

[Comptes rendus des séances
de l'Académie des sciences.
Série 1, Mathématique]

Académie des sciences (France). Auteur du texte. [Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique]. 1982-01-04.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisation.commerciale@bnf.fr.

TOPOLOGIE. — Sur le nombre d'orbites périodiques d'une application continue du cercle en lui-même. Note (*) de **Jaume Llibre** et **Agusti Reventós**, présentée par René Thom.

Soit f une application continue du cercle en lui-même, et soit $P(f)$ l'ensemble des entiers positifs n pour lesquels f a un point périodique de période n . Si N désigne l'ensemble des entiers positifs et $\{1, 2, 3\} \subset P(f)$, alors $P(f) = N$ et nous donnons une borne inférieure du nombre d'orbites périodiques de période m pour tout $m \in N$.

Let f be a continuous map of the circle into itself, and let $P(f)$ denote the set of positive integers k such that f has a periodic point of period k . If N denotes the set of positive integers and $\{1, 2, 3\} \subset P(f)$, then $P(f) = N$ and we give a lower bound of the number of periodic orbits of period m for all $m \in N$.

1. INTRODUCTION. — On désigne par S^1 le cercle et par $C^0(S^1, S^1)$ l'espace des applications continues du cercle en lui-même. Si $f \in C^0(S^1, S^1)$, alors $P(f)$ désigne l'ensemble des entiers positifs n pour lesquels f a un point périodique de période n , et $N(f, m)$ désigne le nombre des orbites périodiques de période m .

On sait que si $\{1, 2, 3\} \subset P(f)$ alors $P(f) = N$, où N est l'ensemble des entiers positifs (cf. [1]). Dans cette communication nous améliorons ce résultat.

THÉORÈME A. — Soit $f \in C^0(S^1, S^1)$. Si $\{1, 2, 3\} \subset P(f)$ alors on vérifie les propriétés suivantes :

(i) il existe un entier $N(m)$ (facilement calculable, voir le numéro 3) tel que $N(f, m) \geq N(m)$, pour tout $m \in N$;

(ii) il existe une application $g \in C^0(S^1, S^1)$ telle que $\{1, 2, 3\} \subset P(g)$ et $N(g, m) = N(m)$, pour tout $m \in N$.

La preuve de ce résultat sera donnée au numéro 3. Dans le tableau on donne $N(m)$ par $m = 1, 2, \dots, 50$.

2. DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES ET RÉSULTATS. — Soit $f \in C^0(S^1, S^1)$. On désigne par f^0 l'application identité de S^1 et pour tout $n \in N$ on définit f^n inductivement par $f^n = f \circ f^{n-1}$.

Soit $p \in S^1$. On dit que p est un point fixe de f si $f(p) = p$. Si p est un point fixe de f^n , pour quelque $n \in N$, on dit que p est un point périodique de f . Dans ce cas le minimum de $\{n \in N : f^n(p) = p\}$ est appelé la période de p .

On définit l'orbite de p comme $\{f^n(p) : n = 0, 1, 2, \dots\}$. Si p est un point périodique de f de période n , on dit que l'orbite de p est une orbite périodique de période n . Dans ce cas l'orbite de p contient exactement n points, chaque point est un point périodique de période n .

Soit $p \in S^1$ et $q \in S^1$ avec $p \neq q$. On désigne par $[p, q]$ [respectivement (p, q)] l'intervalle fermé (respectivement ouvert) qui va de p à q dans le sens contraire aux aiguilles de l'horloge.

Soit $f \in C^0(S^1, S^1)$ et soit $[p, q]$ un intervalle fermé du cercle. Alors $f|_{[p, q]}$ désigne la restriction de f à l'intervalle $[p, q]$.

Si $f \in C^0(S^1, S^1)$, alors on peut représenter le graphique de l'application f sur le tore T^2 . Le tore T^2 est homéomorphe à l'espace obtenu en identifiant dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ les points $(0, y)$ et $(1, y)$ et les points $(x, 0)$ et $(x, 1)$.

Soient $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, r points de S^1 tels que $(p_i, p_{i+1}) \cap \{p_1, p_2, \dots, p_r\} = \emptyset$ si $i = 1, 2, \dots, r-1$, et $(p_r, p_1) \cap \{p_1, \dots, p_r\} = \emptyset$. Si $f \in C^0(S^1, S^1)$ on dit que l'intervalle $[p_i, p_{i+1}]$ (ou $[p_r, p_1]$) f -recouvre $[p_j, p_k]$ s'il existe un sous-intervalle K de $[p_i, p_{i+1}]$ tel que $f(K) = [p_j, p_k]$ et on dit que $[p_i, p_{i+1}]$ f -recouvre n -fois $[p_j, p_k]$ s'il existe n sous-intervalles K_1, \dots, K_n de $[p_i, p_{i+1}]$ avec $\text{Int } K_i \cap \text{Int } K_j = \emptyset$, $i \neq j$, tels que $f(K_i) = [p_j, p_k]$ où $i = 1, \dots, n$.

Un A-graphe de f est un graphe orienté généralisé (c. à d., il peut y avoir plusieurs flèches qui unissent les mêmes points) avec sommets $[p_1, p_2], \dots, [p_r, p_1]$ et tel que si $[p_i, p_{i+1}]$ f -recouvre $[p_j, p_{j+1}]$ n -fois, mais non $n+1$ fois, alors il y a n (mais non $n+1$) flèches de $[p_i, p_{i+1}]$ à $[p_j, p_{j+1}]$ (cf. [2]). Nous pouvons associer à notre A-graphe une matrice $M=(m_{ij})$ telle que m_{ij} = nombre de flèches de $[p_i, p_{i+1}]$ à $[p_j, p_{j+1}]$.

Finalement, on dit que l'intervalle $[p_i, p_{i+1}]$ (similairement pour $[p_r, p_1]$) pour $i=1, 2, \dots, r-1$, f -recouvre linéairement l'intervalle $[p_j, p_k]$ si l'on vérifie les trois propriétés suivantes :

- (i) $f([p_i, p_{i+1}])=[p_j, p_k]$;
- (ii) le graphique de f sur le tore T^2 est linéaire sur $[p_i, p_{i+1}]$;
- (iii) l'application f est injective sur $[p_i, p_{i+1}]$.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A. — Soit $f \in C^0(S^1, S^1)$ avec $\{1, 2, 3\} \subset P(f)$. Alors il existe une orbite périodique de f de période 3. Soit $\{p_1, p_2, p_3\}$ cette orbite. On peut supposer que $[p_1, p_2] \subset [p_1, p_3]$. Il y a deux cas possibles :

- (a) $f(p_1)=p_3, f(p_2)=p_1$ et $f(p_3)=p_2$;
- (b) $f(p_1)=p_2, f(p_2)=p_3$ et $f(p_3)=p_1$.

Maintenant on étudie toutes les applications $g \in C^0(S^1, S^1)$ qui ont une orbite périodique de période 3 du type (a) et telles que $[p_1, p_2]$ g -recouvre linéairement $[p_1, p_3]$ ou $[p_3, p_1]$, $[p_2, p_3]$ g -recouvre linéairement $[p_1, p_2]$ ou $[p_2, p_1]$ et $[p_3, p_1]$ g -recouvre linéairement $[p_2, p_3]$ ou $[p_3, p_2]$. Il y a huit cas possibles pour l'application g , qui sont représentés dans la figure 1.

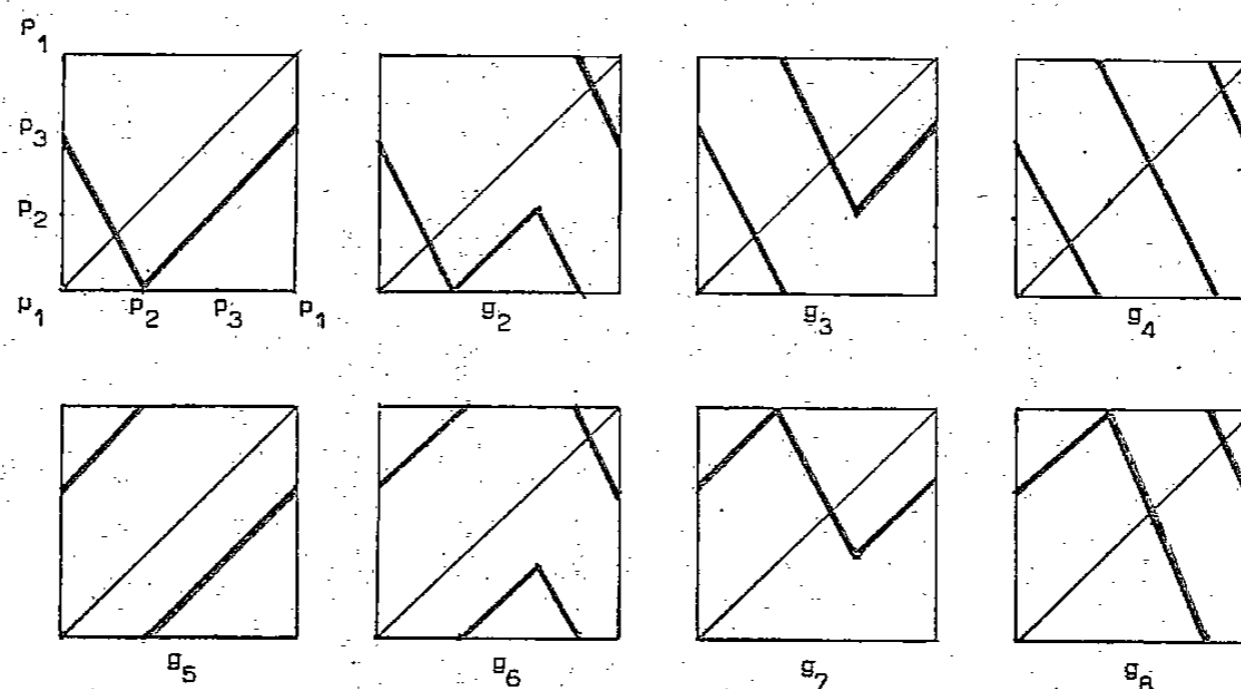


Fig. 1

On étudie similairement toutes les applications $g \in C^0(S^1, S^1)$ qui ont une orbite périodique de période 3 du type (b) et telles que $[p_1, p_2]$ g -recouvre linéairement $[p_2, p_3]$ ou $[p_3, p_2]$, $[p_2, p_3]$ g -recouvre linéairement $[p_1, p_3]$ ou $[p_3, p_1]$ et $[p_3, p_1]$ g -recouvre linéairement $[p_1, p_2]$ ou $[p_2, p_1]$. Voir la figure 2.

On désigne par $g_i, i=1, 2, \dots, 16$, les seize applications de $C^0(S^1, S^1)$ dont les graphiques sont représentés dans les figures 1 et 2. Maintenant on étudie le nombre de points fixes de l'application $g_i^m, \# \text{Fix}(g_i^m)$, pour celles g_i telles que $\{1, 2, 3\} \subset P(g_i)$ avec $i \in \{1, 2, \dots, 16\}$. Par symétrie par rapport au point $(1/2, 1/2) \in [0, 1] \times [0, 1]$ est suffisant d'étudier $\# \text{Fix}(g_i^m)$ avec $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$. On peut s'abstenir de considérer les applications g_4 et g_5 puisque $2 \notin P(g_4)$ et $1 \notin P(g_5)$, et toute modification h de g_4 et g_5 de manière que $2 \in P(g_4)$ et $\{1, 2\} \subset P(g_5)$ satisfait $N(h, m) \geq N(g_1, m)$.

On notera que si, par exemple, f vérifie la condition (a) et $[p_1, p_2]$ f -recouvre $[p_1, p_3]$ et $[p_2, p_3]$ f -recouvre $[p_1, p_2]$ et $[p_3, p_1]$ f -recouvre $[p_2, p_3]$ alors par continuité nous avons $N(f, m) \geq N(g_1, m)$. Par suite, il est clair que $N(f, m) \geq N(g_i, m)$ pour certain $i = 1, \dots, k$.

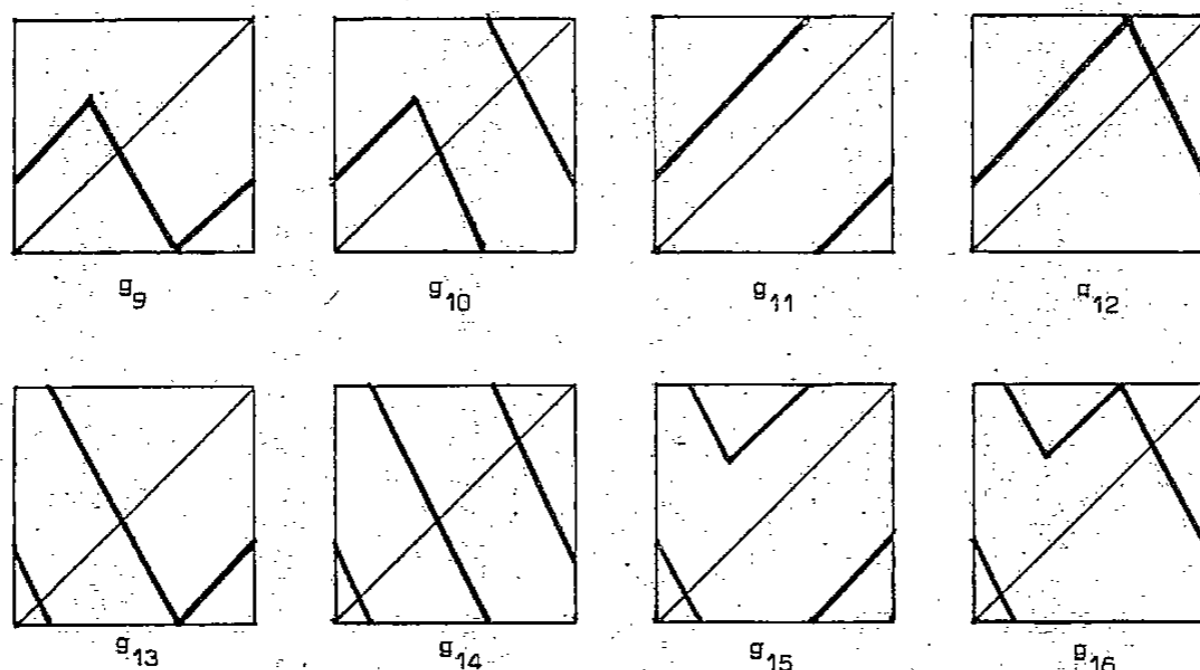


Fig. 2

On notera aussi que, à rotation près, $g_1 = g_6 = g_7$ et $g_2 = g_3 = g_8$. Puisque $g_2 \ll [p_1, p_3] = g_1 \ll [p_1, p_3]$ et $g_1 \ll ([p_3, p_1]) \subset [p_1, p_3]$ on déduit que $N(g_2, m) \geq N(g_1, m)$. Par conséquent, il nous manque seulement étudier $N(g_1, m)$.

Commençons par étudier $\# \text{Fix}(g_1^m)$. Soit $g : [p_1, p_3] \rightarrow [p_1, p_3]$ l'application représentée dans la figure 3.

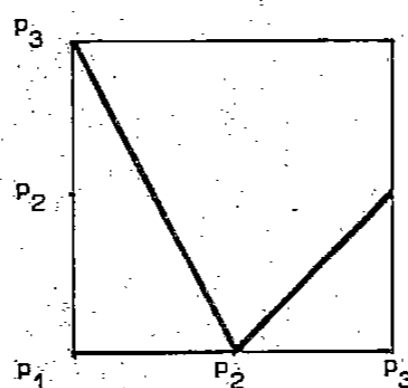


Fig. 3

Il est clair que $\# \text{Fix}(g_1^m) = \# \text{Fix}(g^m)$, que la matrice de l'A-graphe de g associé à la partition $[p_1, p_2], [p_2, p_3]$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et que $\text{Tr}(M^m) = \# \text{Fix}(g^m)$.

On obtient :

$$M^m = \begin{pmatrix} a(m) & b(m) \\ c(m) & d(m) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a(m) = a(m-1) + a(m-2),$$

$$b(m) = b(m-1) + b(m-2), \quad c(m) = a(m-1) \quad \text{et} \quad d(m) = b(m-1).$$

Ainsi :

$$\text{Tr}(M^m) = a(m) + b(m-1) = \text{Tr}(M^{m-1}) + \text{Tr}(M^{m-2}).$$

Puisque $\text{Tr}(M) = 1$ et $\text{Tr}(M^2) = 3$ nous avons :

$$\text{Tr}(M^m) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^m + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^m.$$

A partir de ce nombre on peut calculer facilement le nombre $N(m)$ d'orbites périodiques de g_1 de période m , voir le tableau. Par continuité on a prouvé le théorème A.

TABLEAU

m	$N(m)$	m	$N(m)$	m	$N(m)$	m	$N(m)$
1	1	14	58	27	16 264	40	5 720 274
2	1	15	90	28	25 350	41	9 030 450
3	1	16	135	29	39 650	42	14 263 078
4	1	17	210	30	61 967	43	22 542 396
5	2	18	316	31	97 108	44	35 644 500
6	2	19	492	32	152 145	45	56 393 760
7	4	20	750	33	238 818	46	89 262 047
8	5	21	1 164	34	374 955	47	141 358 274
9	8	22	1 791	35	589 520	48	223 955 235
10	11	23	2 786	36	927 200	49	354 975 428
11	18	24	4 305	37	1 459 960	50	562 871 705
12	25	25	6 710	38	2 299 854		
13	40	26	10 420	39	3 626 200		

Remarque. – Soit $\{p_1, \dots, p_n\}$ une orbite périodique de $f \in C^0(S^1, S^1)$. Si nous connaissons d'une part $f(p_i)$ pour $i=1, \dots, n$, et de l'autre si $[p_i, p_{i+1}]$ f -recouvre $[f(p_i), f(p_{i+1})]$ ou $[f(p_{i+1}), f(p_i)]$, alors nous pouvons appliquer les mêmes techniques que celles de cette Note pour obtenir une estimation similaire de $N(f, m)$.

(*) Remise le 25 mai 1981, acceptée après révision le 23 novembre 1981.

[1] L. BLOCK, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 260, 1980, p. 553-562.

[2] L. BLOCK, M. MISIUREWICZ, J. GÜCKENHEIMER et L. S. YOUNG, *Periodic Points and Topological Entropy of One Dimensional Maps (Lect. Notes in Math., 819; 1980, p. 18-34)*.

*Secció de Matemàtiques, Facultat de Ciències,
Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, Barcelona, Spain.*