Sòlids Arquimedians

ART

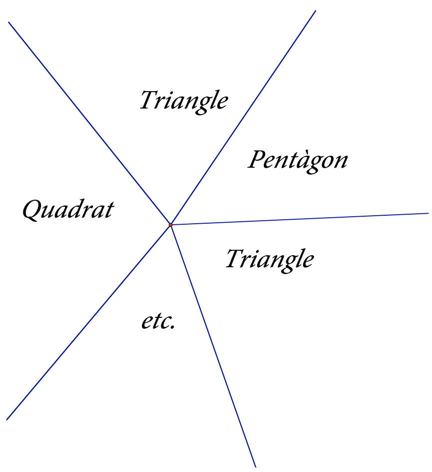
Resum

Deducció de que només hi pot haver 13 sòlids Arquimedians (més infinits prismes i anti-prismes). Els càlculs són només combinatoris, no fan referència a l'existència efectiva d'aquests cossos, ni diuen res sobre la seva convexitat. Suposo només dues coses: que són semiregulars i homeomorfs a l'esfera. De fet, hi ha dues figures quirals (imatge especular no isomètrica) a dues d'aquestes 13. Per aquesta raó, en alguns contextos aquests políedres es compten dues vegades i es parla de 15 sòlids arquimedians.

1 Preliminars

Els sòlids Arquimedians són poliedres formats per polígons regulars (possiblement diferents entre ells) tals que tots els vèrtexs són iguals. Això vol dir que si en un vèrtex hi concorren els polígons $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$, en aquest ordre, llavors a tots els vèrtexs hi concorren els mateixos polígons en el mateix ordre o en ordre oposat.

Si aplanem el poliedre i mirem un vèrtex hem de veure la mateixa estructura a tots ells.

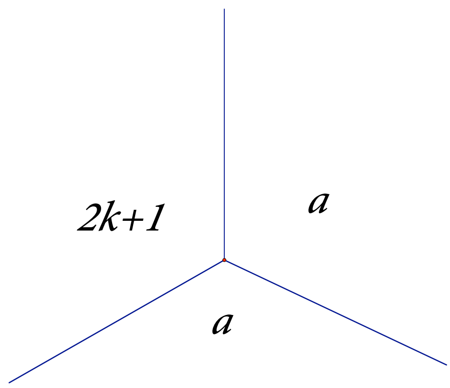


Comencem amb un parell d'observacions elementals.

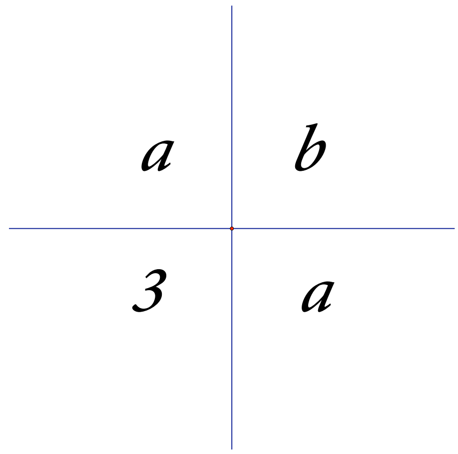
Lema 1.1 (Cromwell, pàg. 158) *Al voltant de cada vèrtex apareixen com a molt* 3 *tipus diferents de polígons regulars (potser repetits).*

Demostració. Si apareguessin 4 tipus diferents, els angles més petits serien 60, 90, 108, i 120, que ja sumen més de 360.

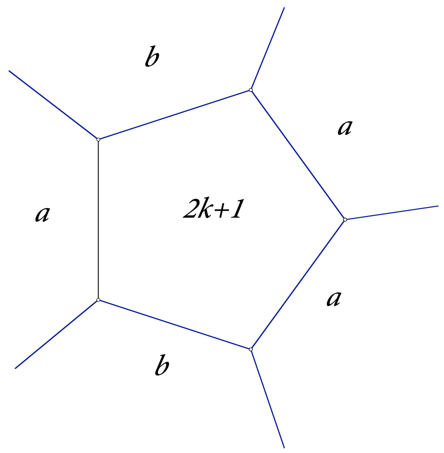
Lema 1.2 (Cromwell, pàg. 159) *Si hi ha* 3 *polígons i un és imparell, els altres dos són iguals.*



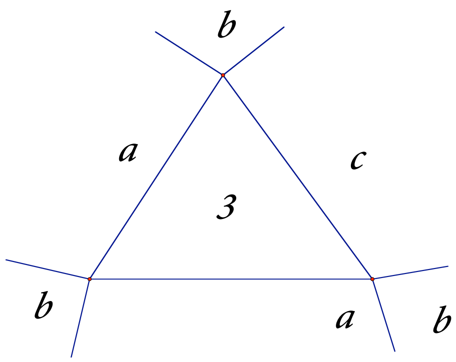
Si hi ha 4 *polígons i un és un triangle, els adjacents són iguals.*



Demostració primera part. Si $a \neq b$ els vèrtexs no serien del mateix tipus.



Demostració segona part. Els codis a dos dels vèrtexs són: $(3abc)$, $(3cba)$, que implica $a = c$.



2 Característica d'Euler

Sigui a_n el nombre de n-àgons que concorren en un vèrtex.

Clarament

$$d := \sum a_k = \text{nombre d'arestes que concorren en cada vèrtex.}$$

Així

$$Vd = 2A,$$
V:= nombre total de vèrtexs.
A:= nombre total d'arestes,

$$\frac{Va_3}{3} + \frac{Va_4}{4} + \cdots = C,$$
C:=nombre total de cares.

Per la fórmula d'Euler

$$V(\sum_{k=3}(\frac{a_k}{k}-\frac{a_k}{2})+1)=2,$$

que dóna lloc a la *fórmula fonamental*:

$$\boxed{\sum_{k=3}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{k})a_k = 1-\tfrac{2}{V}}$$

Com que

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{k}>\frac{1}{6},\quad \forall k>3,$$

tenim

$$1-\frac{2}{V}>\frac{d}{6},$$

és a dir $d<6$.

Però, de fet, és obvi que $d<6$, ja que si $d=6$, en el millor dels cassos tindríem 6 triangles equilàters en un vèrtex, i estaríem en el cas pla o tessel-lació.

Estudiem els cassos possibles, fent primer una llista exhaustiva, de la que posteriorment podrem anar eliminant cassos.

3 $d=5$

Observem primerament que $a_3>3$, ja que, com $1>1-\dfrac{2}{V}$, tenim

$$\begin{aligned}
1 &> \sum_{k=3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{k})a_k = (\frac{1}{2}-\frac{1}{3})a_3+\sum_{k=4}(\frac{1}{2}-\frac{1}{k})a_k\\
&= \frac{a_3}{6}+\frac{1}{2}\sum_{k=4}a_k-\sum_{k=4}\frac{1}{k}a_k\\
&= \frac{a_3}{6}+\frac{1}{2}(5-a_3)-\sum_{k=4}\frac{1}{k}a_k\\
&> \frac{5}{2}-\frac{a_3}{3}-\frac{1}{4}(\sum_{k=4}a_k)\\
&= \frac{5}{2}-\frac{a_3}{3}-\frac{1}{4}(5-a_3)\\
&= \frac{5}{4}-\frac{a_3}{12}.
\end{aligned}$$

És a dir,

$$a_3>3.$$

Per tant, només tenim els cassos següents:

$$\begin{array}{rcccl}
\text{Cas I.} & d & = & 5, & a_3=5.\\
\text{Cas II.} & d & = & 5, & a_3=4,\quad a_r=1,\ \text{algun } r>3.
\end{array}$$

Cas I.
$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})5 = 1-\frac{2}{V}.$$
Això implica
$$\boxed{V = 12, \quad \text{ICOSAEDRE, codi (33333), } \mathbf{P5}}.$$

El codi indica els polígons que concorren a cada vèrtex, i $P*$ o $A*$ indica cos platònic o cos Arquimedià, respectivament.

Cas II.
$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})4 + (\frac{1}{2}-\frac{1}{k}) = 1-\frac{2}{V}.$$
Això implica
$$V = \frac{12k}{6-k},$$
i per tant, només pot ser
$$\boxed{V = 24, \quad \text{CUBOCTAEDRE PUNXEGUT, codi (33334), } \mathbf{A1}}.$$
$$\boxed{V = 60, \quad \text{ICOSAEDRE PUNXEGUT, codi (33335), } \mathbf{A2}}.$$

4 $d = 4$

En principi tenim 7 cassos, però dos d'ells queden exclosos: el cas 4 pel lema 1.2 i el cas 7 pel lema 1.1.

Cas 1. $d = 4$, $a_3 = 4$.
$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})4 = 1-\frac{2}{V}.$$
Implica
$$\boxed{V = 6, \quad \text{OCTAEDRE, codi (3334), } \mathbf{P2}}.$$
Cas 2. $d = 4$, $a_3 = 3$, algun $a_r = 1, r > 3$.
$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})3 + (\frac{1}{2}-\frac{1}{k}) = 1-\frac{2}{V}.$$
Implica
$$\boxed{V = 2k, \quad \text{ANTIPRISMES, codi (333k)}}.$$
Cas 3. $d = 4$, $a_3 = 2$, algun $a_r = 2, r > 3$.
$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})2 + (\frac{1}{2}-\frac{1}{k})2 = 1-\frac{2}{V}.$$
Implica
$$V = \frac{6k}{6-k},$$
i per tant, només pot ser
$$\boxed{V = 12, \quad \text{CUBOCTAEDRE, codi (3434), } \mathbf{A3}}.$$

$$\boxed{V = 30, \quad \text{ICOSADODECAEDRE, codi (3535), } \mathbf{A4}}.$$

Cas 4. $d = 4$, $a_3 = 2$, algun $a_r = 1$, algun $a_s = 1$, $r, s > 3, r \neq s$.
No es pot donar, pel lema 1.2.
Cas 5. $d = 4$, $a_3 = 1$, algun $a_r = 3, r > 3$.

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{k})3 = 1 - \frac{2}{V}.$$

Implica

$$V = \frac{6k}{9 - 2k},$$

i per tant,

$$\boxed{V = 24, \quad \text{PETIT ROMBECUB, codi (3444), } \mathbf{A5}}.$$

Cas 6. $d = 4$, $a_3 = 1$, algun $a_r = 2$, algun $a_s = 1$, $r, s > 3, r \neq s$.

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{k})2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{R}) = 1 - \frac{2}{V}.$$

Implica

$$V = \frac{6kr}{6r + 3k - 2kr},$$

i per tant,

$$\boxed{V = 60, \quad \text{PETIT ROMBEICOSAEDRE, codi (3444), } \mathbf{A6}}.$$

Cas 7. $d = 4$, $a_3 = 1$, algun $a_r = 1$, algun $a_s = 1$, algun $a_t = 1, r, s, t > 3, r \neq s \neq t$.
No es pot donar, pel lema 1.1.

5 $d = 3$

En principi tenim 8 cassos, però dos d'ells queden exclosos pel lema 1.1: el cas 2 i el cas 4.
Cas 1. $d = 3$, $a_3 = 3$.

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})3 = 1 - \frac{2}{V}.$$

Implica

$$\boxed{V = 4, \quad \text{TETRAEDRE, codi (333), } \mathbf{P1}}.$$

Cas 2. $d = 3$, $a_3 = 2$, algun $a_r = 1, r > 3$.
No es pot donar, pel lema 1.1
Cas 3. $d = 3$, $a_3 = 1$, algun $a_r = 2, r > 3$.

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{k})2 = 1 - \frac{2}{V}.$$

Implica

$$V = \frac{12k}{12 - k},$$

i a més, pel lema 1.1, k ha de ser parell. Per tant, tenim quatre possibilitats:

$$\boxed{V = 6, \quad \text{PRISMA TRIANGULAR, codi (344)}}.$$

$$\boxed{V = 12, \quad \text{TETRAEDRE TRUNCAT, codi (366), } \mathbf{A7}}.$$

$$\boxed{V = 24, \quad \text{CUB TRUNCAT, codi (388), } \mathbf{A8}}.$$

$$\boxed{V = 36, \quad \text{DODECAEDRE TRUNCAT, codi (344), } \mathbf{A9}}.$$

Cas 4. $d = 3$, $a_3 = 1$, algun $a_r = 1$, algun $a_s = 1$, $r, s > 3, r \neq s$.
No es pot donar, pel lema 1.1.
Cas 5. $d = 3$, $a_3 = 0$, $a_4 = 3$.

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})3 = 1 - \frac{2}{V}.$$

Implica

$$\boxed{V = 4, \quad \text{CUB, codi (444), } \mathbf{P3}}.$$

Cas 6. $d = 3$, $a_3 = 0$, $a_5 = 3$.

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{5})3 = 1 - \frac{2}{V}.$$

Implica

$$\boxed{V = 20, \quad \text{DODECAEDRE, codi (555), } \mathbf{P4}}.$$

Cas 7. $d = 3$, $a_3 = 0$, algun $a_r = 2$, algun $a_s = 1$, $r, s > 3, r \neq s$.

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{s}) = 1 - \frac{2}{V}.$$

Implica

$$V = \frac{4rs}{4s + 2r - rs},$$

però només podem tenir $r = 4$ o $r = 6$, ja que, pel lema 1.1, $r = 5$ no es pot donar. Això dóna lloc a tres cassos:

$$\boxed{r = 4; V = 2s, \quad \text{PRISMA s-GONAL, codi (44s)}}.$$

Quan $r = 6$ tenim

$$V = \frac{12s}{6 - s},$$

que dóna lloc a dos cassos segons els valors de s:

$$\boxed{s = 5; V = 60, \quad \text{ICOSAEDRE TRUNCAT, codi (566), } \mathbf{A10}}.$$

També conegut com a *Pilota de futbol* o *Fulereno*, correspon a la molècula del carboni 60.

$$\boxed{s = 4; V = 24, \quad \text{OCTAEDRE TRUNCAT, codi (466), } \mathbf{A11}}.$$

Cas 8. $d = 3$, $a_3 = 0$, algun $a_r = 1$, algun $a_s = 1$ algun $a_t = 1, r, s, t > 3, r \neq s \neq t$.

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{s})2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{t})=1-\frac{2}{V}.$$

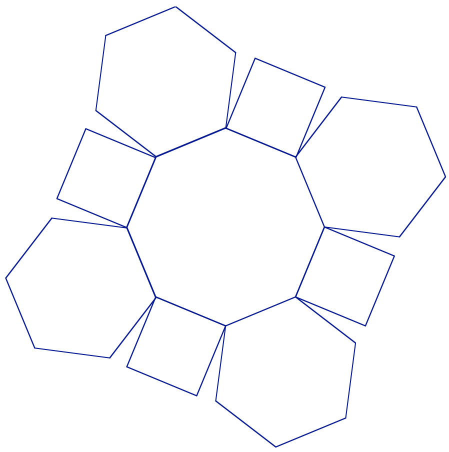
Implica

$$V=\frac{4rst}{2rs+2rt+2st-rst}.$$

Pel lema 1.1 r, s, t han de ser parells. Només hi ha dos casos:

$\boxed{V=48,\quad \text{GRAN ROMBECUBICOSAEDRE, codi (4,6,8), } \mathbf{A12}}$.

$\boxed{V=120,\quad \text{GRAN ROMBEICOSAEDRE, codi (4,6,10), } \mathbf{A13}}$.



GRAN ROMBECUBICOSAEDRE