Trigonometria esfèrica

ART

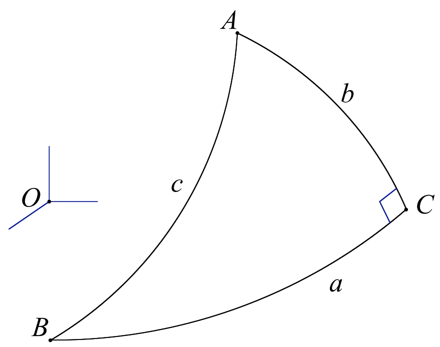
Abstract

La trigonometria esfèrica és quasi trivial per a triangles rectangles i es generalitza fàcilment a triangles arbitraris.

1 Triangles rectangles

Primer demostrarem les tres fórmules fonamentals, teorema de Pitàgores, teorema del sinus i teorema del cosinus, per a triangles rectangles.

Considerem el triangle esfèric de la figura:



Volem demostrar

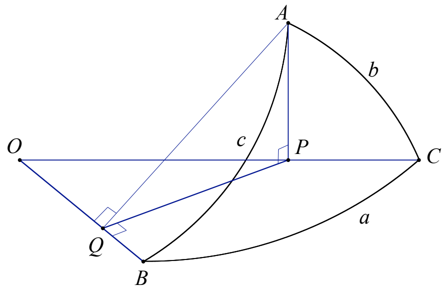
$$
\begin{array}{llcl}
I. & [\textbf{Pitàgores}] & \cos c = & \cos a \ \cos b \\[2ex]
II. & [\textbf{Sinus}] & \dfrac{\sin a}{\sin A} = & \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{1} \\[2ex]
III. & [\textbf{Cosinus}] & \cos A = & \cos a \ \sin B
\end{array}
$$

Teorema de Pitàgores

Pensem que l'origen de l'esfera és l'origen de coordenades i $C = (0, 1, 0)$. Així $OA = (0, \cos b, \sin b)$ i $OB = (\sin a, \cos a, 0)$.

$$OA \cdot OB = \cos a \ \cos b = |OA| \cdot |OB| \cdot \cos c = \cos c.$$

Teorema del sinus



1. Des de A tracem $AP \perp OC$.
2. Des de P tracem $PQ \perp OB$.
3. Llavors $AQ \perp OQ$ ja que AQ és combinació lineal de AP i PQ, que són perpendiculars a OQ.
4. L'angle AQP en el triangle pla AQP és igual l'angle entre els plans OAQ i OPQ, per ser AQ i PQ perpendiculars a la intersecció. Però l'angle entre aquests plans és justament l'angle B en el triangle esfèric ABC. Escriurem simplement $Q = B$.

   El teorema del sinus aplicat al triangle pla AQP dóna
   $$\frac{AP}{\sin Q} = \frac{AQ}{1},$$
   però, com que els triangles AOP i AQO són rectangles, aquesta igualtat es pot escriure com
   $$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{1}.$$

Intercanviant els papers de A i B tenim
$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{1}.$$

Notem, però, que l'angle A del triangle pla AQP no coincideix amb l'angle A del triangle esfèric ABC.

Teorema del cosinus

Una simple substitució:

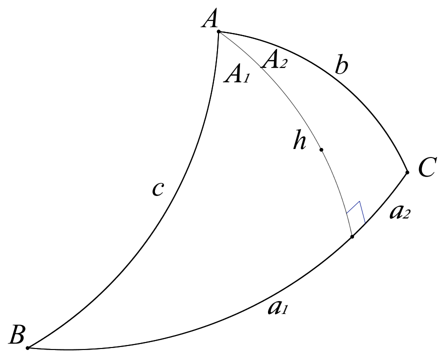
$$\begin{aligned}
\cos A &= \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-\frac{\sin^2 a}{\sin^2 c}} \\
&= \frac{1}{\sin c}\sqrt{1-\cos^2 c-\sin^2 a} = \frac{1}{\sin c}\sqrt{1-\cos^2 a\,\cos^2 b-\sin^2 a} \\
&= \frac{1}{\sin c}\cos a\sqrt{1-\cos^2 b} \\
&= \cos a\,\sin B.
\end{aligned}$$

2 Triangles arbitraris

Donat un triangle esfèric ABC arbitrari, volem demostrar

$$\begin{array}{lrcl} I. & \cos a & = & \cos b\ \cos c + \sin b\ \sin c\ \cos A \\ \\ II. & \dfrac{\sin a}{\sin A} & = & \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C} \\ \\ III. & \cos A & = & -\cos C\ \cos B + \sin C\ \sin B\ \cos a \end{array}$$

Per a això considerarem el dibuix



i recollim les fórmules dels dos triangles rectangles que es formen en traçar una de les altures. Tenim $A = A_1 + A_2$ i $a = a_1 + a_2$.

$$\begin{array}{rcl} \cos c & = & \cos a_1\ \cos h \\ \cos b & = & \cos a_2\ \cos h \\ \\ \dfrac{\sin a_1}{\sin A_1} & = & \dfrac{\sin h}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{1} \\ \dfrac{\sin a_2}{\sin A_2} & = & \dfrac{\sin h}{\sin C} = \dfrac{\sin b}{1} \\ \\ \cos A_1 & = & \cos a_1\ \sin B \\ \cos B & = & \cos h\ \sin A_1 \\ \cos A_2 & = & \cos a_2\ \sin C \\ \cos C & = & \cos h\ \sin A_2 \end{array}$$

Teorema de Pitàgores

$$\begin{array}{rcl} \cos a & = & \cos a_1\ \cos a_2 - \sin a_1\ \sin a_2 \\ & = & \cos b\ \cos c\ \dfrac{1}{\cos^2 h} - \sin b\ \sin c\ \sin A_1\ \sin A_2. \end{array}$$

Usant ara que

$$\frac{1}{\cos^2 h} = 1 + \tan^2 h$$

tenim

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b\, \cos c + \cos b\, \cos c\, \tan^2 h - \sin b\, \sin c\, \sin A_1\, \sin A_2 \\
&= \cos b\, \cos c + \cos a_1\, \cos a_2\, \sin^2 h - \sin b\, \sin c\, \sin A_1\, \sin A_2
\end{aligned}$$

Però, de les fórmules de la pàgina 3, es dedueix fàcilment que

$$\begin{aligned}
\cos a_1\, \sin h &= \cos A_1\, \sin c, \\
\cos a_2\, \sin h &= \cos A_2\, \sin b,
\end{aligned}$$

Substituint aquest valors a l'anterior igualtat tenim

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b\, \cos c + \cos A_1\, \cos A_2\, \sin b\, \sin c - \sin b\, \sin c\, \sin A_1\, \sin A_2 \\
&= \cos b\, \cos c + \sin b\, \sin c\, \cos A.
\end{aligned}$$

Teorema del sinus

$$\begin{aligned}
\sin a\, \sin B &= \sin a_1\, \cos a_2\, \sin B + \cos a_1\, \sin a_2\, \sin B \\
&= \cos a_2\, \sin h\, \sin A_1 + \sin a_2\, \cos A_1 \\
&= \cos a_2\, \sin A_1 \sin b\, \sin C + \sin a_2\, \cos A_1 \\
&= (\sin A_1\, \cos A_2 + \sin A_2\, \cos A_1) \sin b \\
&= \sin A\, \sin b.
\end{aligned}$$

Anàlogament

$$\begin{aligned}
\sin a\, \sin C &= \sin a_1\, \cos a_2\, \sin C + \cos a_1\, \sin a_2\, \sin C \\
&= \sin c\, \sin A_1 \cos A_2 + \sin a_2\, \frac{\cos A_1}{\sin B}\, \frac{\sin h}{\sin b} \\
&= \sin c\, \sin A_1 \cos A_2 + \cos A_1\, \frac{\sin h}{\sin B}\, \frac{\sin a_2}{\sin b} \\
&= (\sin A_1\, \cos A_2 + \sin A_2\, \cos A_1) \sin c \\
&= \sin A\, \sin c.
\end{aligned}$$

Teorema del cosinus

$$\begin{aligned}
\cos A &= \cos A_1\, \cos A_2 - \sin A_1\, \sin A_2 \\
&= \sin B\, \sin C\, \cos a_1 \cos a_2 - \sin B\, \sin C\, \frac{\sin a_1\, \sin a_2}{\sin^2 h}.
\end{aligned}$$

Usant ara que

$$\frac{1}{\sin^2 h} = 1 + \cot^2 h$$

tenim

$$\cos A = \sin B\, \sin C\, \cos a - \sin B\, \sin C\, \sin a_1\, \sin a_2 \cot^2 h$$

Però, de les fórmules de la pàgina 3, es dedueix fàcilment que

$$\begin{aligned}\sin B\ \sin a_1\ \cos h &= \cos B\ \sin h,\\ \sin C\ \sin a_2\ \cos h &= \cos C\ \sin h.\end{aligned}$$

Substituint aquest valors a l'anterior igualtat tenim

$$\cos A = \sin B\ \sin C\ \cos a - \cos B\ \cos C.$$