathbf{R} - m(2\mathbf{R} - s);$$

i

$$u = m(2\mathbf{R} - s),$$

i anàlogament,

$$v = n(2\mathbf{R} - s).$$

Per tant,

$$\triangle ABC : \triangle DEF = m : n = u : v.$$

És evident que es pot estendre fàcilment al cas d'incommensurabilitat dels triangles ABC , DEF .

De la mateixa manera es demostra que triangles sobre una esfera són com els *excessos* de les sumes dels seus angles per sobre de $2\mathbf{R}$.

Si dos angles d'un \triangle esfèric són rectes, el tercer z serà l'excés en qüestió. Però (si anomenen p un cercle màxim) aquest \triangle és, manifestament,

$$= \frac{z}{2\pi} \frac{p^2}{2\pi} \quad (\S 32, \text{VI});$$

consegüentment, qualsevol triangle amb excés dels seus angles z és

$$= \frac{zp^2}{4\pi^2}.$$

§43

(Figura 15). Ara, a \mathbf{S} , l'àrea d'un \triangle rectilini s'expressa mitjançant la suma dels seus angles. Si AB augmenta cap a l'infinit (§42),

$$\triangle ABC : (\mathbf{R} - u - v)$$

serà constant. Però $\triangle ABC \rightarrow BACN$ (§32, V), i $\mathbf{R} - u - v \rightarrow z$ (§1); i així,

$$BACN : z = \triangle ABC : (\mathbf{R} - u - v) = BAC'N' : z'.$$

A més, manifestament (§30),

$$BDCN : BD'C'N' = r : r' = \tan z : \tan z'.$$

Però si $y' \rightarrow 0$ tenim

$$\frac{BD'C'N'}{BAC'N'} \rightarrow 1, \quad \text{i també} \quad \frac{\tan z'}{z'} \rightarrow 1;$$

consegüentment,

$$BDCN : BACN = \tan z : z.$$

Però (§32)

$$BDCN = r \cdot i = i^2 \tan z;$$

per tant,

$$BACN = z \cdot i^2.$$

Designant a partir d'ara, per breuetat, qualsevol triangle amb suplement de la suma dels seus angles z per Δ tindrem $\Delta = z \cdot i^2$.

Es dedueix fàcilment d'això que si (figura 14) $OR \parallel AM$ i $RO \parallel AB$, l'àrea compresa entre \overline{OR} , \overline{ST} , \overline{BC} (que és, manifestament, el límit absolut de l'àrea dels triangles rectilinis creixent sense fi o de Δ amb $z \rightarrow 2R$) és $= \pi i^2 = \odot i$, a **F**.

Denotant aquest límit amb \square , tenim (figura 15) (per §30)

$$\pi r^2 = \tan^2 z \cdot \square = \odot r \quad \text{a F (§21)} = \odot s$$

(per §32, VI) si la corda CD es representa per s .

Si ara, mitjançant una perpendicular elevada al mig del radi donat s del cercle en un pla (o del **L** radi del cercle a **F**), es construeix (§34) $DB \parallel \simeq CN$, baixant $CA \perp DB$ i elevant $CM \perp CA$ es tindrà z ; d'on (§37), prenent arbitràriament un radi de la línia **L** per unitat, *es podrà determinar geomètricament $\tan^2 z$, a partir de dues línies uniformes de la mateixa curvatura* (les quals, donades només els seus extrems i els seus eixos construïts, podran evidentment ser tractades com a rectes en la recerca de la seva mesura comuna, i en aquest sentit considerades equivalents a rectes).

Es pot, a més (figura 23), construir com segueix un quadrilàter, per exemple un quadrilàter regular d'àrea $= \square$.

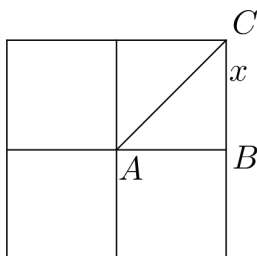


Figura 23

Sigui $ABC = \mathbf{R}$, $BAC = \frac{1}{2}\mathbf{R}$, $ACB = \frac{1}{4}\mathbf{R}$ i $BC = x$. Es podrà expressar X (a partir de §31, II) per simples arrels quadrades i (per §37) construir-lo. I coneixent X es podrà determinar x (§38, o també §29 i §35). I l'òctuple del $\triangle ABC$ és evidentment $= \square$, i per això, *un cercle pla es troba quadrat geomètricament mitjançant una figura rectilínia i de línies uniformes de la mateixa espècie (és a dir, línies equivalents a rectes quant a la seva comparació entre elles). Un cercle de \mathbf{F} està planificat de la mateixa manera: llavors o l'axioma XI d'Euclides és cert o tenim la quadratura geomètrica del cercle*, bé que res no decideix fins ara quina de les dues proposicions té realment lloc.

Sempre que $\tan^2 z$ sigui un nombre enter o una fracció racional amb denominador (després de reducció a l'expressió més simple), un nombre primer de la forma $2^m + 1$ (del qual $2 = 2^0 + 1$ és un cas particular), o un producte de tants nombres primers d'aquesta forma com es vulgui, on cadascun d'ells (excepte el 2, que és l'únic que pot entrar un nombre qualsevol de vegades) no entra més que *una sola vegada* com a factor, es podrà, per la teoria dels polígons donada per Gauss (i per aquests valors de z únicament), construir una figura rectilínia $= \tan^2 z = \odot s$, ja que la divisió de \square (el teorema de §42 s'estén fàcilment a polígons arbitraris) exigeix evidentment la partició de $2\mathbf{R}$, el qual (com es pot demostrar) no és possible geomètricament més que sota les condicions precedents. Però en tots aquests casos, el que precedeix condueix fàcilment a l'objectiu. I qualsevol figura rectilínia es pot transformar geomètricament en un polígon regular de n costats, si n és de la forma indicada per Gauss.

Faltaria encara, per completar enterament les nostres investigacions, demostrar la impossibilitat de decidir (sense recórrer a alguna hipòtesi) si és el sistema Σ o algun dels sistemes \mathbf{S} (i quin) el que té lloc realment. Això és el que reservarem per a una ocasió més favorable.

La ciència absoluta de l'espai

Versió lliure

Explicació de la notació

| | |
|---------------------------------|---|
| $Recta AB$ | significa el conjunt de tots els punts situats en línia recta amb els punts A i B . |
| $Semirecta \overrightarrow{AB}$ | aquella meitat de la recta AB que comença al punt A i conté el punt B . |
| $Pla ABC$ | el conjunt de tots els punts situats en el mateix pla que els tres punts (no alineats) A, B, C . |
| $Semiplà ABC$ | la meitat del pla ABC que comença a la recta AB i conté el punt C . |
| $\sphericalangle ABC$ | la porció <i>més petita</i> en les quals el pla ABC és partit per les semirectes $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$, o l'angle que té per costats $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$. ¹² |
| $ABCD$ | (el punt D situat a $\sphericalangle ABC$, i les rectes BA i CD no es tallen) la porció del pla ABC compresa entre $\overrightarrow{BA}, BC, \overrightarrow{CD}$; mentre que $BACD$ denota la porció del pla ABC compresa entre les rectes AB i CD . |
| \perp | perpendicular. |
| \triangle | triangle. |
| $AB \simeq CD$ | $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$. |
| $\bigcirc r$ | la circumferència del cercle de radi r . |
| $\odot r$ | àrea del cercle de radi r . |

¹² En el primer cas parlarem de *regió angular*. Utilitzem també aquesta notació per referir-nos a la mesura de l'angle en qüestió. Quan utilitzem funcions trigonomètriques escriurem simplement $\sin ABC$ en lloc de $\sin(\sphericalangle ABC)$.

1 Definició de semirectes paraleles

Definició 1.1. Si la semirecta \overrightarrow{AM} no és tallada per la semirecta \overrightarrow{BN} , situada en el mateix pla, però és tallada per qualsevol altra semirecta \overrightarrow{BP} (a la regió angular ABN), direm que \overrightarrow{BN} és paral·lela a \overrightarrow{AM} i ho indicarem per $BN \parallel AM$.

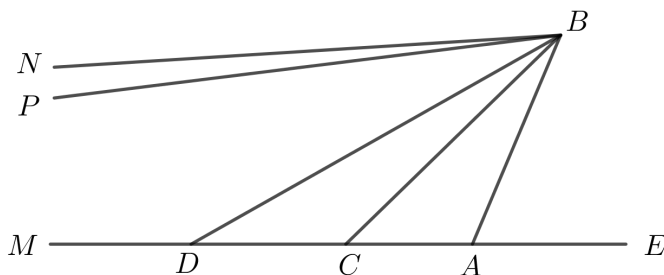


Figura 1

Proposició 1.2. Per un punt B fora de la recta AM passa una i només una semirecta \overrightarrow{BN} tal que $BN \parallel AM$.

Demostració. Fàcil. □

Proposició 1.3. Si $BN \parallel AM$, llavors

$$\angle BAM + \angle ABN \leq \pi.$$

Demostració. Movent la semirecta \overrightarrow{BC} al voltant de B fins a arribar a tenir

$$\angle BAM + \angle ABC = \pi,$$

en algun lloc la semirecta \overrightarrow{BC} serà la primera a no tallar la semirecta \overrightarrow{AM} , i és llavors que es tindrà $BC \parallel AM$.¹³ □

És clar, al mateix temps, que $BN \parallel EM$ sigui quin sigui el punt E agafat sobre la recta AM , amb la condició $AM > AE$ si E pertany a la semirecta \overrightarrow{AM} .

I si mentre el punt C a \overrightarrow{AM} va cap a l'infinit, es pren sempre¹⁴ $CD = CB$, sempre tindrem $\angle CDB = \angle CBD < \angle CBN$, però l'angle $\angle CBN$ tendeix a 0, i per tant l'angle $\angle ADB$ també tendeix a 0.

¹³ Està assumint el resultat de geometria absoluta que la suma dels angles d'un triangle no supera dues rectes.

¹⁴ No introduïxo una notació diferent per a la recta CD o el segment CD , ja que la distinció és clara pel context.

2 Independència del punt

Proposició 2.1. Si $\overrightarrow{BN} \parallel \overrightarrow{AM}$ i C és un punt de la recta BN llavors també és $\overrightarrow{CN} \parallel \overrightarrow{AM}$.

Demostració. En efecte, sigui D un punt qualsevol de \overrightarrow{MACN} . Si C està a \overrightarrow{BN} , \overrightarrow{BD} talla \overrightarrow{AM} (ja que $\overrightarrow{BN} \parallel \overrightarrow{AM}$), i així també (per l'axioma de Pasch) \overrightarrow{CD} talla \overrightarrow{AM} .

Però si C està a \overrightarrow{BP} , on P és un punt de la recta BN que no pertany a \overrightarrow{BN} , prenem $BQ \parallel \overrightarrow{CD}$; \overrightarrow{BQ} està dins \overrightarrow{ABN} (secció 1), i talla \overrightarrow{AM} ; i per tant, també (novament per Pasch) \overrightarrow{CD} talla \overrightarrow{AM} . Per tant, tota semirecta \overrightarrow{CD} (al pla ACN) talla \overrightarrow{AM} , sense que \overrightarrow{CN} talli \overrightarrow{AM} . Per tant, sempre $\overrightarrow{CN} \parallel \overrightarrow{AM}$. \square

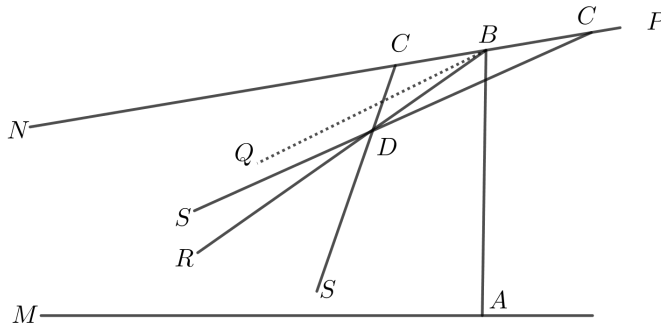


Figura 2

3 Paralleles a una mateixa recta, diferents, no es tallen

Proposició 3.1. Si $\overrightarrow{BR} \parallel \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{CS} \parallel \overrightarrow{AM}$ i C no està a la recta BR , llavors \overrightarrow{BR} i \overrightarrow{CS} no es tallen.

Demostració. En efecte, si \overrightarrow{BR} i \overrightarrow{CS} tinguessin un punt en comú D llavors (per la secció 2) \overrightarrow{DR} i \overrightarrow{DS} haurien de ser simultàniament paral·leles a \overrightarrow{AM} , i per la unicitat de la paral·lela (secció 1) \overrightarrow{DS} coincidiria amb \overrightarrow{DR} i C estaria sobre BR (en contra de la hipòtesi). \square

4 Transport d'angles

Proposició 4.1. Si $\angle MAN > \angle MAB$ hi haurà, per cada punt X de \overrightarrow{AB} , un punt C de \overrightarrow{AM} tal que $\angle XCM = \angle NAM$.

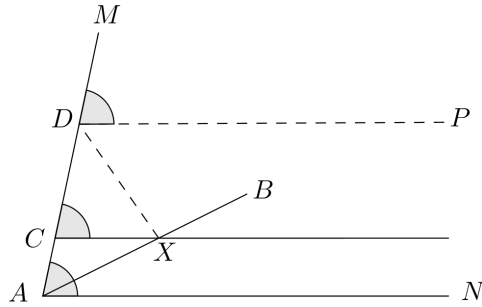


Figura 3

Demostració. En efecte, tal com s'ha vist a la secció 1, podem traçar XD de manera que, agafant D suficientment lluny, tinguem $\angle XDM > \angle NAM$, i fent $\angle MDP = \angle MAN$, X estarà a $NADP$. Si transportem $\angle NAM$ al llarg de AM fins que \overrightarrow{AN} coincideixi amb \overrightarrow{DP} , serà necessari, per continuïtat, que \overrightarrow{AN} hagi passat per X i que s'hagi tingut, doncs, $\angle XCM = \angle NAM$. \square

5 Existència de punts isogonals

Proposició 5.1. Si $BN \parallel AM$, hi ha un punt F a la recta AM tal que $FM \simeq BN$.

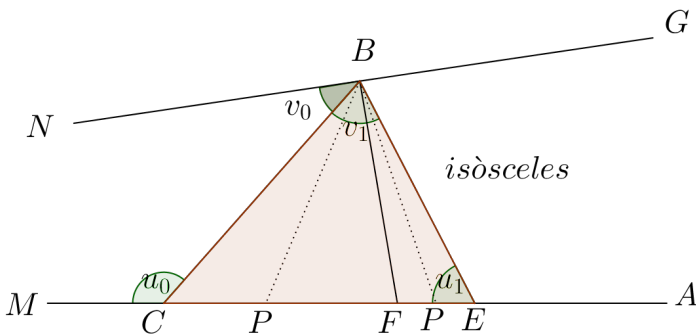


Figura A

Demostració. En efecte, pel que hem vist a la secció 1, podem elegir C prou lluny de manera que $\angle BCM > \angle CBN$, i si elegim E de manera que $CE = CB$, tindrem $EC \simeq BC$, d'on $\angle BEM < \angle EBN$.

Movem el punt P sobre EC , i anomenem sempre u l'angle $\angle BPM$ i sempre v l'angle $\angle PBN$; evidentment u és al principi menor que el corresponent v ,

però acabarà per ser més gran (segons que P sigui pròxim a E o a C). En efecte, u augmenta *contínuament* des de $\angle BEM$ fins a $\angle BCM$, ja que, com hem vist a la secció 4, no existeix *cap* angle $> \angle BEM$ i $< \angle BCM$ que no sigui en algun moment igual a u . Igualment v decreix contínuament des de $\angle EBN$ fins a $\angle CBN$.¹⁵ Hi ha, per tant, sobre EC un punt F tal que $\angle BFM = \angle FBN$. \square

6 Propietat simètrica del paral·lelisme

Proposició 6.1. Si $BN \parallel AM$ i E és un punt qualsevol¹⁶ de la recta AM , i G és un punt qualsevol de la recta BN , llavors $GN \parallel EM$ i $EM \parallel GN$.

Demostració. En efecte, hem vist a la secció 1 que $BN \parallel EM$, d'on, pel que hem vist a la secció 2, $GN \parallel EM$.

Si fem ara, com hem indicat a la secció 5, $FM \simeq BN$, llavors $MFBN$ és congruent a $NBFM$ ¹⁷ i com que $BN \parallel FM$ ¹⁸ també ha de ser $FM \parallel BN$ i (pel que precedeix) $EM \parallel GN$. \square

7 Propietat transitiva del paral·lelisme

Proposició 7.1. Si $BN \parallel AM$, $CP \parallel AM$ i C no està a la recta BN , llavors també serà $BN \parallel CP$.

Demostració. En efecte, com hem vist a la secció 3, \overrightarrow{BN} i \overrightarrow{CP} no es tallen. Per altra banda, AM, BN i CP estan o no estan en un mateix pla, i en el primer cas AM està o no està a l'interior de $BNCP$.

Si AM, BN, CP estan en un mateix pla i AM cau dintre de $BNCP$, qualsevol \overrightarrow{BQ} (a NBC) talla \overrightarrow{AM} en algun punt D (ja que $BN \parallel AM$); a més, com que $DM \parallel CP$ per la propietat simètrica vista a la secció 6, clarament \overrightarrow{DQ} tallarà \overrightarrow{CP} i així $BN \parallel CP$.

¹⁵ Si denotem amb $(u_0, v_0), (u_1, v_1)$ els valors inicials i finals respectivament dels angles u, v , el que diu Bolyai és que el camí que uneix aquests punts en pla u, v , travessa la diagonal, cosa evident, ja que un dels punts està per sota i l'altre per sobre d'aquesta diagonal.

¹⁶ Si pensem M com el punt de l'infinit de la semirecta \overrightarrow{AM} , llavors E és un punt qualsevol d'aquesta recta. Però en realitat s'ha d'imposar la condició que hem comentat a la secció 1, és a dir, que si E pertany a la semirecta \overrightarrow{AM} ha de ser $AM > AE$.

¹⁷ El moviment que realitza aquesta congruència és una simetria respecte a la mediatriu de FB , però Bolyai no estudia aquesta mediatriu fins a la secció 8. Però no hi ha dificultat a raonar-ho directament.

¹⁸ Si F caigués a \overrightarrow{AM} ha de ser $EM > EF$, cosa que sempre es pot aconseguir canviant si cal el punt M .

8 Propietat de la mediatriu

Proposició 8.1. Si $BN \parallel CP$ i $BN \simeq CP$, i \overrightarrow{AM} a la regió $NBCP$ biseca perpendicularment el segment BC , llavors $BN \parallel AM$.

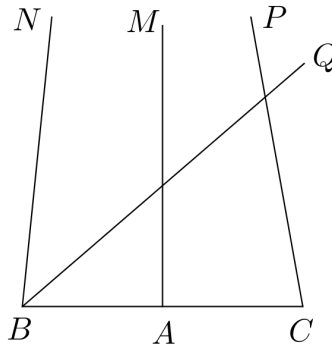


Figura 5

Demostració. En efecte, si \overrightarrow{BN} tallés \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{CP} tallaria \overrightarrow{AM} en el mateix punt (pel criteri costat-angle-costat) i aquest punt seria comú a \overrightarrow{BN} i \overrightarrow{CP} , cosa que no pot ser, ja que $BN \parallel CP$. D'altra banda, tot \overrightarrow{BQ} (a CBN) talla \overrightarrow{CP} ; i per tant, \overrightarrow{BQ} talla també \overrightarrow{AM} . Consegüentment, $BN \parallel AM$. \square

9 Cinquè postulat per a plans

Proposició 9.1. Si $BN \parallel AM$, els plans MAP i MAB són perpendiculars,²¹ i l'angle que el pla NBD fa amb el pla NBA (en el costat de $MABN$ on es troba MAP) és $< \pi/2$, llavors els plans MAP i NBD es tallen.

²¹ Recordem que una recta r és perpendicular a un pla en un punt P si i només si tota recta del pla per P és perpendicular a r . Es pot veure que és suficient que sigui perpendicular a dues rectes del pla. També és cert que per cada punt del pla hi ha una única recta perpendicular al pla. Dues rectes perpendiculars a un mateix pla són coplanàries i no es tallen però no són necessàriament paral·leles. I dos plans són perpendiculars si hi ha una recta en un d'ells perpendicular a l'altre.

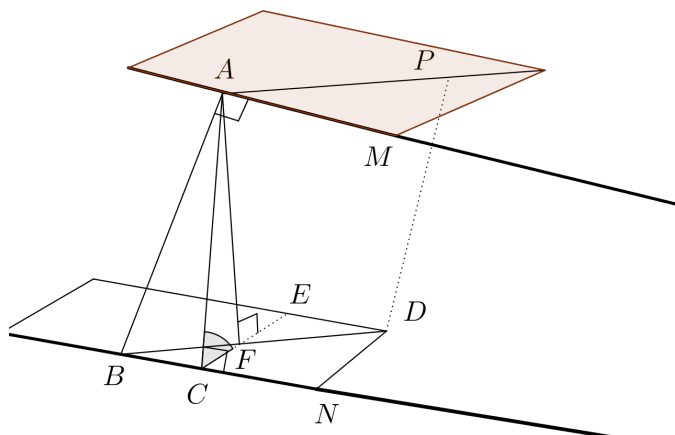


Figura 6

Demostració. En efecte, sigui A el peu de la perpendicular des de B sobre AM de manera que $\angle BAM = \pi/2$; sigui C el peu de la perpendicular des de A fins a BN (tant si C coincideix amb B com si no), i considerem la perpendicular CE a BN (a NBD); tenim, per hipòtesi, $\angle ACE < \pi/2$ i, dient F al peu de la perpendicular des de A fins a CE , AF caurà dins ACE . Sigui \overrightarrow{AP} la intersecció dels semiplans ABF i AMP (els quals tenen el punt A en comú); tindrem $\angle BAP = \angle BAM = \pi/2$ (ja que $BAM \perp MAP$).

Si, finalment, el semiplà ABF es fa moure (amb A i B fixats) fins que coincideixi amb el semiplà ABM , \overrightarrow{AP} anirà a parar sobre \overrightarrow{AM} ; i com que $AC \perp BN$, i $AF < AC$, evidentment el segment AF no tindrà el seu extrem a \overrightarrow{BN} , i així \overrightarrow{BF} caurà a la regió angular ABN . Però en aquesta posició \overrightarrow{BF} talla \overrightarrow{AM} (ja que $BN \parallel AM$); i així \overrightarrow{AP} i \overrightarrow{BF} es tallen també en la posició original; i el punt de tall és comú als semiplans MAP i NBD . Per tant, els semiplans MAP i NBD es tallen. \square

Es conclou fàcilment que els semiplans MAP i NBD es tallen sempre que la suma dels angles interiors que fan amb $MABN$ sigui $< \pi$.²²

10 Transitivitat de la isogonalitat

Proposició 10.1. Si BN i CP són tots dos $\parallel \simeq AM$ també és $BN \parallel \simeq CP$.²³

²² Aquest comentari final, fàcil de verificar, és essencialment el cinquè postulat per a plans i serà fonamental per demostrar a la secció 21 que la geometria de l'horoesfera és euclidiana.

²³ Observem que en geometria euclidiana plana el que diu Bolyai en aquesta secció que, si tenim tres paral·leles i una recta talla perpendicularment les dues primeres, talla també perpendicularment la tercera. Compareu l'enunciat amb la transitivitat del paral·lelisme, secció 7.

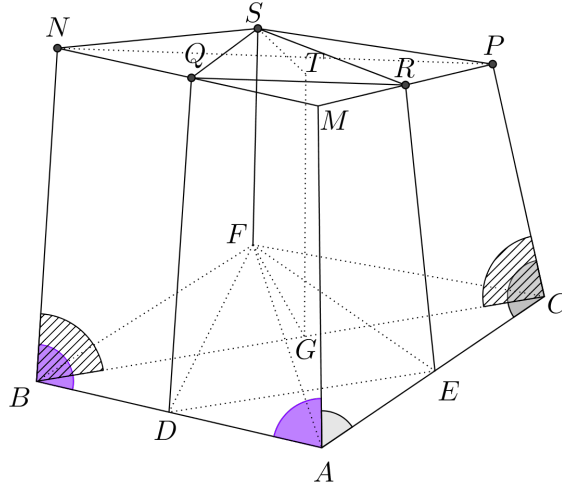


Figura 7

Demostració. En efecte, o bé els plans MAB i MAC formen entre ells un angle o coincideixen en un mateix pla.

En el primer cas, tracem el pla QDF que bisequi perpendicularment el segment AB amb Q en el pla ABN . Llavors $DQ \perp AB$ i així, per la propietat de la mediatriu (secció 8) $DQ \parallel AM$; anàlogament, si el pla ERS biseca perpendicularment el segment AC , amb R en el pla AMC , tenim $ER \parallel AM$; per tant, per la propietat transitiva del paral·lisme que hem vist a la secció 7, $DQ \parallel ER$.

Es conclou fàcilment (per la secció 9) que els semiplans QDF i ERS es tallen i la seva intersecció (comentari final de la secció 7) FS és $\parallel DQ$, i també (pel fet de ser $BN \parallel DQ$) $FS \parallel BN$. A més (per a cada punt de la recta FS) $FB = FA = FC$ i la recta FS està en el pla TGF que biseca perpendicularment el segment BC . G és el punt mitjà de BC i novament per la propietat de la mediatriu, $GT \parallel BN$.

Però, tal com hem comentat al final de la secció 7, pel fet de ser $FS \parallel BN$ també és $GT \parallel BN$. De la mateixa manera es prova que $GT \parallel CP$. Però GT biseca perpendicularment el segment BC , i per tant²⁴ $BN \parallel CP$.

Si BN , AM i CP estan en un mateix pla, sigui (fora d'aquest pla) $FS \parallel AM$; llavors (pel que precedeix) $FS \parallel$ tant a BN com a CP , i així $BN \parallel CP$. \square

11 Horoesfera i horocicle

Definició 11.1. L'horoesfera F determinada per \overrightarrow{AM} és el conjunt format pel punt A i tots els punts B tals que si $BN \parallel AM$ es compleixi que $BN \simeq AM$.

²⁴ Per simetria. De fet, és fàcil veure que $BN \simeq AM$ raonant per l'absurd.

L'horocicle L determinat per \overrightarrow{AM} és la intersecció de l'horoesfera determinada per \overrightarrow{AM} amb un pla qualsevol que contingui la recta AM .²⁵

A partir de la secció 5 es veu fàcilment que F té un punt, i només un, sobre cada recta paral·lela a AM ; i evidentment L és dividit per l'eix \overrightarrow{AM} en dues parts congruents.

Direm que \overrightarrow{AM} és l'eix de L . Evidentment també, en qualsevol pla que contingui el segment AM hi ha un únic horocicle amb eix \overrightarrow{AM} . Tot horocicle així definit es dirà horocicle d'eix \overrightarrow{AM} (ben entès, en el pla que es consideri). És evident que la revolució de L al voltant de la recta AM descriu una horoesfera l'eix de la qual és \overrightarrow{AM} , i que és, recíprocament, l'horoesfera d'eix \overrightarrow{AM} .

12 Sobre els eixos d'horoesferes i horocicles

Proposició 12.1. *Sigui B un punt qualsevol de l'horocicle d'eix \overrightarrow{AM} , i sigui $BN \parallel \parallel \simeq AM$; llavors l'horocicle d'eix \overrightarrow{BN} coincideix amb l'horocicle d'eix \overrightarrow{AM} .*

Demostració. Sigui L' l'horocicle d'eix \overrightarrow{BN} i sigui C un punt qualsevol de L' , i sigui $CP \parallel \parallel \simeq BN$ (secció 11). Com que $BN \parallel \parallel \simeq AM$, tindrem també, per transitivitat (secció 10), $CP \parallel \parallel \simeq AM$, i així C està situat a l'horocicle L d'eix AM .

I si C és un punt qualsevol de L , i $CP \parallel \parallel \simeq AM$, llavors també $CP \parallel \parallel \simeq BN$ (secció 10), i així C està igualment situat a L' (secció 11). Així L i L' són idèntics, i tot \overrightarrow{BN} ($\parallel \parallel AM$) és un nou eix de L i és \simeq respecte a tots els eixos de L . \square

De la mateixa manera es demostra aquesta propietat per a F .

13 Angles alterns interns iguals

Proposició 13.1. *Si $BN \parallel \parallel AM$, $CP \parallel \parallel DQ$ i $\angle BAM + \angle ABN = \pi$, llavors també $\angle DCP + \angle CDQ = \pi$.*²⁶

²⁵ A la traducció francesa d'Hoüel hi ha un peu de pàgina per dir que F és l'esfera límit i L el cercle límit de Lobatxevski.

²⁶ Observem que no hi ha relació entre els punts A, B i els punts C, D . De manera que el que està provant Bolyai aquí és que, si en una determinada situació és cert que la suma dels angles alterns interns entre paral·leles són iguals, llavors aquesta afirmació és certa sempre. Està preparant el terreny per distingir la geometria euclidiana de la no-euclidiana, segons que sigui certa o no aquesta afirmació sobre els angles alterns interns.

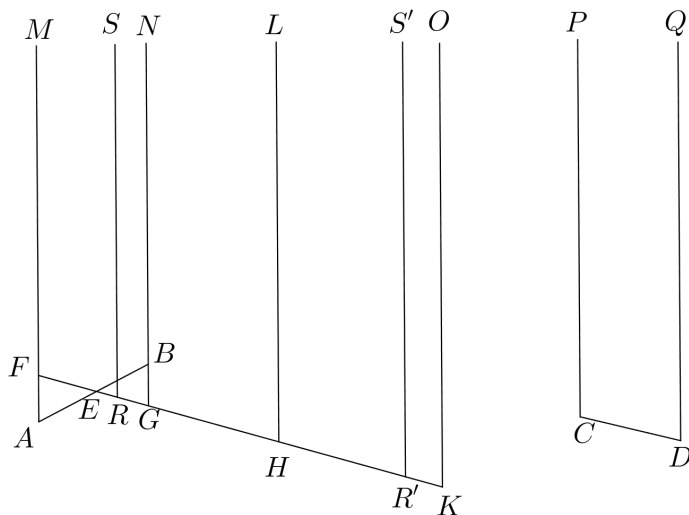


Figura 8

Demostració. Sigui E el punt mitjà del segment AB , és a dir, $EA = EB$ i sigui F sobre la recta AM tal que $\angle EFM = \angle DCP$. L'existència de F es dedueix de la secció 4. Com que

$$\angle BAM + \angle ABN = \pi = \angle ABN + \angle ABG,$$

on G és un punt de la recta BN tal que B està entre N i G , tindrem $\angle EBG = \angle EAF$; i així, si prenem $BG = AF$ tindrem, pel criteri costat-angle-costat, que els triangles $\triangle EBG$ i $\triangle EAF$ són congruents, en particular

$$\angle BEG = \angle AEF,$$

i G caurà sobre la semirecta \overrightarrow{FE} . A més

$$\angle GFM + \angle FGN = \pi$$

(ja que $\angle EGB = \angle EFA$). També $GN \parallel FM$ (aquesta independència del punt s'ha vist a la secció 6). Per tant, si prenem un punt R sobre la recta FG de tal manera que $FR = CD$, i tracem la paral·lela RS a FM , tindrem que $MFRS$ és congruent a $PCDQ$, i per transitivitat (secció 7) també serà $RS \parallel GN$. Ara tenim dues possibilitats: que R caigui dins del segment FG , o que caigui fora (a menys que $CD = FG$, cas en què la proposició és evident).

I. En el primer cas, en què R cau dins del segment FG , l'angle $\angle FRS$ no és més gran que $\pi - \angle RFM = \angle FGN$, ja que $RS \parallel FM$.²⁷ Però com que $RS \parallel$

²⁷ En geometria absoluta no és cert que angles alterns interns entre paral·leles siguin iguals, sinó que un és més petit o igual al suplementari de l'altre (secció 1). Posem atenció que estem sempre amb raigs paral·lels i no rectes paral·leles i els angles de què parlem estan del costat on les rectes són paral·leles.

GN tampoc $\angle FRS$ no és estrictament més petit que $\angle FGN$. Per tant, $\angle FRS = \angle FGN$, i

$$\angle RFM + \angle FRS = \angle GFM + \angle FGN = \pi.$$

Per tant, també

$$\angle DCP + \angle CDQ = \pi.$$

II. En el segon cas, en què R cau fora del segment FG , tenim $\angle NGR = \angle MFR$, ja que aquests angles tenen igual suplementari. Prenem punts G, H, K , etc., sobre la recta FG amb $FG = GH = HK = \dots$, fins que FK sigui igual a FR o comenci a ser estrictament més gran que FR . Tracem les paral·leles a \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{GN} , \overrightarrow{HL} , \overrightarrow{KO} , ... Tindrem que $MFGN, NGHL, LHKO, \dots$ seran congruents. Observem que també per transitivitat (secció 7) $KO \parallel HL \parallel FM$.

Si K coincideix amb R llavors KO coincideix amb RS (secció 1), i per consegüent

$$\angle RFM + \angle FRS = \angle KFM + \angle FKO = \angle KFM + \angle FGN = \pi.$$

Però si R cau dins del segment HK , llavors (per I)

$$\angle RHL + \angle KRS = \pi = \angle RFM + \angle FRS = \angle DCP + \angle CDQ. \quad \square$$

14 Angles alterns interns diferents

Proposició 14.1. Si $BN \parallel AM$, $CP \parallel DQ$ i $\angle BAM + \angle ABN < \pi$,²⁸ llavors també $\angle DCP + \angle CDQ < \pi$.

Demostració. Si $\angle DCP + \angle CDQ$ no fos estrictament més petit que π seria (per la secció 1) igual a π i (per la secció 13) $\angle BAM + \angle ABN = \pi$, contra la hipòtesi. \square

15 Geometria euclidiana i no-euclidiana

A la llum de les seccions 13 i 14, denotarem amb Σ el sistema de geometria que es basa sobre la hipòtesi de l'axioma XI d'Euclides,²⁹ i per \mathbf{S} el sistema fundat sobre la hipòtesi contrària.

28 A la secció 1 hem vist que aquesta suma és sempre menor o igual a dos angles rectes. Ara suposem que és menor estricte. Aquesta secció és un complement de l'anterior, i val, *mutatis mutandi*, el mateix comentari que hem fet en la nota 26 al peu de la pàgina 63.

29 En algunes obres, el cinquè postulat d'Euclides porta una altra numeració. Per exemple, a *Elements of geometry* de Playfair [7] és l'axioma XI, com el cita Bolyai. Està enunciat així: *Dues rectes que es tallen no poden ser les dues paral·leles a una mateixa recta*. Els altres deu són essencialment els altres quatre postulats més les típiques nocions comunes: el tot és més gran que la part, etc.

Tots els resultats que enunciarem sense dir expressament si tenen lloc en el sistema Σ o en el sistema \mathbf{S} s'han de considerar com enunciats d'una manera absoluta, és a dir, que s'afirma que són certs tant si estem en el sistema Σ com en el \mathbf{S} .

16 Horocicles euclidians

Proposició 16.1. Si AM és l'eix d'un horocicle \mathbf{L} , llavors aquest horocicle, en el sistema Σ , és una recta perpendicular a AM .

Demostració. En efecte (figura 5), sigui BN un eix per un punt qualsevol B de \mathbf{L} ; a Σ tindrem

$$\angle BAM + \angle ABN = \pi$$

i així $\angle BAM = \pi/2$.

I si C és qualsevol punt de la recta AB i $CP \parallel AM$, llavors (per la secció 13) $CP \simeq AM$, i així C està a \mathbf{L} (secció 11). \square

En canvi, en geometria no-euclidiana tenim el resultat següent:

Proposició 16.2. A \mathbf{S} , no existeixen ni sobre un horocicle ni sobre una horoesfera, tres punts alineats.

Demostració. En efecte, algun dels eixos $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$ (per exemple AM) està entre els altres dos. Com que $\angle NBA = \angle BAM$, pel que hem vist a la secció 14, $\angle BAM < \pi/2$. Anàlogament, com que $\angle PCA = \angle CAM$, $\angle CAM < \pi/2$. Com que $\angle BAM$ i $\angle CAM$ són suplementaris, no pot ser que B, A, C estiguin alineats. \square

17 Rectes i superfícies uniformes

Proposició 17.1. Un horocicle a \mathbf{S} és una línia, i una horoesfera una superfície.³⁰

Demostració. En efecte, qualsevol pla perpendicular a l'eix \overrightarrow{AM} de l'horo-esfera \mathbf{F} , a través de qualsevol punt de \mathbf{F} , la talla en una circumferència (ja que hem vist a la secció 11 que la rotació de l'horocicle al voltant del seu eix genera l'horo-esfera), el pla de la qual no és perpendicular a cap altre eix \overrightarrow{BN} de \mathbf{F} (a \mathbf{S} els dos angles de la figura sumen menys de π , com hem vist a la secció 14).³¹

³⁰ Es refereix al fet que, en geometria no-euclidiana, els horocicles es «comporten» com les rectes i circumferències, i les horoesferes com esferes i plans, en el sentit que es poden moure sobre elles mateixes (són uniformes).

³¹ L'horo-esfera és unió de cercles.

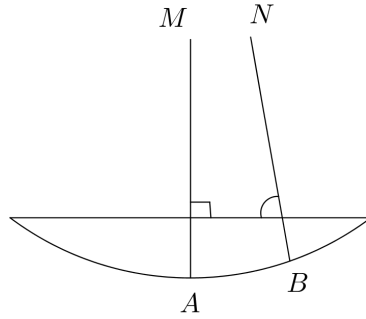


Figura B

Si girem F al voltant de \overrightarrow{BN} , tot punt de F restarà sobre F , ja que hem vist a la secció 12 que \overrightarrow{BN} també és eix de F ; i la intersecció de F per un pla no perpendicular a BN descriurà una superfície. De fet, siguin quins siguin els punts A, B agafats sobre F , es pot fer coincidir F amb ella mateixa de manera que A vagi a B (per les seccions 8 i 12 només s'ha de fer girar l'horoesfera al voltant de la mediatriu del segment AB). Per tant, F és una *superfície uniforme*.

Es dedueix d'això (seccions 11 i 12) que L és una *línia uniforme*.³² \square

18 Cercles sobre l'horoesfera

Proposició 18.1. *Sigui F una horoesfera. La intersecció amb F de qualsevol pla traçat a través d'un punt A de F , obliquament a l'eix \overrightarrow{AM} , és, a S , una circumferència.*

Demostració. Prenem (figures 7 o C) A, B, C tres punts d'aquesta secció, i $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$ eixos; AMB i AMC fan un angle, ja que en cas contrari el pla determinat per A, B, C (per la secció 16) contindria AM (contra la hipòtesi). Per tant, els plans que bisquen perpendicularment els segments AB, AC es tallen (secció 9) en algun eix FS de F i $FB = FA = FC$.

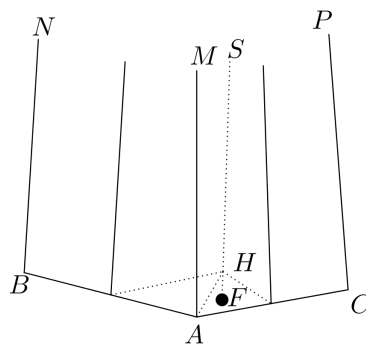


Figura C

³² No és necessari restringir la demostració al sistema S ; es pot establir fàcilment que és certa d'una manera absoluta per a S i Σ . (Nota de l'autor.)

Fem $AH \perp FS$, i girem el pla FAH al voltant de FS ; A descriu una circumferència de radi HA , que passa per B i C , i situada a la vegada a F i al pla ABC ; a més, F i el pla ABC no tenen en comú més que la circumferència de centre H i radi HA (si hi hagués algun altre punt en comú, tallant una recta per ell continguda en el pla amb la circumferència, tindríem tres punts de F alineats, en contra de la secció 16).

És també evident que girant la porció de l'horocicle \widehat{FA} (com a radi) a F al voltant de F , la seva extremitat descriurà la mateixa circumferència de centre H i radi HA . \square

19 Tangent a l'horocicle

Proposició 19.1. *Sigui L l'horocicle d'eix \overrightarrow{BN} . La perpendicular BT a BN (en el pla de L) és, a S , tangent a L .*

Demostració. L'únic punt de \overrightarrow{BT} (figura 5) que està a L és B , com es dedueix directament de la secció 14. En efecte, si tracem la paral·lela a \overrightarrow{BN} per un punt A de \overrightarrow{BT} , l'angle $\angle BAM$ és, a S , estrictament menor que $\pi/2$, i per tant A no pot estar a l'horocicle d'eix \overrightarrow{BN} .

A més, qualsevol altra recta BQ del pla TBN (diferent de l'eix \overrightarrow{BN}) talla L en dos punts. En efecte, el centre de la secció del pla per BQ perpendicular a TBN , amb l'horoesfera d'eix \overrightarrow{BN} (que per la secció 18 sabem que és una circumferència), està evidentment situat sobre \overrightarrow{BQ} ; i si BQ és un diàmetre, evidentment \overrightarrow{BQ} talla L en Q . \square

20 Dos punts de l'horoesfera determinen un horocicle

Proposició 20.1. *Dos punts qualssevol d'una horoesfera determinen un i només un horocicle.*

Demostració. Només hem de considerar la intersecció amb l'horoesfera del pla format pels dos eixos paral·lels amb inici en aquests dos punts.³³ \square

Per calcular l'angle entre dos horocicles en un punt observem que (per les seccions 16 i 19) tot horocicle L és perpendicular a tots els seus eixos, per tant, l'angle que formen dos horocicles en un punt és l'angle entre els plans que els determinen.

³³ És, doncs, el primer postulat d'Euclides.

21 La geometria de l'horoesfera és euclidiana

Per \widehat{AP} a \mathbf{F} entenem l'horocicle que passa per A i P , i per \widehat{AP} la meitat de \widehat{AP} que comença a A i conté P .

Proposició 21.1. *Dos horocicles \widehat{AP} i \widehat{BD} , a la mateixa horoesfera \mathbf{F} , formant amb un tercer horocicle \widehat{AB} una suma d'angles interiors $< \pi$, es tallen.*³⁴

Demostració. En efecte (figura 6 o D), si AM i BN són eixos de \mathbf{F} , els semiplans $\overrightarrow{AMP}, \overrightarrow{BND}$ es tallen, com hem vist al final de la secció 9. Ara bé, la intersecció de plans que contenen rectes paral·leles és una recta paral·lela a les anteriors (últim paràgraf de la secció 7).

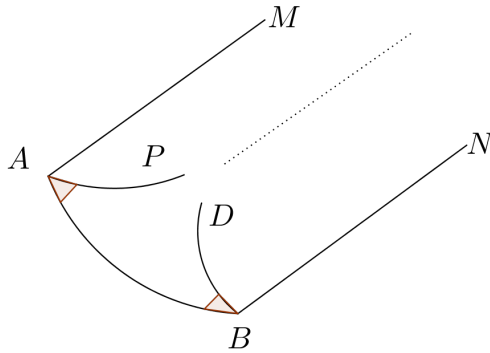


Figura D

Així, per la transitivitat del paral·lelisme (secció 7), i pel que hem vist a la secció 5, la recta intersecció dels semiplans $\overrightarrow{AMP}, \overrightarrow{BND}$ té un punt de \mathbf{F} . Per tant, també \widehat{AP} i \widehat{BD} es tallen. \square

Resulta d'això que l'axioma XI i totes les conseqüències que se'n dedueixen en geometria i trigonometria (plana) es compleixen de *manera absoluta* a \mathbf{F} , fent els horocicles el paper de les línies rectes; per tant, les funcions trigonomètriques tenen aquí el mateix significat que a Σ , i la longitud de la circumferència, a \mathbf{F} , de radi un horocicle de longitud r , és $2\pi r$, i igualment l'àrea del cercle amb aquest radi (a \mathbf{F}) és $\odot r = \pi r^2$ (per π s'entén $(1/2) \odot 1$, o el conegut 3,1415926...).

³⁴ És, doncs, el cinquè postulat d'Euclides.

22 Equidistant a un horocicle

Proposició 22.1. [L'equidistant d'un horocicle és un horocicle.] Sigui L l'horocicle d'eix \overrightarrow{AM} i sigui B un punt d'aquest horocicle. Sigui C un punt de \overrightarrow{AM} i transportem CAB (format per \overrightarrow{AM} i el segment d'horocicle \widehat{AB}) primerament al llarg de \widehat{AB} i després sobre \widehat{BA} , en els dos casos fins a l'infinit. Llavors la trajectòria \widehat{CD} del punt C serà l'horocicle d'eix \overrightarrow{CM} .

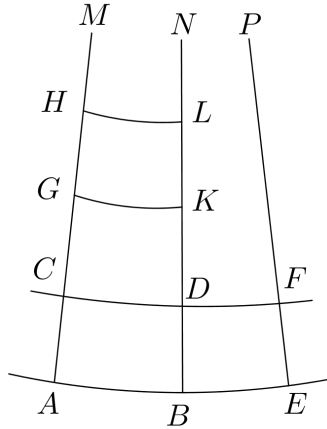


Figura 9

Demostració. En efecte, anomenem L' la línia formada per la trajectòria del punt C , i sigui D un punt qualsevol de L' ; sigui $DN \parallel CM$ i sigui B el punt de L sobre la recta DN . Tindrem $BN \simeq AM$ i $AC = BD$, i així $DN \simeq CM$ i D està a l'horocicle d'eix \overrightarrow{CM} .

Recíprocament, si D és a l'horocicle d'eix \overrightarrow{CM} i $DN \parallel CM$ i B és el punt de L sobre DN , tindrem $AM \simeq BN$ i $CM \simeq DN$, per tant, manifestament, $BD = AC$, i D està a la trajectòria L' del punt C ; per tant, L' i l'horocicle d'eix \overrightarrow{CM} coincideixen. \square

Representarem la relació d'una tal línia L' amb L per $L' \parallel L$.

23 Longitud dels horocicles

(Figura 9). Si l'horocicle \widehat{CDF} és equidistant de l'horocicle \widehat{ABE} , és a dir, $\widehat{CDF} \parallel \widehat{ABE}$, i $\widehat{AB} = \widehat{BE}$, i $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{EP}$ són eixos, clarament $\widehat{CD} = \widehat{DF}$; i si tres punts qualssevol A, B, E estan a \widehat{AB} i $\widehat{AB} = n \cdot \widehat{CD}$, també tindrem $\widehat{AE} = n \cdot \widehat{CF}$; i per tant (inclús evidentment en el cas de $\widehat{AB}, \widehat{AE}, \widehat{DC}$ incommensurables),

$$\widehat{AB} : \widehat{CD} = \widehat{AE} : \widehat{CF}.$$

La relació $\widehat{AB} : \widehat{CD}$ és, doncs, *independent de \widehat{AB} i està completament determinada per AC* . Denotarem el valor d'aquesta relació amb la lletra majúscula (com a X) corresponent a la lletra minúscula (com a x) amb la qual representem AC .

24 Funció exponencial

Amb la notació de la secció anterior tenim el resultat següent:

Proposició 24.1. *Qualsevol que siguin x, y tindrem $Y = X^{\frac{y}{x}}$.*

Demostració. En efecte, o bé una de les quantitats x, y és un múltiple de l'altre (per exemple, y de x) o no ho és.

Si $y = nx$, prenem $x = AC = CG = GH = \dots$ (figura 9) fins que tinguem $AH = y$. A més, prenem $\widehat{CD} \parallel \widehat{GK} \parallel \widehat{HL}$. Tenim (secció 23)

$$X = \widehat{AB} : \widehat{CD} = \widehat{CD} : \widehat{GK} = \widehat{GK} : \widehat{HL},$$

i així, multiplicant totes les fraccions iguals,

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{HL}} = \left(\frac{\widehat{AB}}{\widehat{CD}} \right)^n,$$

és a dir, $Y = X^n = X^{\frac{y}{x}}$.

Si x, y són múltiples de i , podem escriure $x = mi$ i $y = ni$, i aplicant el que acabem de provar ($y = nx$ implica $Y = X^n$) obtenim $X = I^m, Y = I^n$, i consegüentment $Y = X^{\frac{n}{m}} = X^{\frac{y}{x}}$.

El mateix s'estén fàcilment al cas de la incommensurabilitat de x i y .³⁵ \square

Però si $q = y - x$, manifestament, tenim $Q = X^{\frac{q}{x}} = X^{\frac{y}{x}} : X = Y : X$.

També és evident que a Σ , per a cada x , tenim $X = 1$, però a \mathbf{S} és $X > 1$, que vol dir (amb la notació de la figura 9) $\widehat{CD} < \widehat{AB}$ (la longitud de l'horocicle entre dues paral·leles és una funció decreixent), i per tant, per a valors *qualssevol* de \widehat{AB} i \widehat{ABE} , existeix una línia $\widehat{CDF} \parallel \widehat{ABE}$ tal que $\widehat{CDF} = \widehat{AB}$, d'on es dedueix que $AMBN \equiv AMEP$ malgrat que la primera figura és un múltiple de la segona: resultat singular, però per descomptat no prova l'absurditat del sistema \mathbf{S} .³⁶

35 Observeu que, en particular, tenim $Y = I^{y/i}$. Més endavant es veurà que $I = e$ de manera que $Y = e^{y/i}$.

36 Recordem que la notació $AMBN$ es refereix a la zona infinita del pla compresa entre dues paral·leles. La isometria que realitza la congruència és la que aplica tot segment horocíclic de $AMBN$ al corresponent segment horocíclic de $AMEP$, situat més amunt però de la mateixa longitud. Com que els conjunts són infinits, tenim una aplicació bijectiva que conserva distàncies entre aquests dos conjunts, l'un contingut a l'altre. Sembla que Bolyai se sent encara amb l'obligació de justificar-se quan diu que aquest resultat «no prova l'absurditat del sistema \mathbf{S} ». I és que sembla anar en contra de la noció comuna que «la part no pot ser congruent amb el tot».

25 Teorema del sinus

Proposició 25.1. *En qualsevol triangle, les circumferències amb radi igual als costats són entre elles com els sinus dels angles oposats.*

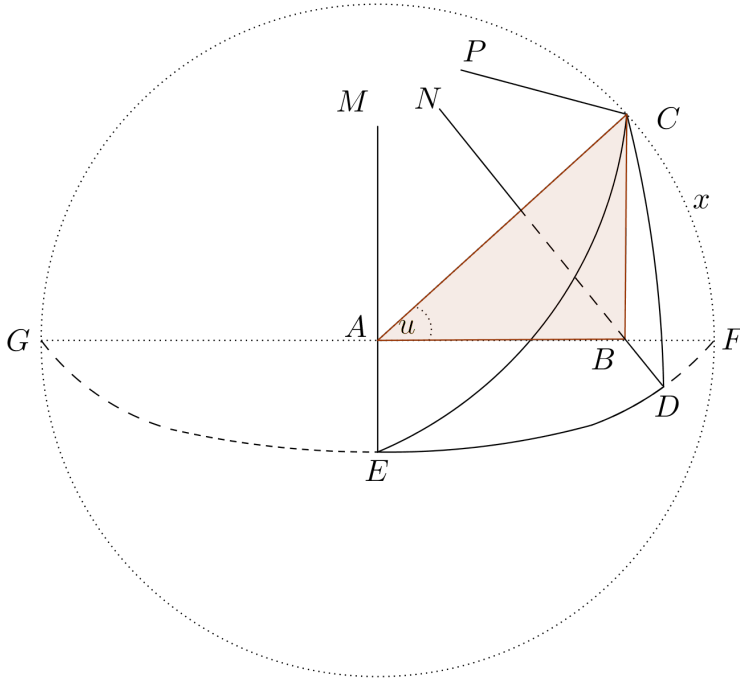


Figura 10

Demostració. En efecte, suposem $\angle ABC = \pi/2$, i considerem \overrightarrow{AM} perpendicular al pla ABC del triangle. Considerem també les semirectes \overrightarrow{BN} i \overrightarrow{CP} paral·leles a \overrightarrow{AM} ; tindrem $CAB \perp AMBN$, i així (ja que $CB \perp BA$) $CB \perp AMBN$, i consegüentment $CPBN \perp AMBN$.

Suposem que l'horoesfera d'eix \overrightarrow{CP} talla les rectes BN, AM en D i E respectivament, i a les bandes $CPBN, CPAM, BNAM$ en els horocicles $\widehat{CD}, \widehat{CE}, \widehat{DE}$. Llavors, pel que hem comentat al final de la secció 20 sobre l'angle entre horocicles, $\angle CDE$ és igual a l'angle entre els plans NDC i NDE , i per tant $\angle CDE = \pi/2$; anàlogament $\angle CED = \angle CAB$. Però com que la geometria de l'horoesfera és euclidiana (secció 21), en el triangle de costats horocíclics $\triangle CDE$ (suposant sempre aquí radi = 1)³⁷

$$\widehat{EC} : \widehat{DC} = 1 : \sin DEC = 1 : \sin CAB.$$

³⁷ No entenc aquest comentari. Sembla clarament fora de lloc, ja que sí que és necessari, i no hi és, a la secció següent. Vegeu la nota 39 al peu de la pàgina 73.

També (per la secció 21) i observant que la circumferència sobre l'horoesfera de centre E i radi horocíclic EC coincideix amb la circumferència de centre A i radi AC (en girar perpendicularment a AM) i que la circumferència sobre l'horoesfera de centre D i radi horocíclic DC coincideix amb la circumferència de centre B i radi BC (en girar perpendicularment a BN) tenim

$$\widehat{EC} : \widehat{DC} = \bigcirc\widehat{EC} : \bigcirc\widehat{DC} = \bigcirc AC : \bigcirc BC \quad (\text{secció 18});$$

i així,

$$\bigcirc AC : \bigcirc BC = 1 : \sin CAB;$$

ara el teorema és evident per a cada triangle. □

26 Teorema del sinus esfèric

Proposició 26.1. *En qualsevol triangle esfèric, els sinus dels costats són entre ells com els sinus dels angles oposats.*

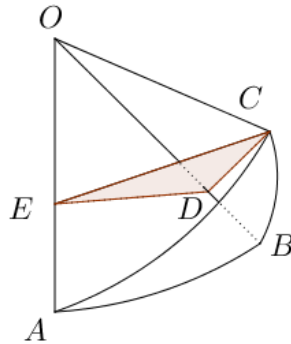


Figura 11

Demostració. En efecte, sigui $\triangle ABC$ un triangle sobre l'esfera de centre O , amb $\angle ABC = \pi/2$, i sigui CED un pla perpendicular al radi OA de l'esfera. Tindrem $CED \perp AOB$, i (com que $BOC \perp BOA$), $CD \perp OB$.³⁸ Però aplicant el teorema del sinus (secció 25) als triangles $\triangle CEO$, $\triangle CDO$ tenim

$$\bigcirc EC : \bigcirc OC : \bigcirc DC = \sin COE : 1 : \sin COD = \sin AC : 1 : \sin BC;^{39}$$

mentre que, novament pel teorema del sinus,

$$\bigcirc EC : \bigcirc DC = \sin CDE : \sin CED.$$

³⁸ Sempre que dos plans es tallen perpendicularment, un pla perpendicular a una recta continguda en un d'ells talla l'altre en una recta perpendicular a la recta intersecció dels plans inicials.

³⁹ La igualtat $\sin COE = \sin AC$ només és certa sobre l'esfera de radi 1. Aquí és on hauria d'anar l'observació que el radi és 1 que Bolyai fa a la secció anterior. Si el radi és r , $AC = r \cdot \angle COE$. Curiosament ni Hoüel ni Halsted fan cap comentari. Kárteszy només parla a la secció anterior de «obscure insertion».

Per tant,

$$\sin AC : \sin BC = \sin CDE : \sin CED;$$

però $\angle CDE = \pi/2 = \angle CBA$, i $\angle CED = \angle CAB$. Conseqüentment,

$$\sin AC : \sin BC = 1 : \sin A. \quad \square$$

La trigonometria esfèrica, que se segueix d'aquí, ha quedat establerta, doncs, independentment de l'axioma XI.

27 Longitud d'equidistants

Proposició 27.1. *Si AC i BD són perpendiculars a AB , i CAB es trasllada al llarg de AB tindrem, denotant amb \widetilde{CD} la trajectòria⁴⁰ del punt C , i posant $u = \angle CAD$, $v = \angle ADB$,*

$$\widetilde{CD} : AB = \sin u : \sin v.$$

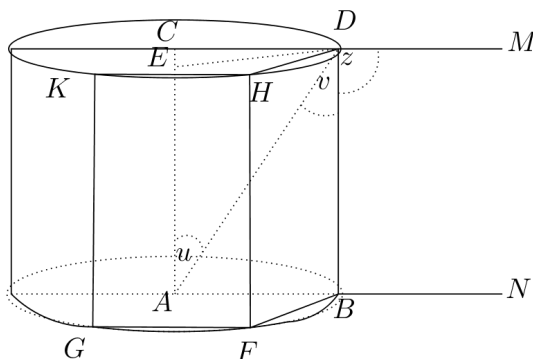


Figura 12

Demostració. Sigui $DE \perp CA$; en els triangles $\triangle ADE, \triangle ADB$ (per la secció 25)

$$\odot ED : \odot AD : \odot AB = \sin u : 1 : \sin v.$$

Girant $BACD$ al voltant de AC , B descriu $\odot AB$, i D descriu $\odot ED$; i denotem aquí amb $\odot \widetilde{CD}$ el camí de l'esmentat \widetilde{CD} . A més, sigui $BFG \dots$ qualsevol polígon inscrit a $\odot AB$.

⁴⁰ Observem que aquesta trajectòria no és ni recta ni horocicle; són corbes *equidistants*. La seva longitud és el límit de les poligonals inscrites. Tot i que Bolyai no ho fa, indicaré les equidistants amb una titlla per distingir el segment CD de l'equidistant entre C i D , que denotarem \widetilde{CD} .

Traçant plans a través de tots els costats BF, FG, \dots perpendiculars a $\odot AB$ es forma a $\odot CD$ una altra figura poligonal amb el mateix nombre de costats i podem demostrar, com a la secció 23, que

$$\widetilde{CD} : AB = \widetilde{DH} : BF = \widetilde{HK} : FG \dots$$

En efecte, amb la notació de la figura E es veu fàcilment que $c = c'$; a partir

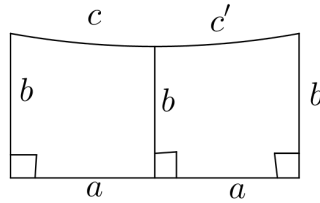


Figura E

d'aquí, amb el procés de pas al límit com a la secció 23, es veu que c/a depèn només de b . És a dir, *el quocient de longituds entre una recta i una seva equidistant a distància b només depèn de b .*

Així,

$$\widetilde{DH} + \widetilde{HK} \dots : BF + FG \dots = \widetilde{CD} : AB.$$

Si cadascun dels costats BF, FG, \dots es fa tendir cap al límit zero, és clar que tindrem

$$\begin{aligned} BF + FG + \dots &\rightarrow \odot AB \quad \text{i} \\ \widetilde{DH} + \widetilde{HK} + \dots &\rightarrow \odot ED. \end{aligned}$$

Per tant, també

$$\odot ED : \odot AB = \widetilde{CD} : AB.$$

Però tenim

$$\odot ED : \odot AB = \sin u : \sin v.$$

Consegüentment,

$$\widetilde{CD} : AB = \sin u : \sin v. \quad \square$$

Observem ara que si AC s'allunya de BD cap a l'infinit, $\widetilde{CD} : AB$, i per tant, també $\sin u : \sin v$, es manté *constant*; però en aquesta situació u tendeix a $\pi/2$ (com hem vist a la secció 1), i DA tendeix a ser paral·lela a BA . Com que l'angle de paral·lelisme és el mateix per la dreta de BD que per l'esquerra, tenim que v tendeix a $z = \angle BDM$ on DM és la paral·lela a BN (z és l'angle de paral·lelisme de BD).

Per tant,

$$\widetilde{CD} : AB = 1 : \sin z.$$

Observem que també hem demostrat que la relació entre els costats del quadrilàter de Lambert (un quadrilàter amb tres angles rectes) $ABDE$ és

$$\bigcirc ED : \bigcirc AB = 1 : \sin z.$$

28 Angle de paral·lisme. Primera expressió

Proposició 28.1. Si $BN \parallel AM$, i C està a \overrightarrow{AM} , i $AC = x$, tindrem

$$X = \sin u : \sin v,$$

on $u = \angle BCA$ i $v = \angle CBN$.

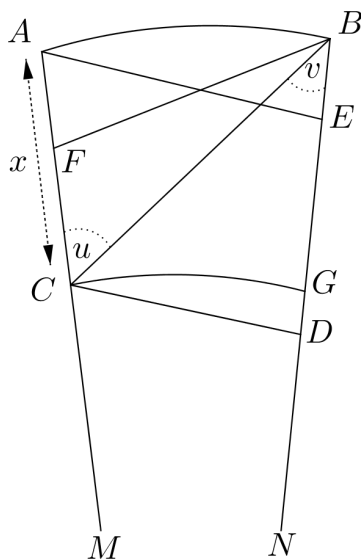


Figura 13

Demostració. En efecte, si CD i AE són perpendiculars a BN , i BF és perpendicular a AM , tindrem (com a la secció 27)

$$\bigcirc BF : \bigcirc DC = \sin u : \sin v.$$

Però evidentment $BF = AE$, ja que els triangles ABE i AFB són congruents (per hipòtesi $\angle FAB = \angle ABE$); per tant,

$$\bigcirc EA : \bigcirc CD = \sin u : \sin v.$$

Però a l'horoesfera d'eix \overrightarrow{AM} (que talla AMB en l'horocicle \widehat{AB}) la circumferència de centre B i radi l'horocicle \widehat{BA} és la mateixa que la circumferència de centre E i radi EA .

El mateix passa sobre l'horoesfera d'eix \overrightarrow{CM} (que talla AMB en l'horocicle \widehat{CG}), la circumferència de centre G i radi l'horocicle \widehat{GC} és la mateixa que la circumferència de centre D i radi DC .

Com que la geometria de l'horoesfera és euclidiana, tenim

$$\odot EA : \odot DC = \widehat{AB} : \widehat{CG} = X.$$

Per tant, també

$$X = \sin u : \sin v. \quad \square$$

Observem finalment que aquesta expressió dona lloc a una primera fórmula per a l'angle de paral·lelisme, ja que quan C s'acosta a F , tenim

$$X = 1 / \sin \Pi,$$

on Π és l'angle de paral·lelisme de BF , ja que u tendeix a $\pi/2$ i v a Π . I X és la X majúscula de $x = AF$, que sabem que és igual a $X = I^{x/i}$ on I és la I majúscula de i .

29 Angle de paral·lelisme. Segona expressió

Proposició 29.1. Si $\angle BAM = \pi/2$, $AB = y$ i $BN \parallel AM$ tindrem, a S ,

$$Y = \cot \frac{1}{2} u,$$

on $u = \angle ABN$, és l'angle de paral·lelisme.

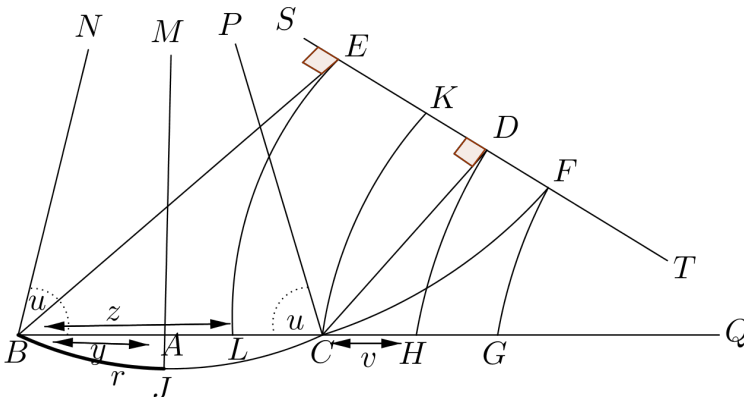


Figura 14

Demostració. En efecte, si suposem $AB = AC$, $CP \parallel AM$ (i per tant $BN \parallel CP$), i

$$\angle PCD = \angle QCD,$$

podem traçar DS perpendicular a CD i tal que $DS \parallel CP$, ja que hem vist a la secció 19 que tota recta per C talla l'horocicle d'eix \overrightarrow{CP} en un cert punt C' i llavors (secció 8) la mediatriu de CC' és la recta DS considerada.

Ara, com que l'angle de paral·lisme és igual per la dreta que per l'esquerra (secció 1), $DT \parallel CQ$. A més, si tracem BE perpendicular a DS tindrem, per la transitivitat del paral·lisme (secció 7) $DS \parallel BN$, i per la propietat simètrica i la independència del punt (secció 6), $BN \parallel ES$; a més, pel fet de ser $DT \parallel CG$, tindrem també $BQ \parallel ET$; consegüentment, pel mateix motiu anterior (secció 1),

$$\angle EBN = \angle EBQ.$$

Sigui \widehat{BCF} l'horocicle d'eix BN , i \widehat{FG} , \widehat{DH} , \widehat{CK} , \widehat{EL} , els horocicles d'eixos FT , DT , CQ i ET respectivament; evidentment (com que aquests horocicles són equidistants, secció 22), $HG = DF$ i $DK = HC$.

Però a més $DF = DK$, com es desprèn de l'observació següent. A la figura 14 (o a la figura F) tenim $CD \perp ET$ amb CQ i CP les paral·leles a ET des de C , per la dreta i l'esquerra, respectivament.

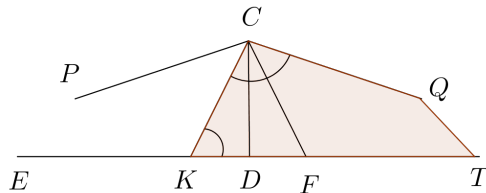


Figura F

Sabem que $\angle DCP = \angle DCQ$. Tenim també, a la figura 14, el punt K que pertany a l'horocicle de CQ , i compleix, doncs, que $\angle QCK = \angle CKT$, i el punt F que pertany a l'horocicle de CP per C , i compleix, doncs, que $\angle KFC = \angle FCP$. D'aquí es dedueix que $\angle CKF = \angle KFC$ i per congruència de triangles $KD = DF$, com volíem comprovar. Tenim, doncs, $HG = DF = DK = HC$.

Per tant, posant com a la figura 14 $AB = y$, $BL = z$, $CH = v$, tenim

$$CG = CH + HG = 2 \cdot CH = 2v.$$

Anàlogament és evident que $BG = 2 \cdot BL = 2z$. Però $BC = BG - CG$; per tant, $y = z - v$, i així (secció 24) $Y = I^{y/i} = I^{(z-v)/i} = Z : V$.

Finalment, per la primera fórmula de l'angle de paral·lisme que hem vist al final de la secció 28,

$$Z = 1 : \sin \frac{u}{2}, \quad V = 1 : \sin \left(\frac{\pi - u}{2} \right).$$

Per tant,

$$Y = \cot \frac{u}{2},$$

o equivalentment,⁴¹

$$u = 2 \arctan Y^{-1}. \quad \square$$

30 Longitud del cercle

No obstant això, pel teorema del sinus (secció 25) és fàcil veure que la solució del problema de trigonometria plana, a \mathbf{S} , requereix l'expressió del cercle en funció del radi; però això es pot obtenir per la rectificació de l'horocicle.

Proposició 30.1. *La longitud, a \mathbf{S} , d'una circumferència de radi y és*

$$\bigcirc y = 2\pi i \sin(y/i).$$

Demostració. Siguin $AB, CM, C'M'$ perpendiculars a \overrightarrow{AC} i sigui B en qualsevol lloc de \overrightarrow{AB} ; denotem (figura 15) $u = \angle ACB, v = \angle ABC, p = AB, y = AC, u' = \angle AC'B, v' = \angle ABC', y' = AC'$. Pel teorema del sinus tindrem

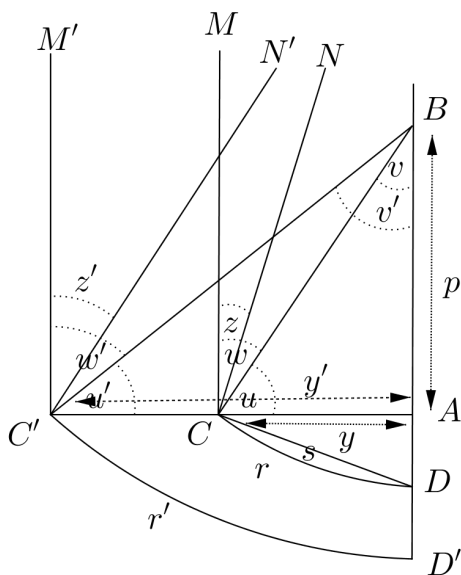


Figura 15

⁴¹ Hem vist a la secció 24, nota 35 al peu de la pàgina 71, que $Y = I^{y/i}$. A la secció 30 es veu que $I = e$, de manera que la fórmula de l'angle de paral·lelisme és

$$u = 2 \arctan e^{-y/i}.$$

$$\begin{aligned}\sin u : \sin v &= \odot p : \odot y, \\ \sin u' : \sin v' &= \odot p : \odot y',\end{aligned}$$

i per tant,

$$\frac{\sin u}{\sin v} \cdot \odot y = \frac{\sin u'}{\sin v'} \cdot \odot y'.$$

Però (per la secció 27) $\sin v : \sin v' = \cos u : \cos u'$; consegüentment,

$$\frac{\sin u}{\cos u} \cdot \odot y = \frac{\sin u'}{\cos u'} \cdot \odot y'$$

o, denotant $w = \pi/2 - u$ i $w' = \pi/2 - u'$,

$$\odot y : \odot y' = \tan u' : \tan u = \tan w : \tan w'.$$

A més, siguin CN i $C'N'$ $\parallel AB$, i \widehat{CD} , $\widehat{C'D'}$ horocicles perpendiculars a la recta AB ; tindrem també, pel fet de ser euclidiana la geometria de l'horoesfera,⁴² secció 21, $\odot y : \odot y' = r : r'$, i així,

$$r : r' = \tan w : \tan w'.$$

Ara suposem que p , començant des de A , augmenta fins a l'infinit; llavors w tendeix a z (complementari de l'angle de paral·lelisme de y) i w' tendeix a z' (complementari de l'angle de paral·lelisme de y'), i per tant també $r : r' = \tan z : \tan z'$.

Denotem amb i la constant $r : \tan z$ (independent de r).⁴³

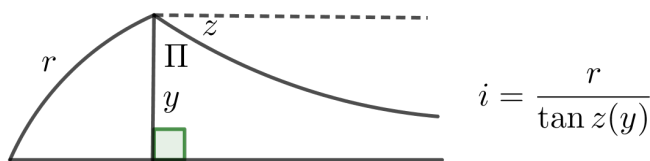


Figura G

Observem ara que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{i \tan z}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{i}{y} \cot(2 \arctan Y^{-1}) = \lim_{y \rightarrow 0} i \frac{I^{y/i} - I^{-y/i}}{2y} = 1,$$

42 La circumferència de centre C i radi CD que obtenim en girar CD en el pla ortogonal a CB és al mateix temps la circumferència euclidiana sobre l'horoesfera de radi $r = \widehat{CD}$.

43 Aquesta i , que no s'ha de confondre amb la unitat imaginària, fa el paper de la curvatura del pla hiperbòlic, que seria constant negativa igual a $-i^2$. Tindrem, doncs, sempre, amb la notació de la figura 15, $r = i \tan z$.

i així,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan z} = i.$$

Equivalentment,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2yI^{\frac{y}{i}}}{I^{\frac{2y}{i}-1}} = i.$$

Però sabem que el límit d'aquesta expressió (quan $y \rightarrow 0$) és (Hôpital)

$$\frac{i}{\ln I}.$$

Per tant,

$$\frac{i}{\ln I} = i,$$

i

$$I = e = 2.7182818\dots,$$

nombre que brilla també aquí de manera remarcable. Denotant a partir d'ara amb i la distància a la qual correspon una I igual a e , tindrem

$$r = i \tan z.$$

Però, com que la geometria de l'horoesfera és euclidiana, $\bigcirc y = 2\pi r$; per tant,

$$\begin{aligned} \bigcirc y &= 2\pi i \tan z = 2\pi i \cot(\Pi) \\ &= 2\pi i \cot(2 \arctan Y^{-1}) = 2\pi i \frac{1 - Y^{-2}}{2Y^{-1}} = 2\pi i \frac{Y - Y^{-1}}{2} = 2\pi i \sinh(y/i). \quad \square \end{aligned}$$

Recopilació. Resumim aquí les relacions a què donen lloc un parell d'horocicles i que s'han obtingut a les seccions 28, 29 i 30.

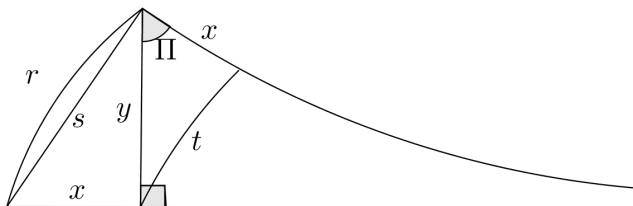


Figura H

$$\begin{aligned} r &= i \sinh(y/i) = i \cot \Pi(y) = 2i \sinh(s/2i), \\ \frac{r}{t} &= \cosh(y/i) = e^{x/i} = \frac{1}{\sin \Pi(y)}, \quad t = i \tanh(y/i), \\ e^{y/i} &= \cot(\Pi(y)/2). \end{aligned}$$

31 Trigonometria

Per a la resolució trigonomètrica de tots els triangles rectangles (a partir de la qual la resolució de tots els triangles és fàcil), a **S**, són suficients tres equacions: concretament (a, b denoten els costats, c la hipotenusa i α, β els angles oposats als costats) aquestes equacions seran les que expressaran les relacions

1r, entre a, c, α ;

2n, entre a, α, β ;

3r, entre a, b, c .

D'aquestes equacions se n'obtenen tres més per eliminació.

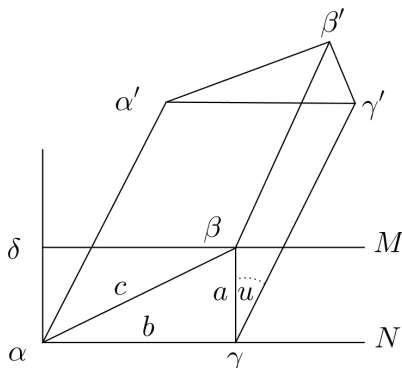


Figura 16

I. **Teorema del sinus.** De la secció 25 (teorema del sinus) i de la secció 30 (longitud del cercle) resulta que

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\bigcirc c}{\bigcirc a} = \frac{\sinh(c/i)}{\sinh(a/i)},$$

és a dir,

$$\sin \alpha \cdot \sinh(c/i) = \sinh(a/i)$$

(equació per a c, a, α).

II. **Teorema del cosinus.** De la secció 27 es dedueix que (si $\beta M \parallel \gamma N$)

$$\cos \alpha : \sin \beta = 1 : \sin z;$$

on z és l'angle de paral·lelisme de a , però, com hem vist a la secció 29, $z = 2 \arctan e^{-a/i}$, que equival a

$$\frac{1}{\sin z} = \cosh(a/i);$$

per tant,

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \cosh(a/i),$$

és a dir,

$$\cos \alpha = \sin \beta \cdot \cosh(a/i),$$

(equació per a α , β i a).

III. Teorema de Pitàgores. Si $\alpha\alpha'$ és perpendicular al pla $\beta\alpha\gamma$, i $\widetilde{\beta\beta'}$ i $\widetilde{\gamma\gamma'}$ són equidistants respectives a $\alpha\alpha'$ (secció 27), i el pla $\beta'\alpha'\gamma'$ és perpendicular a $\alpha\alpha'$ manifestament (com a la secció 27),⁴⁴

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{\beta\beta'}}{\widetilde{\gamma\gamma'}} &= \frac{1}{\sin u} = \frac{1}{2}(A + A^{-1}); \\ \frac{\widetilde{\gamma\gamma'}}{\alpha\alpha'} &= \frac{1}{2}(B + B^{-1}); \\ \frac{\widetilde{\beta\beta'}}{\alpha\alpha'} &= \frac{1}{2}(C + C^{-1}); \end{aligned}$$

consegüentment,

$$\frac{1}{2}(C + C^{-1}) = \frac{1}{2}(A + A^{-1}) \frac{1}{2}(B + B^{-1}),$$

o

$$(e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}})(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}}),$$

és a dir,

$$\cosh(c/i) = \cosh(a/i) \cosh(b/i)$$

(equació per a , b , c).

44 Les igualtats segona i tercera són efectivament conseqüència directa de la secció 27. Però la primera no és clara en absolut, ja que és el quocient d'equidistants, no el quocient entre una equidistant i una recta, situació considerada a la secció 27. Per la secció 23 aquest quocient només depèn de a . Així, com que pel teorema del sinus $\frac{\sinh c}{1} = \frac{\sinh b}{\sin \beta}$, que escric per al cas $i = 1$ per simplificar, quan b tendeix a infinit tenim

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\sinh c}{\sinh b} = \frac{1}{\Pi} = \cosh a,$$

on Π és l'angle de paral·lelisme de a . Així,

$$\frac{\cosh c}{\cosh b} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\cosh c}{\cosh b} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{\sinh^2 b} + \frac{\sinh^2 c}{\sinh^2 b}}}{\sqrt{\frac{1}{\sinh^2 b} + 1}} = \frac{1}{\Pi} = \cosh a.$$

Altres fórmules. Si $\angle\gamma\alpha\delta = \pi/2$, i $\beta\delta \perp \alpha\delta$ ($\alpha\gamma\beta\delta$ és un quadrilàter de Lambert), aplicant el teorema del sinus als triangles $\Delta\alpha\beta\gamma$ i $\Delta\alpha\beta\delta$, tenim respectivament

$$\begin{aligned}\odot c : \odot a &= 1 : \sin \alpha, \\ \odot c : \odot(d = \beta\delta) &= 1 : \cos \alpha\end{aligned}$$

i així (denotant amb $\odot x^2$, per tot x , el producte $\odot x \cdot \odot x$) tindrem evidentment

$$\odot a^2 + \odot d^2 = \odot c^2. \quad (1)$$

Però a la secció 27 hem vist que la relació entre el costat superior i la base d'un quadrilàter de Lambert és

$$\odot d = \odot b \cdot \frac{1}{\sin z},$$

on z és l'angle de paral·lelisme del costat vertical a , igualtat que, com hem vist a II, es pot escriure com a

$$\odot d = \odot b \cdot \cosh(a/i).$$

Substituint aquest valor a l'anterior igualtat (1), i tenint en compte la proposició 30.1, ens dona

$$\sinh^2(c/i) = \sinh^2(b/i) \cosh^2(a/i) + \sinh^2(a/i),$$

que és una *altra* equació per a a, b i c (el segon terme de la qual es pot reduir fàcilment a una forma *simètrica o invariable*).

Finalment, de

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \cosh(a/i)$$

i

$$\frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \cosh(b/i)$$

obtenim (per III)

$$\cot \alpha \cot \beta = \cosh(c/i).$$

32 Geometria diferencial

Encara falta mostrar breument la manera de resoldre *problemes a S*. Després d'haver-ho explicat (a través dels exemples més evidents) veurem finalment què pot donar aquesta teoria.

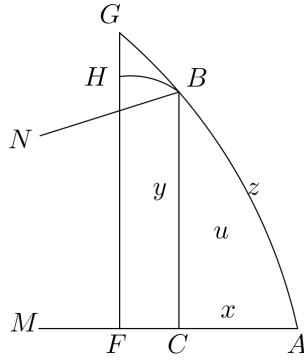


Figura 17

I. Relació entre la derivada i el pendent de la tangent. Sigui AB una línia en un pla, i $y = f(x)$ la seva equació en coordenades rectangulars. Denotem amb Δz qualsevol increment de z , i respectivament $\Delta x, \Delta y, \Delta u$ els increments de x , de y i de l'àrea u corresponent a aquest Δz .⁴⁵ Sigui \widetilde{BH} l'equidistant a FC a distància y , i expressem (a partir de la secció 31) $\frac{\widetilde{BH}}{\Delta x}$ en funció de y i prenem el límit de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quan Δx tendeix a zero.

Es coneixerà llavors també el límit de $\frac{\Delta y}{\widetilde{BH}} = \frac{HG}{\widetilde{BH}}$, ja que, com que $\angle HBC = \pi/2$ (no pot ser evidentment ni més gran ni més petit),⁴⁶ tenim

$$\tan(\angle HBG) = \frac{HG}{\widetilde{BH}}$$

i així,

$$\tan \theta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{HG}{\widetilde{BH}},$$

on θ és l'angle de la *tangent* a BG en el punt B .

Concretament, recordant la relació entre la longitud d'una recta i la de la seva equidistant (secció 27), tindrem

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{HG}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{HG}{\Delta x} \frac{\widetilde{BH}}{\widetilde{BH}} = \cosh y \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{HG}{\widetilde{BH}},$$

és a dir,⁴⁷

$$y' = \cosh y \cdot \tan \theta.$$

45 Primer cop que apareix el concepte d'àrea en geometria no-euclidiana. Bolyai no fa cap comentari. L'àrea no-euclidiana no es pot pas definir a partir de dividir la figura en petits quadradets i sumar, com en el cas euclidià, ja que en geometria no-euclidiana no hi ha rectangles. Veurem, en aquesta mateixa secció, com s'ho fa Bolyai per calcular àrees.

46 Que l'angle entre la tangent a l'equidistant i les perpendiculars al segment inicial és $\pi/2$ es coneix com a *lema de Gauss*, ja que apareix per primer cop al *Disquisitiones*.

47 La derivada no és el pendent de la tangent.

II. **Expressió de la mètrica.** Es pot demostrar que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z^2}{\Delta y^2 + \widetilde{BH}^2} = 1.$$

En efecte,

$$\frac{\Delta z^2}{\Delta y^2 + \widetilde{BH}^2} = \frac{BG^2}{GH^2 + \widetilde{BH}^2} = \frac{\frac{BG^2}{\widetilde{BH}^2}}{\frac{GH^2}{\widetilde{BH}^2} + 1}.$$

Per tant,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z^2}{\Delta y^2 + \widetilde{BH}^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{BG^2}{\widetilde{BH}^2}}{\frac{GH^2}{\widetilde{BH}^2} + 1} = \frac{\sec^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = 1.$$

Dividint numerador i denominador de l'anterior expressió per Δx^2 tenim

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 &= \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\widetilde{BH}^2}{\Delta x^2} \\ &= \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \cosh^2(y/i), \end{aligned}$$

que, recordant la relació entre la longitud d'una recta i la de la seva equidistant (secció 27), és

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \cosh^2(y/i).$$

Escriurem aquesta relació com a

$$dz^2 = dy^2 + \cosh^2(y/i) dx^2.$$

Aquesta fórmula permet calcular $\frac{dz}{dx}$, i per tant, per integració, z (expressada en funció de x). Així, doncs, donada una corba *concreta*, podem trobar la seva equació a **S**. Trobem com a exemple l'equació de l'horocicle.

Equació de l'horocicle. Sigui \overrightarrow{AM} l'eix de l'horocicle **L**; llavors qualsevol \overrightarrow{CB} que parteixi de \overrightarrow{AM} talla **L** (ja que, per la secció 18, tot pla que contingui \overrightarrow{CB} talla l'horoesfera corresponent en una circumferència, la qual té dos punts al pla de l'horocicle). Si BN és un altre eix de **L** i prenem CB perpendicular a AM tenim

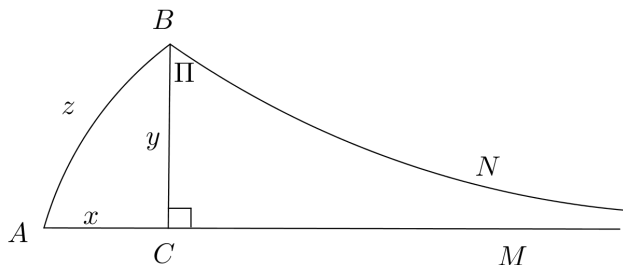


Figura I

$$X = 1 : \sin CBN \quad (\text{secció 28})$$

i

$$Y = \cot \frac{1}{2} CBN \quad (\text{secció 29}),$$

per tant,

$$Y = X + \sqrt{X^2 - 1},$$

o

$$e^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{x}{i}} + \sqrt{e^{\frac{2x}{i}} - 1},$$

o equivalentment,

$$\cosh(y/i) = e^{x/i},$$

que és l'equació de l'horocicle buscada.⁴⁸

Longitud de l'horocicle. Derivant l'expressió anterior tenim

$$\frac{dy}{dx} = X(X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ara bé, amb la notació de la figura 17, i amb el que hem vist a les pàgines 76 i 77, tenim

$$\frac{\widetilde{BH}}{\Delta x} = 1 : \sin CBN = X,$$

i així,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\widetilde{BH}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\widetilde{BH}} = \frac{dy}{dx} \frac{1}{X} = (X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

⁴⁸ La gràfica, per a valors una mica grans de x , és molt pròxima a la gràfica de la recta $y = x + \ln(2)$.

Per tant,

$$\begin{aligned}
 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy^2}{\widetilde{BH}^2} &= X^2(X^2 - 1)^{-1}, \\
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dz^2}{\widetilde{BH}^2} &= X^2(X^2 - 1)^{-1}, \\
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dz}{\widetilde{BH}} &= X(X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}, \\
 \frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\widetilde{BH}} \frac{\widetilde{BH}}{\Delta x} &= X^2(X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Integrant aquesta darrera expressió obtenim la fórmula per a la longitud d'un segment d'horocicle en funció de la corda

$$z = \int \frac{e^{2x/i}}{\sqrt{e^{2x/i} - 1}} = i(X^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = i(Y - X) = i(\cot(\Pi/2) - (1/\sin \Pi)) = i \cot \Pi,$$

on $\Pi = \Pi(y) = \angle CBN$ és l'angle de paral·lelisme (fórmula que ja havíem obtingut a la secció 30).

III. Àrea d'un rectangle mixtilini. Manifestament (figura 17),

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{HFCBH}{\Delta x},$$

la qual (si no està donada en funció de y) s'ha d'expressar primer en termes de y , i després s'obté u per integració.

Calculem ara l'àrea d'un rectangle mixtilini format per tres rectes perpendiculars i l'equidistant corresponent.⁴⁹

49 Bolyai ha definit, a l'inici d'aquesta secció, un sistema de coordenades x, y en el pla no-euclidià tals que $x = ct$ són rectes i $y = ct$ són equidistants. Està així en la situació estudiada per Gauss en el *Disquisitiones* (publicat cinc anys abans que el treball de Bolyai), on es prova que, si l'element de longitud és $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$, l'element d'àrea és $dS = \sqrt{EG - F^2} du dv$. Per tant, l'element d'àrea de Bolyai és $dS = \cosh(y/i) dx dy$. I ara l'àrea d'una figura es calcula per integració.

Recordem que el pas de l'element de longitud ds a l'element d'àrea es fa considerant la regió de superfície entre els punts de coordenades $(u, v), (u + du, v), (u, v + dv), (u + du, v + dv)$ i observant que la longitud del costat $(u, v), (u + du, v)$ és $\sqrt{E} du$ i la longitud del costat $(u, v), (u, v + dv)$ és $\sqrt{G} dv$, i l'angle ω en (u, v) d'aquests costats compleix $\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}$. El paral·lelogram pla amb aquests costats i angle té àrea

$$\sqrt{E} du \sqrt{G} dv \sin \omega = \sqrt{E}\sqrt{G} \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}} du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

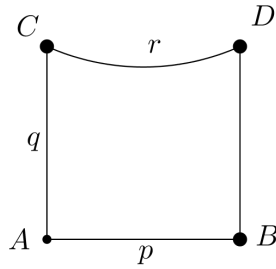


Figura J

Si posem, amb la notació de la figura 12, $AB = p$, $AC = q$, $CD = r$, i $CABDC = s$, es pot veure (com a II) que⁵⁰

$$\frac{ds}{dq} = r.$$

En efecte, per definició de derivada

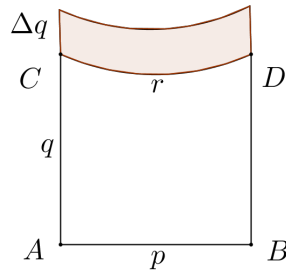


Figura K

$$\frac{ds}{dq} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\text{\`area ratllada}}{\Delta q} = r,$$

ja que l'àrea ratllada és (si r és petit) com un rectangle i té àrea $r \times \Delta q$.

Però sabem que $r = p \sinh(q/i)$ de manera que

$$\frac{ds}{dq} = p \sinh(q/i),$$

que integrant dona

$$\text{\`area rectangle mixtilini} = s = pi \sinh(q/i).$$

Es pot també establir aquest resultat sense integració.

⁵⁰ Bolyai usarà a bastament la idea que *la derivada del volum és l'àrea* i que *la derivada de l'àrea és la longitud*. Afirmacions certes si es precisa el context. Concretament són certes sobre tubs si es deriva respecte al radi.

Si establim, per exemple, l'equació del cercle (apartat III de la secció 31), de la recta (apartat II de la secció 31), d'una cònica (del que precedeix), es podran expressar també les àrees limitades per aquestes línies.

Volums. Sigui t la superfície equidistant a una figura plana p , a distància q , és a dir, la figura que s'obté a partir de p pujant la perpendicular al pla en cada punt de p .

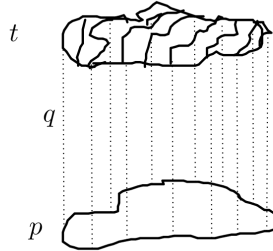


Figura L

El quocient entre les àrees de t i p és com la raó de potències segones de línies homòlogues, és a dir, com $\cosh^2(q/i)$. Equivalentment, si denotem igual la figura i la seva àrea, $t = p \cdot \cosh^2(q/i)$.

És fàcil veure, a més, que el càlcul del volum, tractat de la mateixa manera, exigeix dues integracions (ja que la mateixa diferencial no es pot determinar més que per integració); cal, abans de tot, investigar el volum contingut entre p i t , i el conjunt de totes les rectes perpendiculars a p que uneixen les vores de p i t . Es troba, per al volum d'aquest sòlid (sigui mitjançant la integració, sigui d'una altra manera),

$$\frac{1}{8} p i \left(e^{\frac{2q}{i}} - e^{-\frac{2q}{i}} \right) + \frac{1}{2} p q.$$

En efecte, per integració només hem d'aplicar el principi de Cavalieri equidistant, i tenim

$$\text{volum cilindre mixtilini} = \int_0^q p \cosh^2(y/i) dy = \frac{1}{4} p i \sinh(2q/i) + \frac{1}{2} p q.$$

Les superfícies de cossos es poden determinar també a **S**, així com les *curvatures*, les *involutes* i *evolutes* de qualsevol línia, etc.

Referent a la curvatura, en el sistema **S**, o bé serà la curvatura de la mateixa línia **L** o es determinarà sigui pel radi d'un cercle, sigui per la *distància* d'una recta a la corba equidistant a aquesta recta; i és fàcil veure, després de tot el que precedeix, que no hi ha, en un pla, altres línies uniformes més que les línies **L**, les línies circulars i les corbes equidistants a línies rectes.

IV. **Àrea del cercle.** Per al cercle (com a III) la derivada de l'àrea és la longitud,

$$\frac{d\odot x}{dx} = \circ x,$$

per tant, tenint en compte la fórmula de la longitud del cercle (secció 30), i integrant, tenim que l'àrea del cercle de radi x a \mathbf{S} és

$$\begin{aligned} \odot x &= \int_0^x 2\pi i \sinh(x/i) dx = 2\pi i^2 \left[\cosh(x/i) \right]_0^x \\ &= 2\pi i^2 (\cosh(x/i) - 1) = 4\pi i^2 \sinh^2(x/2i). \end{aligned}$$

V. **Àrea entre horocicles.** L'àrea $CABDC = u$ (figura 9 o figura M) acotada per l'horocicle $\widehat{AB} = r$, el seu equidistant $\widehat{CD} = y$ i els segments $AC = BD = x$, compleix, com en casos anteriors, que la seva derivada respecte a x és y , és a dir, $\frac{du}{dx} = y$.

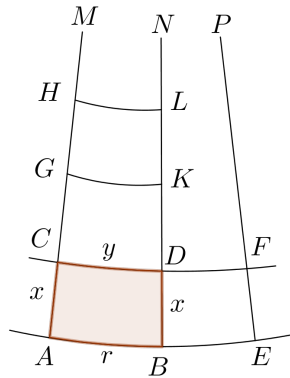


Figura M

A més, tal com hem vist a la secció 28,

$$y = r e^{-\frac{x}{i}}$$

de manera que, integrant,

$$u = \int_0^x r e^{-\frac{x}{i}} dx = \left[-i r e^{-x/i} \right]_0^x = r i (1 - e^{-\frac{x}{i}}).$$

Si x creix fins a infinit, llavors, a \mathbf{S} , $e^{-\frac{x}{i}}$ tendeix a zero, i així denotant amb $A(r)$ l'àrea entre dos eixos del mateix horocicle, a distància horocíclica r , és

$$A(r) = \lim_{x \rightarrow \infty} u = r i.$$

És aquest límit el que anomenarem *grandària* de $MABN$.

Volum. Anàlogament es troba que, si p és una figura d'una horoesfera \mathbf{F} , l'espai inclòs per p i el conjunt d'eixos de \mathbf{F} traçats pels diversos punts de la vora de p és igual a $\frac{1}{2}pi$. En efecte, novament pel principi de Cavalieri i el fet que la relació entre les àrees és el quadrat de la relació entre les longituds, tenim

$$\text{volum cilindre horoesfèric} = \int_0^\infty p e^{-2x/i} dx = p \left[-\frac{i}{2} e^{-2x/i} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} p i.$$

VI. **Àrea de l'esfera.** Siguin (figura N) $2u = \angle CAC'$ l'angle en el centre del casquet esfèric z , p la circumferència d'un cercle màxim, i x l'arc FC (de l'angle u). Es tindrà, pel teorema del sinus (secció 25),

$$1 : \sin u = p : \text{O}BC,$$

d'on

$$\text{O}BC = p \sin u.$$

També tenim

$$x = \frac{pu}{2\pi}, \quad dx = \frac{p du}{2\pi}.$$

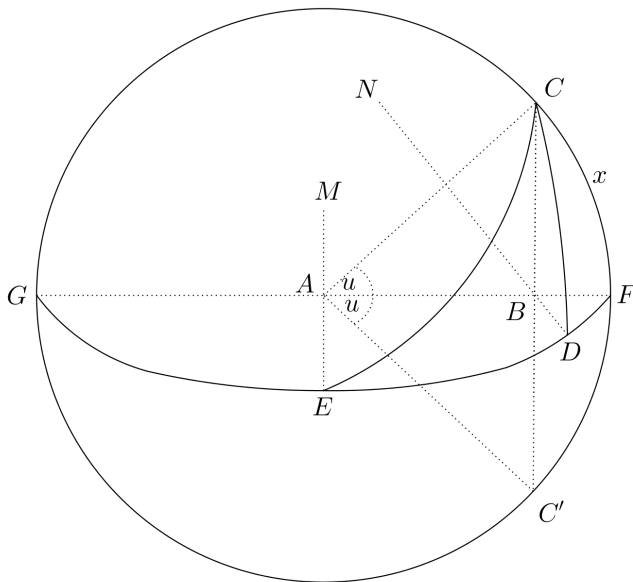


Figura N

A més,

$$\frac{dz}{dx} = \text{O}BC,$$

i per tant,

$$\frac{dz}{du} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{du} = p \sin u \cdot \frac{p}{2\pi} = \frac{p^2}{2\pi} \sin u,$$

i, integrant,⁵¹ tenim

$$\text{\`area del casquet} = z = \int_0^u \frac{p^2}{2\pi} \sin u \, du = \frac{p^2}{2\pi} [-\cos u]_0^u = \frac{\text{sinv } u}{2\pi} p^2.$$

Imaginem l'horoesfera **F** sobre la qual està situada la circumferència p (passant pel centre F del casquet esfèric).⁵² Tracem per AF i AC els plans FEM i CEM , perpendiculars a **F**, i que tallen **F** seguint \widehat{FEG} i \widehat{CE} ; i considerem l'horocicle \widehat{CD} (traçat per C perpendicularment a \widehat{FEG}) i l'horocicle \widehat{CF} .

Com que l'angle entre horocicles és l'angle entre els seus plans (secció 20) tindrem $\angle CEF = u$; a més com que p està contingut a l'horoesfera (és una circumferència de centre E i radi \widehat{EF}) i la geometria de l'horoesfera és euclidiana, la seva longitud, que també anomenem p , és $p = 2\pi \cdot \widehat{EF}$.

També tenim clarament $\widehat{FD} = \widehat{EF}(1 - \cos u)$, d'on

$$\frac{\widehat{FD}}{p} = \frac{\text{sinv } u}{2\pi},$$

i així,

$$z = \widehat{FD} \cdot p.$$

Com que $p = \pi \cdot \widehat{FGD}$, també tenim

$$z = \pi \cdot \widehat{FD} \cdot \widehat{FDG}.$$

Però⁵³

$$\widehat{FD} \cdot \widehat{FDG} = \widehat{FC} \cdot \widehat{FC};$$

consegüentment,

$$z = \pi \cdot \widehat{FC} \cdot \widehat{FC} = \odot \widehat{FC}, (\text{a } \mathbf{F}).$$

51 La notació «sinv» que utilitza Bolyai fa referència a la funció «versinus» donada per $\text{sinv } \theta = 1 - \cos \theta$. En el cas euclidià, $z = \frac{\text{sinv } u}{2\pi} p^2 = 2\pi r^2(1 - \cos u) = 2\pi r h$, on h és l'altura del casquet. Observem que de la fórmula de l'àrea del casquet es dedueix immediatament l'àrea de l'esfera, considerant-la com un casquet d'angle $u = \pi$. Obtenim que l'àrea de l'esfera és p^2/π , resultat que Bolyai retrobarà més endavant.

52 La circumferència p és la circumferència FCG de la figura N. Les altres corbes que apareixen a la figura, EC , ED , etc., estan sobre l'horoesfera d'eix EM , són horocicles, que no estan sobre l'esfera de centre A i radi AF .

53 Observem que el triangle euclidià EFC , de costats horocíclics, és isòsceles, i l'horocicle \widehat{CD} és una altura d'aquest triangle. Aquests triangles compleixen $\widehat{CF}^2 = 2 \cdot \widehat{EF} \cdot \widehat{FD}$, com es veu fàcilment calculant el sinus de $u/2$ (els angles són $\angle FEC = u$, $\angle EFC = \angle ECF = \pi/2 - u/2$).

Ara sigui $BJ = CJ = r$ (figura 14, pàgina 77, i figura O); hem vist a la secció 30 que la relació entre la longitud r de l'horocicle i la perpendicular $y = AB$

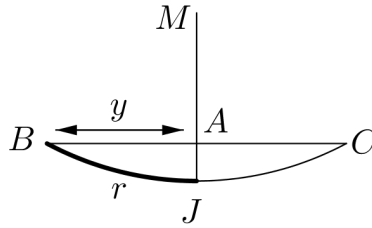


Figura O

entre els eixos és $r = i \sinh(y/i)$, i així l'àrea a F de la circumferència de centre B i radi $r = BJ$ és

$$\odot 2r = \pi(2r)^2 = 4\pi i^2 \sinh^2(y/i).$$

Però hem vist a IV que

$$\odot 2y = 4\pi i^2 \sinh^2(y/i),$$

per tant,

$$\odot 2r \text{ (a F)} = \odot 2y.$$

Aplicant aquesta relació entre l'horocicle $2r$ i la seva corda $2y$ a l'horocicle x i la seva corda FC tenim que *la superfície z d'un casquet esfèric és igual a la superfície del cercle a S descrit amb la corda FC com a radi.*

Per tant, la superfície total de l'esfera és

$$\text{àrea esfera} = \odot FG \text{ (a F)} = \pi \widehat{FDG}^2 = \widehat{FDG} \cdot p = \frac{p^2}{\pi},$$

i així *les superfícies d'esferes són entre elles com les segones potències dels seus cercles màxims.*

VII. **Volum de l'esfera.** Es troba anàlogament que, a S, el volum de l'esfera de radi x és (recordem que la longitud del cercle màxim és $p = 2\pi i \sinh(x/i)$ i que l'àrea és la derivada del volum)

$$\begin{aligned} V &= \int_0^x \frac{p^2}{\pi} dx = \int_0^x 4\pi i^2 \sinh^2(x/i) dx = 4\pi i^2 \left[\frac{i}{4} \sinh(2x/i) - \frac{x}{2} \right]_0^x \\ &= \pi i^3 \sinh(2x/i) - 2\pi i^2 x. \end{aligned}$$

Àrea i volum de revolució. L'àrea de la superfície generada per revolució de la línia CD , equidistant a distància q de AB (figura 12), al voltant de $p = AB$ és

$$\text{\`area de revoluci\`o} = p\pi i \sinh(2q/i).$$

En efecte, tal com es veu a la figura P, l'element d'àrea és

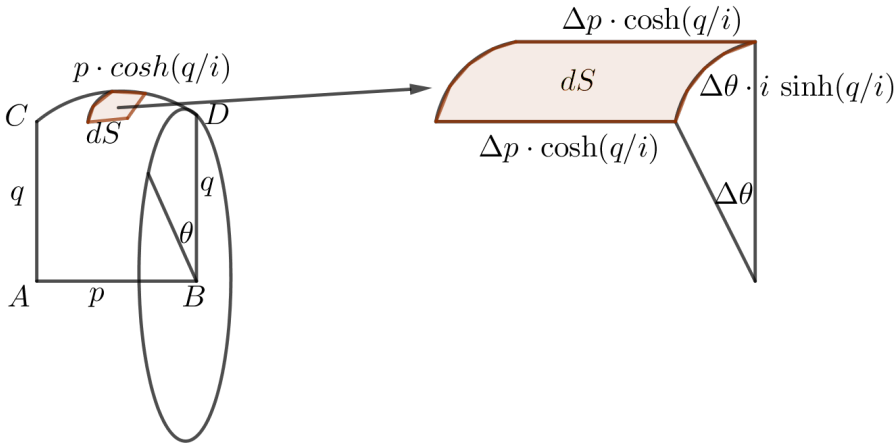


Figura P

$$dS = \Delta p \cdot \cosh(q/i) \cdot \Delta\theta \cdot i \sinh(q/i),$$

i per tant,

$$\text{\`area de revoluci\`o} = \int_0^{2\pi} \int_0^p \cosh(q/i) \cdot i \sinh(q/i) dp d\theta = p\pi i \sinh(2q/i).$$

I el volum del sòlid engendrat per $CABDC$ en girar al voltant de AB és, integrant l'àrea a partir de la fórmula que acabem d'obtenir,

$$\text{volum de revoluci\`o} = \int_0^q p\pi i \sinh(2q/i) dq = p\pi i^2 \sinh^2(q/i).$$

Suprimirem, per abreujar, el mètode pel qual es poden obtenir sense integració tots els resultats obtinguts des de (IV) fins aquí.

La geometria euclidiana com a límit de la no-euclidiana. Es pot demostrar que el límit de tota expressió que contingui la lletra i (i basada, doncs, en la hipòtesi que existeix una magnitud i), quan i creix fins a l'infinit, expressa òbviament la quantitat per Σ (i per consegüent, sota la hipòtesi que no existeix la magnitud i) si és que les equacions no es tornen idèntiques.

Però no s'ha de creure pas que *el sistema es pot canviar a voluntat (ja que està completament determinat en ell mateix i per ell mateix)*; és únicament la *hipòtesi* que pot variar, i que es pot canviar successivament, sempre que això no porti a una absurditat.

Suposant, doncs, que en una tal expressió la lletra i , en el cas que \mathbf{S} sigui la realitat, denota l'única quantitat tal que la seva⁵⁴ $I = e$, però si és Σ el que és realment cert, el límit en qüestió se suposa que s'ha d'agafar en lloc de l'expressió primitiva. Llavors és evident que *totes les expressions originades a partir de la hipòtesi de la realitat de \mathbf{S} seran (en aquest sentit) certes absolutament, encara que sigui completament desconegut si Σ és la realitat o no*. Així, per exemple, de l'expressió obtinguda a la secció 30 s'obté fàcilment (sigui per diferenciació, sigui d'una altra manera) el valor conegut a Σ de la longitud del cercle,

$$\bigcirc y = \lim_{i \rightarrow \infty} 2\pi i \sinh(y/i) = 2\pi y.$$

Anàlogament, prenent límits quan $i \rightarrow \infty$ a la igualtat (apartat I de la secció 31),

$$\sin \alpha \cdot \sinh(c/i) = \sinh(a/i)$$

obtenim

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

I, fent el mateix a la igualtat (apartat II de la secció 31),

$$\cos \alpha = \sin \beta \cdot \cosh(a/i)$$

obtenim

$$\cos \alpha = \sin \beta,$$

i per tant,

$$\alpha + \beta = \pi/2.$$

La *primera* equació de III esdevé idèntica, i per tant és certa a Σ , encara que no hi determini res. De la segona

$$\cosh(c/i) = \cosh(a/i) \cdot \cosh(b/i)$$

que, per Taylor, es pot escriure com a

$$1 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{i^2} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{i^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b^2}{i^2} + \dots\right),$$

deduïm el teorema de Pitàgores

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

⁵⁴ Recordem que la Y de y és $Y = e^{y/i}$ de manera que la I de i és $e^{i/i} = e$.

Aquestes són les equacions fonamentals conegudes de la trigonometria plana a Σ . Es troba a més (a partir de la secció 32), a Σ , per l'àrea i el volum calculats a III, el mateix valor pq (base per altura, p té un significat diferent en cada cas). En efecte,

$$\text{\`area del rectangle} = s = \lim_{i \rightarrow \infty} pi \sinh(q/i) = pq,$$

$$\text{volum del cilindre} = V = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} pq + \frac{1}{4} pi \sinh(2q/i) \right) = pq.$$

Tenim, a partir de IV,

$$\text{\`area del disc} = \odot q = \lim_{i \rightarrow \infty} 2\pi i^2 (\cosh(q/i) - 1) = \pi q^2.$$

De VII, l'esfera de radi q és

$$\text{volum de l'esfera} = V = \lim_{i \rightarrow \infty} (\pi i^3 \sinh(2q/i) - 2\pi i^2 q) = \frac{4}{3} \pi q^3,$$

etc. Els teoremes enunciats al final de VI són evidentment *certs sense condicions*.

33 Recopilació

Falta encara exposar (com hem enunciat a la secció 32) quin és el significat d'aquesta teoria.

I. Falta decidir si Σ o algun **S** és el que té lloc a la realitat.

II. Totes les coses deduïdes de la hipòtesi de la falsedat de l'axioma XI (sempre en el sentit de la secció 32) són *absolutament certes*, i així, en aquest sentit, *no es basen sobre cap hipòtesi*. Hi ha, doncs, una *trigonometria plana* a priori, en la qual quin és l'únic sistema cert resta desconegut, i per tant on romanen desconegudes únicament les magnituds *absolutes* en les expressions, però on un *sol* cas conegut fixaria evidentment tot el sistema. La trigonometria esfèrica, contràriament, està establerta de manera absoluta a la secció 26.

(I tenim, a **F**, una geometria completament anàloga a la geometria plana de Σ).

III. Si s'hagués *establert* que és el sistema Σ el que és vàlid, no restaria res desconegut. Però si s'hagués establert que el sistema Σ no és vàlid, llavors (secció 31), per exemple, *donats de manera concreta* els costats x , y i l'angle rectilini que comprenen, és clar que seria impossible resoldre totalment el triangle, és a dir, determinar *a priori* els altres angles i les relacions del tercer costat als dos costats donats, a menys que no es determinin les quantitats X , Y . Per a això caldria tenir *sota una forma concreta* alguna longitud a de la qual la seva A fos coneguda. Llavors i seria *la unitat natural de longitud* (de la mateixa manera

que e és la base dels logaritmes *naturals*). Si l'existència d'aquesta quantitat i està determinada, veurem com es pot construir, almenys amb una gran aproximació, a la pràctica.

IV. En el sentit explicat a I i II, és evident que totes les coses de l'espai es poden resoldre pel mètode analític modern (molt lloable, quan s'utilitza dins de límits convenients).

V. Finalment, al lector benèvol⁵⁵ no li semblarà inacceptable, en el cas que sigui el sistema S , i no el sistema Σ , el que és vàlid, que es pugui construir una figura rectilínia igual a un cercle.

34 Construcció de l'angle de paral·lelisme

Construcció 34.1. Donat un punt D que no pertany a \overrightarrow{AN} , es demana construir⁵⁶ l'angle que forma la paràlela a AN per D amb la perpendicular DB a AN .

Construcció. (Figura 12). Per D podem traçar $DM \parallel AN$ de la manera següent.

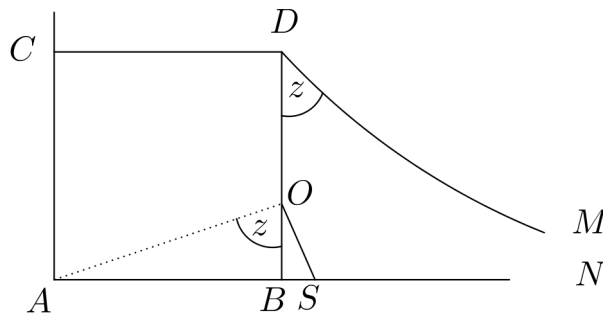


Figura Q

Des del punt D tracem la perpendicular DB a AN ; des de qualsevol punt A de la recta AB tracem AC perpendicular a AN del mateix costat que D respecte a AN i tracem finalment la perpendicular DC a AC . Tindrem un quadrilàter de Lambert (tres angles rectes) i sabem per la secció 27 que

$$\odot CD : \odot AB = 1 : \sin z, \tag{2}$$

on z és l'angle de paral·lelisme de BD . Però $\sin z$ no és > 1 , i per tant AB no és $> DC$. Per tant, un quadrant descrit a partir del centre A a BAC , amb radi = DC

⁵⁵ S'ha de ser benèvol per acceptar la quadratura del cercle!

⁵⁶ Ara i més endavant, construir vol dir anar trobant nous punts a partir dels coneguts amb regla i compàs.

tindrà un punt en comú amb \overrightarrow{BD} que pot ser igual o diferent de B . És a dir, construïm O com a intersecció de la circumferència de centre A i radi $AO = CD$, amb BD .

En el primer cas, en què la intersecció és el punt B , tindrem un quadrilàter de Lambert on el costat superior és igual a la base. Això només passa a Σ . En aquest cas $z = \pi/2$, i $\pi/2$ és, doncs, l'angle de paral·lelisme buscat.

En el segon cas, en què la intersecció de la circumferència de centre A i radi $AO = CD$ amb \overrightarrow{BD} és un punt $O \neq B$, pel teorema del sinus aplicat al triangle $\triangle AOB$ (secció 25), tenim

$$(\odot AO = \odot CD) : \odot AB = 1 : \sin AOB,$$

i per tant, per la igualtat (2), $z = \angle AOB$. Hem construït, doncs, un angle, $\angle AOB$, igual a l'angle de paral·lelisme de DB , com volíem. \square

35 Construcció del segment de paral·lelisme

Es tracta de construir l'invers de l'angle de paral·lelisme. És a dir, donat un angle, construir un segment que el tingui com a angle de paral·lelisme. Això és equivalent a l'enunciat següent.

Construcció 35.1. *Si és el sistema S el que té lloc, podem, com segueix, traçar una línia recta perpendicular a un costat d'un angle agut, i paral·lela a l'altre.*

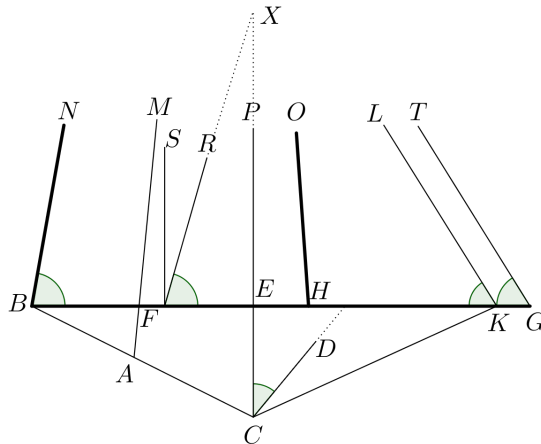


Figura 18

Construcció. Sigui⁵⁷ $AM \perp BC$ i suposem $AB = AC$ suficientment petit perquè, si tracem $BN \parallel AM$, $\angle ABN$ sigui més gran que l'angle donat. Això sempre

⁵⁷ De les seccions 8 i 19 (no la construcció de la tangent sinó el fet que tota recta per un punt B de l'horocicle, diferent de l'eix i la normal, el talla en un altre punt) es dedueix l'existència d'aquesta recta. Només hem de tallar un costat de l'angle amb l'horocicle corresponent de l'altre i traçar la mediatriu entre el vèrtex de l'angle i el punt de tall. Ara la construïm efectivament.

es pot fer, ja que per la fórmula de l'angle del paral·lelisme, quan A s'acosta a B , aquest angle tendeix a $\pi/2$, i superarà, doncs, l'angle agut donat.

Tracem, a més, $CP \parallel AM$ (secció 34), i siguin $\angle NBG, \angle PCD$ iguals l'un i l'altre a l'angle donat, i en el mateix pla AMB . Llavors \overrightarrow{BG} i \overrightarrow{CD} es trobaran; en efecte, si \overrightarrow{BG} (que cau *per construcció* a l'interior de $\angle NBC$) talla \overrightarrow{CP} en E , es tindrà (ja que $BN \simeq CP$) $\angle EBC < \angle ECB$, i per tant $EC < EB$. Siguin $EF = EC, \angle EFR = \angle ECD$ i $FS \parallel EP$; FS caurà dins la regió angular $\angle BFR$, ja que, com que $BN \parallel CP$, i per tant $BN \parallel EP$ i $BN \parallel FS$, es tindrà (ja que estem a **S**, secció 14) $\angle FBN + \angle BFS < \pi = \angle FBN + \angle BFR$. Per tant, $\angle BFS < \angle BFR$. Per consegüent, \overrightarrow{FR} talla \overrightarrow{EP} en un cert punt X . Considerem sobre \overrightarrow{BG} un punt D' tal que $ED' = EX$. Llavors els triangles $\triangle EFX$ i $\triangle ED'C$ són congruents. En particular, $\angle EFX = \angle ECD'$, i per tant D i D' estan alineats, és a dir, \overrightarrow{CD} talla també \overrightarrow{EG} . Podem suposar, doncs, que D és aquest punt de tall.

Sigui ara $DG = DC$ i $\angle DGT = \angle DCP = \angle GBN$. Es tindrà (pel fet de ser $CD \simeq GD$) $BN \simeq GT \simeq CP$. Sigui K el punt on l'horocicle d'eix \overrightarrow{BN} troba \overrightarrow{BG} , que sabem que existeix per la secció 19, i sigui \overrightarrow{KL} un altre eix del mateix horocicle. Es tindrà $BN \simeq KL$, i per tant $\angle BKL = \angle BGL = \angle DCP$. A més, $KL \simeq CP$, i per tant el triangle $\triangle CDK$ és isòsceles, i així $DC = DK$. Per tant, $K = G$, i $GT \parallel BN$. Si ara construïm la mediatriu HO de BG , s'haurà construït, per la secció 8, la paral·lela a BN buscada. I l'angle donat és l'angle de paral·lelisme de BH . □

36 Construcció de la intersecció de rectes i plans

Construcció 36.1. *Es demana trobar la intersecció de la semirecta \overrightarrow{CP} amb el pla MAB .*

Construcció. (Figures 10 i R). Prenem CB perpendicular al pla MAB , BN

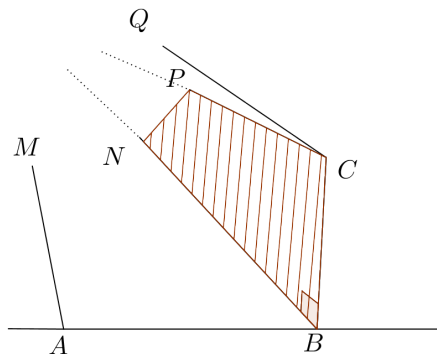


Figura R

perpendicular (en el semiplà BCP) a BC , i $CQ \parallel BN$ (hem vist a la secció 34 com es construeix l'angle de paral·lisme); la intersecció de \overrightarrow{CP} (si aquesta semirecta cau dintre $\angle BCQ$, i aquest és l'únic motiu de construir CQ) amb \overrightarrow{BN} , al pla CBN , i per consegüent amb el pla MAB , es pot determinar. \square

Construcció 36.2. *Es demana trobar la intersecció dels plans PCQ i MAB .*

Construcció. Des d'un punt C de PCQ , construïm la perpendicular CB al pla MAB i la perpendicular CR al mateix pla PCQ . En el pla BCR , tracem BN

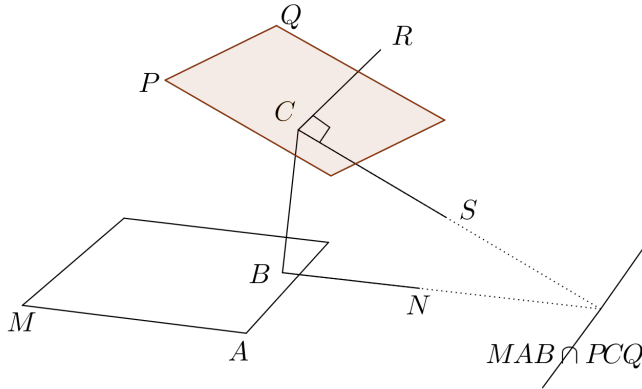


Figura S

perpendicular a BC i CS perpendicular a CR . D'aquesta manera BN serà una recta del pla MAB , i CS del pla PCQ ; i quan s'hagi trobat la intersecció de BN i CS (si té lloc), la perpendicular traçada per aquesta intersecció, dins del pla PCQ , a CS serà evidentment la intersecció dels plans MAB i PCQ . \square

37 Construcció dels punts de l'horocicle

Construcció 37.1. *Construir, sobre tota recta paral·lela a \overrightarrow{BN} , un punt que pertanyi a l'horocicle d'eix \overrightarrow{BN} .*

*Construcció.*⁵⁸ (Figures 7 i T). Sigui \overrightarrow{OM} tal que $OM \parallel BN$. Volem trobar un punt A sobre \overrightarrow{OM} tal que $\angle BAM = \angle ABN$. Per a això construïm (tal com hem vist a la secció 34), fora del pla que conté aquestes dues línies paral·leles,⁵⁹ una semirecta \overrightarrow{GT} tal que $GT \parallel BN$, i elegim G sobre aquesta semirecta de manera que $BG \perp GT$, i fem $GC = GB$; construïm també \overrightarrow{CP} tal que $CP \parallel GT$; considerem

⁵⁸ L'existència del punt es dedueix de la secció 5. Ara es tracta de construir-lo.

⁵⁹ Es pot fer aquesta construcció sense sortir del pla, vegeu [6, p. 171].

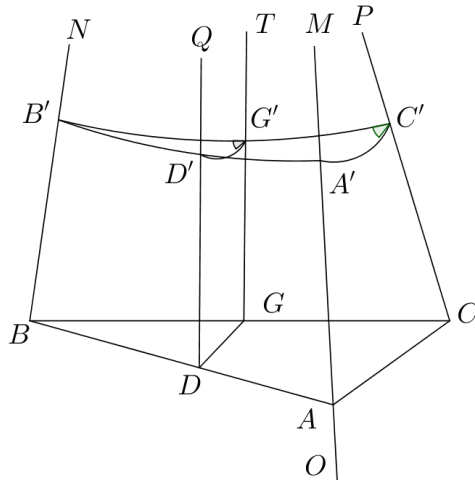


Figura T

a continuació el semiplà que conté la recta GT i forma amb el semiplà TGB un angle igual al que fa amb aquest mateix semiplà el semiplà PCA (observem que PCA és el pla que conté les dues paral·lels (transitivitat) PC i OM).

Busquem a continuació (pel mètode explicat a la secció 36) la recta DQ intersecció dels plans TGD i NBA , i tracem finalment la perpendicular des de B fins a DQ ; aquesta recta talla OM en el punt A que estem buscant.

En efecte, considerem l'horoesfera d'eix $\overrightarrow{B'N}$ on B' és qualsevol punt de \overrightarrow{BN} . Com que l'angle entre horocicles és l'angle entre els plans que determinen, els triangles horocíclics (i, per tant, euclidians) $\triangle B'D'G'$ i $\triangle B'A'C'$ tenen l'angle en B' comú i iguals els angles $\angle B'G'D'$ i $\angle B'C'A'$, i per tant són semblants.

Però com que $BG = GC$ també $B'G' = C'A'$, i per tant també $B'D' = D'A'$, que implica $BD = DA$. Per la propietat de la mediatriu (secció 8) $AM \cong BN$ i, per tant, A pertany a l'horocicle d'eix \overrightarrow{BN} . \square

És fàcil concloure de l'anterior, observant que els horocicles queden determinats pels seus punts extrems (dos punts determinen un únic horocicle), que podem trobar una quarta proporcional, o una mitjana proporcional, i executar d'aquesta manera a F , sense recórrer a l'axioma XI, totes les construccions geomètriques que es fan sobre el pla a Σ .⁶⁰

Així, per exemple, es pot dividir geomètricament el cercle en un nombre qualsevol de parts iguals, si se sap fer aquesta divisió a Σ .

⁶⁰ Ja sabíem que la geometria de l'horoesfera és euclidiana. Ara Bolyai remarca que les construccions que es poden fer en el pla euclidià es poden fer també a l'horoesfera. En els exemples que dona cal trobar intersecció de plans a S , ja que cada horocicle és la intersecció de F amb un pla, i pel resultat que acaba de donar, sap construir el punt corresponent sobre l'horoesfera.

38 Construcció de $\ln 2$

Construcció 38.1. *Es demana construir un segment de longitud $\ln 2$.*

Construcció. (Figura 14 i figura U). Construïm l'angle $\angle NBQ = \frac{\pi}{6}$, i fem (per la secció 35), a **S**, AM perpendicular a \overrightarrow{BQ} i paral·lela a BN , i determinem (per la secció 37) el

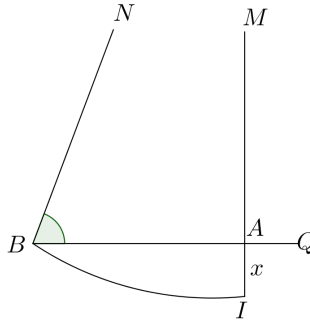


Figura U

punt I tal que $IM \simeq BN$. Tindrem, denotant $IA = x$ (secció 28),

$$X = 1 : \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2,$$

i x estarà construït *geomètricament*.

És a dir, hem construït x tal que $e^{x/i} = 2$, i.e. $x = i \ln 2$. Si estem en una **S** amb $i = 1$ hem construït $\ln 2$. \square

Podem també construir i aproximadament. En efecte, només hem de construir un angle $\angle NBQ$ tal que $\sin NBQ \simeq 1/e$, ja que llavors

$$X = e^{x/i} = 1 : \sin NBQ \simeq e,$$

que implica que $x \simeq i$.

39 Suma d'angles de triangles mixtilinis

Proposició 39.1. *Dos triangles amb la mateixa base i amb el vèrtex oposat sobre l'equidistant de la recta que passa pels punts mitjans dels altres dos costats tenen la mateixa àrea i la mateixa suma d'angles.*

Demostració. (Figura 19). Si (en un pla) \widehat{PQ} i \widehat{ST} són equidistants a la recta MN (secció 27), i AB, CD són perpendiculars a MN i iguals, manifestament, $\triangle DEC \equiv \triangle BEA$; i així els angles (potser mixtilineals) $\angle ECP, \angle EAT$ coincidiran,⁶¹ i $EC = EA$. Si, a més, $\widehat{CF} = \widehat{AG}$ ⁶² llavors $\triangle ACF \equiv \triangle CAG$, i cadascun d'ells és la meitat del *quadrilàter* $FAGC$.

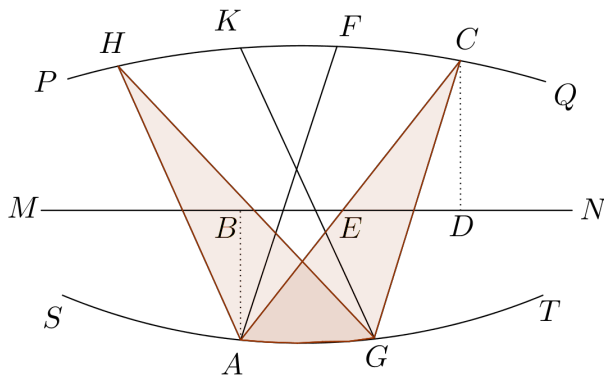


Figura 19

Si $FAGC, HAGK$ són dos quadrilàters d'aquest tipus sobre \widehat{AG} , entre \widehat{PQ} i \widehat{ST} ; la seva equivalència (com a Euclides)⁶³ és evident, com també l'equivalència dels triangles $\triangle AGC, \triangle AGH$, amb la mateixa base \widehat{AG} i amb vèrtexs sobre la línia \widehat{PQ} . Això demostra la primera part de la proposició.

A més, $\angle ACF = \angle CAG, \angle GCQ = \angle CGA$ (igualtat que es podria enunciar dient que *angles alterns interns* entre equidistants simètriques són iguals, figura V) i com que $\angle ACF + \angle ACG + \angle GCQ = \pi$, tenim $\angle CAG + \angle ACG + \angle CGA = \pi$.

61 Recordem que, pel lema de Gauss, nota 46 al peu de la pàgina 85, els angles mixtilinis $\angle DCF$ i $\angle BAG$ són rectes.

62 Hem vist a la pàgina 76 que en un quadrilàter de Lambert de base b , altura y i costat superior z es compleix

$$\sinh z = \sinh b \cdot \cosh(y/i).$$

Com que un quadrilàter de Saccheri de base b , altura y i costat superior z es divideix per la meitat en dos quadrilàters de Lambert, la relació entre els costats és

$$\sinh(z/2) = \sinh(b/2) \cdot \cosh(y/i).$$

Si, amb la notació de la figura 19, baixem la perpendicular de F a MN i d'aquesta intersecció en diem F' , veiem que $FF'DC$ és un quadrilàter de Saccheri. Per tant, tant la longitud FC com la longitud \widehat{FC} queden determinades per les longituds de $F'D$ i CD . En particular, $\widehat{FC} = \widehat{AG}$ implica $FC = AG$.

63 Proposició 35 dels *Elements*: «Paral·lelograms amb la mateixa base i continguts en les mateixes paral·leles són iguals». Aquí i més endavant, l'*equivalència* de triangles es refereix a triangles d'igual àrea. De manera que Bolyai està demostrant que triangles amb la mateixa base i amb el vèrtex oposat en l'equidistant a la recta que talla els altres dos costats del triangle en els seus punts mitjans, tenen igual àrea.

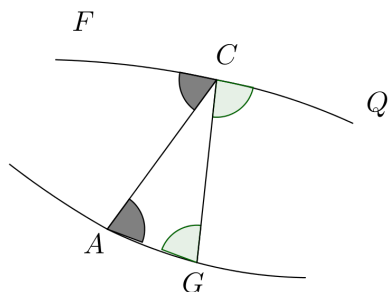


Figura V

Hem demostrat, doncs, que en qualsevol triangle mixtilini $\triangle ACG$ d'aquest tipus, la suma dels seus tres angles és igual a π .

Però, tant si la recta AG coincideix amb \widetilde{AG} (equidistant de MN) com si no, els triangles rectilinis $\triangle AGC$, $\triangle AGH$ tenen la mateixa *suma dels seus angles*.

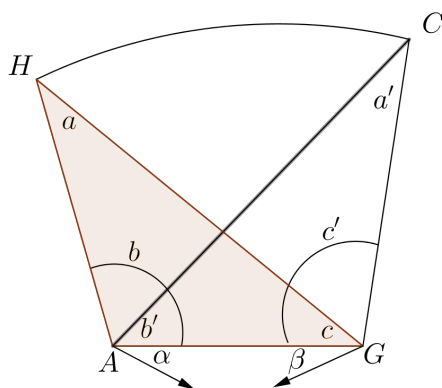


Figura W

En efecte, si denotem amb α, β respectivament els angles en A i G entre el segment AG i l'equidistant \widetilde{AG} tenim $a + b + c + \alpha + \beta = \pi = a' + b' + c' + \alpha + \beta$, d'on $a + b + c = a' + b' + c'$. \square

40 Triangles amb la mateixa àrea i un costat igual

Proposició 40.1. *Si dos triangles rectilinis tenen un costat igual i la mateixa àrea, llavors tenen les sumes dels seus angles iguals.*

Demostració. Considerem els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$. Tracem MN pels punts mitjans de AC i BC i sigui \widetilde{PQ} l'equidistant a MN que passa per C . Observem que llavors els punts A i B pertanyen a l'equidistant de MN simètrica de PQ , i així estem en les hipòtesis de la secció 39.

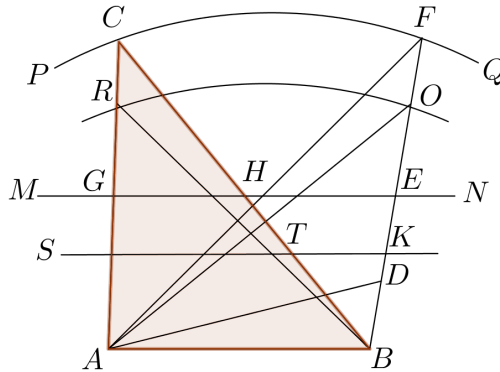


Figura 20

Veiem ara que el punt D , vèrtex del triangle $\triangle ABD$, està sobre la línia \widetilde{PQ} . En efecte, suposem primerament que \overrightarrow{BD} talla MN en el punt E ; prenem en aquest cas F sobre BD amb la condició $EF = EB$; clarament F pertany a \widetilde{PQ} , i per tant (per la secció 39), els triangles ABF i ABC (i per tant ABD) tenen la mateixa àrea. Això implica $F = D$ i, per la secció 39, la proposició queda demostrada en aquest cas.

Si la semirecta \overrightarrow{BD} no talla la recta MN , sigui C el punt on la perpendicular en el punt mitjà de AB talla \widetilde{PQ} ,⁶⁴ i sigui $GS = HT$ de manera que la línia ST talli \overrightarrow{BD} prolongat en un cert punt K (la qual cosa, és evident, es pot fer com s'ha vist a la secció 4); sigui, a més, $SR = SA$, i denotem amb \widetilde{RO} l'equidistant a ST que passa per R . Observem que llavors els punts A i B pertanyen a l'equidistant de ST simètrica de \widetilde{RO} , i així estem en les hipòtesis de la secció 39. El fet que el triangle ara sigui isòsceles és el que permet demostrar que B pertany a aquesta equidistant.

Sigui O la intersecció de \overrightarrow{BK} amb \widetilde{RO} ; llavors (per la secció 39) els triangles $\triangle ABR$ i $\triangle ABO$ tenen la mateixa àrea, i així l'àrea del triangle $\triangle ABC$ seria estrictament més gran que l'àrea del triangle $\triangle ABD$, contra la hipòtesi. Per tant, aquest cas (que BD no talli la recta MN) no es pot donar i la proposició queda demostrada. \square

⁶⁴ Pot canviar el triangle inicial per aquest nou ABC , que és isòsceles, ja que per la secció 39 té la mateixa àrea i la mateixa suma d'angles que l'inicial.

41 Àrea i defecte

Proposició 41.1. *Triangles amb la mateixa àrea tenen la mateixa suma d'angles.*

Demostració. Siguin $\triangle ABC, \triangle DEF$ triangles amb la mateixa àrea. Tracem la recta MN pels punts mitjans de AC i BC , i la recta PQ pels punts mitjans de

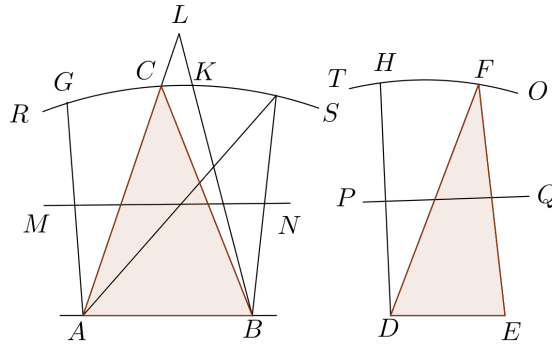


Figura 21

DF i FE . Prenem l'equidistant \widetilde{RS} a MN per C i l'equidistant \widetilde{TO} a PQ per F .

La perpendicular AG a RS serà o bé igual a la perpendicular DH a TO o una d'elles, per exemple DH , serà la més gran. En cada cas, la circumferència de centre A i radi DF té amb \widetilde{RS} algun punt K en comú ($AK = DF$), i per la secció 39, els triangles $\triangle ABK, \triangle ABC$ tenen la mateixa àrea.

Així, els triangles $\triangle ABK$ i $\triangle DEF$ tenen la mateixa àrea i un costat igual, i per tant (per la secció 40) tenen la mateixa suma d'angles. I (per la secció 39) els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle ABK$ també tenen la mateixa suma d'angles. Per tant, la suma d'angles de $\triangle ABC$ coincideix amb la suma d'angles de $\triangle DEF$, com volíem demostrar. \square

Proposició 41.2. *AS, el recíproc de la proposició 41.1 és cert.*

Demostració. En efecte, siguin $\triangle ABC, \triangle DEF$ dos triangles amb la mateixa suma d'angles i construïm un triangle $\triangle ABL$ amb la mateixa àrea que $\triangle DEF$ (figura 21).

Aquests triangles tindran (pel que precedeix) igual suma d'angles, i per tant, també la tindran els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle ABL$. Per tant,

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = \angle CAB + (\angle ABC + \angle CBL) + \angle BLC,$$

d'on

$$\angle BCL + \angle BLC + \angle CBL = \pi.$$

No obstant això (per la secció 31), la suma d'angles de qualsevol triangle, a S , és $< \pi$. Per tant, $L = C$, i el triangle $\triangle ABC$ té la mateixa àrea que $\triangle EDF$. \square

42 L'àrea depèn linealment del defecte

Proposició 42.1. Sigui u el suplementari de la suma d'angles del triangle $\triangle ABC$, i v el del triangle $\triangle DEF$. Llavors

$$\triangle ABC : \triangle DEF = u : v.$$

Demostració. En efecte,⁶⁵ si p és l'àrea de cadascun dels triangles $\triangle ACG$, $\triangle GCH$,

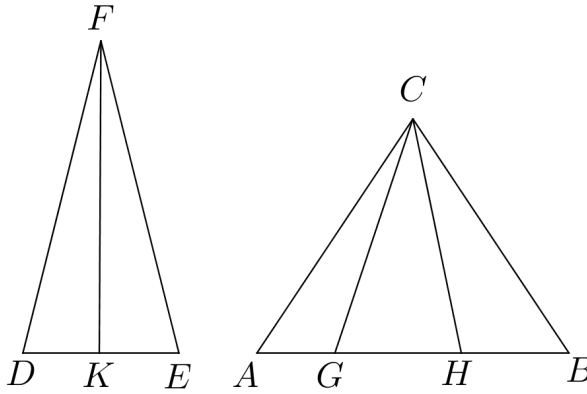


Figura 22

HCB , DFK , KFE podem escriure $\triangle ABC = m \cdot p$, i $\triangle DEF = n \cdot p$.

Si denotem amb s la suma d'angles de qualsevol triangle equivalent a p tindrem

$$ms = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) + (m - 1)\pi = (\pi - u) + (m - 1)\pi,$$

(ja que $\angle AGC + \angle CGH = \pi$, etc.) equivalentment,

$$\pi - u = m \cdot s - (m - 1)\pi = \pi - m(\pi - s);$$

i per tant,

$$u = m(\pi - s).$$

Anàlogament,

$$v = n(\pi - s).$$

Per tant,

$$\triangle ABC : \triangle DEF = m : n = u : v.$$

⁶⁵ Aquesta proposició demostra que l'àrea no sols és una funció del defecte, com s'ha vist a les seccions anteriors, sinó una funció lineal del defecte. Denotem amb $\triangle ABC$ l'àrea del triangle $\triangle ABC$.

És evident que aquest argument es pot estendre fàcilment al cas d'incomensurabilitat dels triangles $\triangle ABC, \triangle DEF$. Això prova la proposició. \square

De la mateixa manera es demostra que triangles sobre una esfera són com els *excessos* de les sumes dels seus angles per sobre de π .

Si dos angles d'un triangle esfèric són rectes, el tercer z serà l'excés en qüestió i l'àrea serà proporcional a z . I quan $z = 2\pi$ tindrem mitja esfera, és a dir, una àrea igual a p^2/π (apartat VI de la secció 32). Per tant,

$$\text{\textit{àrea triangle esfèric amb dos angles rectes}} = \frac{z}{2\pi} \frac{p^2}{2\pi};$$

consegüentment, qualsevol triangle amb excés dels seus angles z és

$$\text{\textit{àrea triangle esfèric}} = \frac{z p^2}{4\pi^2}.$$

Així, doncs, a Σ , sobre una esfera de radi R ,

$$\text{\textit{àrea triangle esfèric}} = z R^2,$$

i a S ,

$$\text{\textit{àrea triangle esfèric}} = z i^2 \sinh^2(R/i).$$

43 Àrea del triangle i del cercle

Proposició 43.1. A S , l'àrea d'un triangle rectilini $\triangle ABC$ d'angles α, β, γ és donada per

$$\blacktriangle ABC = \delta i^2,$$

on el defecte δ és donat per $\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.

Demostració. És suficient considerar el cas en què el triangle és rectangle. Suposem, doncs, $\alpha = \angle BAC = \pi/2$. Amb la notació de la figura 15, pàgina 79, tenim $u = \angle ACB = \gamma$, $v = \angle ABC = \beta$, i quan fem tendir AB cap a l'infinit, amb A fix, tenim, per la secció 42, que

$$\blacktriangle ABC : (\pi/2 - u - v)$$

és constant. Però al mateix temps $\triangle ABC$ tendeix a $BACN$, i $\pi/2 - u - v$ tendeix a z , essent z el complementari de l'angle de paral·lelisme de AC (ja que, per la secció 1, v tendeix a 0 i u a l'angle de paral·lelisme). Així,

$$BACN : z = \blacktriangle ABC : (\pi/2 - u - v) = BAC'N' : z'.$$

A més, manifestament, per la secció 30 i l'apartat v de la secció 32,

$$BDCN : BD'C'N' = r : r' = \tan z : \tan z'.$$

Però si $y' = AC'$ (sempre amb la notació de la figura 15) tendeix a 0, amb A fix, tenim que z' també tendeix a 0, de manera que

$$\lim_{y' \rightarrow 0} \frac{\tan z'}{z'} = 1,$$

i la figura $BD'C'N'$ tendeix a $BAC'N'$.

Consegüentment,

$$BDCN : BAC'N' = \tan z : z',$$

i en particular,

$$BDCN : BACN = \tan z : z.$$

Però, com hem vist a l'apartat v de la secció 32,

$$BDCN = r \cdot i = i^2 \tan z;$$

per tant,

$$BACN = z \cdot i^2,$$

i com que

$$BACN : z = \triangle ABC : \delta,$$

tenim

$$\triangle ABC = \delta i^2. \quad \square$$

Triangle ideal⁶⁶

Es dedueix fàcilment d'això que, si $OR \parallel AM$ i $RO \parallel AB$, l'àrea compresa entre OR, ST, BC (que és, manifestament, el límit absolut de l'àrea dels triangles recti-

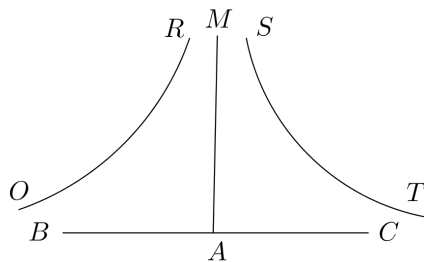


Figura X

⁶⁶ Per *triangle ideal* ens referim a un triangle amb vèrtexs a l'infinít (angles zero).

linis creixent sense fi), és igual a la suma de les àrees de dos triangles ideals BAM i CAM

$$\text{\`area} = 2(\delta i^2) = 2(\pi - (\pi/2 + 0 + 0))i^2 = \pi i^2,$$

que coincideix, doncs, amb l'àrea del disc de radi horocíclic i sobre una horoesfera, i. e. amb l'àrea euclidiana del disc de radi i .

Denotant aquest límit amb \square , és a dir, $\square = \pi i^2$, hem vist a l'apartat VI de la secció 32 que (amb la notació de la figura 15, pàgina 79, o figura Y)

$$\pi r^2 = \tan^2 z \cdot \square = \odot r \quad (\text{a F}) = \odot s, \quad z = \pi/2 - \Pi(AC)$$

(recordem que $r = 2i \sinh(s/2i) = i \tan z$).

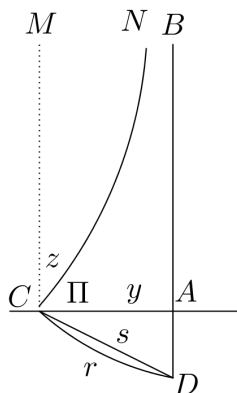


Figura Y

Així doncs, per trobar a S l'àrea del cercle de radi s , només hem de traçar (figura Z) la perpendicular en el punt mitjà del radi CD en un pla (o en el punt mitjà de l'horocicle corresponent), i construir les paral·leles CN i DB a aquesta recta per C i D , respectivament; construint llavors CA perpendicular a DB i elevant llavors $CM \perp CA$ es tindrà z .

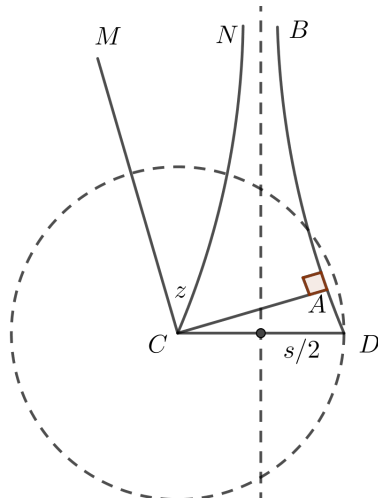


Figura Z

Per tant, prenent un radi arbitrari de la línia L per unitat, *es podrà determinar geomètricament (secció 37) $\tan^2 z$, a partir de dues línies uniformes de la mateixa curvatura* (les quals, donades només els seus extrems i els seus eixos construïts, podran evidentment ser tractades com a rectes en la recerca de la seva mesura comuna, i en aquest sentit considerades equivalents a rectes).

Quadratura del cercle

Observem que és molt fàcil construir un cercle d'àrea = \square , només hem de construir el segment de paral·lelisme de $\pi/4$. Diguem-li AC i suposem que té longitud y (figura Y). Tracem una perpendicular AB a AC per A i tracem la paral·lela CN a aquesta recta per C. Formarà un angle de $\pi/4$ amb AC. Trobem a continuació el punt D intersecció de AB amb l'horocicle per C d'eix CN (secció 37). El disc de radi $s = CD$ té àrea \square .

Construïm ara un quadrilàter regular d'àrea = \square .

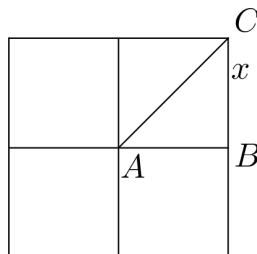


Figura 23

Sigui $\angle ABC = \pi/2, \angle BAC = \pi/4, \angle ACB = \pi/8$ i $BC = x$. Es podrà expressar X (a partir de l'apartat II de la secció 31) per simples arrels quadrades i (per la secció 37) construir-lo. Concretament, pel teorema del cosinus

$$\cos(\pi/8) = \sin(\pi/4) \cosh(x/i),$$

és a dir,

$$\cosh(x/i) = \frac{X + X^{-1}}{2} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}},$$

d'on

$$X = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

I coneixent X es podrà determinar x (secció 38, o també seccions 29 i 35). I l'òctuple del triangle $\triangle ABC$ és evidentment $= \square$, ja que

$$\text{àrea del quadrat} = 8i^2(\pi - (\pi/2 + \pi/4 + \pi/8)) = \pi i^2.$$

I per això, *un cercle pla es troba quadrat geomètricament mitjançant una figura rectilínia i de línies uniformes de la mateixa espècie (és a dir, línies equivalents a rectes quant a la seva comparació entre elles). Un cercle de F està planificat de la mateixa manera: llavors o l'axioma XI d'Euclides és cert o tenim la quadratura geomètrica del cercle, bé que res no decideix fins ara quina de les dues proposicions té realment lloc.*

Sempre que $\tan^2 z$ sigui un nombre enter o una fracció racional amb denominador (després de la reducció a l'expressió més simple) un nombre primer de la forma $2^m + 1$ (del qual $2 = 2^0 + 1$ és un cas particular), o un producte de tants nombres primers d'aquesta forma com es vulgui, on cadascun dels quals (excepte el 2, que és l'únic que pot entrar un nombre qualsevol de vegades) no entra més que *una sola vegada* com a factor, es podrà, per la teoria dels polígons donada per Gauss (i per aquests valors de z únicament), construir una figura rectilínia d'àrea $\tan^2 z \cdot \square = \odot s$.

Ja que la divisió de \square (el teorema de la secció 42 s'estén fàcilment a polígons arbitraris), exigeix evidentment la partició de π , el qual (com es pot demostrar) no és possible geomètricament més que sota les condicions precedents. Però en tots aquests casos el que precedeix condueix fàcilment a l'objectiu.

Per exemple si $\tan^2 z = 1/17$, podem formar un triangle d'angles (construïbles) $\frac{2\pi}{17}, \frac{\pi}{2}, \frac{11}{4} \frac{2\pi}{17}$, que tindrà àrea $\frac{\pi}{17} i^2 = \tan^2 z \cdot \square$.

I qualsevol figura rectilínia es pot transformar geomètricament en un polígon regular de n costats, si n és de la forma indicada per Gauss.

Faltaria encara, per completar enterament les nostres investigacions, demostrar la impossibilitat de decidir (sense recórrer a alguna hipòtesi) si és el sistema Σ o algun dels sistemes \mathbf{S} (i quin) el que té lloc realment. Això és el que reservarem per a una ocasió més favorable.

Bibliografia

- [1] ABARDIA, Judit; REVENTÓS, Agustí; RODRÍGUEZ, Carlos J. «What did Gauss read in the *Appendix*?». *Historia Mathematica*, 39 (2012), 292–323.
- [2] BOLYAI, Farkas. *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi: Cum appendice triplici*. Vol. I i II. Maros Vásárhely, 1832.
- [3] BOLYAI, János. *Scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica*. Szeged: Polygon, 2002. [Amb traducció a l'hongarès per Rados Ignàcz, 1897, i a l'anglès per George Bruce Halsted, 1897]
- [4] BONOLA, Roberto. *Non-Euclidean geometry: A critical and historical study of its developments*. Nova York: Dover Publications Inc., 1955. [Conté la traducció a l'anglès, per G. B. Halsted, de *The science of absolute space*, de John Bolyai, i de la *The theory of parallels*, de Nikolai Lobatxevski]
- [5] HOÜEL, Guillaume Jules. «La science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiome XI d'Euclide». *Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 5 (1867), 191–248. [Conté una nota sobre la vida i els treballs dels Bolyai pare i fill, per F. Schmidt]
- [6] KÁRTESZI, Ferenk. «János Bolyai: *Appendix: The theory of space*». *North-Holland Mathematics Studies*, 138 (1987). [Amb un suplement de Barna Szénácssy]
- [7] PLAYFAIR, John. *Elements of geometry*. Edimburg: Bell & Bradfute, 1814.
- [8] PRÉKOPA, András. «La revolució de János Bolyai». *Notícies de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 18 (2003), 18–28.
- [9] REVENTÓS, Agustí; RODRÍGUEZ, Carlos J. *Una lectura del 'Disquisitiones generales circa superficies curvas' de C. F. Gauss*. Barcelona: Societat Catalana de Matemàtiques, 2005. [Conté la traducció del *Disquisitiones* al català]



Societat Catalana de Matemàtiques

Filia de l'Institut d'Estudis Catalans

<http://scm.iec.cat>