[Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique]

TOPOLOGIE. — *Sur le nombre d'orbites périodiques d'une application continue du cercle en lui-même.* Note (*) de **Jaume Llibre** et **Agusti Reventós**, présentée par René Thom.

Soit f une application continue du cercle en lui-même, et soit $P(f)$ l'ensemble des entiers positifs n pour lesquels f a un point périodique de période n. Si N désigne l'ensemble des entiers positifs et $\{1, 2, 3\} \subset P(f)$, alors $P(f)=N$ et nous donnons une borne inférieure du nombre d'orbites périodiques de période m pour tout $m \in N$.

Let f be a continuous map of the circle into itself, and let $P(f)$ denote the set of positive integers k such that f has a periodic point of period k. If N denotes the set of positive integers and $\{1, 2, 3\} \subset P(f)$, then $P(f)=N$ and we give a lower bound of the number of periodic orbits of period m for all $m \in N$.

1. Introduction. — On désigne par S^1 le cercle et par $C^0(S^1, S^1)$ l'espace des applications continues du cercle en lui-même. Si $f \in C^0(S^1, S^1)$, alors $P(f)$ désigne l'ensemble des entiers positifs n pour lesquels f a un point périodique de période n, et $N(f, m)$ désigne le nombre des orbites périodiques de période m.

On sait que si $\{1, 2, 3\} \subset P(f)$ alors $P(f)=N$, où N est l'ensemble des entiers positifs (*cf.* [1]). Dans cette communication nous améliorons ce résultat.

Théorème A. — *Soit $f \in C^0(S^1, S^1)$. Si $\{1, 2, 3\} \subset P(f)$ alors on vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *il existe un entier $N(m)$ (facilement calculable, voir le numéro 3) tel que $N(f, m) \geqq N(m)$, pour tout $m \in N$;*

(ii) *il existe une application $g \in C^0(S^1, S^1)$ telle que $\{1, 2, 3\} \subset P(g)$ et $N(g, m)=N(m)$, pour tout $m \in N$.*

La preuve de ce résultat sera donnée au numéro 3. Dans le tableau on donne $N(m)$ par $m=1, 2, \ldots, 50$.

2. Définitions préliminaires et résultats. — Soit $f \in C^0(S^1, S^1)$. On désigne par f^0 l'application identité de S^1 et pour tout $n \in N$ on définit f^n inductivement par $f^n = f \circ f^{n-1}$.

Soit $p \in S^1$. On dit que p est un point fixe de f si $f(p)=p$. Si p est un point fixe de f^n, pour quelque $n \in N$, on dit que p est un point périodique de f. Dans ce cas le minimum de $\{n \in N : f^n(p)=p\}$ est appelé la période de p.

On définit l'orbite de p comme $\{f^n(p) : n=0, 1, 2, \ldots\}$. Si p est un point périodique de f de période n, on dit que l'orbite de p est une orbite périodique de période n. Dans ce cas l'orbite de p contient exactement n points, chaque point est un point périodique de période n.

Soit $p \in S^1$ et $q \in S^1$ avec $p \neq q$. On désigne par $[p, q]$ [respectivement (p, q)] l'intervalle fermé (respectivement ouvert) qui va de p à q dans le sens contraire aux aiguilles de l'horloge.

Soit $f \in C^0(S^1, S^1)$ et soit $[p, q]$ un intervalle fermé du cercle. Alors $f \mid [p, q]$ désigne la restriction de f à l'intervalle $[p, q]$.

Si $f \in C^0(S^1, S^1)$, alors on peut représenter le graphique de l'application f sur le tore T^2. Le tore T^2 est homéomorphe à l'espace obtenu en identifiant dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ les points $(0, y)$ et $(1, y)$ et les points $(x, 0)$ et $(x, 1)$.

Soient $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, r points de S^1 tels que $(p_i, p_{i+1}) \cap \{p_1, p_2, \ldots, p_r\} = \emptyset$ si $i=1, 2, \ldots, r-1$, et $(p_r, p_1) \cap \{p_1, \ldots, p_r\} = \emptyset$. Si $f \in C^0(S^1, S^1)$ on dit que l'intervalle $[p_i, p_{i+1}]$ (ou $[p_r, p_1]$) f-recouvre $[p_j, p_k]$ s'il existe un sous-intervalle K de $[p_i, p_{i+1}]$ tel que $f(K)=[p_j, p_k]$ et on dit que $[p_i, p_{i+1}]$ f-recouvre n-fois $[p_j, p_k]$ s'il existe n sous-intervalles $K_1, \ldots, K_n$ de $[p_i, p_{i+1}]$ avec $\operatorname{Int} K_i \cap \operatorname{Int} K_j = \emptyset$, $i \neq j$, tels que $f(K_i)=[p_j, p_k]$ où $i=1, \ldots, n$.

Un A-graphe de f est un graphe orienté généralisé (c. à d., il peut y avoir plusieurs flèches qui unissent les mêmes points) avec sommets $[p_1, p_2], \ldots, [p_r, p_1]$ et tel que si $[p_i, p_{i+1}]$ f-recouvre $[p_j, p_{j+1}]$ n-fois, mais non $n+1$ fois, alors il y a n (mais non $n+1$) flèches de $[p_i, p_{i+1}]$ à $[p_j, p_{j+1}]$ (*cf.* [2]). Nous pouvons associer à notre A-graphe une matrice $M=(m_{ij})$ telle que m_{ij}=nombre de flèches de $[p_i, p_{i+1}]$ à $[p_j, p_{j+1}]$.

Finalement, on dit que l'intervalle $[p_i, p_{i+1}]$ (similairement pour $[p_r, p_1]$) pour $i=1, 2, \ldots, r-1$, f-recouvre linéairement l'intervalle $[p_j, p_k]$ si l'on vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) $f([p_i, p_{i+1}])=[p_j, p_k]$;

(ii) le graphique de f sur le tore T^2 est linéaire sur $[p_i, p_{i+1}]$;

(iii) l'application f est injective sur $[p_i, p_{i+1}]$.

3. Démonstration du théorème A. — Soit $f\in C^0(S^1, S^1)$ avec $\{1, 2, 3\}\subset P(f)$. Alors il existe une orbite périodique de f de période 3. Soit $\{p_1, p_2, p_3\}$ cette orbite. On peut supposer que $[p_1, p_2]\subset[p_1, p_3]$. Il y a deux cas possibles :

(*a*) $f(p_1)=p_3, f(p_2)=p_1$ et $f(p_3)=p_2$;

(*b*) $f(p_1)=p_2, f(p_2)=p_3$ et $f(p_3)=p_1$.

Maintenant on étudie toutes les applications $g\in C^0(S^1, S^1)$ qui ont une orbite périodique de période 3 du type (*a*) et telles que $[p_1, p_2]$ g-recouvre linéairement $[p_1, p_3]$ ou $[p_3, p_1]$, $[p_2, p_3]$ g-recouvre linéairement $[p_1, p_2]$ ou $[p_2, p_1]$ et $[p_3, p_1]$ g-recouvre linéairement $[p_2, p_3]$ ou $[p_3, p_2]$. Il y a huit cas possibles pour l'application g, qui sont représentés dans la figure 1.

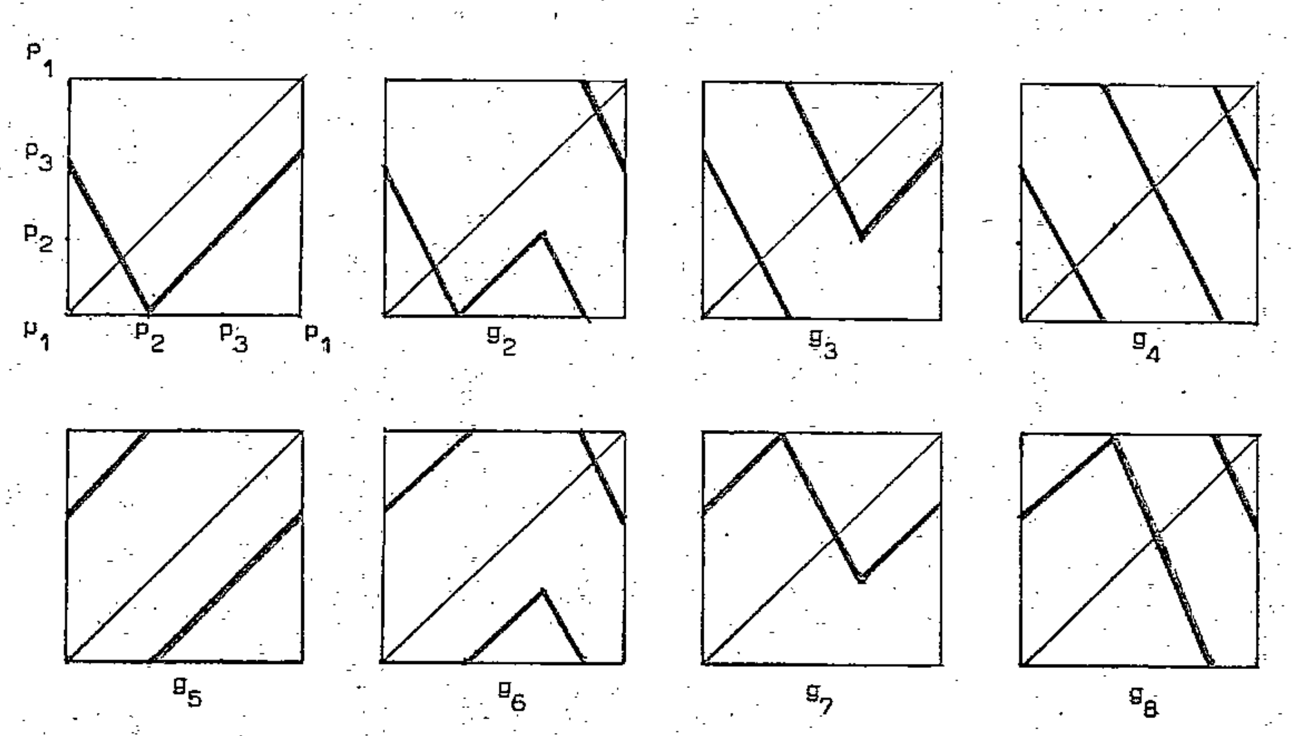

Fig. 1

On étudie similairement toutes les applications $g\in C^0(S^1, S^1)$ qui ont une orbite périodique de période 3 du type (*b*) et telles que $[p_1, p_2]$ g-recouvre linéairement $[p_2, p_3]$ ou $[p_3, p_2]$, $[p_2, p_3]$ g-recouvre linéairement $[p_1, p_3]$ ou $[p_3, p_1]$ et $[p_3, p_1]$ g-recouvre linéairement $[p_1, p_2]$ ou $[p_2, p_1]$. Voir la figure 2.

On désigne par g_i, $i=1, 2, \ldots, 16$, les seize applications de $C^0(S^1, S^1)$ dont les graphiques sont représentés dans les figures 1 et 2. Maintenant on étudie le nombre de points fixes de l'application g_i^m, $\#\mathrm{Fix}(g_i^m)$, pour celles g_i telles que $\{1, 2, 3\}\subset P(g_i)$ avec $i\in\{1, 2, \ldots, 16\}$. Par symétrie par rapport au point $(1/2, 1/2)\in[0, 1]\times[0, 1]$ est suffisant d'étudier $\#\mathrm{Fix}(g_i^m)$ avec $i\in\{1, 2, \ldots, 8\}$. On peut s'abstenir de considérer les applications g_4 et g_5 puisque $2\notin P(g_4)$ et $1\notin P(g_5)$, et toute modification h de g_4 et g_5 de manière que $2\in P(g_4)$ et $\{1, 2\}\subset P(g_5)$ satisfait $N(h, m)\geqq N(g_1, m)$.

On notera que si, par exemple, f vérifie la condition (a) et $[p_1, p_2]$ f-recouvre $[p_1, p_3]$ et $[p_2, p_3]$ f-recouvre $[p_1, p_2]$ et $[p_3, p_1]$ f-recouvre $[p_2, p_3]$ alors par continuité nous avons $N(f, m) \geqq N(g_1, m)$. Par suite, il est clair que $N(f, m) \geqq N(g_i, m)$ pour certain $i=1, \ldots, k$.

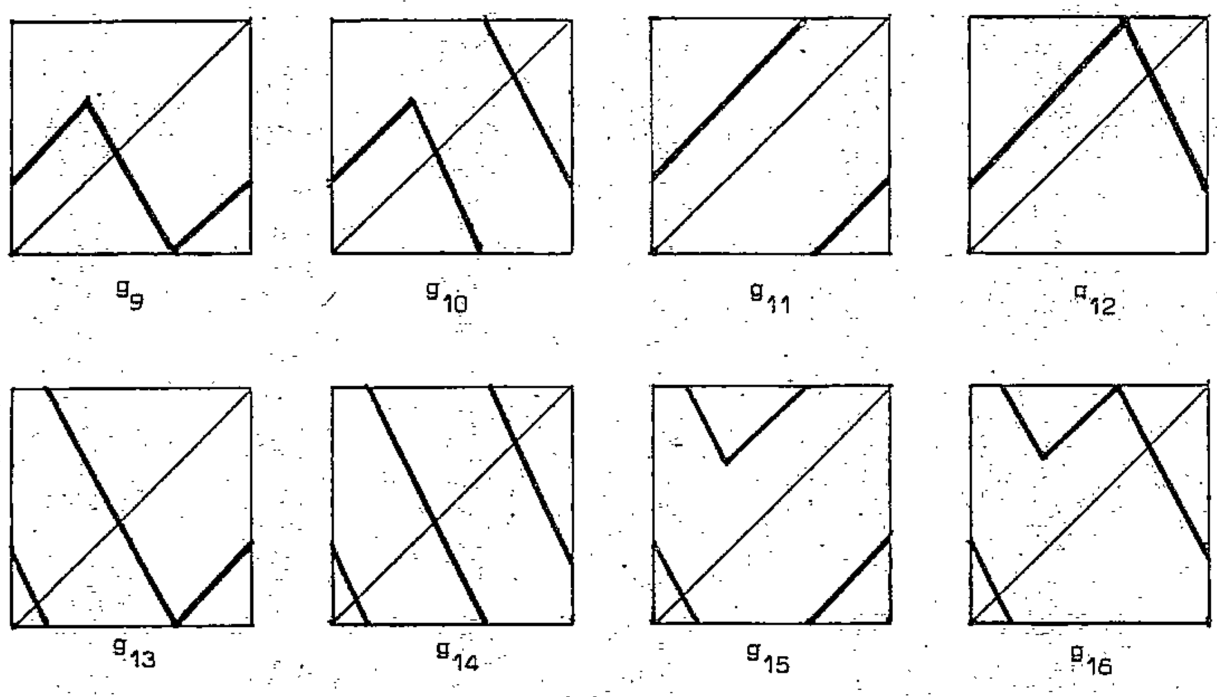

Fig. 2

On notera aussi que, à rotation près, $g_1=g_6=g_7$ et $g_2=g_3=g_8$. Puisque $g_2 | [p_1, p_3] = g_1 | [p_1, p_3]$ et $g_1([p_3, p_1]) \subset [p_1, p_3]$ on déduit que $N(g_2, m) \geqq N(g_1, m)$. Par conséquent, il nous manque seulement étudier $N(g_1, m)$.

Commençons par étudier $\# \operatorname{Fix}(g_1^m)$. Soit $g : [p_1, p_3] \rightarrow [p_1, p_3]$ l'application représentée dans la figure 3.

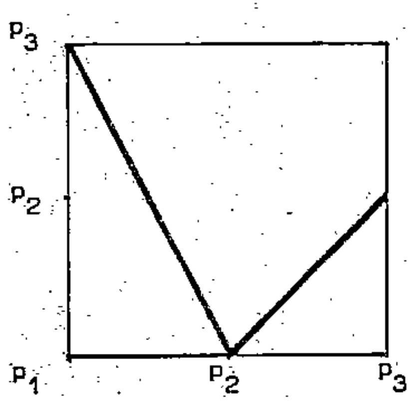

Fig. 3

Il est clair que $\# \operatorname{Fix}(g_1^m) = \# \operatorname{Fix}(g^m)$, que la matrice de l'A-graphe de g associé à la partition $[p_1, p_2]$, $[p_2, p_3]$ est $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et que $\operatorname{Tr}(M^m) = \# \operatorname{Fix}(g^m)$.

On obtient :

$$M^m = \begin{pmatrix} a(m)\, b(m) \\ c(m)\, d(m) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a(m)=a(m-1)+a(m-2),$$

$$b(m)=b(m-1)+b(m-2), \quad c(m)=a(m-1) \quad \text{et} \quad d(m)=b(m-1).$$

Ainsi :

$$\operatorname{Tr}(M^m) = a(m)+b(m-1) = \operatorname{Tr}(M^{m-1}) + \operatorname{Tr}(M^{m-2}).$$

Puisque $\operatorname{Tr}(M)=1$ et $\operatorname{Tr}(M^2)=3$ nous avons :

$$\operatorname{Tr}(M^m) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m.$$

A partir de ce nombre on peut calculer facilement le nombre $N(m)$ d'orbites périodiques de g_1 de période m, voir le tableau. Par continuité on a prouvé le théorème A.

TABLEAU

m	$N(m)$	m	$N(m)$	m	$N(m)$	m	$N(m)$
1	1	14	58	27	16 264	40	5 720 274
2	1	15	90	28	25 350	41	9 030 450
3	1	16	135	29	39 650	42	14 263 078
4	1	17	210	30	61 967	43	22 542 396
5	2	18	316	31	97 108	44	35 644 500
6	2	19	492	32	152 145	45	56 393 760
7	4	20	750	33	238 818	46	89 262 047
8	5	21	1 164	34	374 955	47	141 358 274
9	8	22	1 791	35	589 520	48	223 955 235
10	11	23	2 786	36	927 200	49	354 975 428
11	18	24	4 305	37	1 459 960	50	562 871 705
12	25	25	6 710	38	2 299 854		
13	40	26	10 420	39	3 626 200		

Remarque. — Soit $\{p_1, \ldots, p_n\}$ une orbite périodique de $f \in C^0(S^1, S^1)$. Si nous connaissons d'une part $f(p_i)$ pour $i=1, \ldots, n$, et de l'autre si $[p_i, p_{i+1}]$ f-recouvre $[f(p_i), f(p_{i+1})]$ ou $[f(p_{i+1}), f(p_i)]$, alors nous pouvons appliquer les mêmes techniques que celles de cette Note pour obtenir une estimation similaire de $N(f, m)$.

(*) Remise le 25 mai 1981, acceptée après révision le 23 novembre 1981.

[1] L. BLOCK, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 260, 1980, p. 553-562.

[2] L. BLOCK, M. MISIUREWICZ, J. GUCKENHEIMER et L. S. YOUNG, *Periodic Points and Topological Entropy of One Dimensional Maps* (*Lect. Notes in Math.*, 819, 1980, p. 18-34).

Secció de Matemàtiques, Facultat de Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, Barcelona, Spain.