# Evolutes

IX Jornada ``Les matemàtiques entre la secundària i la universitat

6 Abril 2018

# Evolutes

1. Corbes planes
2. Corbes de doble curvatura
3. Superficies

# Christiaan Huygens

1629-1695 la Haia

# Christiaan Huygens

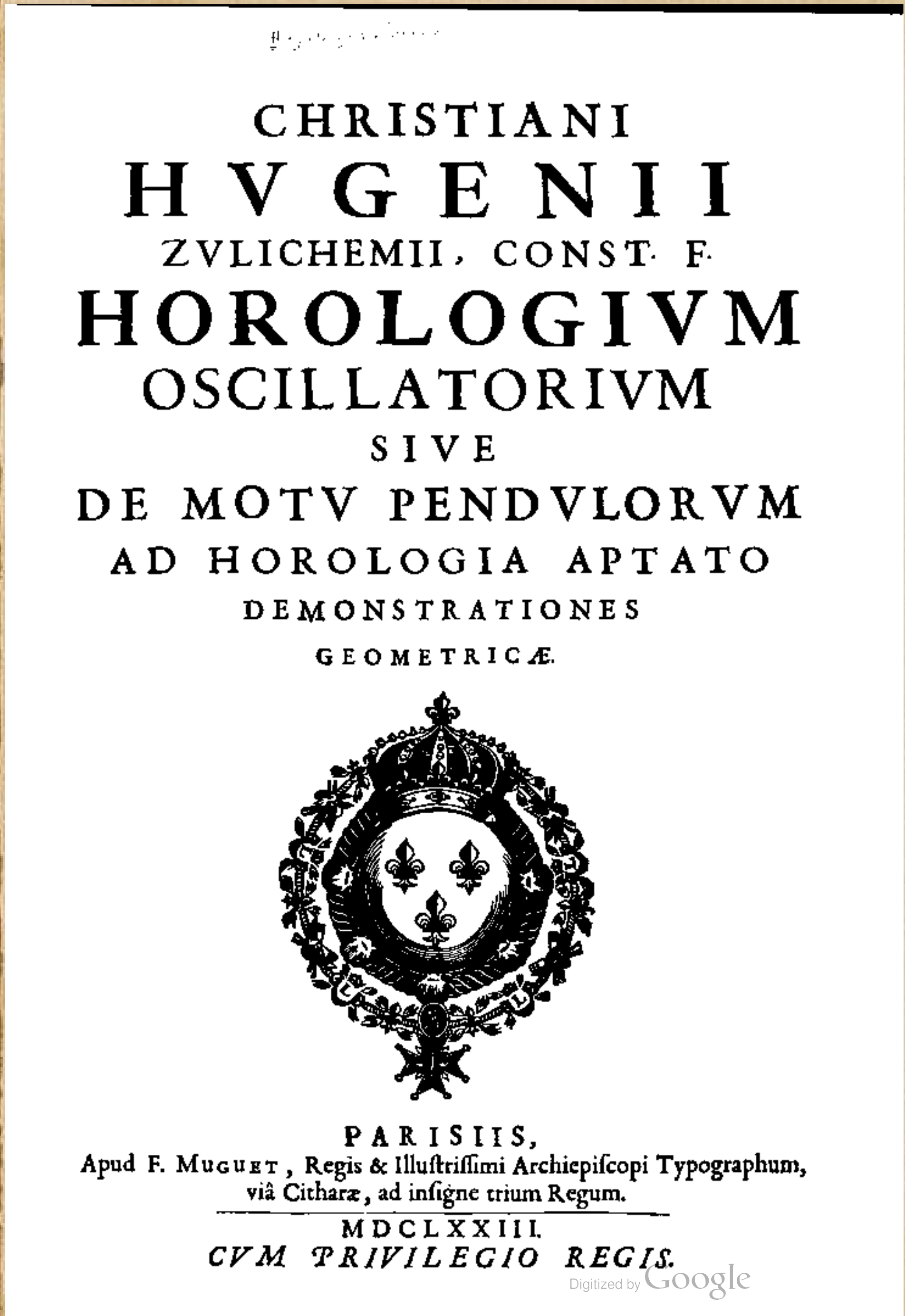
1629-1695 la Haia

El seu pare era amic de Descartes i va tenir relació amb Mersenne i Galileu

Descobreix els Anells de Saturn

Calcula radis de curvatura

Estudia la Pseudoesfera



CHRISTIANI

HVGENII

ZVLICHEMII, CONST. F.

HOROLOGIVM

OSCILLATORIVM

SIVE

DE MOTV PENDVLORVM

AD HOROLOGIA APTATO

DEMONSTRATIONES

GEOMETRICÆ.

PARISIIS,

Apud F. MUGUET, Regis & Illuſtriſſimi Archiepiſcopi Typographum, viâ Citharæ, ad inſigne trium Regum.

MDCLXXIII.

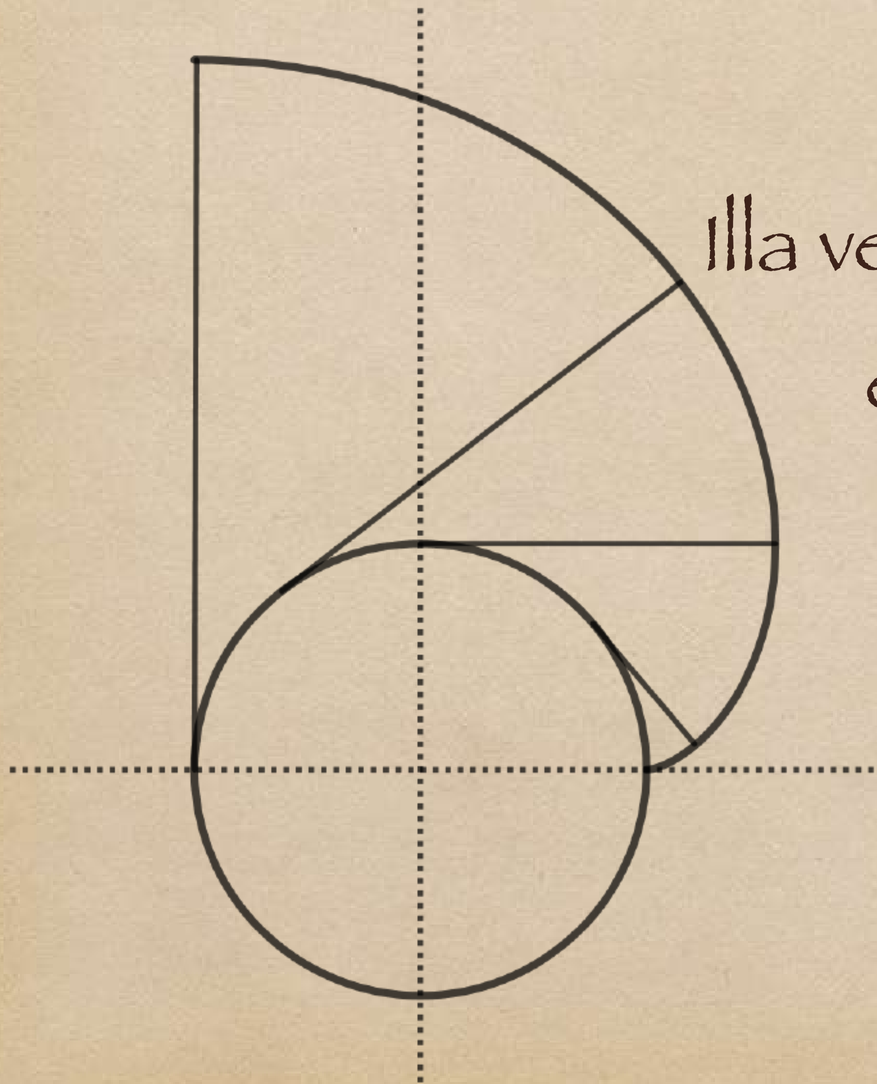
CVM PRIVILEGIO REGIS.



# Christiaan Huygens

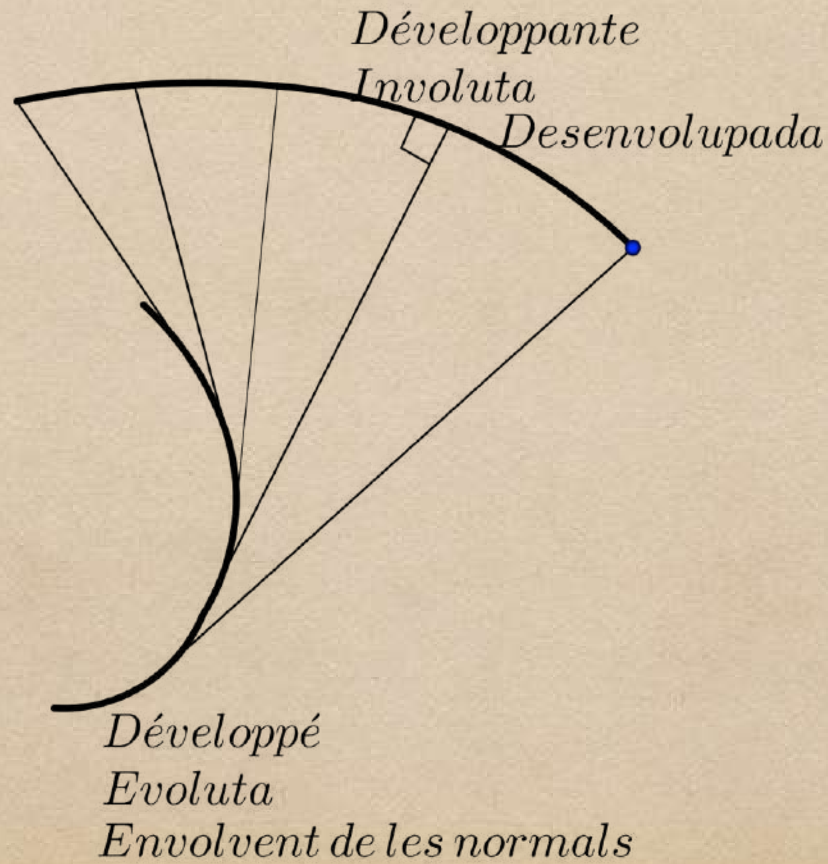
1. Descripció del rellotge oscil.latori
2. Caiguda de pesos. Cicloide
3. **Evolutes** i longitud de corbes
4. Centre d'oscil.lació
5. Construcció altres tipus de rellotge

# Evolutes

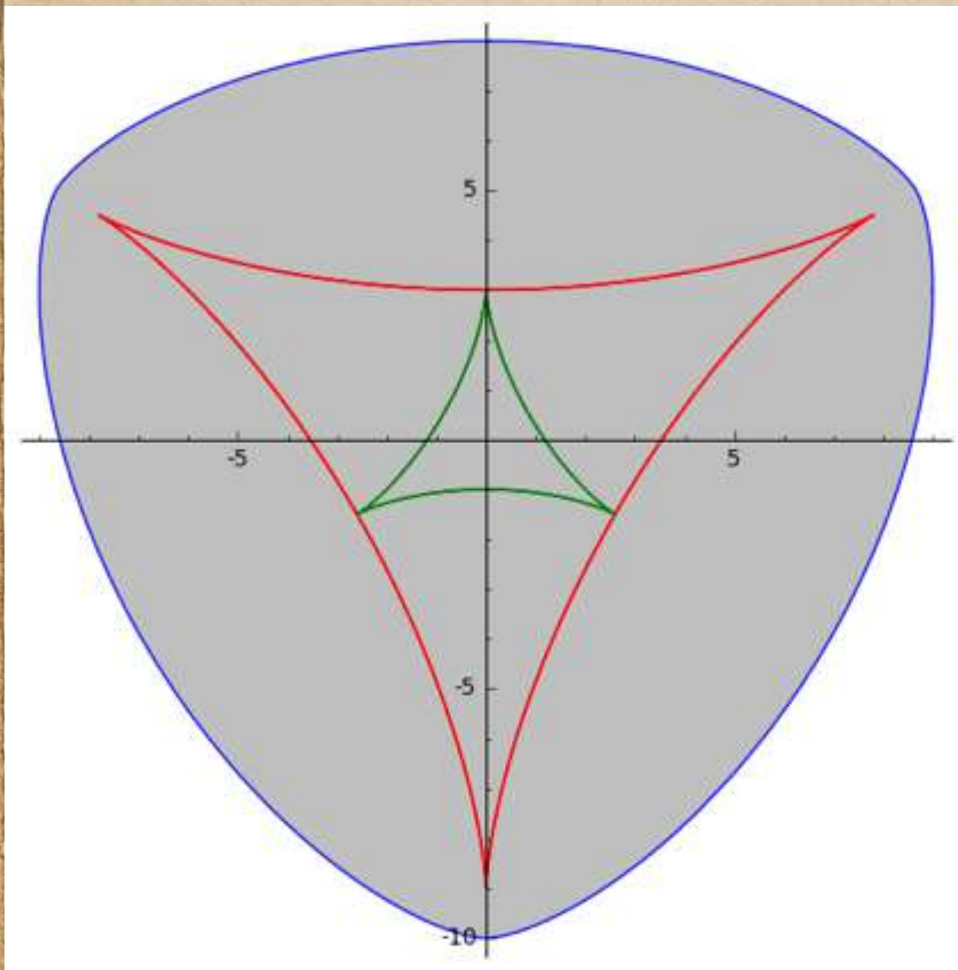


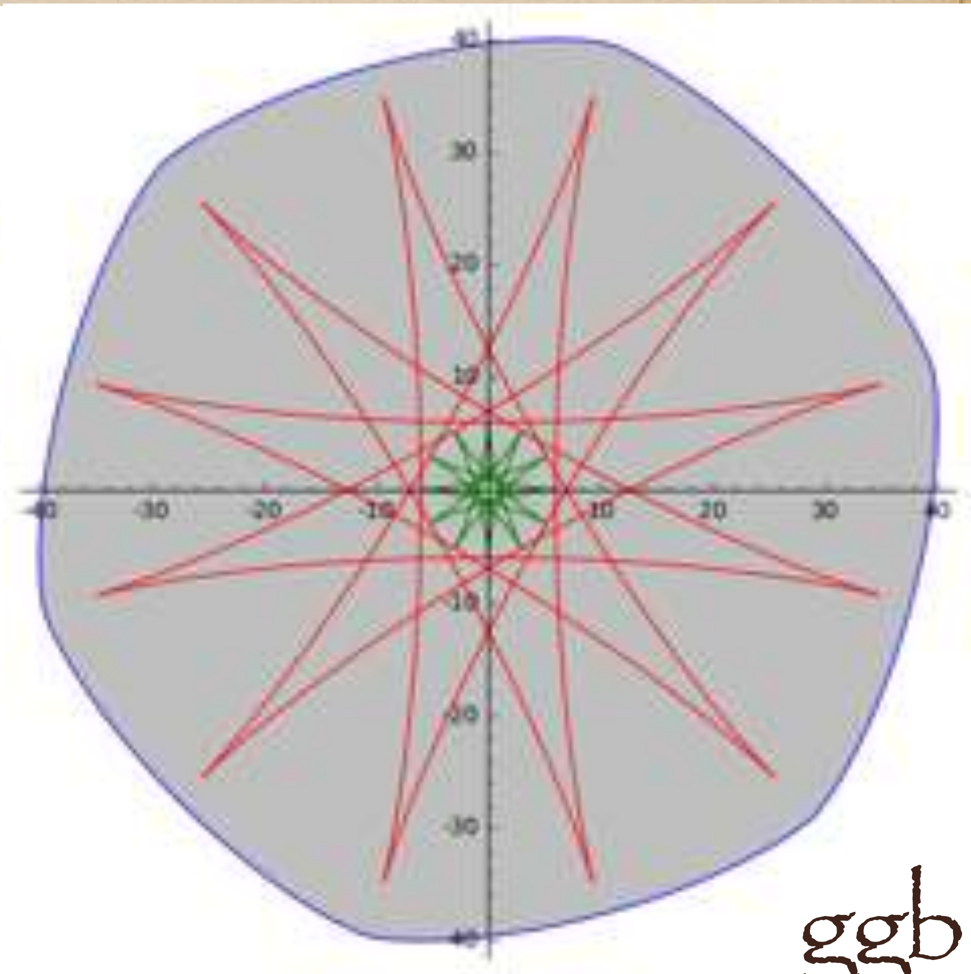
Illa vero cui filum circumplicatum erat, dicatur **Evoluta**

# Evolutes


Développante
Involuta
Desenvolupada
Développé
Evoluta
Envolvent de les normals

# Evolutes



ggb

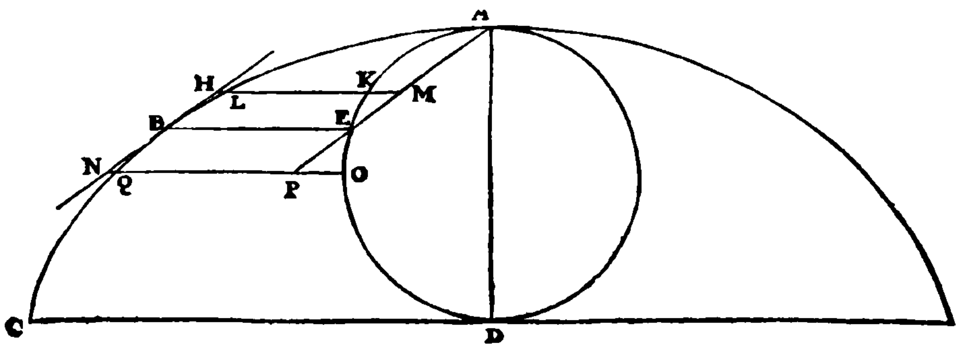
# Tangent a la Cicloide

*Dato in Cycloide puncto, rectam per illud ducere quæ Cycloidem tangat.*

Sit cyclois A B C, & punctum in ea datum B, per quod tangentem ducere oporteat.

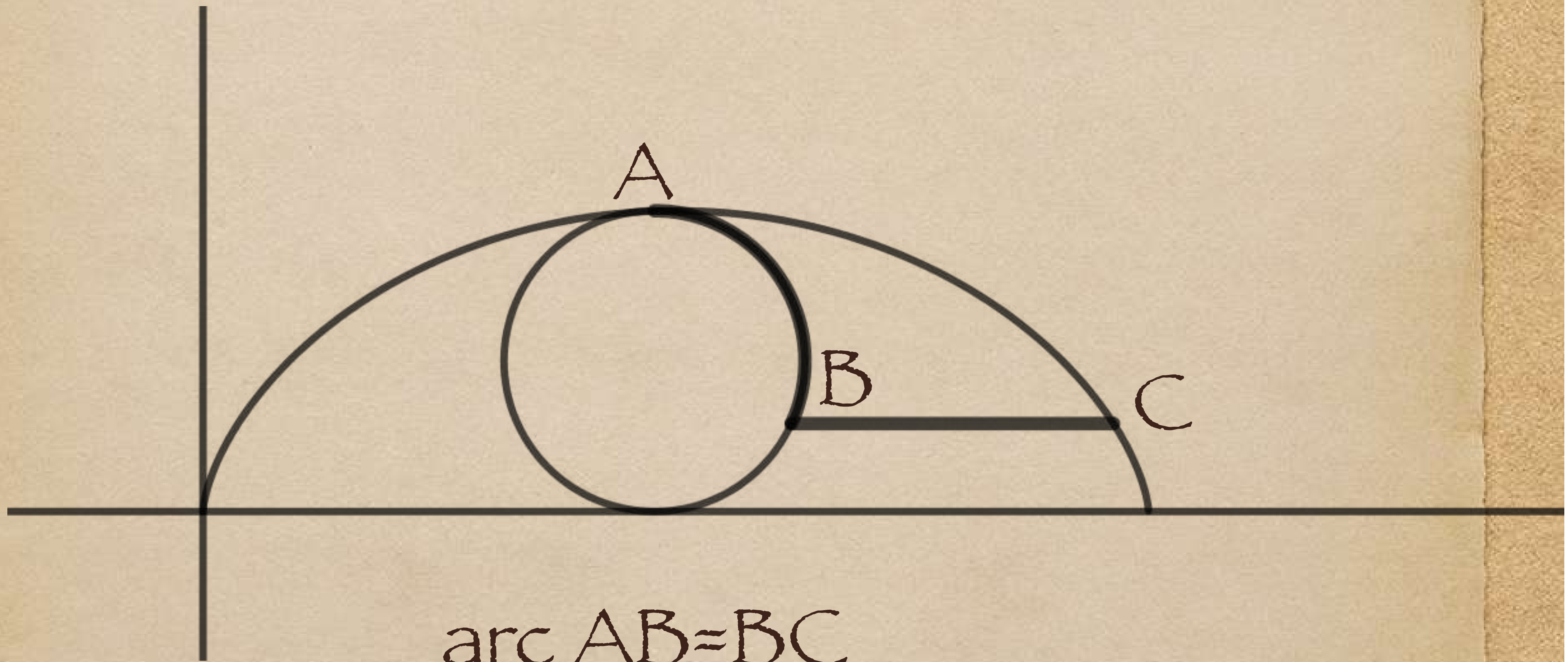
Circa axem cycloidis A D describatur circulus genitor A E D, & ducatur B E parallela basi cycloidis, quæ dicto circulo occurrat in E, & jungatur A E, cui denique parallela per B agatur H B N. Dico hanc cycloidem in B contingere.

Sumatur enim in ea punctum quodlibet, à B diversum, ac pri-



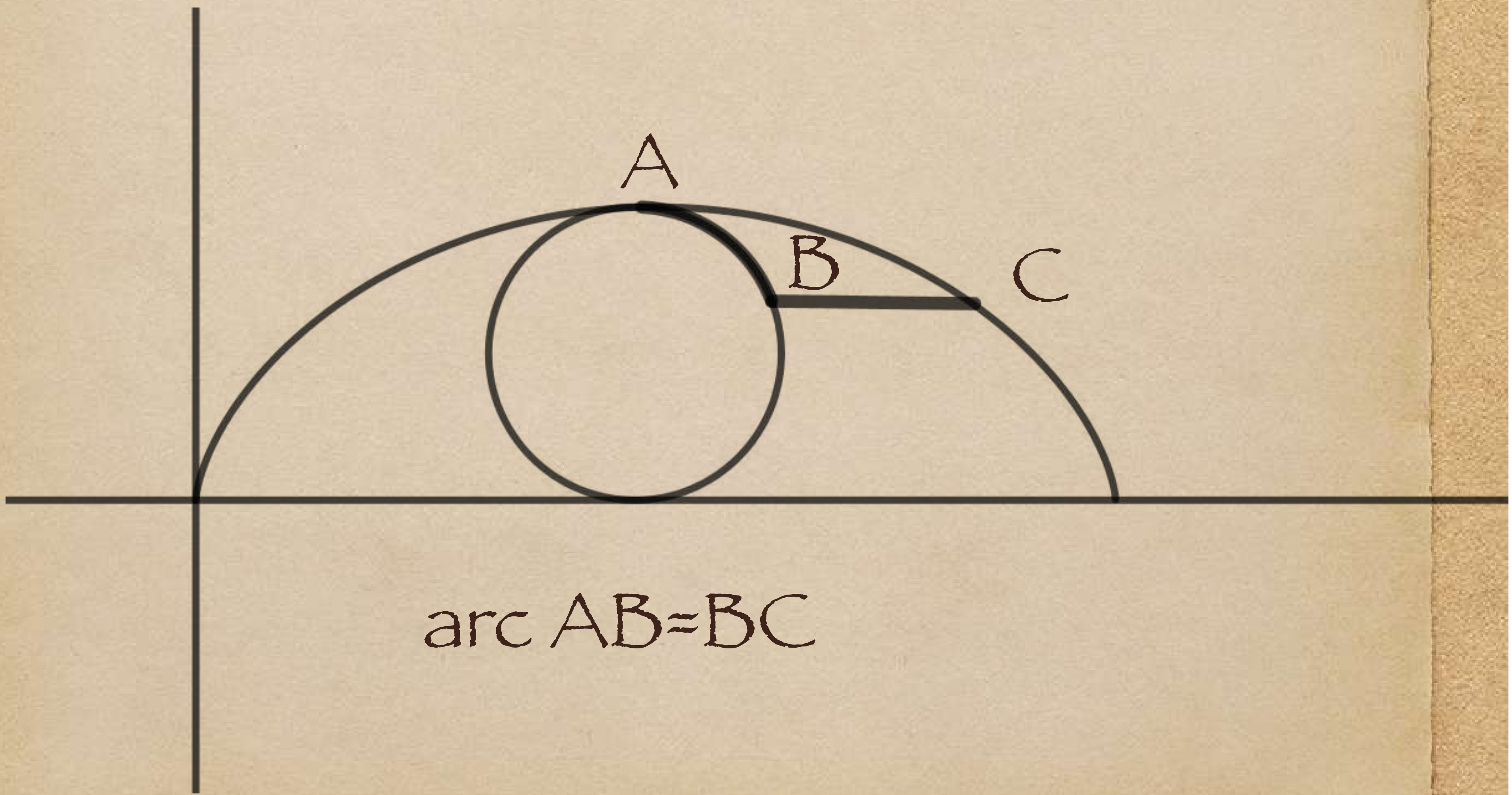

mo versus superiora velut H, & per H ducatur recta basi cycloidis parallela, quæ occurrat cycloidi in L, circulo A E D in K, rectæ A E in M. Quia ergo K L est æqualis arcui K A, recta autem K M minor arcu K E, erit recta M L minor arcu A E, hoc est, rectâ E B, sive M H; unde apparet punctum H esse extra cycloidem.

# Lema previ



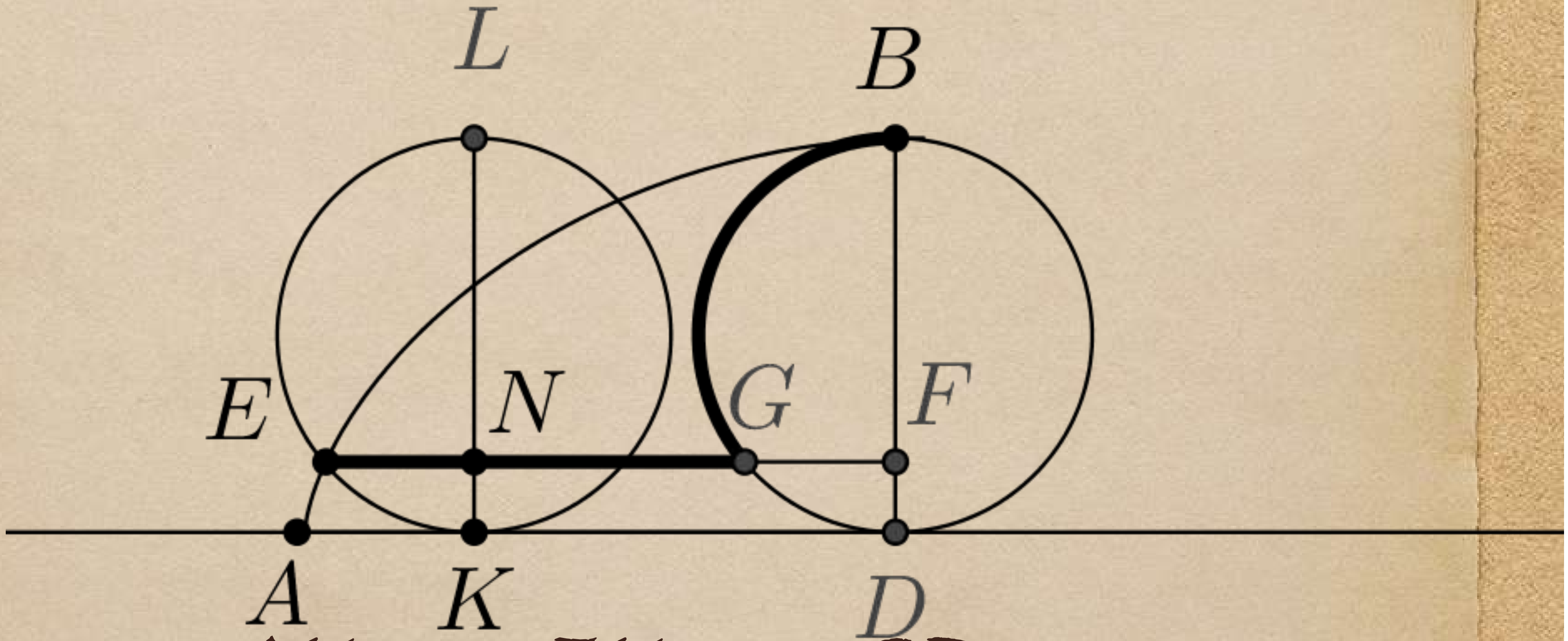

arc AB=BC

# Lema previ




arc AB=BC

# Lema previ

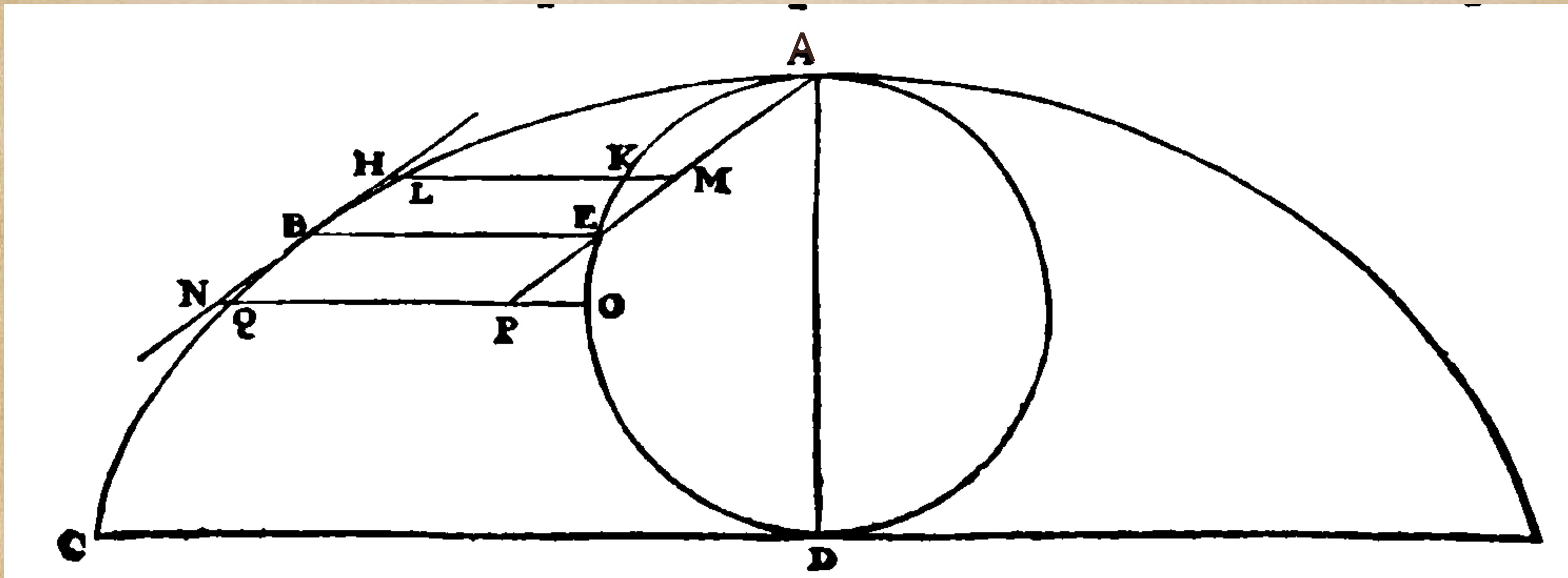



AK=arc EK=arc GD;

AD=arc DB; KD= AD-AK=arc GB;

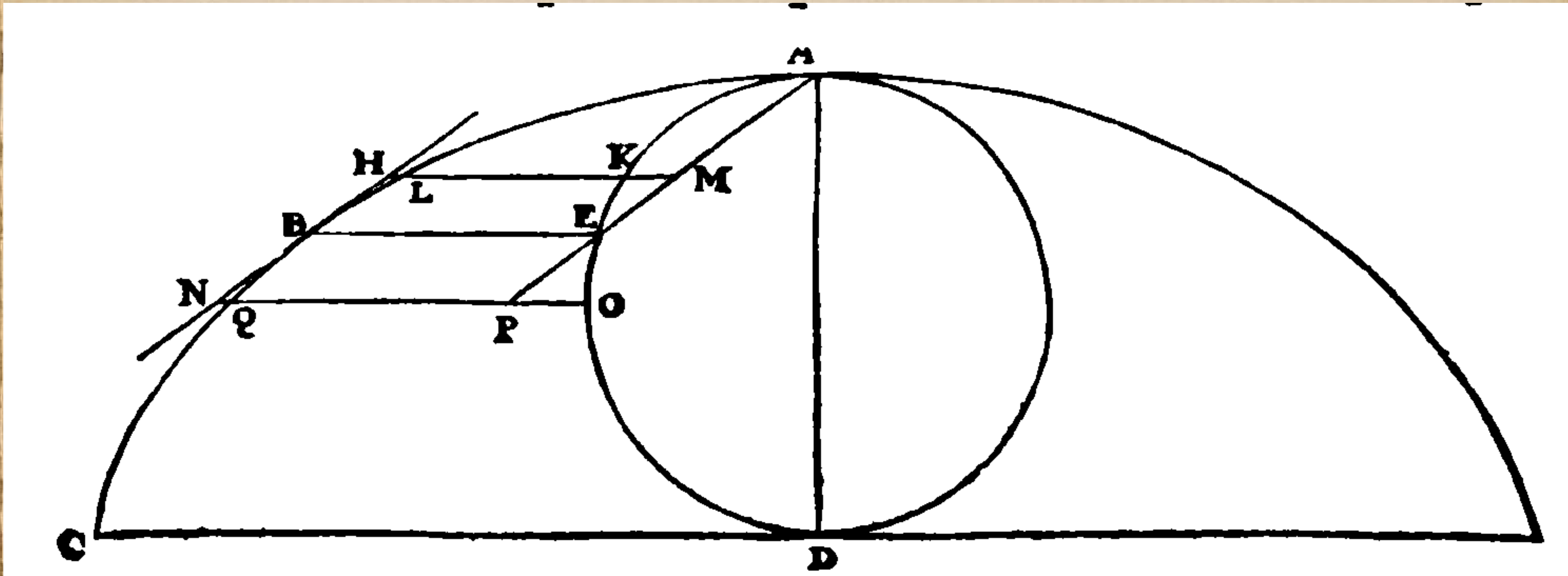
KD=EG

# Tangent a la Cicloide




Tracem paral.lela a AE per B. Prenem H i tracem HLKM

# Tangent a la Cicloide

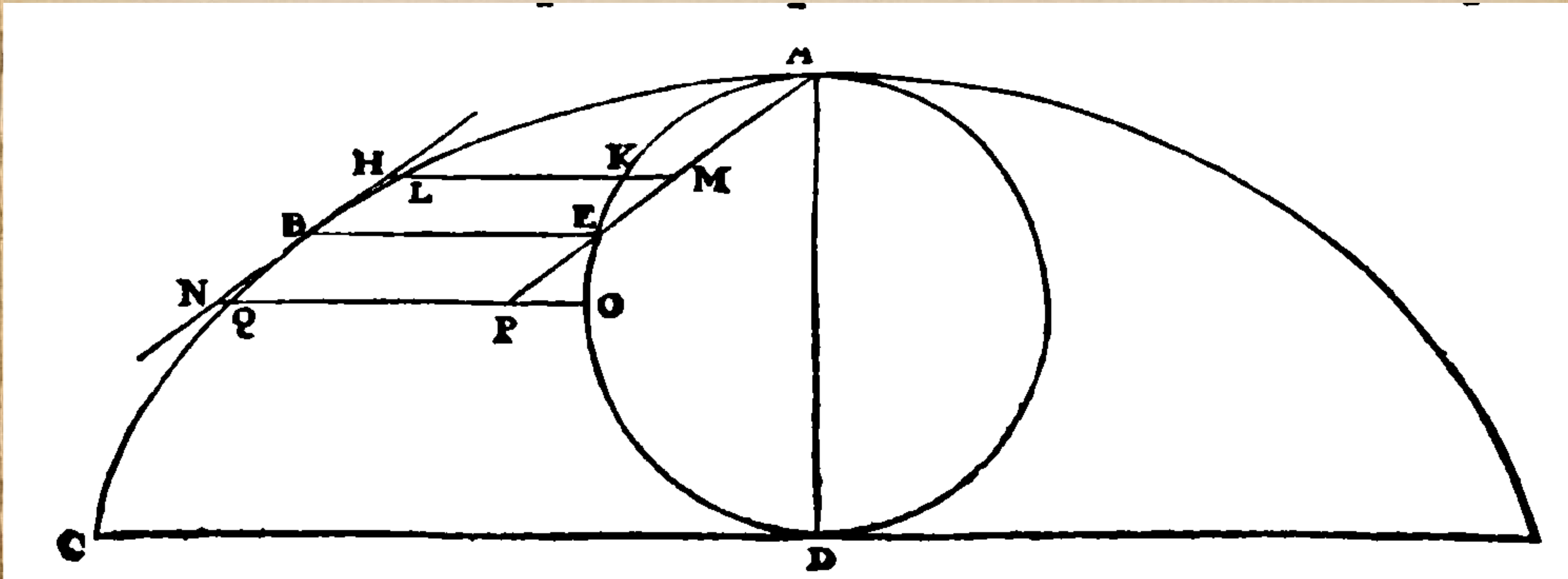



Sabem arc AE=EB, arc AK=KL

KM < arc KE

ML=LK+KM<arc AE

# Tangent a la Cicloide

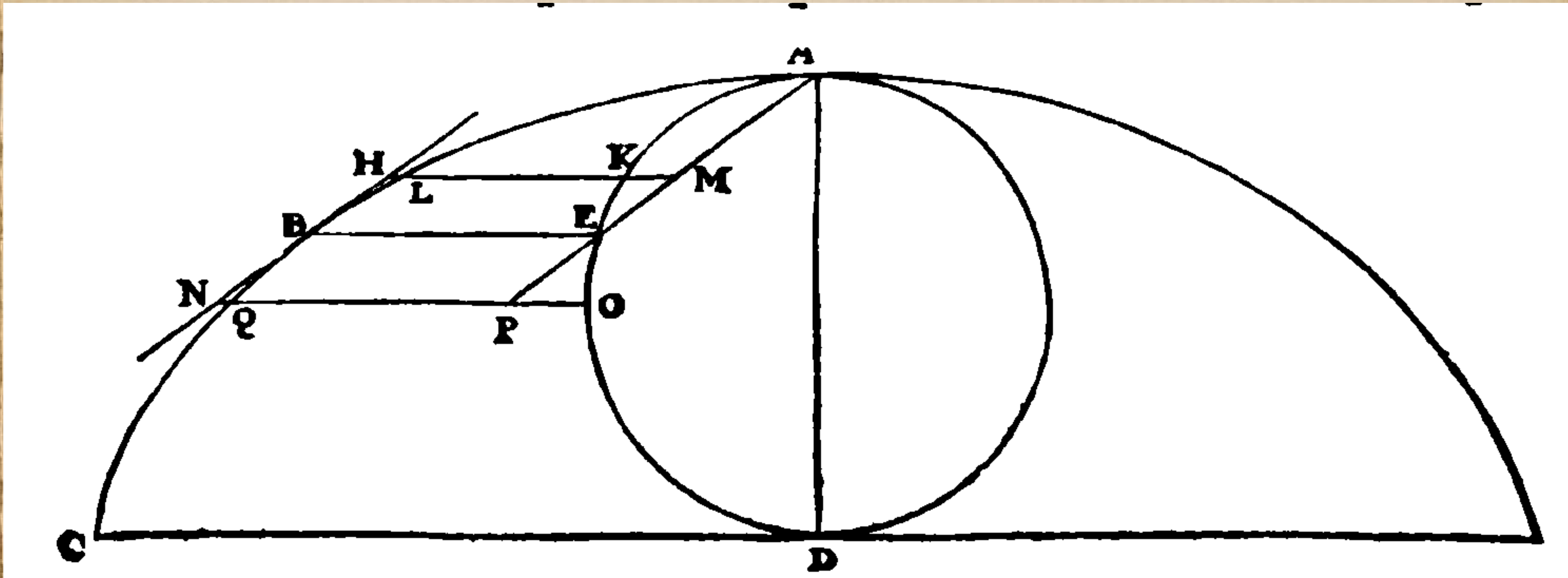



Sabem arc AE=EB, arc AK=KL

KM < arc KE

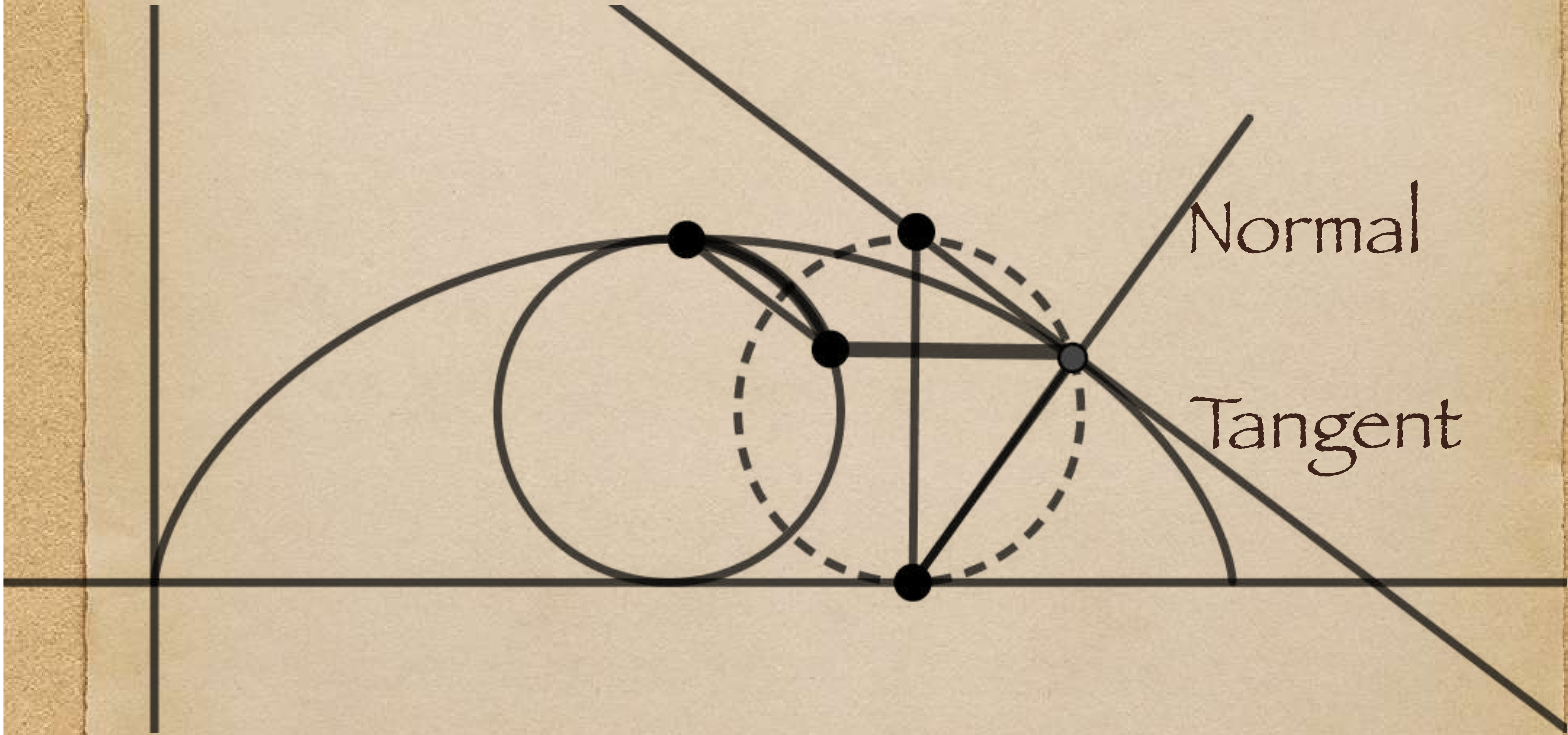
ML=LK+KM<arc AE =BE = HM

# Tangent a la Cicloide




Per tant H és exterior. Similar N

# Normal a la Cicloide



# Longitud de la Cicloide

[*Horologium, part III*] Aquest excel·lent geòmetra anglès, Christopher Wren, [1658] va descobrir per primera vegada aquesta propietat de la cicloide [longitud], i després va confirmar el seu resultat per una elegant demostració, que ha estat publicada en un llibre sobre la cicloide pel més destacat dels homes, John Wallis.

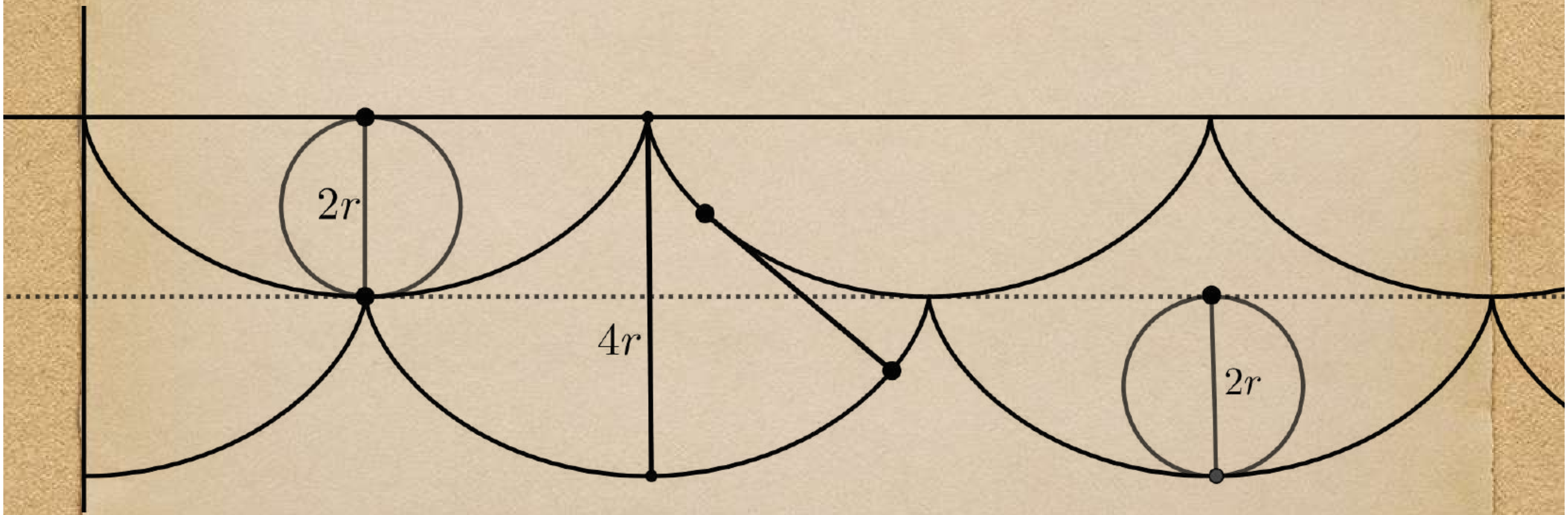
# Longitud de la Cicloide

Primer pas:

la **evoluta** de la cicloide és

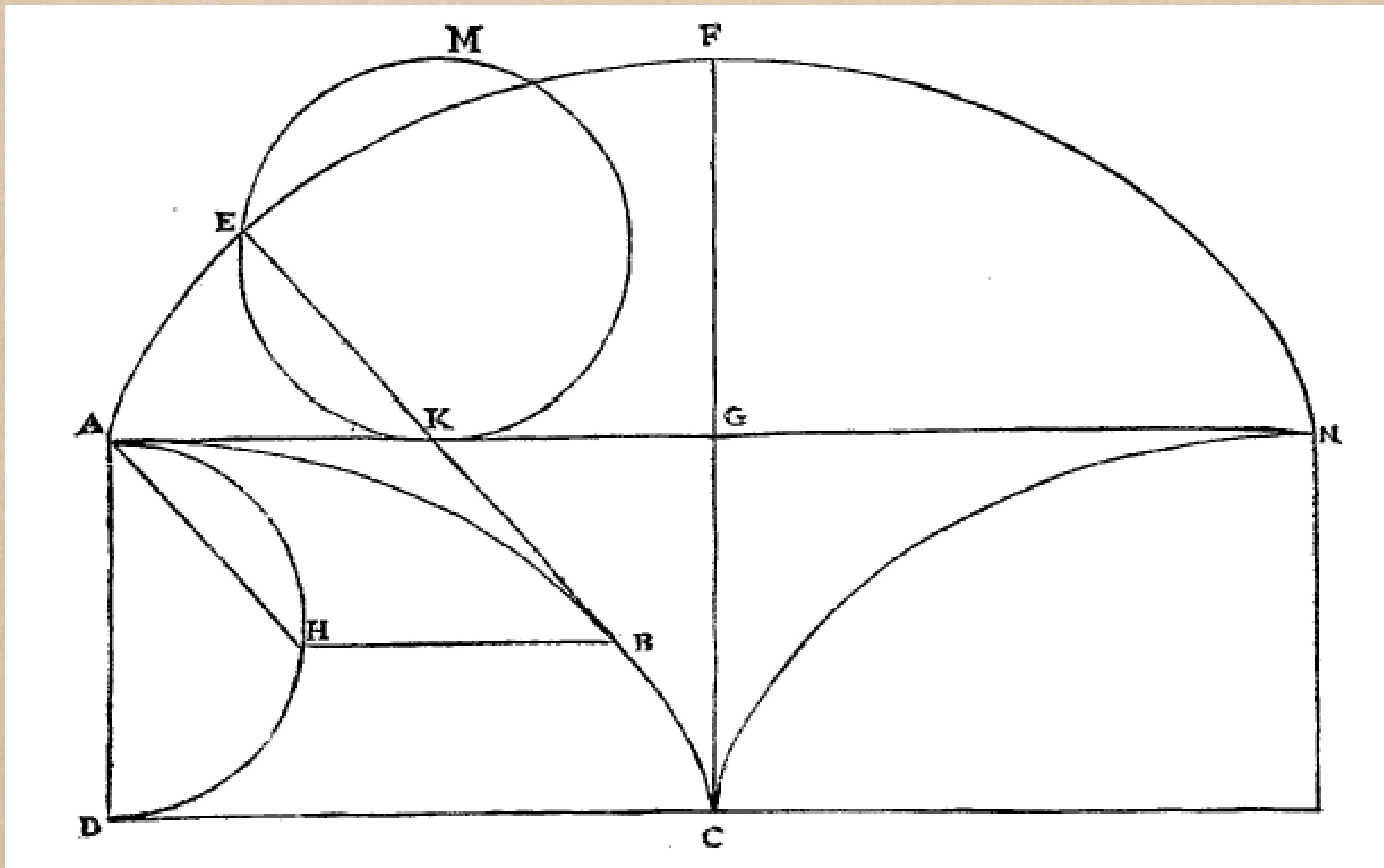
la mateixa cicloide traslladada

# Longitud de la Cicloide



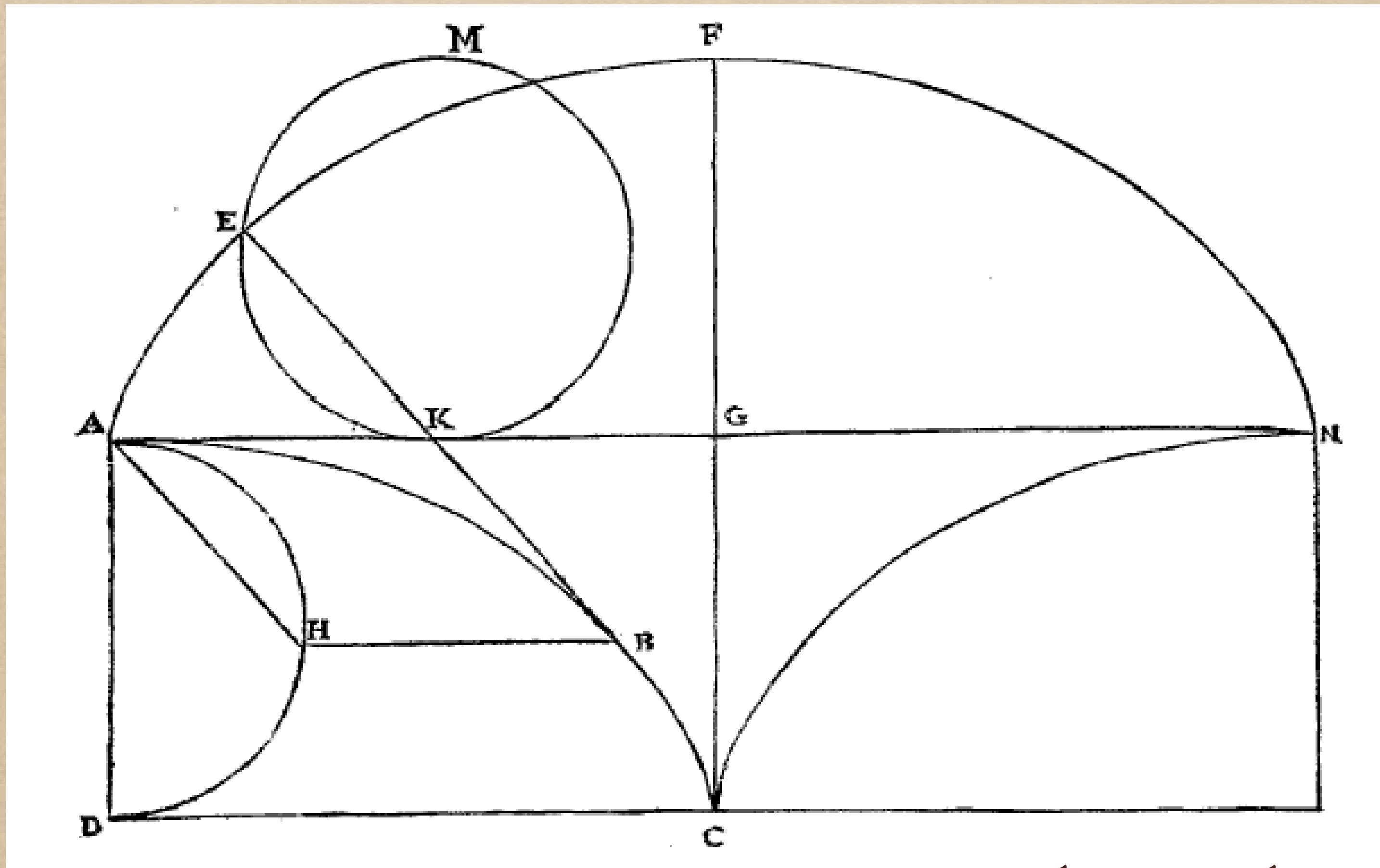

Veu que les tangents a la primera són perpendiculars a la segona

# Longitud de la Cicloide




BH=AK=arc HA=arc EK

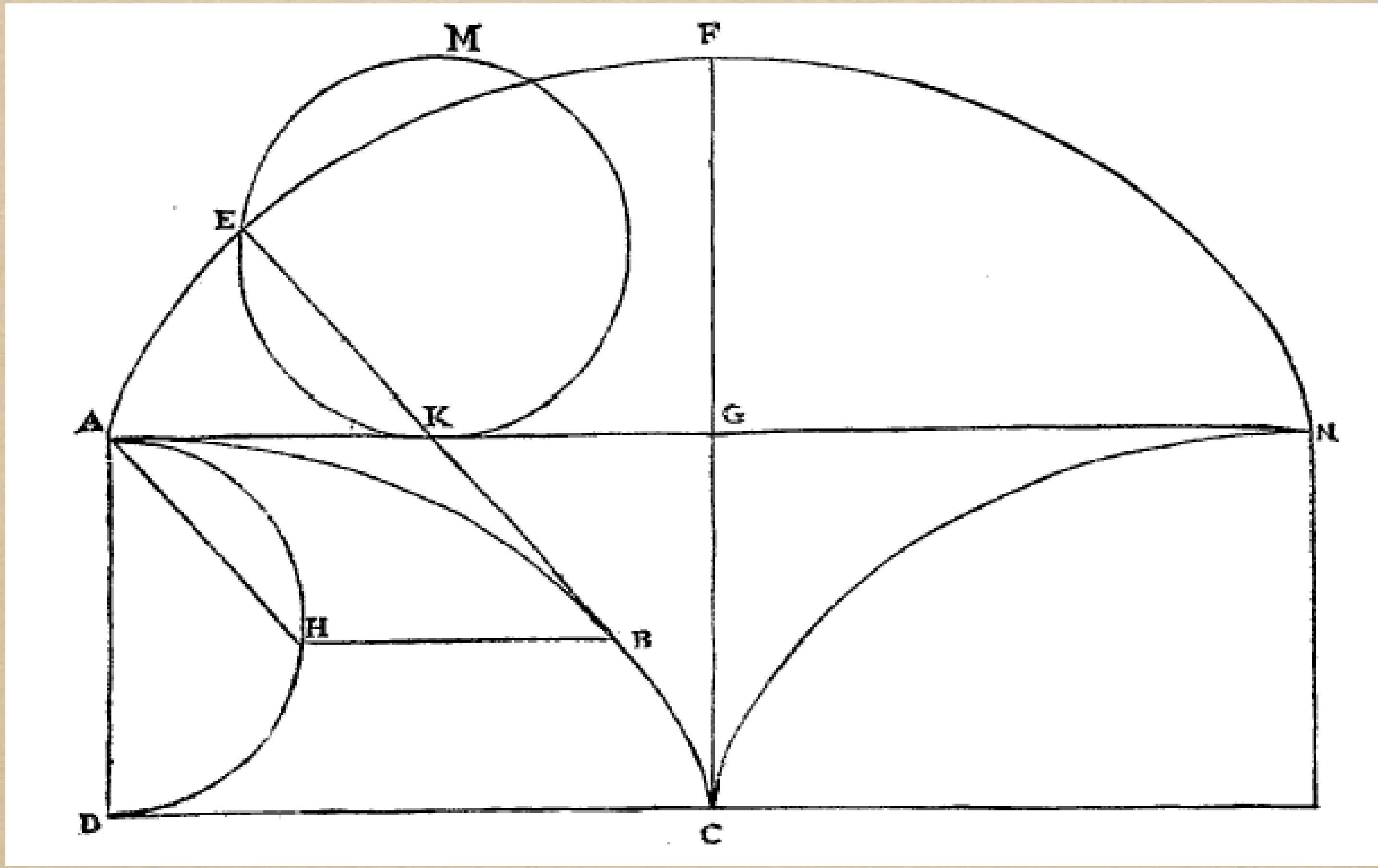
# Longitud de la Cicloide




per tant E pertany a la cicloide

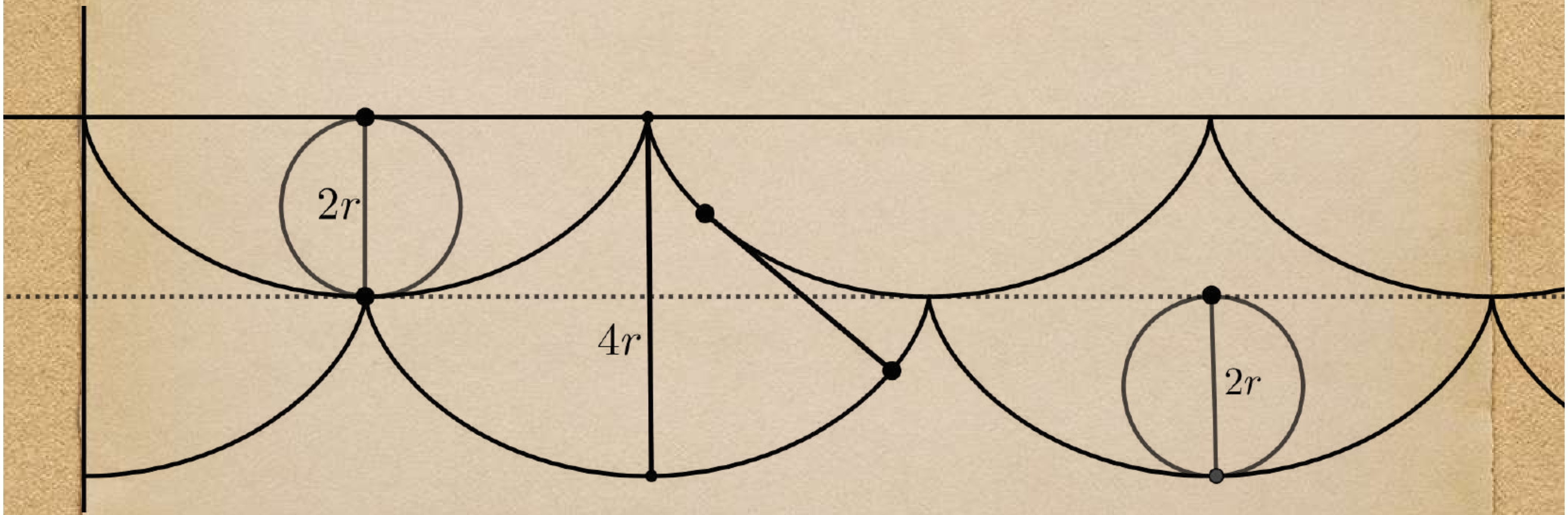
i EK és la normal

# Longitud de la Cicloide




Per unicitat, acceptant que en desenvolupar les tangents són perpendiculars a la desenvolupada, la desenvolupada de la cicloide és la cicloide.

# Longitud de la Cicloide




Longitud de la cicloide = 8r

ggb

# Càustica

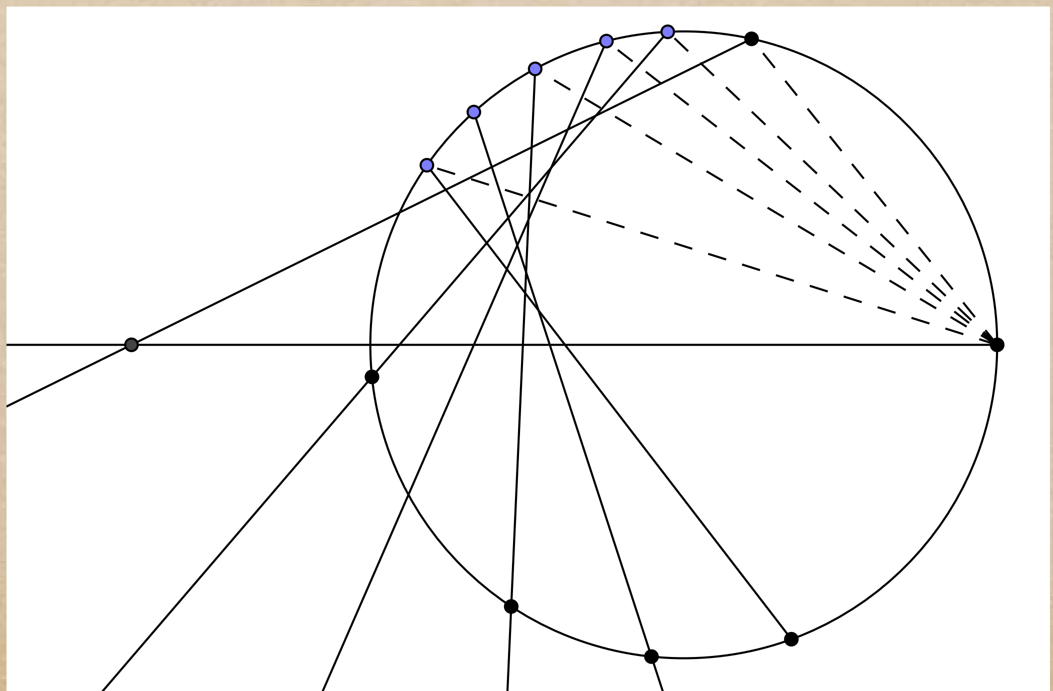
DIEC: **càustic -a**

Que és envolupant dels rajos lluminosos provinents d'un focus, reflectits per una superfície còncava.

# Càustica

DIEC: **càustic -a**

Que és envolupant dels rajos lluminosos provinents d'un focus, reflectits per una superfície còncava.



# Càustica

DIEC: **càustic -a**

Que és envolupant dels rajos lluminosos provinents d'un focus, reflectits per una superfície còncava.

ggb

# Càustica

DIEC: **càustic -a**

Que és envolupant dels rajos lluminosos provinents d'un focus, reflectits per una superfície còncava.

Veurem que les càustiques són evolutes

# Càustica

DIEC: **càustic -a**

Que és envolupant dels rajos lluminosos provinents d'un focus, reflectits per una

Veurem que les càustiques són evolutes
Concretament de les ortotòmiques

# Ortotòmica

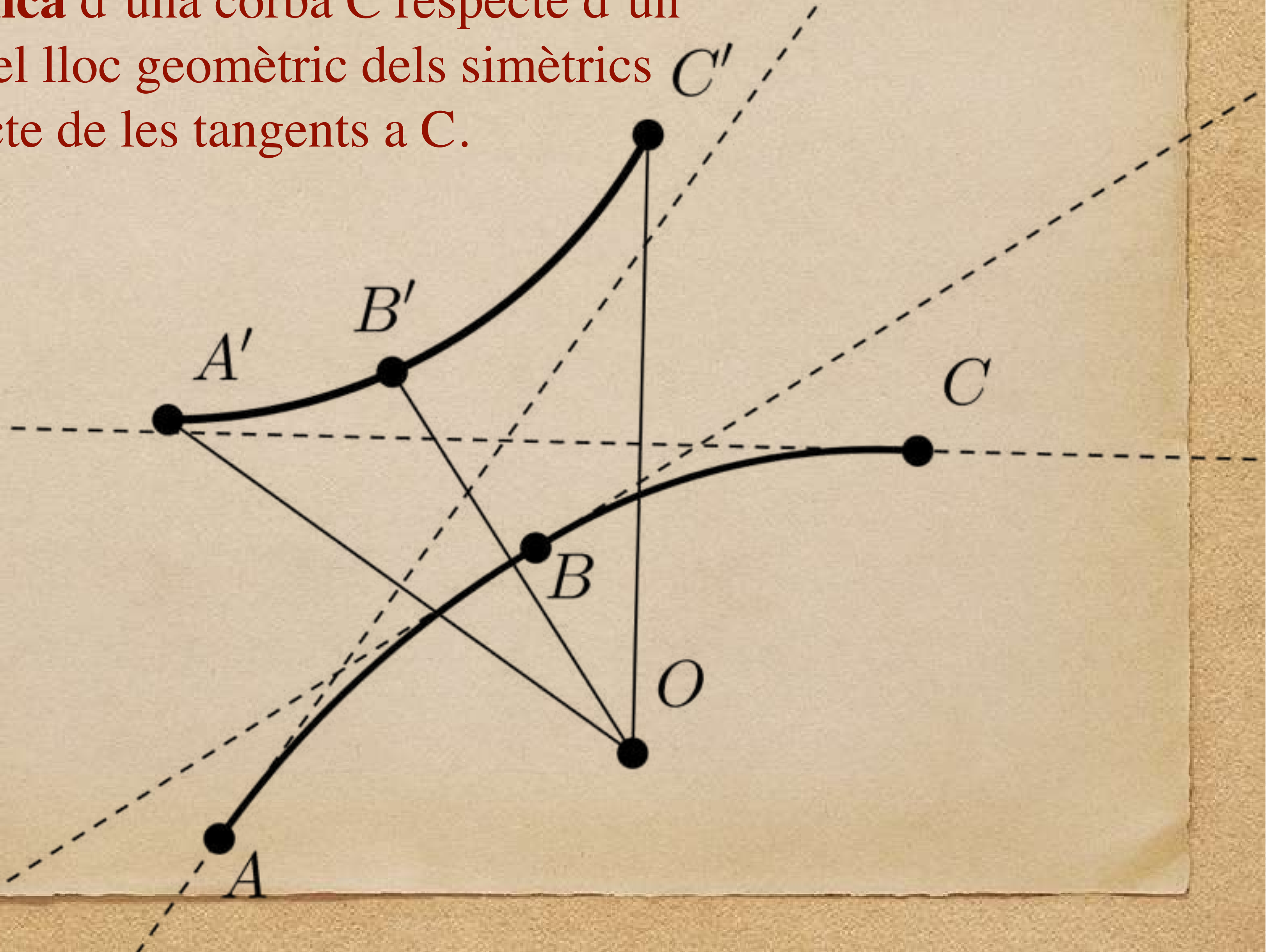
DIEC:**No s'ha trobat cap entrada coincident amb els criteris de cerca**

# Ortotòmica

L'**ortotòmica** d'una corba C respecte d'un punt O és el lloc geomètric dels simètrics d'O respecte de les tangents a C.

# Ortotòmica

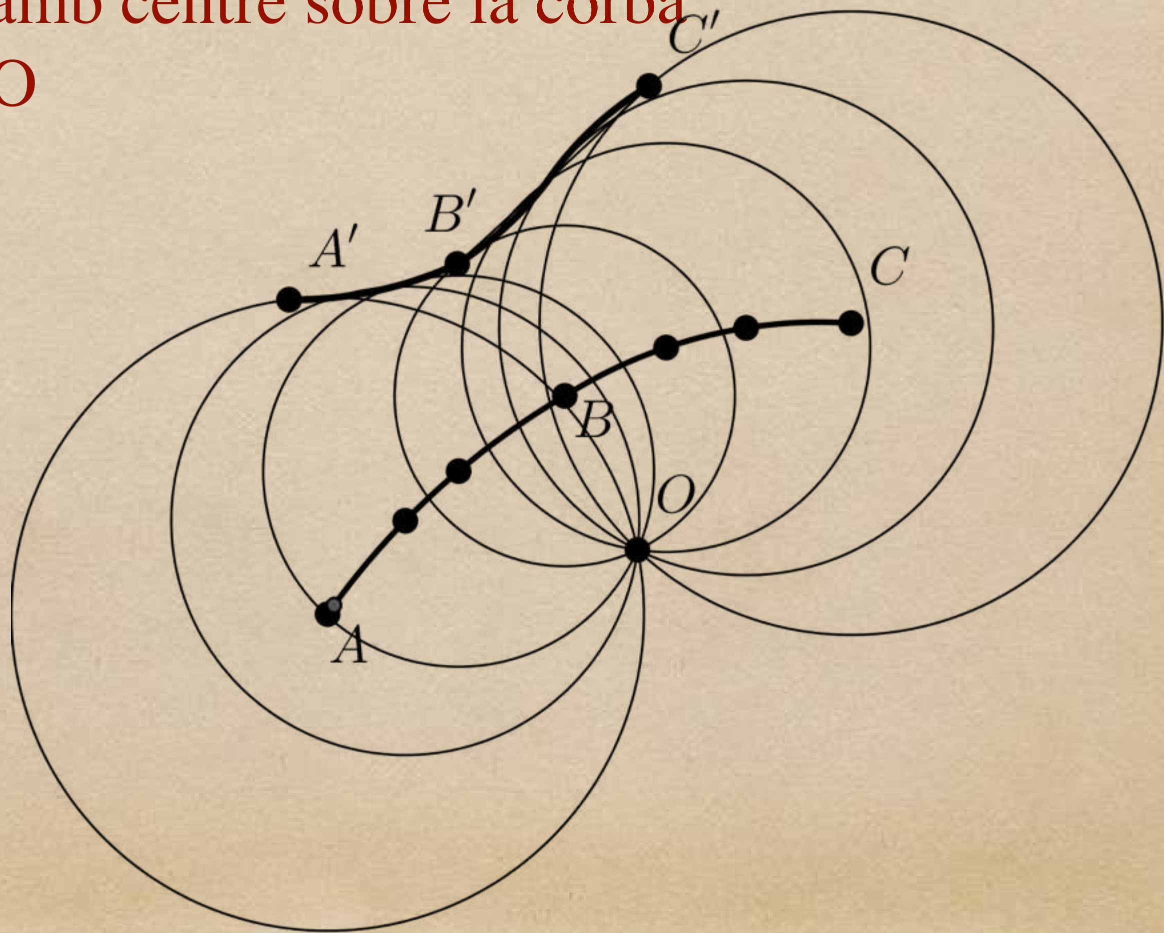
L'**ortotòmica** d'una corba C respecte d'un punt O és el lloc geomètric dels simètrics d'O respecte de les tangents a C.



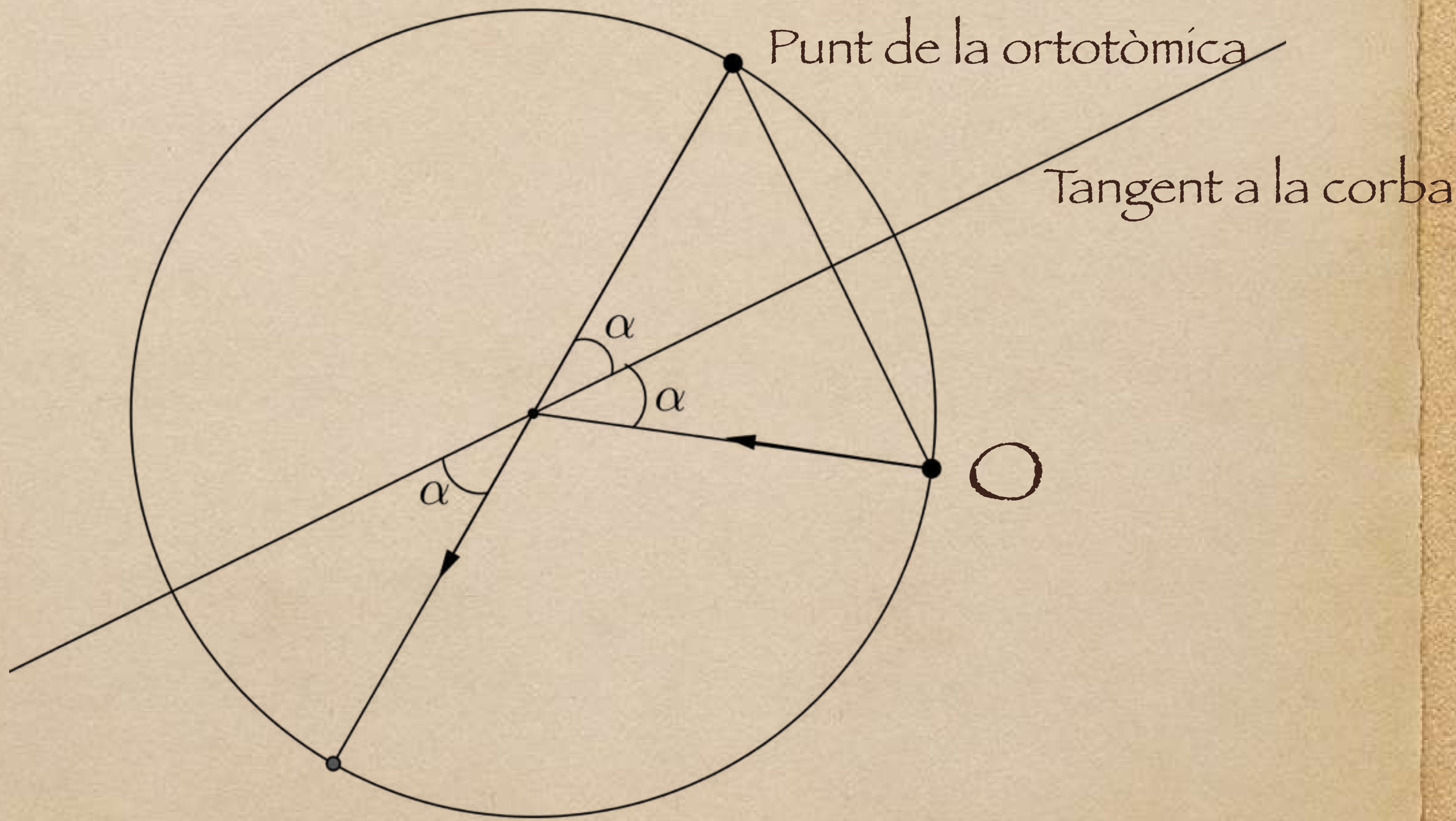
# Ortotòmica

Segona definició

L'**ortotòmica** d'una corba C respecte d'un punt O és l'envolvent de les circumferències amb centre sobre la corba i que passen per O

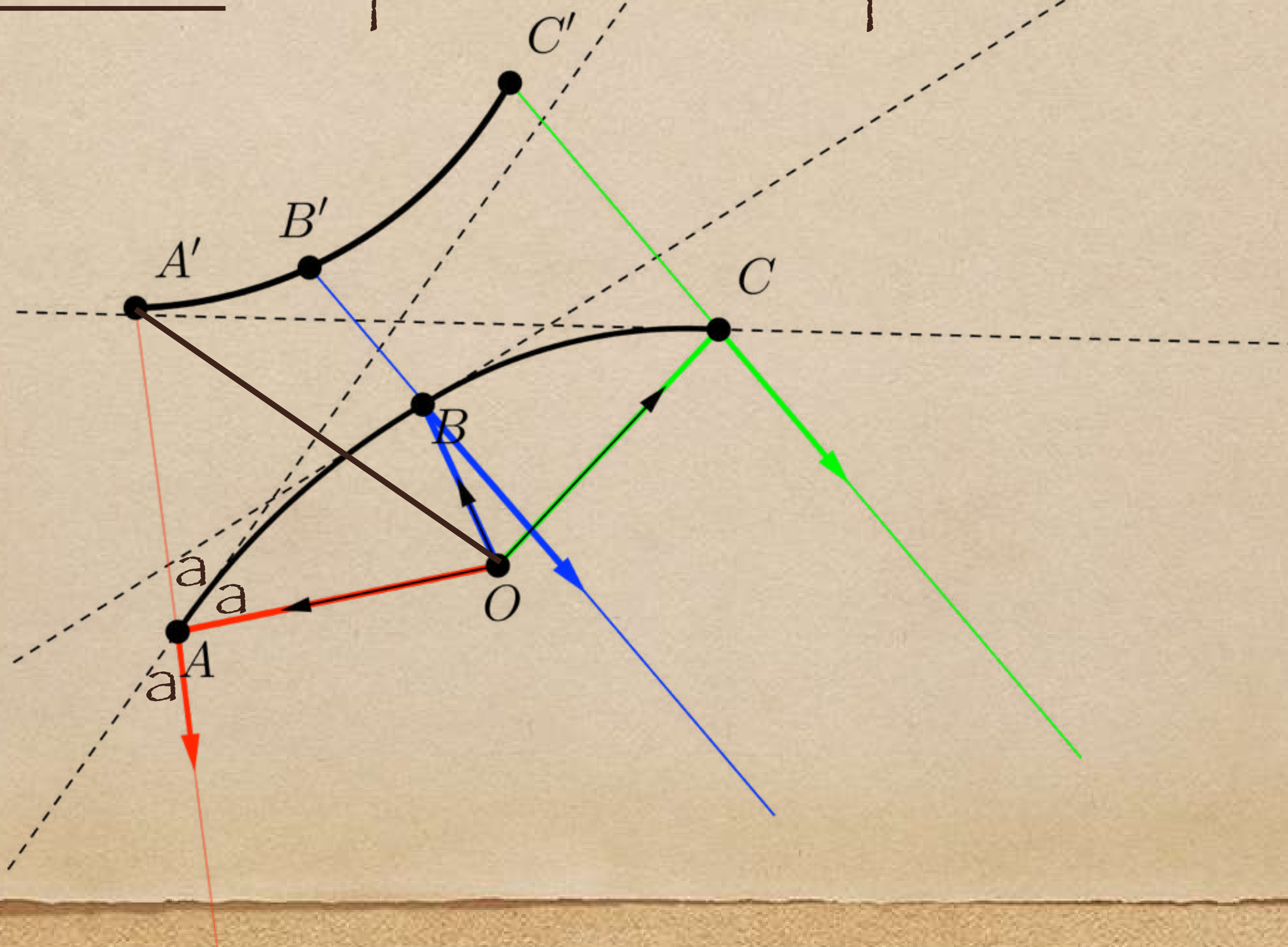


# L'equivalència es dedueix de:

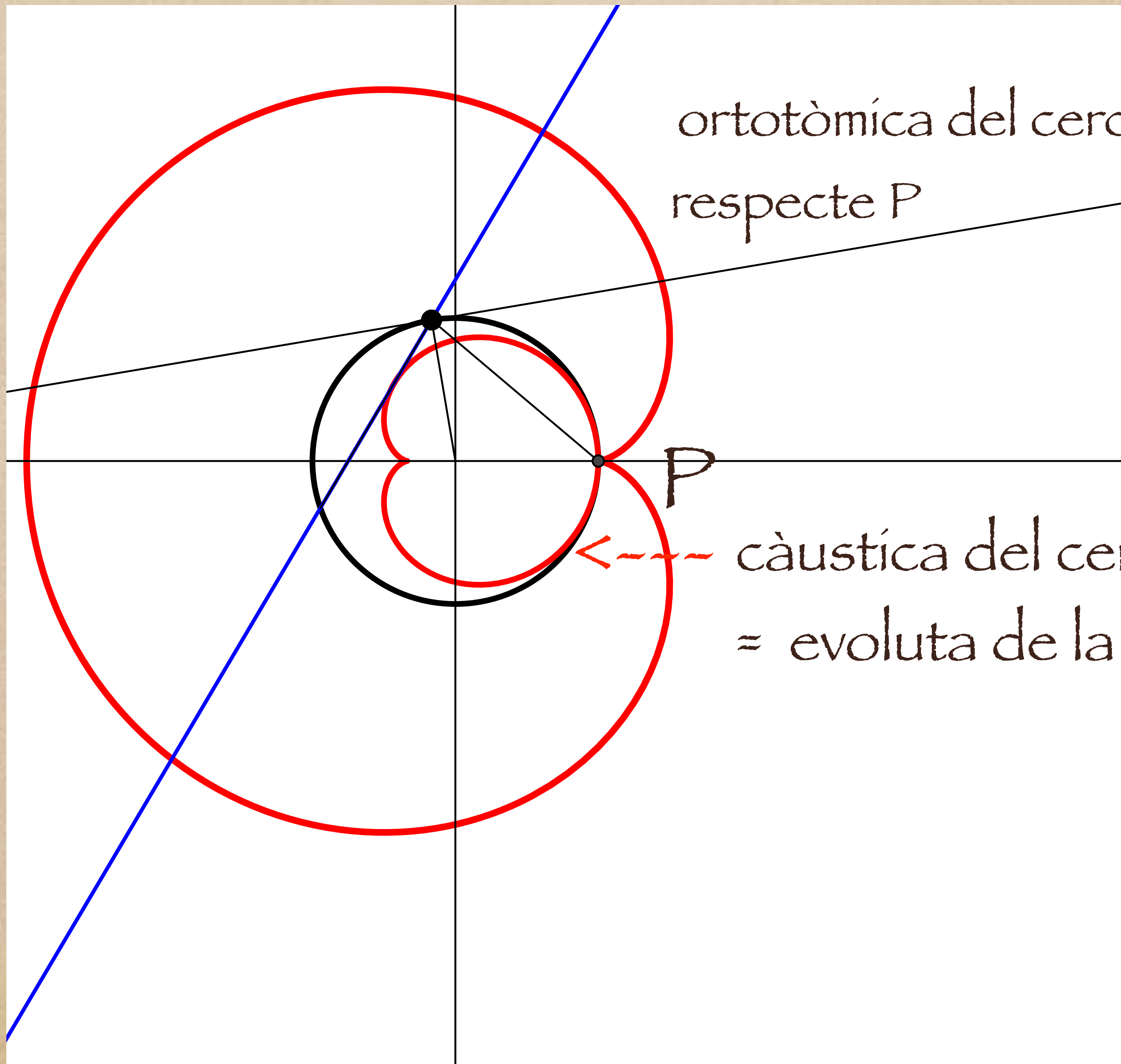


# Ortotòmica

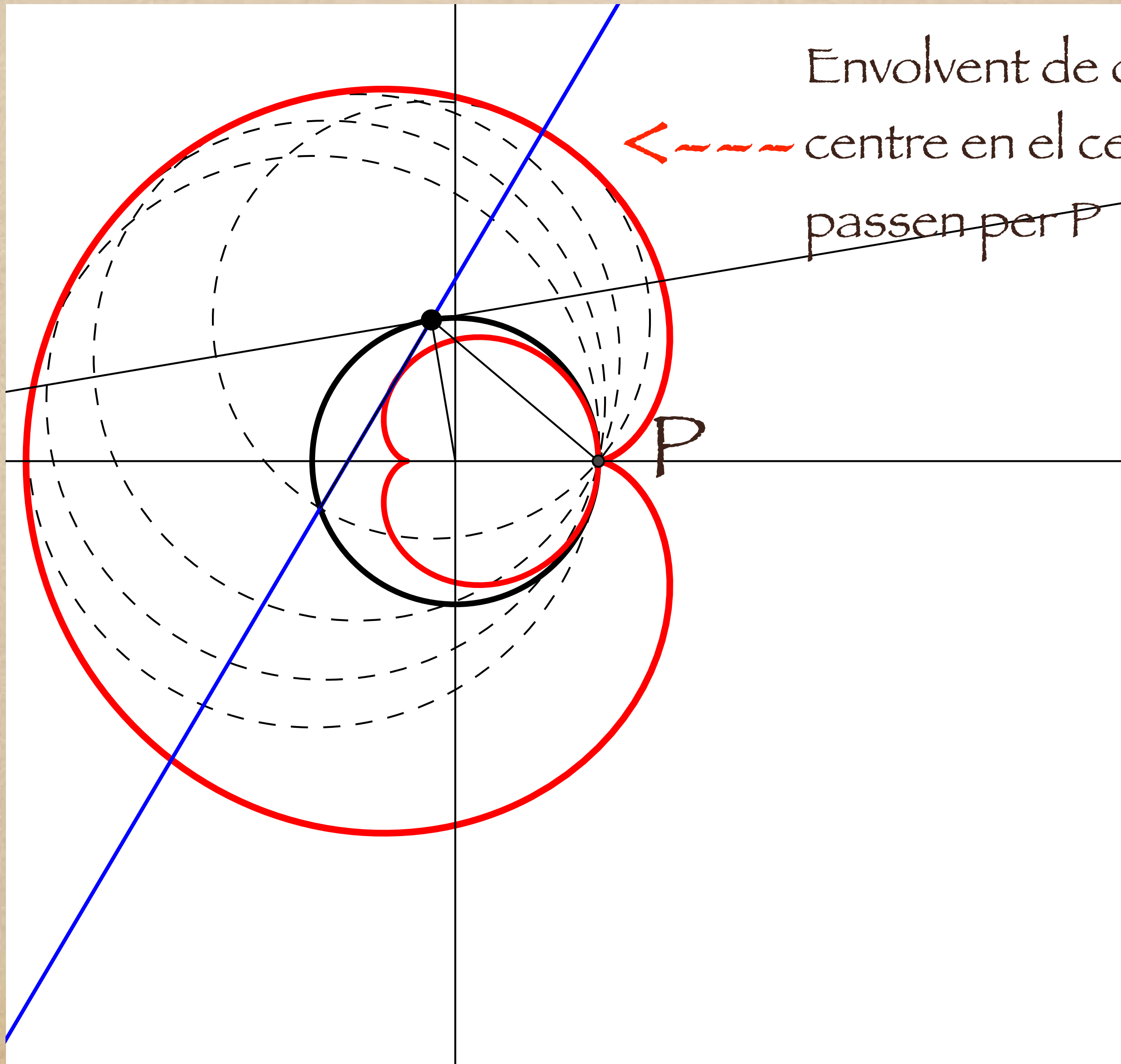
La evoluta de la ortotòmica d'una corba respecte un punt és la càustica d'aquesta corba respecte el mateix punt



# Cardioide

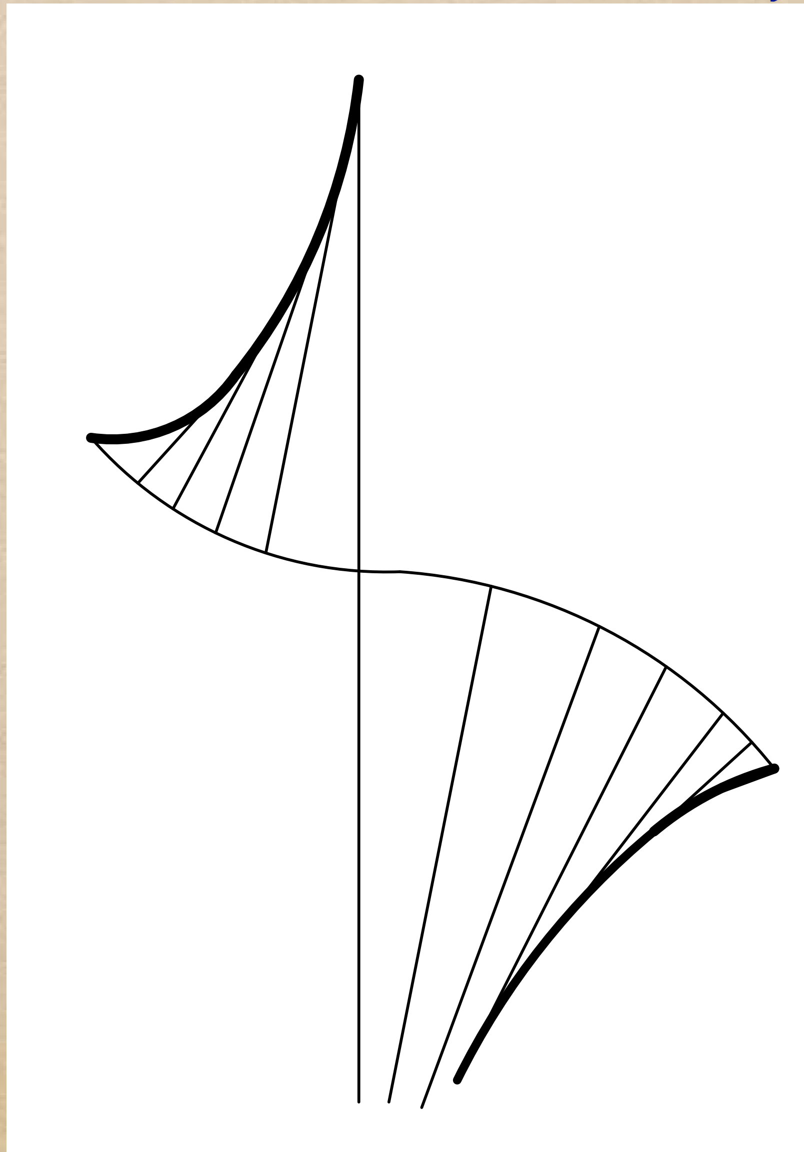

ortotòmica del cercle
respecte P
P
<--- càustica del cercle respecte P
= evoluta de la ortotòmica

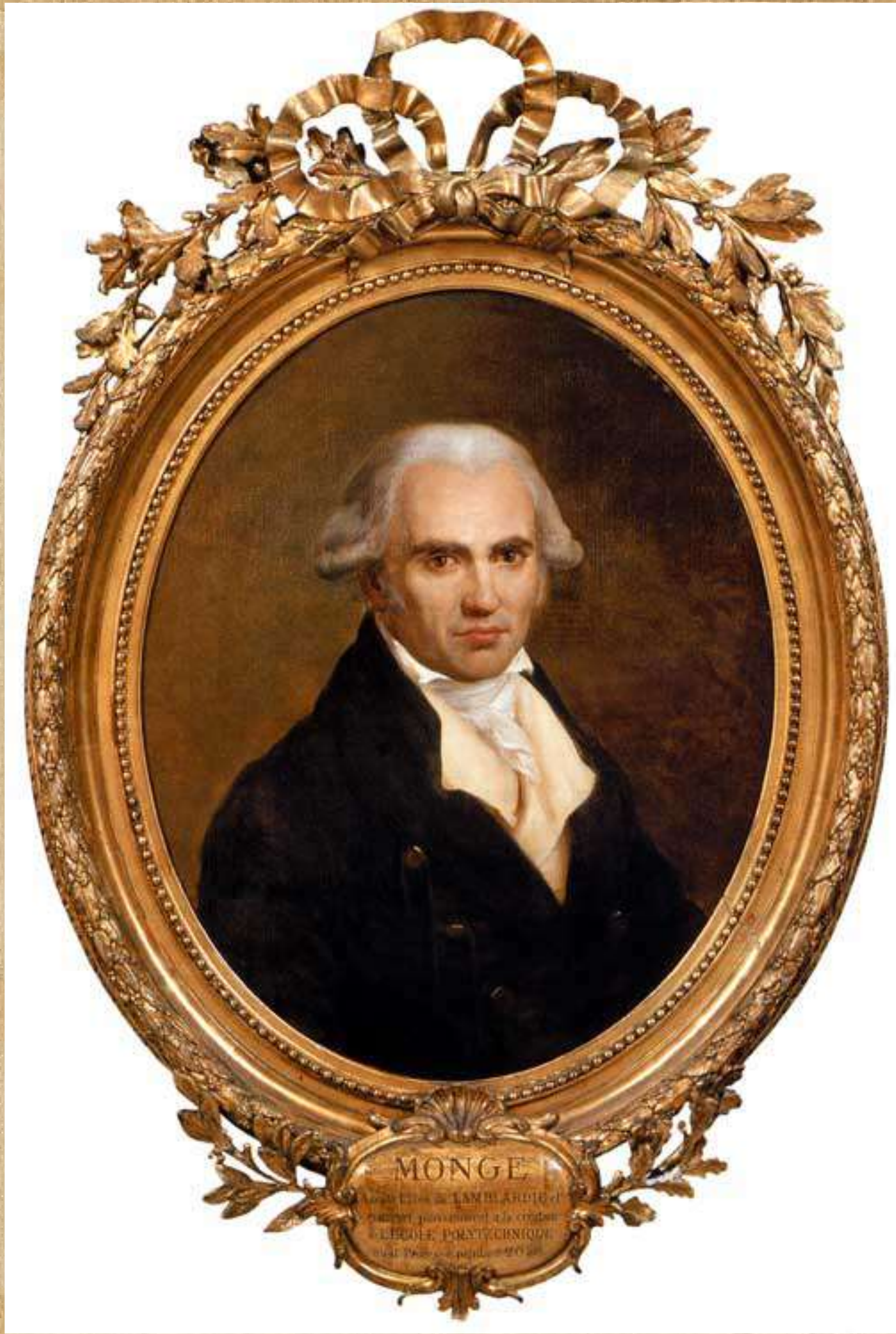
# Cardioide




Envolvent de cercles amb centre en el cercle negre que passen per P

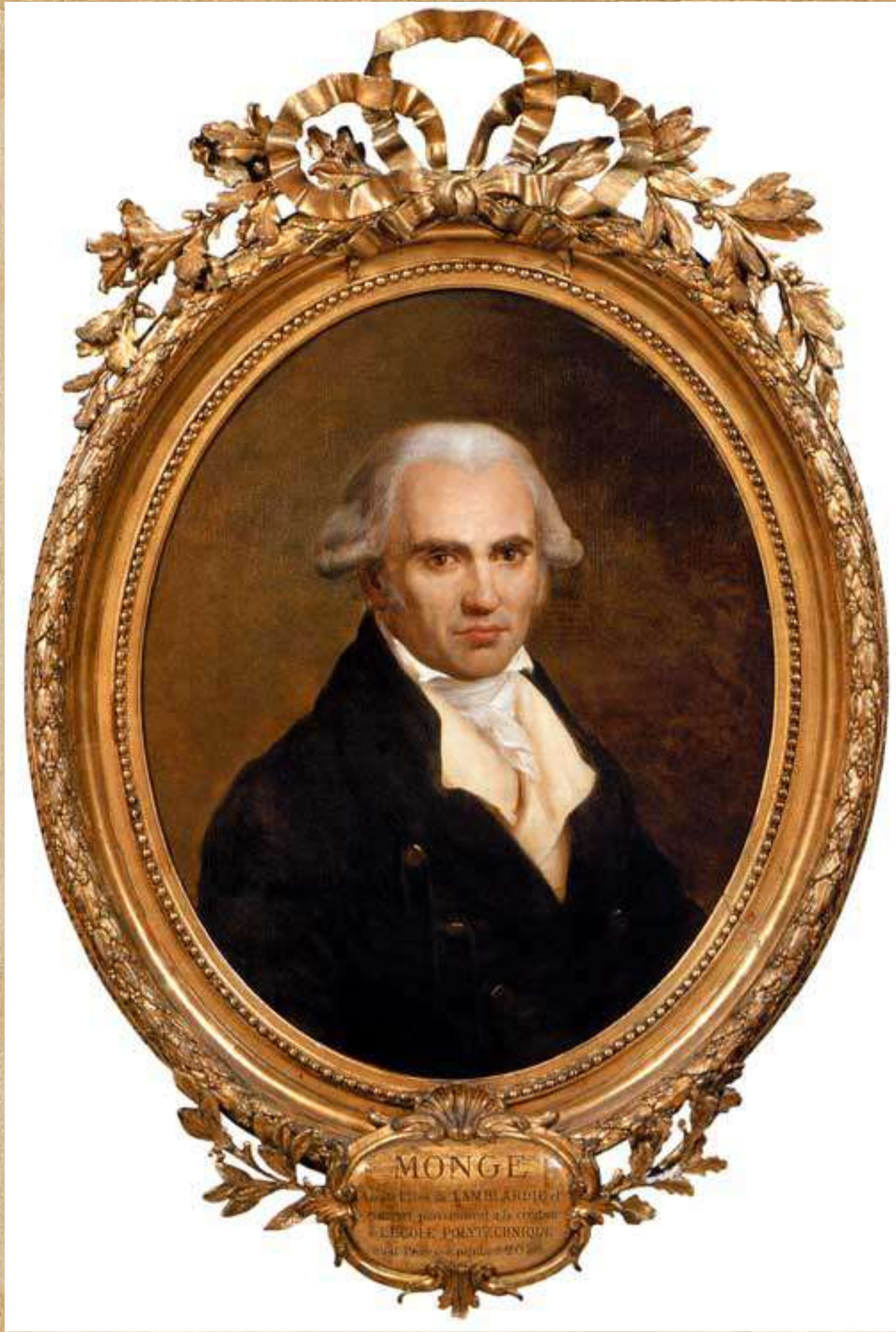
# Evolutes a l'espai






# Gaspard Monge

1746-1818




# Gaspard Monge

1746-1818

1766 Geometria Descriptiva

1792 Ministre de Marina

1796-1799 director École Polytechnique;

Journal de l'Ecole Polytechnique

1798 Va a Egipte amb Napoleó

1799 Senador

# École Polytechnique

Charles Tinseau d'Amondans (1748-1822)

Adrien Marie Legendre (1752-1833).

Jean Baptiste Meusnier (1754-1793)

Sylvestre Lacroix (1765-1843)

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Michel Ange Lancret (1774-1807)

André Marie Ampère (1775-1846) .

Sophie Germain (1776-1831)

Pierre Charles François Dupin (1784-1873)

Louis Leger Vallée (1784-1864)

Jean Victor Poncelet (1788-1867) .

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Michel Chasles (1793-1880)

Benjamin Olinde Rodrigues (1795-1851)

Gabriel Lamé (1795-1870)

Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886)

Jean Frédéric Frenet (1816-1900)

# Jean B.J. Fourier 1768-1830

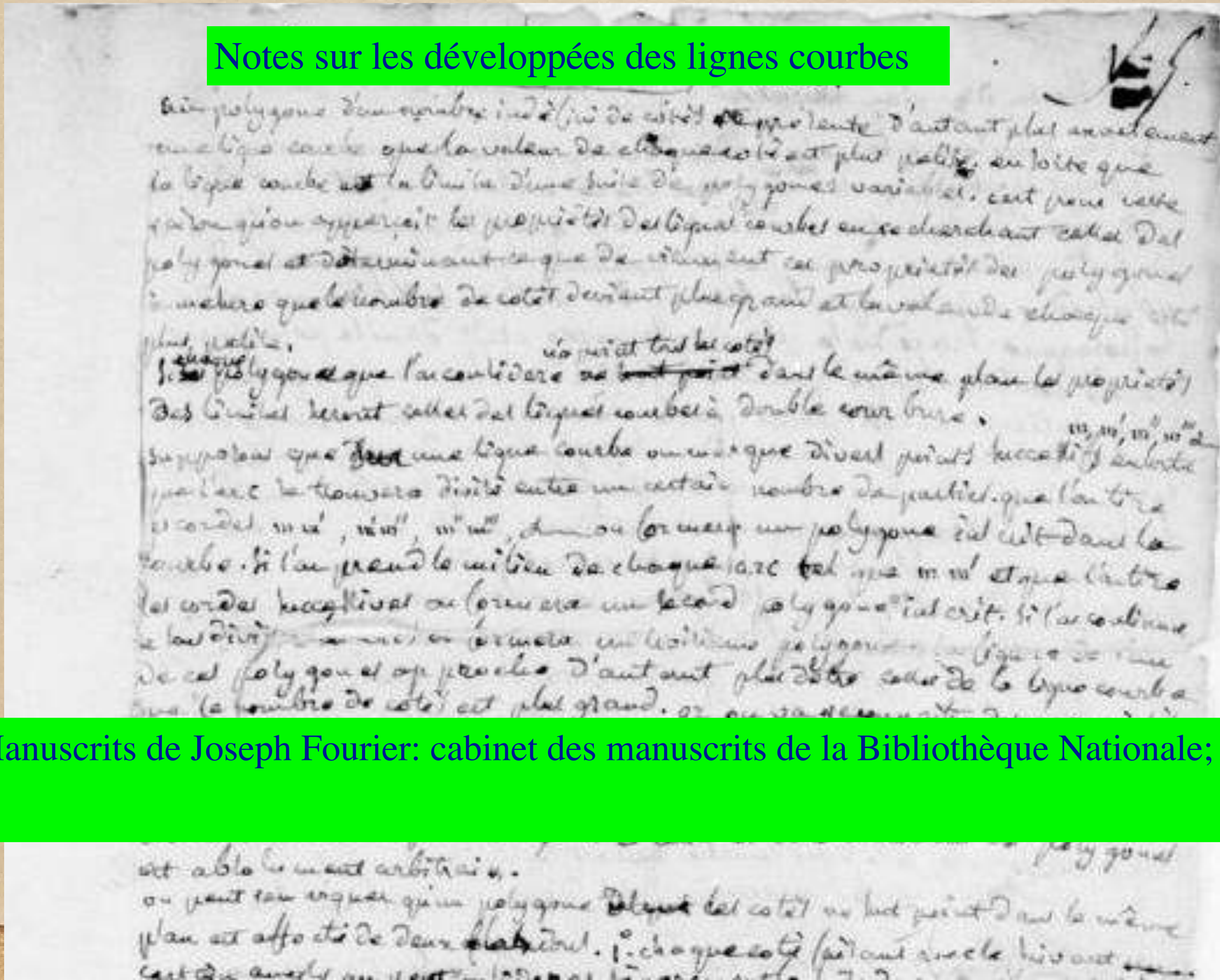

Notes sur les développées des lignes courbes.

Un polygone d'un nombre indéfini de côtés représente d'autant plus exactement une ligne courbe que la valeur de chaque côté est plus petite, en sorte que la ligne courbe est la limite d'une suite de polygones variables. C'est pour cette raison qu'on apperçoit les propriétés des lignes courbes en recherchant celles des polygones et déterminant ce que deviennent ces propriétés des polygones à mesure que le nombre de côtés devient plus grand et la valeur de chaque côté plus petite.

Si chaque polygone que l'on considère n'a point tous les côtés dans le même plan les propriétés des limites seront celles des lignes courbes à double courbure.

# Jean B.J. Fourier 1768-1830

Notes sur les développées des lignes courbes



Manuscrits de Joseph Fourier: cabinet des manuscrits de la Bibliothèque Nationale; 1801

# Gaspard Monge

El 22 de gener de 1769 Monge va escriure a l'abat Charles Bossut explicant-li que estava escrivint sobre ``développées'' de corbes de doble curvatura.

"Je me propose de démontrer dans ce Mémoire qu'une courbe, plane ou à double courbure a une infinité de développées, toutes a double courbure, à l'exception d'une seule pour chaque courbe plane, et de donner la manière de trouver les équations de telle de ces courbes qu'on voudra, étant données les équations de la développante."

# Gaspard Monge

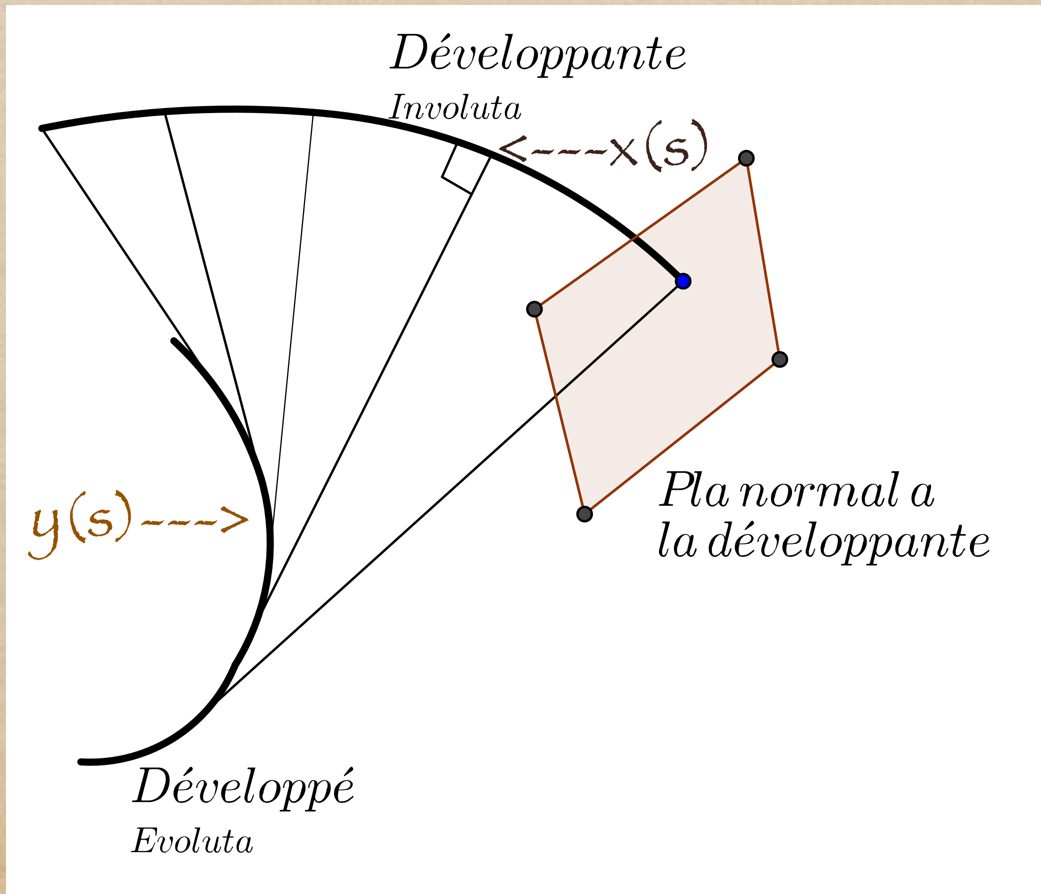
El 22 de gener de 1769 Monge va escriure a l'abat Charles Bossut explicant-li que estava escrivint sobre ``développées'' de corbes de doble curvatura.

"Je me propose de démontrer dans ce Mémoire qu'une courbe, plane ou à double courbure a une infinité de développées, toutes a double courbure, à l'exception d'une seule pour chaque courbe plane, et de donner la manière de trouver les équations de telle de ces courbes qu'on voudra, étant données les équations de la développante."

*Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les differents genres d'inflexions des courbes à double courbure,* Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France X (1785), 511–550.

# Gaspard Monge

Donada una corba x(s) es demana trobar les corbes y(s) (les développées o evolutes) tals que les tangents a y(s) pertanyen al pla normal de x(s).



# Gaspard Monge

Donada una corba x(s) es demana trobar les corbes y(s) (les développées o evolutes) tals que les tangents a y(s) pertanyen al pla normal de x(s).

$$y(s)=x(s)+\rho(s)\,(\mathbf{N}(s)+\cot\alpha(s)\;\mathbf{B}(s))$$

$$\alpha(s)=\int^{s}_{0}\tau(u)\,du$$

Donada una corba $\gamma$, existeixen infinites corbes tals que les seves rectes tangents tallen $\gamma$ ortogonalment.

# Gaspard Monge

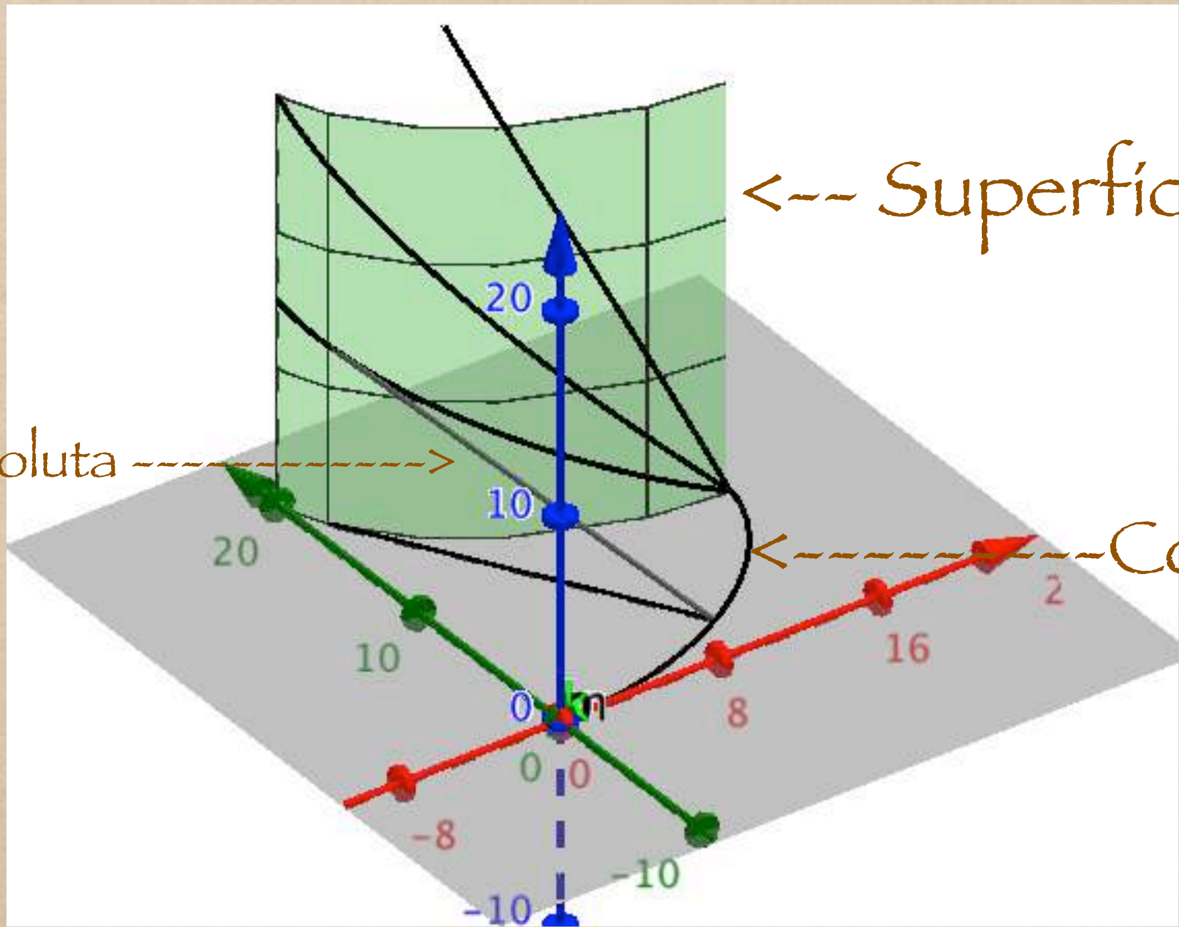
Donada una corba x(s) es demana trobar les corbes y(s) (les développées o evolutes) tals que les tangents a y(s) pertanyen al pla normal de x(s).

$$y(s) = x(s) + \boldsymbol{\rho}(s)\,(\mathbf{N}(s) + \cot \boldsymbol{\alpha}(s)\ \mathbf{B}(s))$$

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \int_0^s \boldsymbol{\tau}(u)\,du + c$$

Totes pertanyen a la superfície polar

# Evolutes no planes d'una corba plana




<-- Superficie polar

Tangent a l'evoluta -------------->

<-----------Corba plana

# Teorema de Monge

Les normals a una superfície sobre una línia de curvatura formen una superfície desenvolupable.

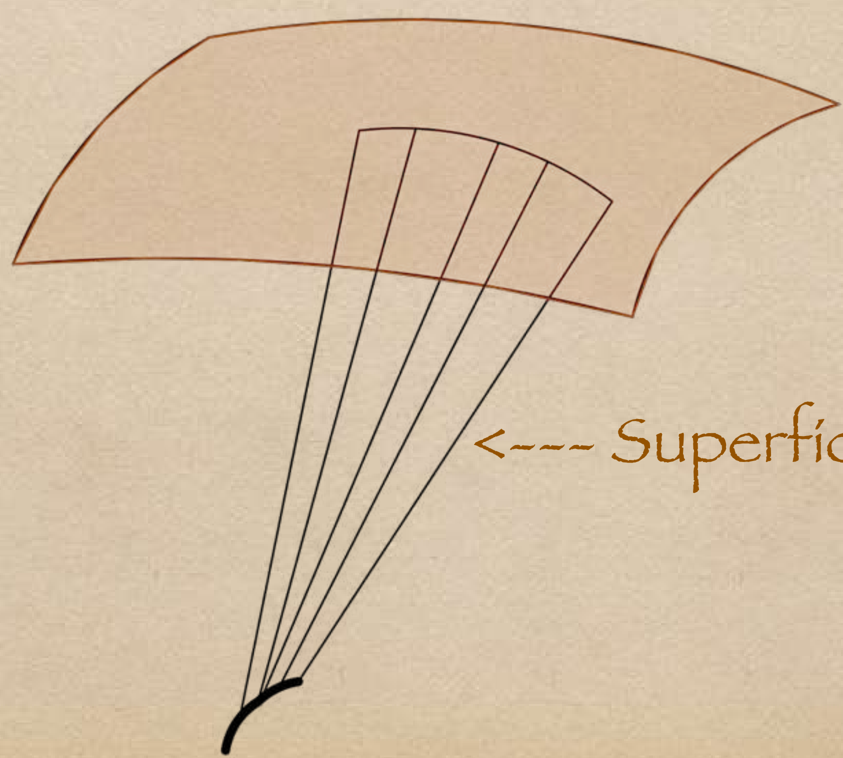
# Teorema de Monge

Les normals a una superfície sobre una línia de curvatura formen una superfície desenvolupable.

Monge: Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais, 1781

# Teorema de Monge

Les normals a una superfície sobre una línia de curvatura formen una superfície desenvolupable.



<---- Superfície desenvolupable

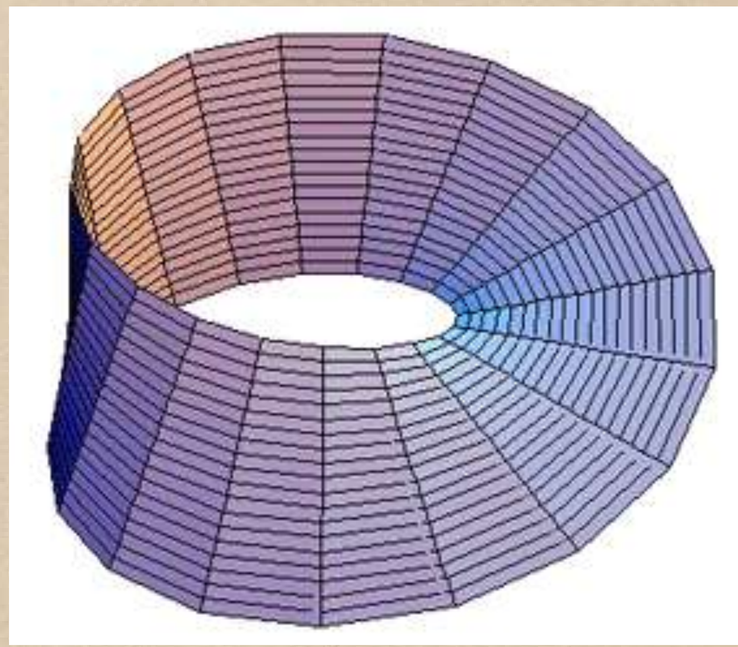
# Recordatori

- Superfícies desenvolupables
- Línies de curvatura

Recordatori

# Superfícies desenvolupables

Superfícies reglades: formades per rectes



# Superfícies desenvolupables

Superfícies desenvolupables
= reglades amb $K=0$

# Superfícies desenvolupables

Superfícies desenvolupables
= reglades amb $K=0$
=reglades amb el mateix pla tangent al llarg de les generatrius

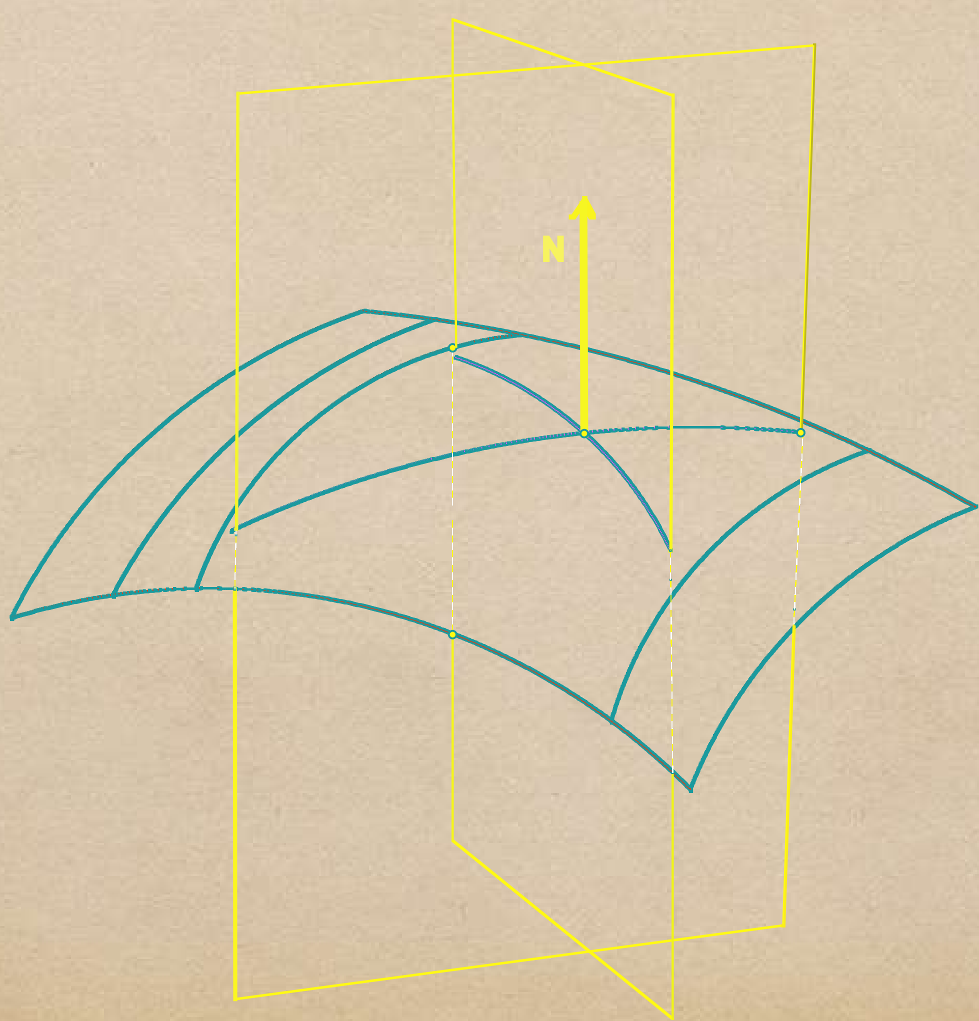
# Superficies desenvolupables

Superfícies desenvolupables
= reglades amb K=0
=reglades amb el mateix pla tangent al llarg de les generatrius
=envolvent de família uniparamètrica de plans

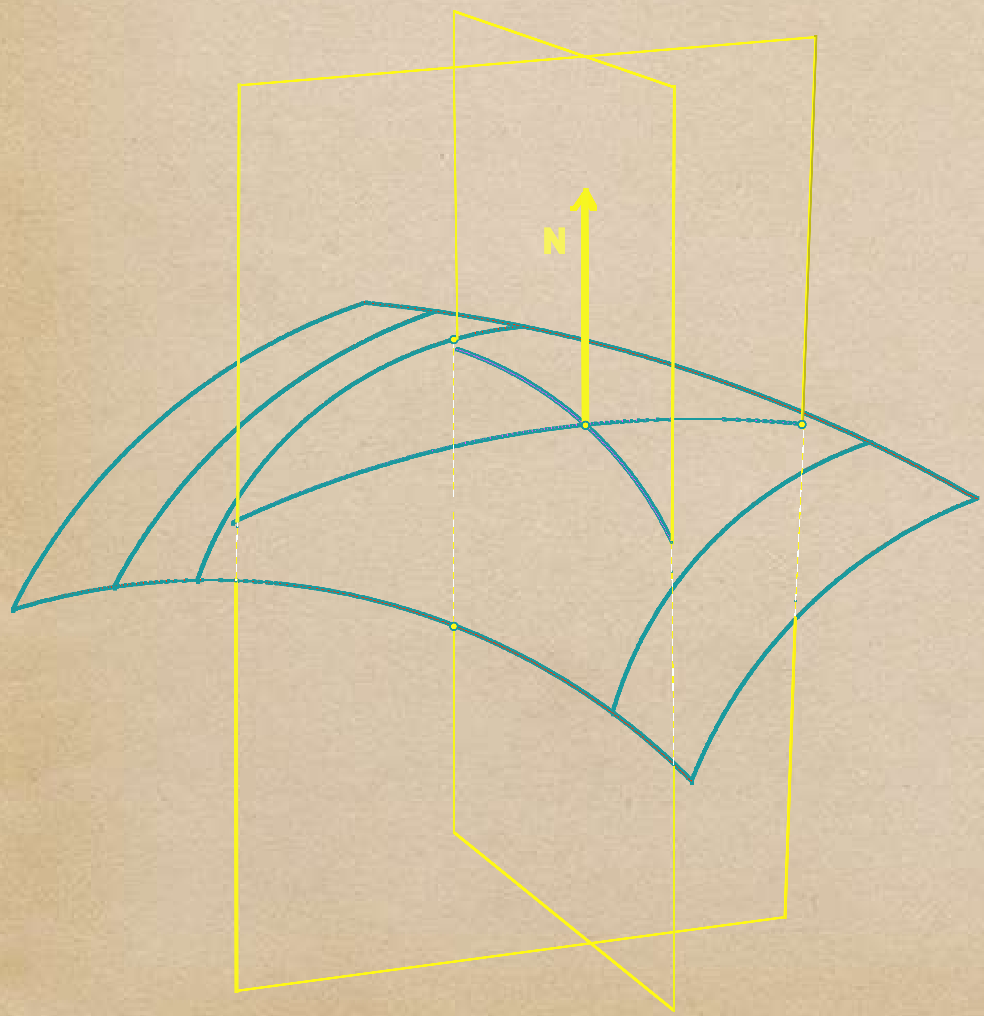
# Superfícies desenvolupables

Superfícies desenvolupables
= reglades amb K=0
=reglades amb el mateix pla tangent al llarg de les generatrius
=envolvent de família uniparamètrica de plans
= desenvolupable tangencial (les rectes són les tangents a una corba, arête de rebroussement)

# Curvatures principals



# Direccions principals




$$w = \lambda \varphi_u + \mu \varphi_v$$

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

# Direccions principals

Si la superfície és z=z(x,y) i z=0 és el pla tangent tenim E=G=1, F=0, e=r, f=s, g=t. La direcció (1,y',0) és principal si

$$\begin{vmatrix} y'^{\,2} & -y' & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ r & s & t \end{vmatrix} = sy'^{\,2} + y'(r-t) - s = 0.$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

# Direccions principals

## La fórmula

$$sy'^{\,2} + (r - t)y' - s = 0$$

apareix essencialment al treball d'Euler

*Recherches sur la courbure des surfaces* ,

Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 1767

# Direccions principals

La fórmula

$$sy'^{\,2} + (r-t)y' - s = 0$$

El producte de les dues solucions és -1: les direccions principals són ortogonals

# Direccions principals

## La fórmula

$$sy'^{\,2} + (r-t)y' - s = 0$$

Actualment apliquem el teorema espectral i diem que les curvatures i direccions principals són els valors i vectors propis de l'endomorfisme de Weingarten. $We_i = k_i e_i$.

# Direccions principals

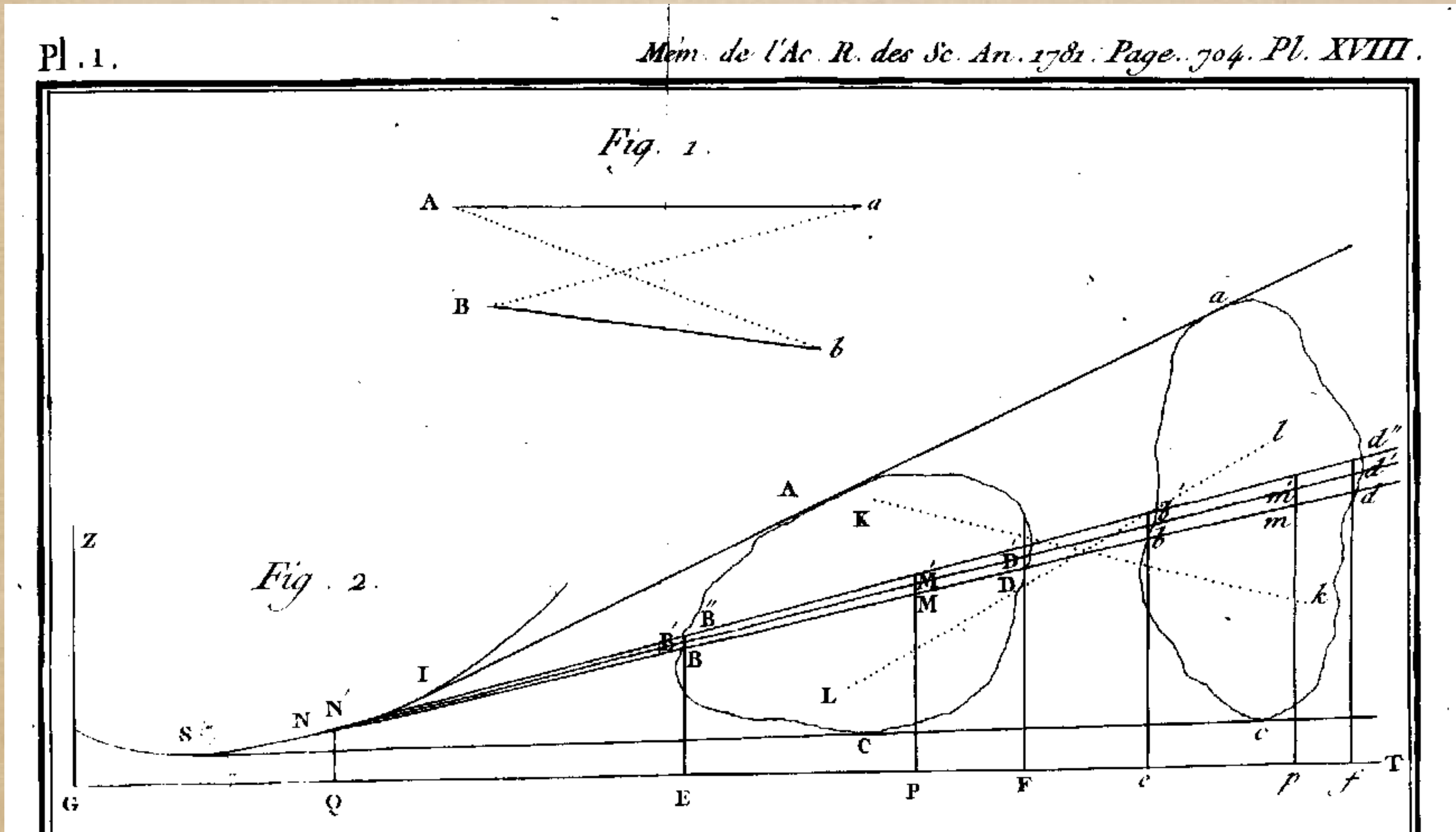
Veiem com Monge arriba a aquestes mateixes equacions a partir ``d'evolutes''

# Direccions principals

Veiem com Monge arriba a aquestes mateixes equacions a partir ``d'evolutes''

I ho fa de manera que introdueix les línies de curvatura

# Déblai i Ramblai

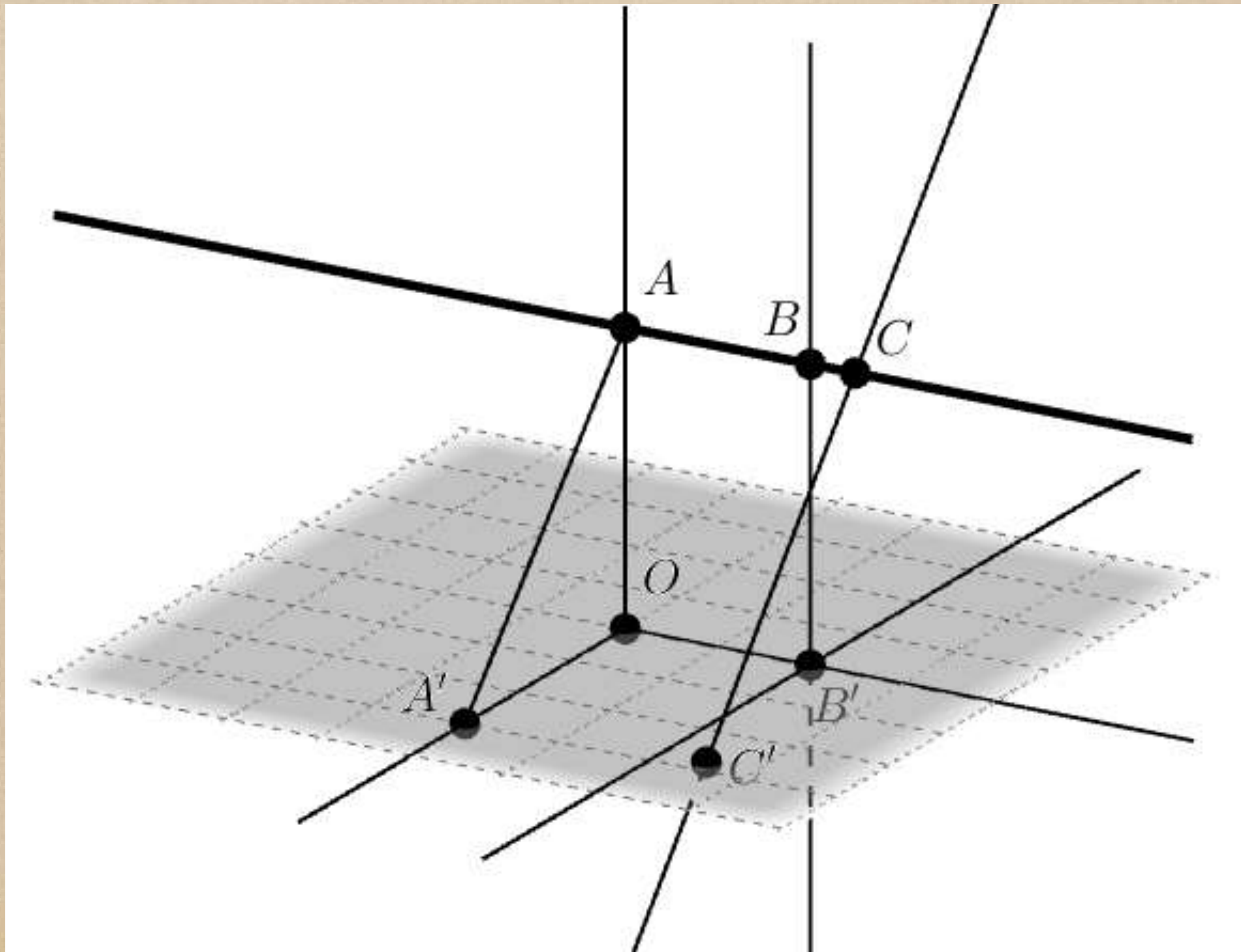



Monge: Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais, 1781

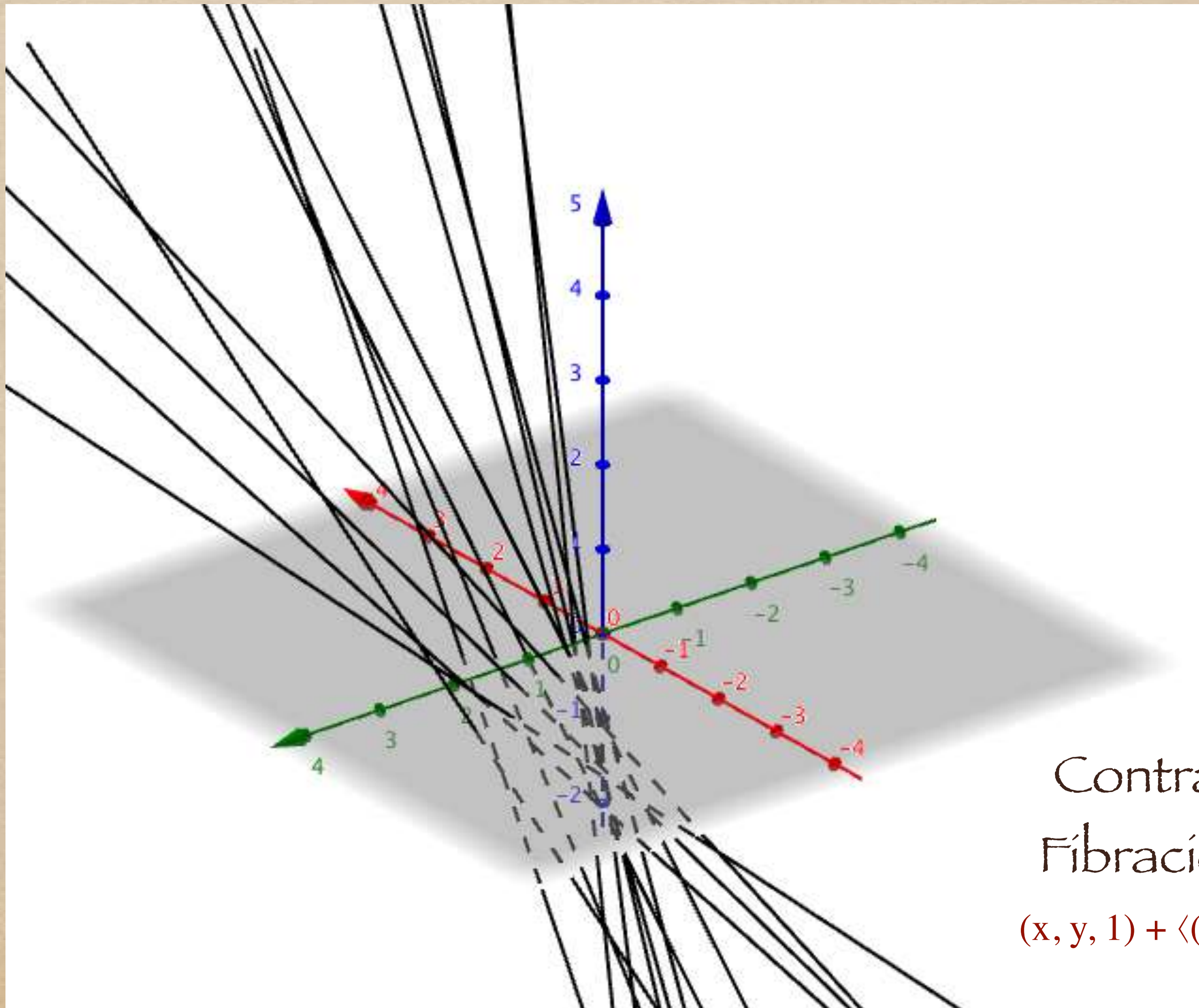
# Déblai i Ramblai

*Si per cada punt d'un pla hi passa una recta de l'espai determinada per una certa llei i prenem una d'aquestes rectes llavors entre les rectes infinitament pròximes a aquesta només ni ha dues, genèricament, que la tallen.*

# Déblai i Ramblai



# Déblai i Ramblai




Contraexemple:
Fibració de Hopf

$(x, y, 1) + \langle (x + y, y - x, 2) \rangle$

# Déblai i Ramblai

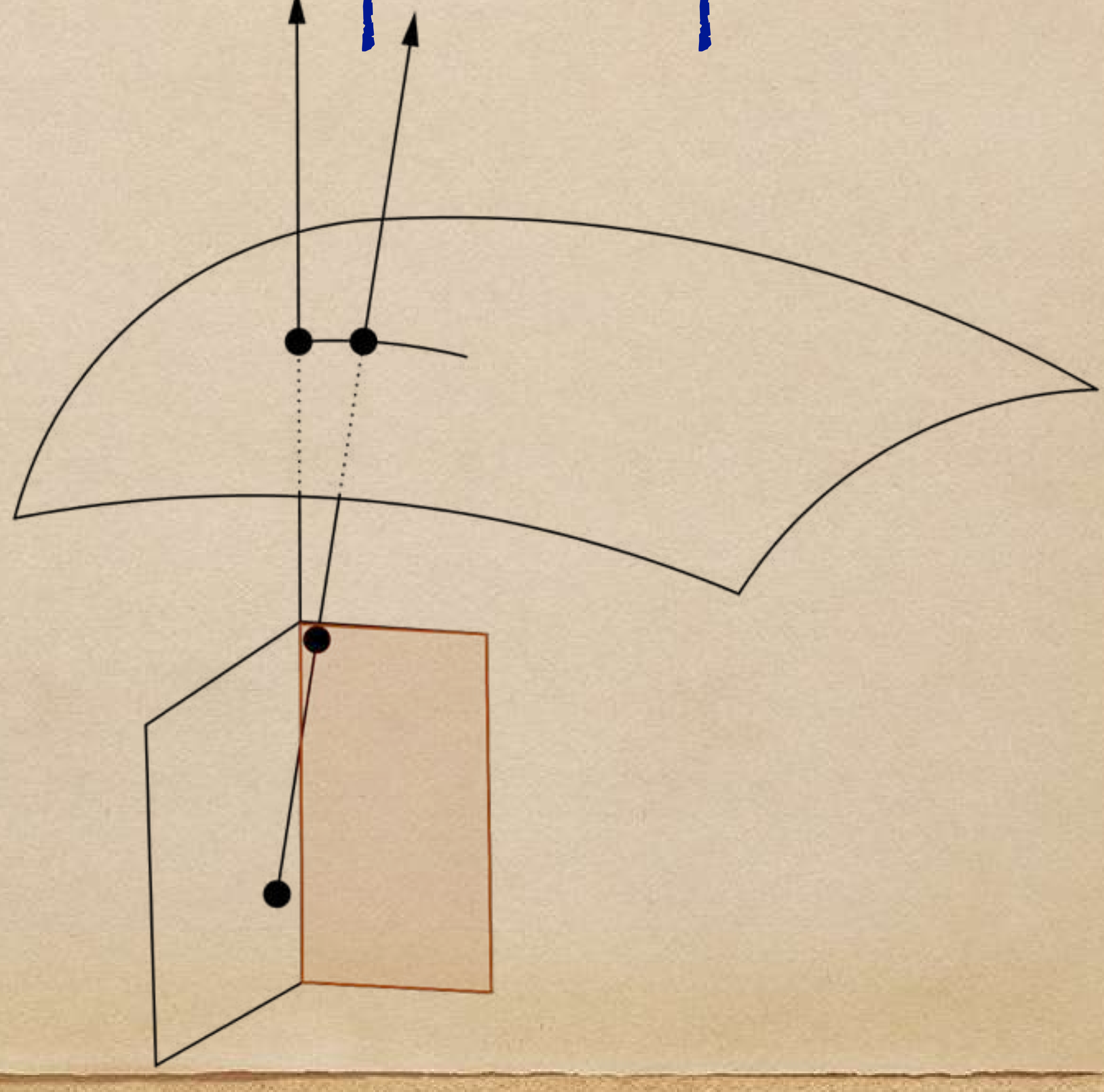
Monge demostra que les trajectòries de les partícules han de ser normals a una certa superfície

# Déblai i Ramblai

Monge demostra que les trajectòries de les partícules han de ser normals a una certa superfície.

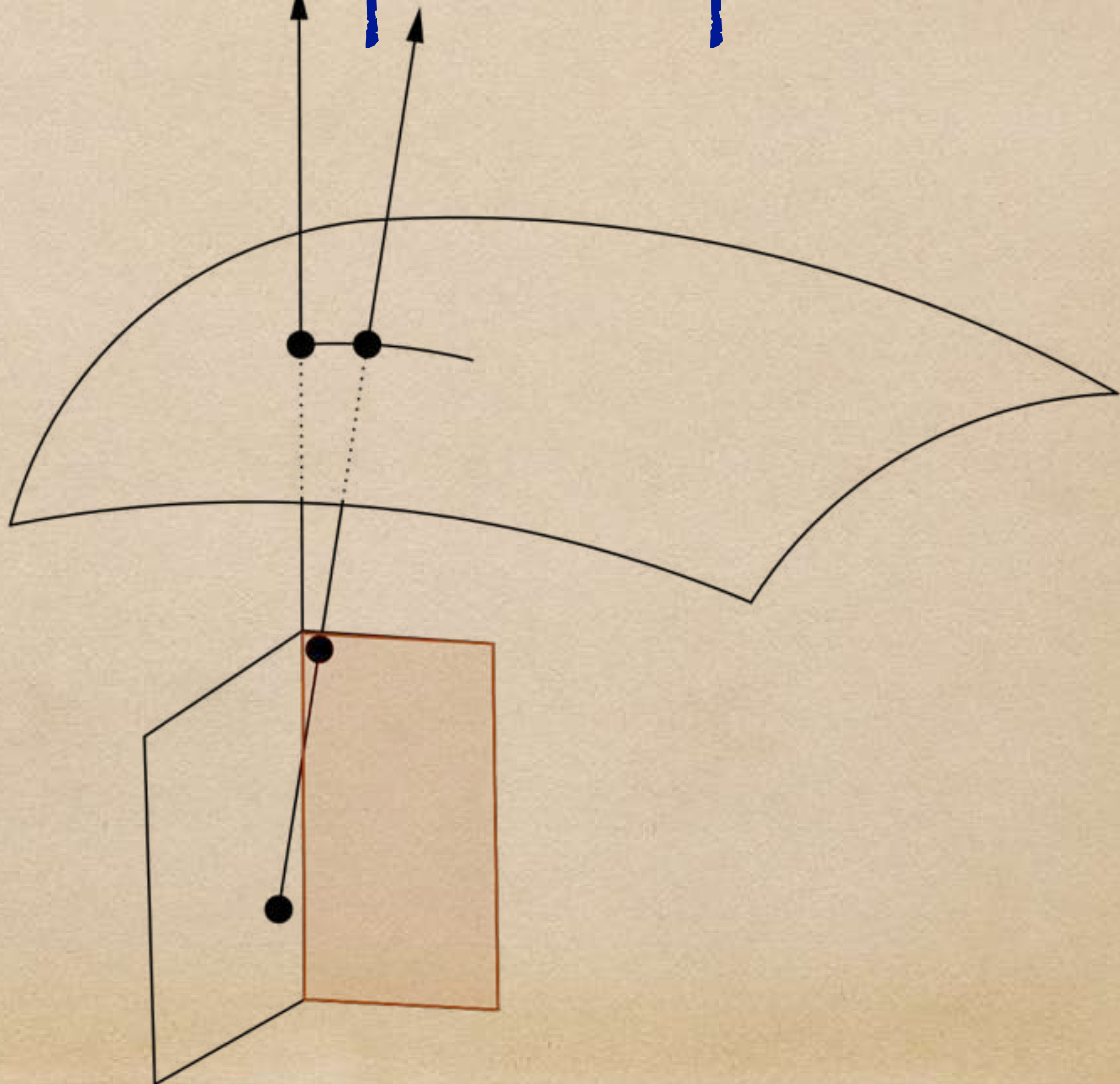
I per a les normals a una superfície l'afirmació de Monge és certa.

# Direccions principals



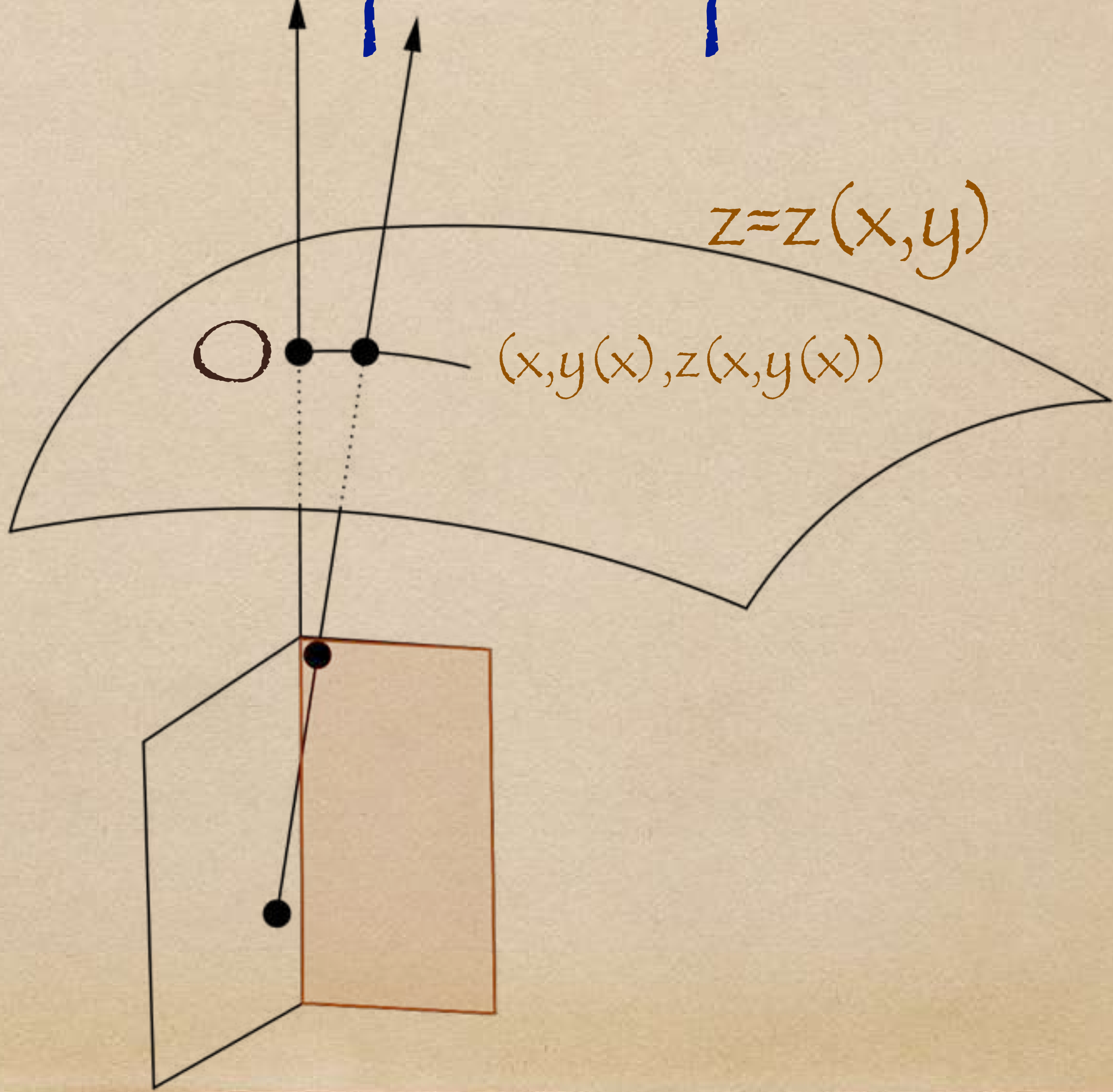
# Direccions principals

Dues rectes
poden no
tallar-se
però la segona
talla dos plans
que defineixen
la primera



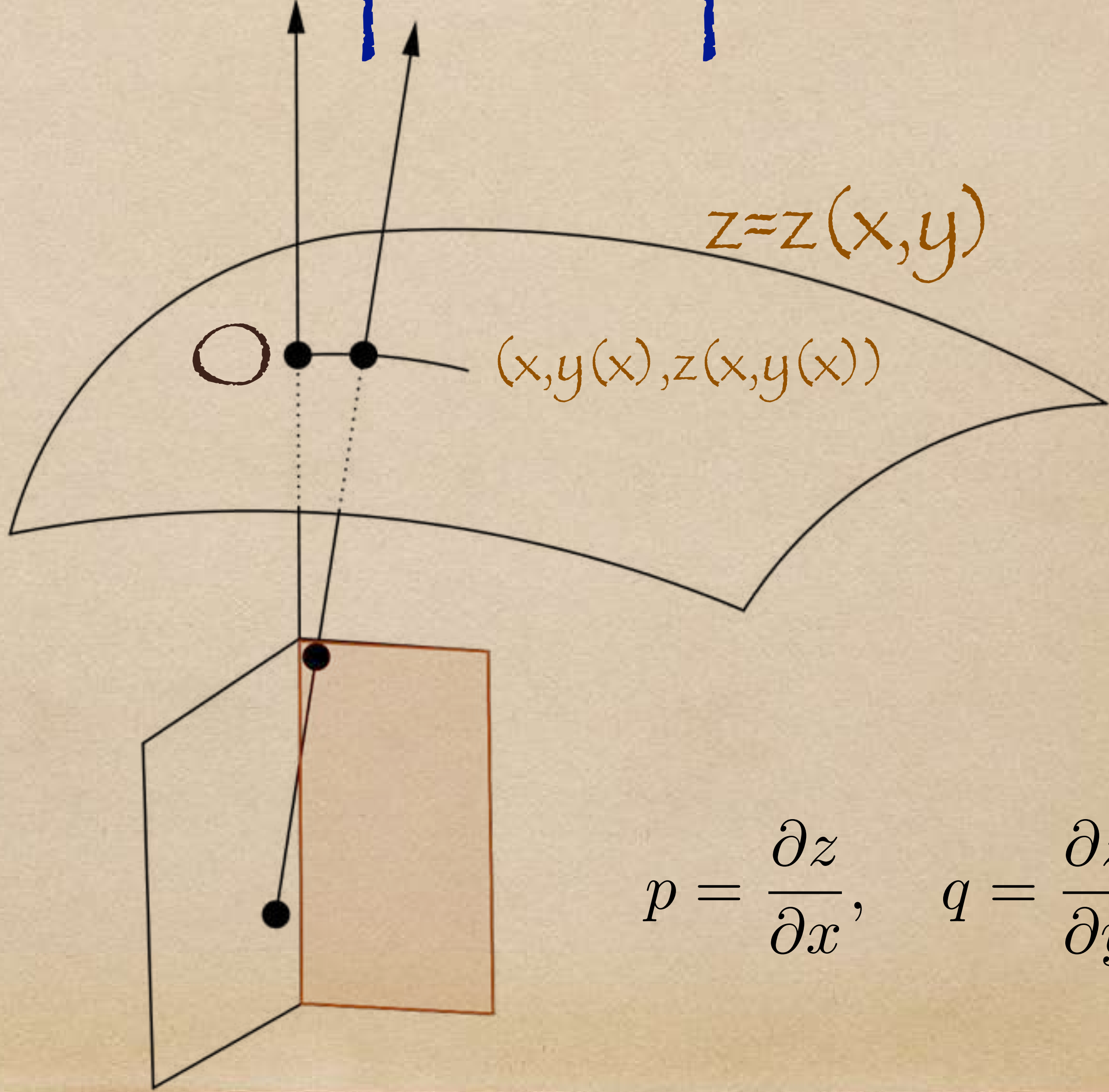
# Direccions principals

Dues rectes poden no tallar-se però la segona talla dos plans que defineixen la primera



# Direccions principals

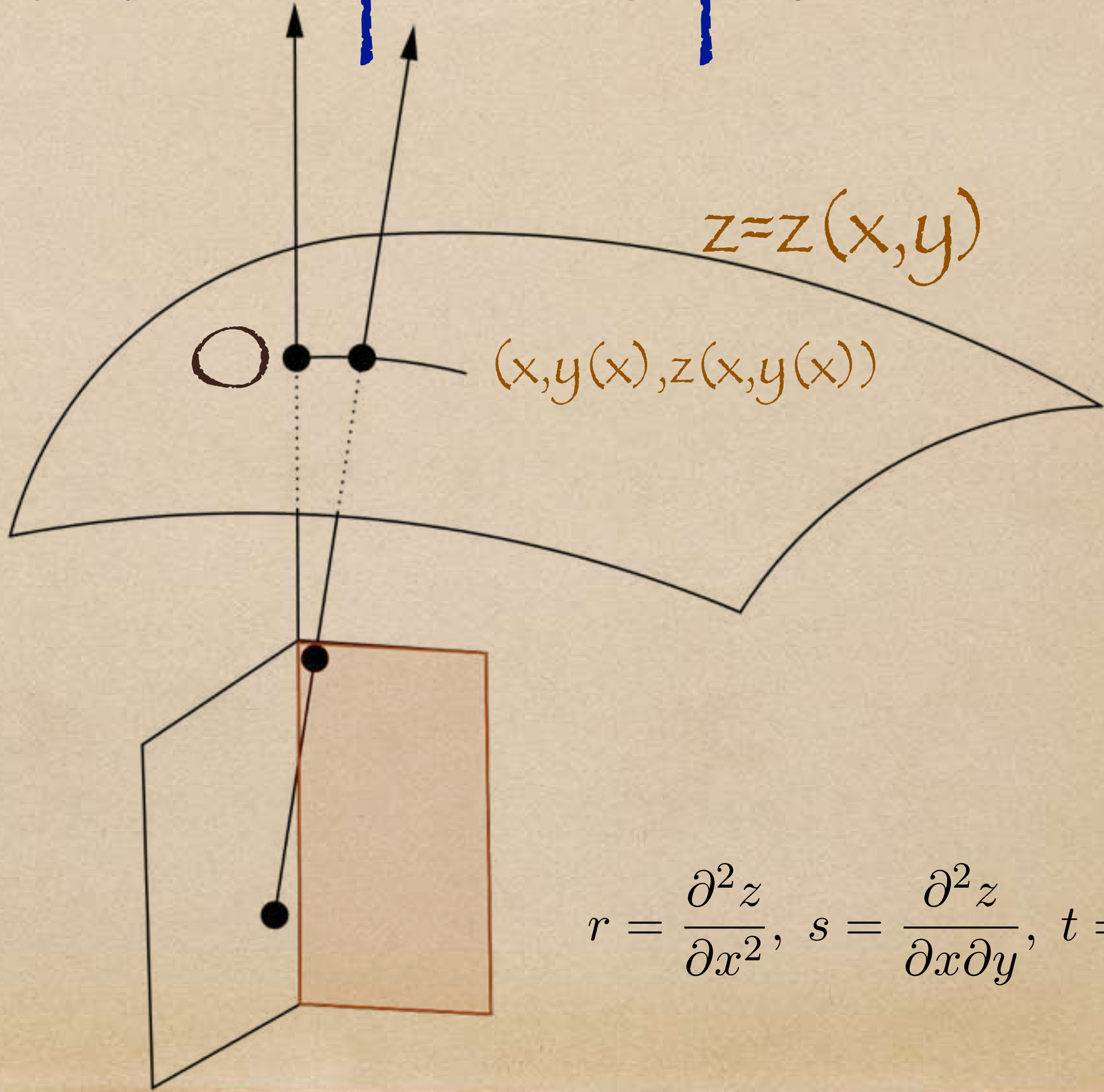
Dues rectes poden no tallar-se però la segona talla dos plans que defineixen la primera




$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

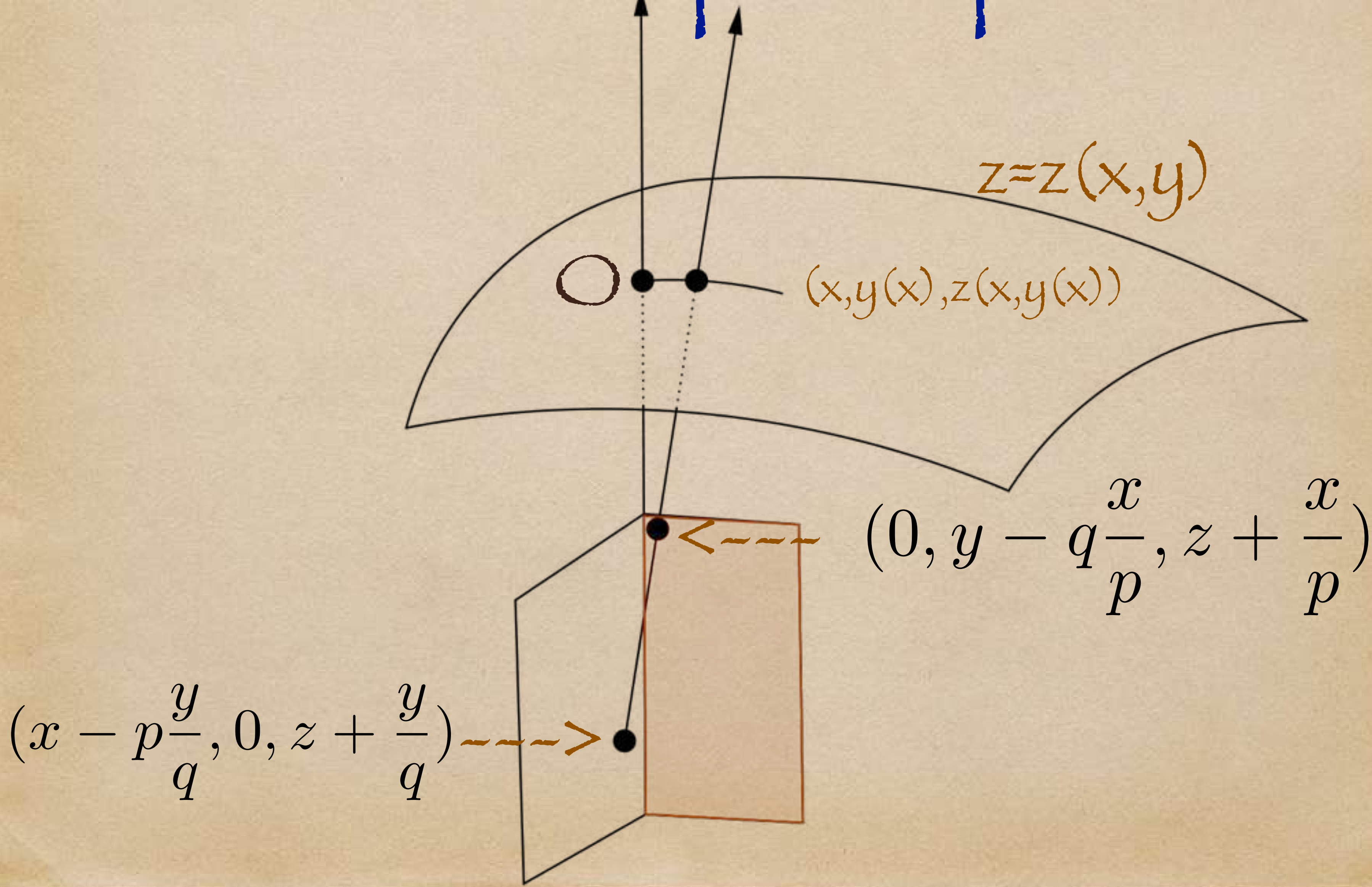
# Direccions principals

Dues rectes poden no tallar-se però la segona talla dos plans que defineixen la primera

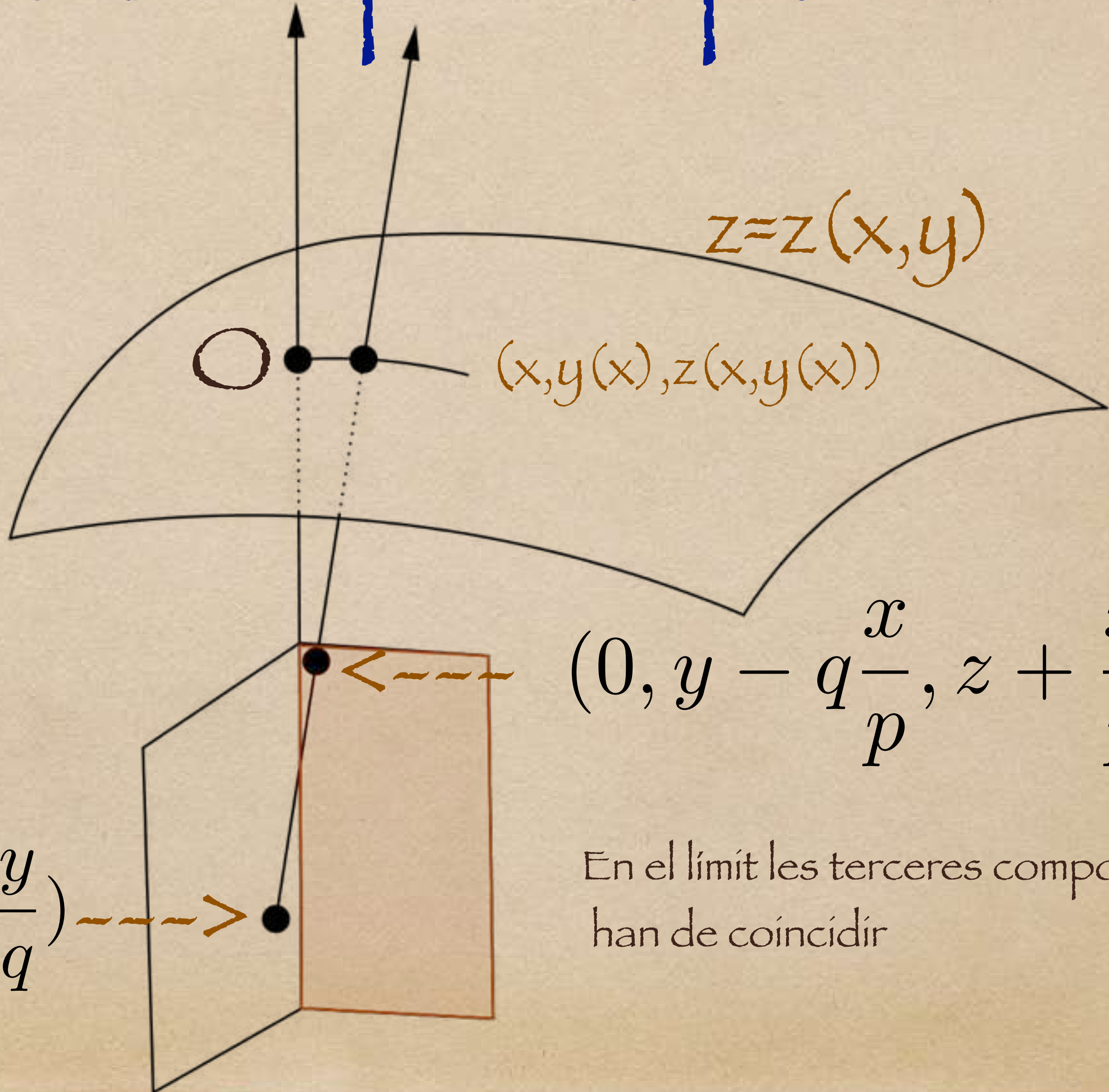



$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

# Direccions principals



# Direccions principals

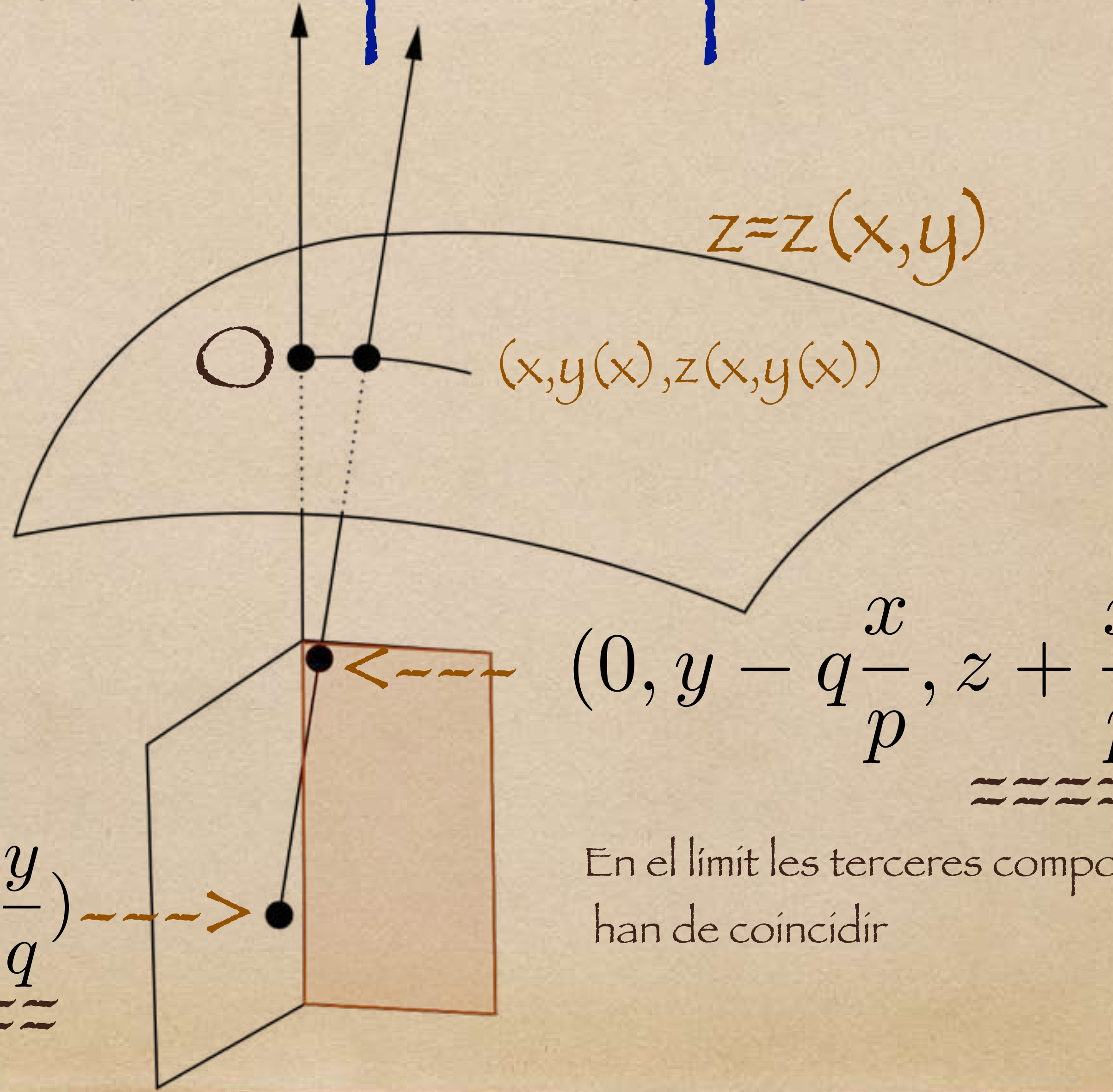



$$(0, y - q\frac{x}{p}, z + \frac{x}{p})$$

$$(x - p\frac{y}{q}, 0, z + \frac{y}{q})$$

En el límit les terceres components han de coincidir

# Direccions principals




$$(0, y - q\frac{x}{p}, z + \frac{x}{p})$$

$$(x - p\frac{y}{q}, 0, z + \frac{y}{q})$$

En el límit les terceres components han de coincidir

# Direccions principals

$$p(x) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y(x)), \quad q(x) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y(x))$$

L'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{x}{p(x)} &= \frac{1}{r + sy'} \\ \lim_{x \to 0} \frac{y(x)}{q(x)} &= \frac{y'}{s + ty'} \end{aligned}$$

$$sy'^{\,2} + (r - t)y' - s = 0$$

# Direccions principals

$$sy'^{\,2} + (r - t)y' - s = 0$$

La mateixa equació d'Euler!!

Aquesta és l'equació de les direccions principals: les direccions sobre les quals t'has d'aproximar a un punt per tal de que les normals es tallin.

# Línies de curvatura

Si l'argument que hem fet en un punt fixat el fem en un punt arbitrari, la fórmula

$$\begin{vmatrix} y'^{\,2} & -y' & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ r & s & t \end{vmatrix} = sy'^{\,2} + y'(r-t) - s = 0,$$

# Línies de curvatura

es transforma en

$$\begin{vmatrix} y'^{\,2} & -y' & 1 \\ 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0.$$

Equació de les línies de curvatura

Feuilles d'Analyse, Feuille XV, 1801

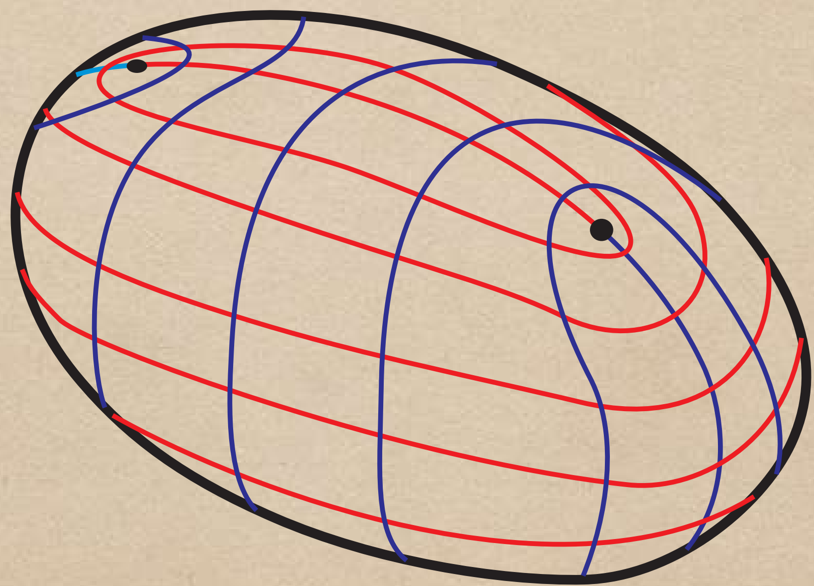
# Línies de curvatura

Una corba és línia de curvatura si el seu vector tangent en cada punt és direcció principal.

# Línies de curvatura

Una corba és línia de curvatura si el seu vector tangent en cada punt és direcció principal.

Exemple



Dibuix:Sotomayor

# Teorema de Monge

Les normals a una superfície sobre una línia de curvatura formen una superfície desenvolupable.

*Demostració*: Imaginem una corba sobre una superfície tal que les normals a la superfície en punts consecutius infinitament pròxims d'aquesta corba es tallin.
Pels comentaris anteriors aquesta corba és una línia de curvatura.
Els punts de tall de normals consecutives formen una corba,
les tangents de les quals són les normals a la superfície.
Per tant la superfície reglada formada per les normals és desenvolupable.

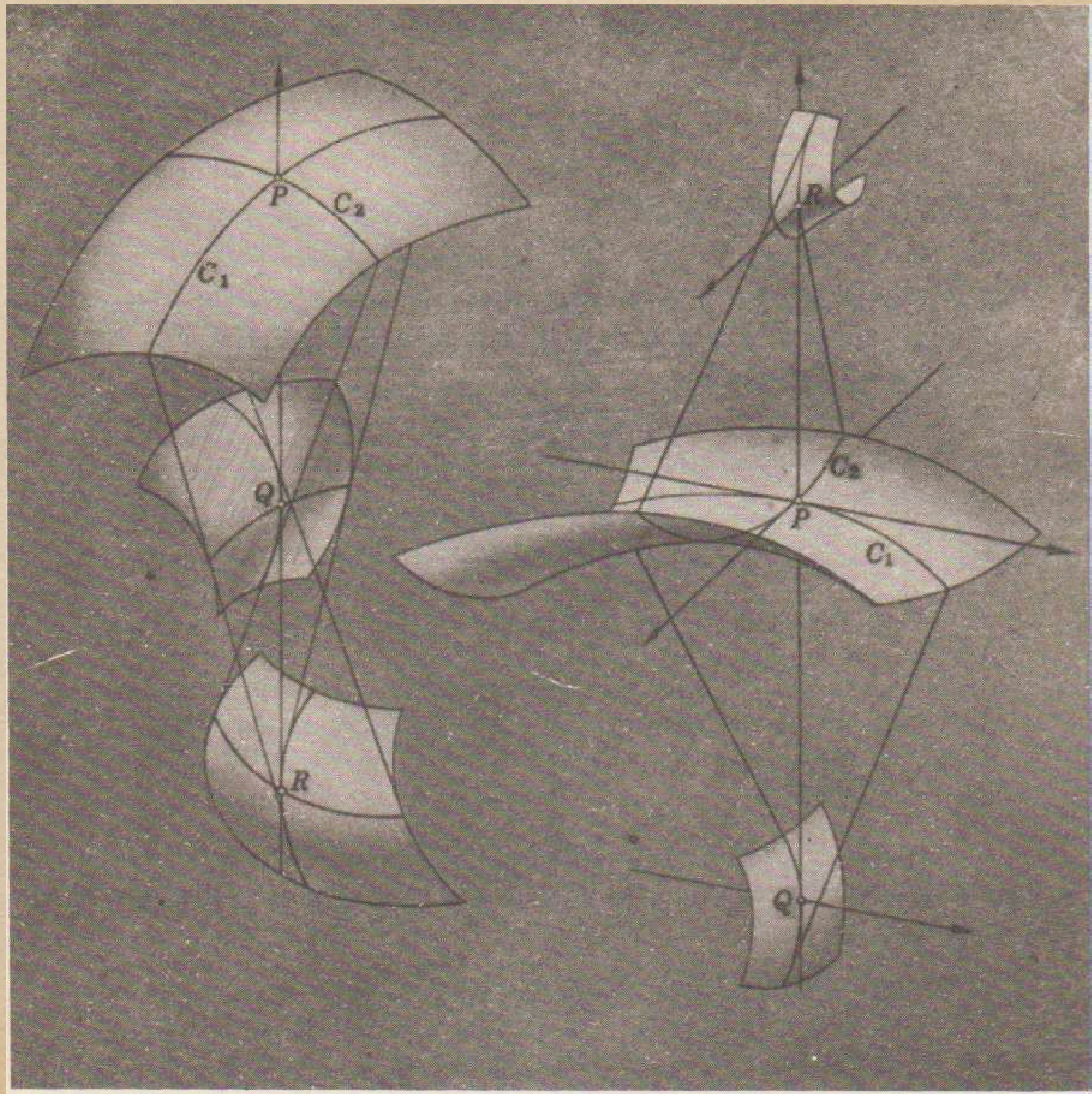
# Teorema de Monge

A més, si les curvatures principals són $1/\rho_1$ i $1/\rho_2$, les longituds del segment de normal entre la superfície i la corresponent evoluta són $\rho_1$ i $\rho_2$ .

# Teorema de Monge

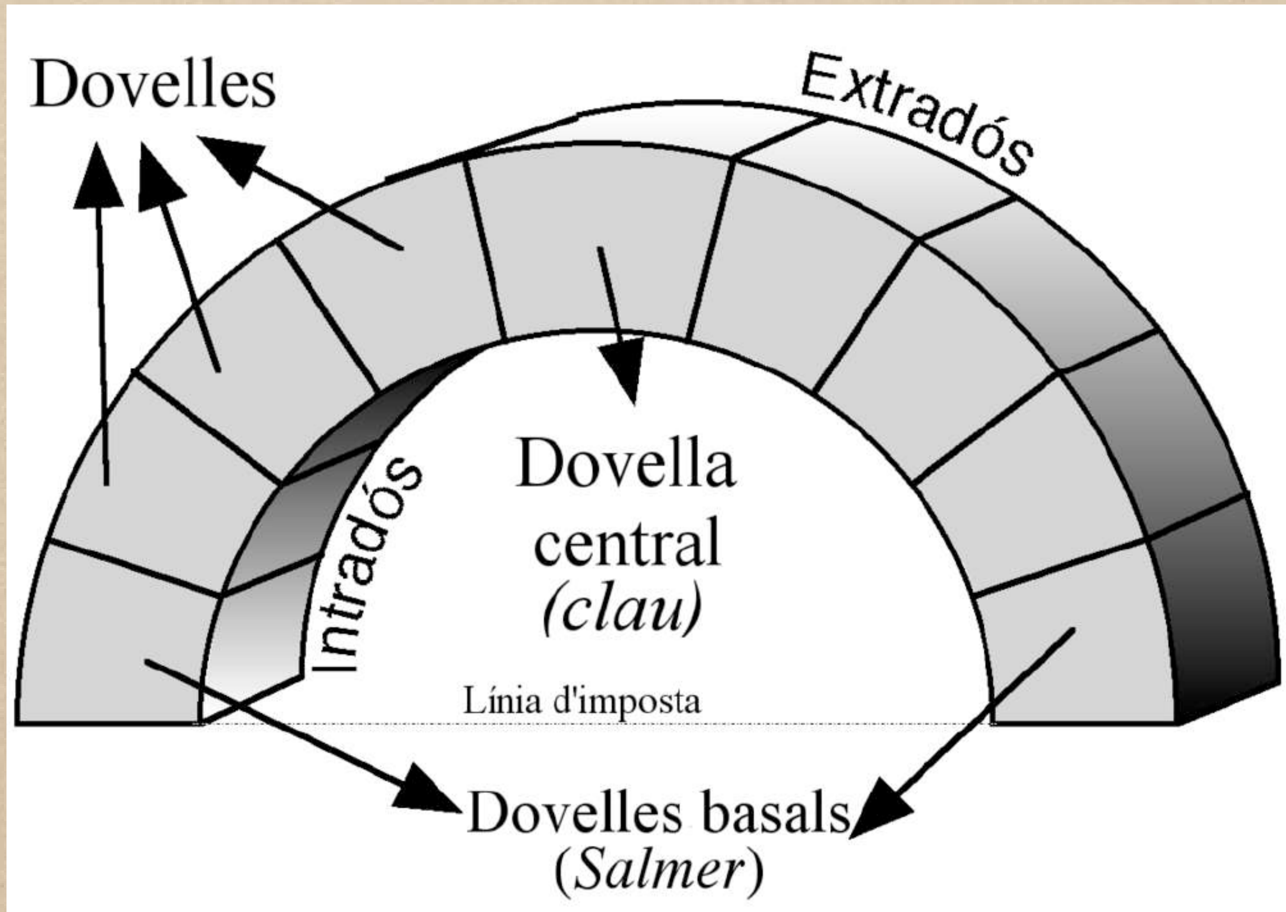
A més, si les curvatures principals són $1/\rho_1$ i $1/\rho_2$, les longituds del segment de normal entre la superfície i la corresponent evoluta són $\rho_1$ i $\rho_2$ .

Quoique cette proposition ne semble avoir qu'un rapport éloigné avec la bella théorie des rayons de courbure des surfaces courbes qu'a donnée M. Euler [...] elle complète le travail de cet illustre Géomètre.



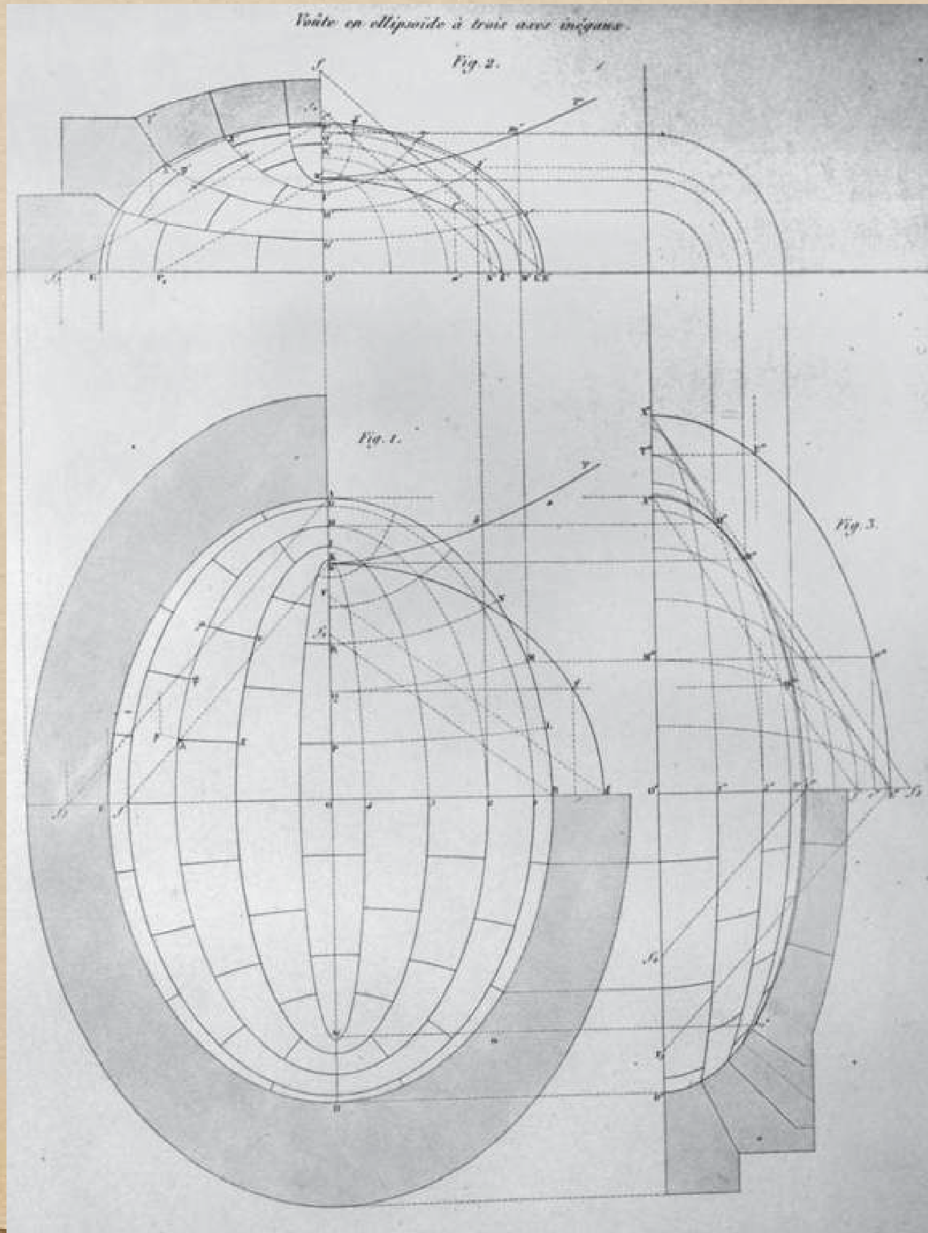

Struik

# Dovelles

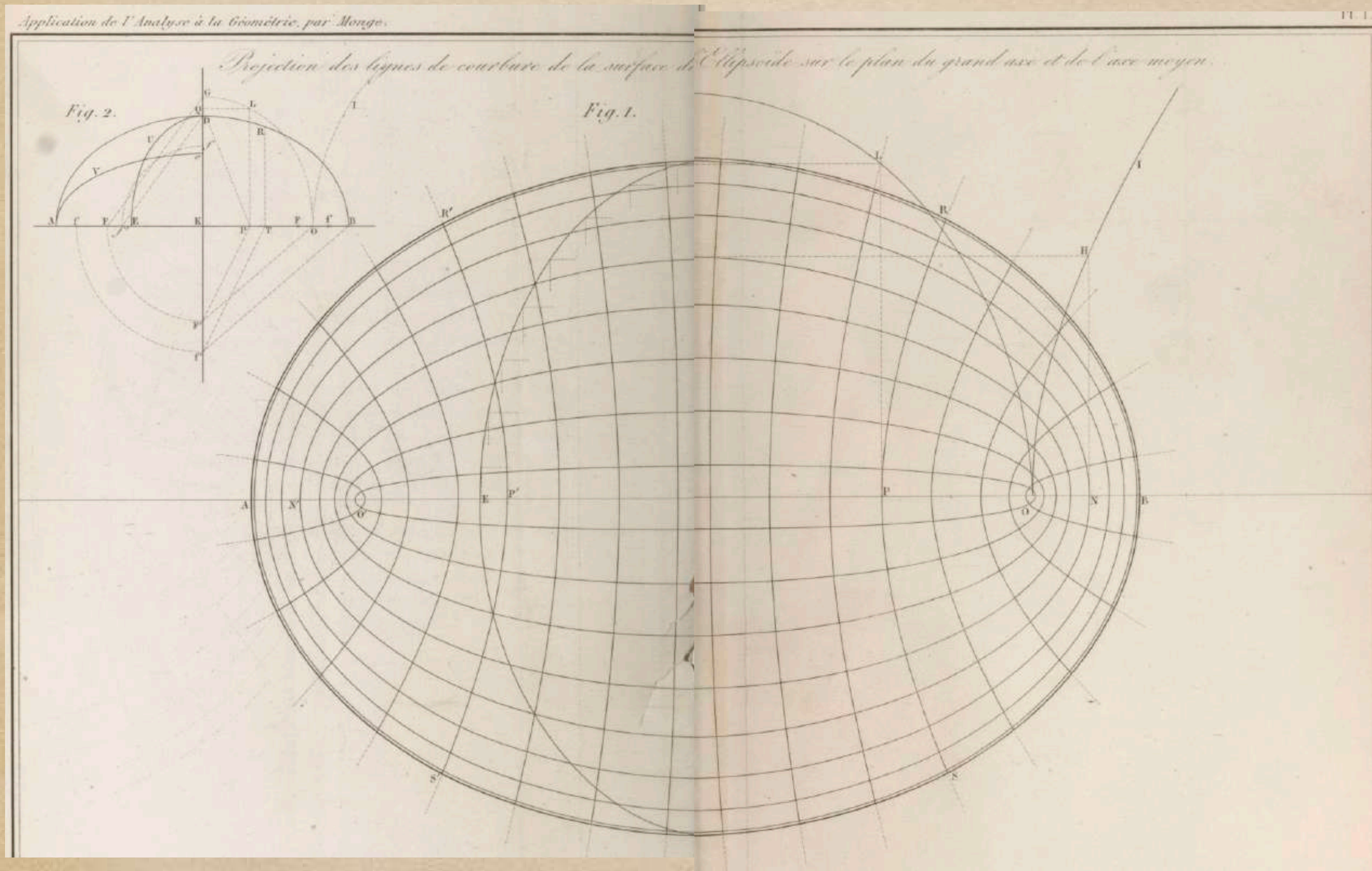


Dovelles
Extradós
Intradós
Dovella
central
(clau)
Línia d'imposta
Dovelles basals
(Salmer)

# Dovelles



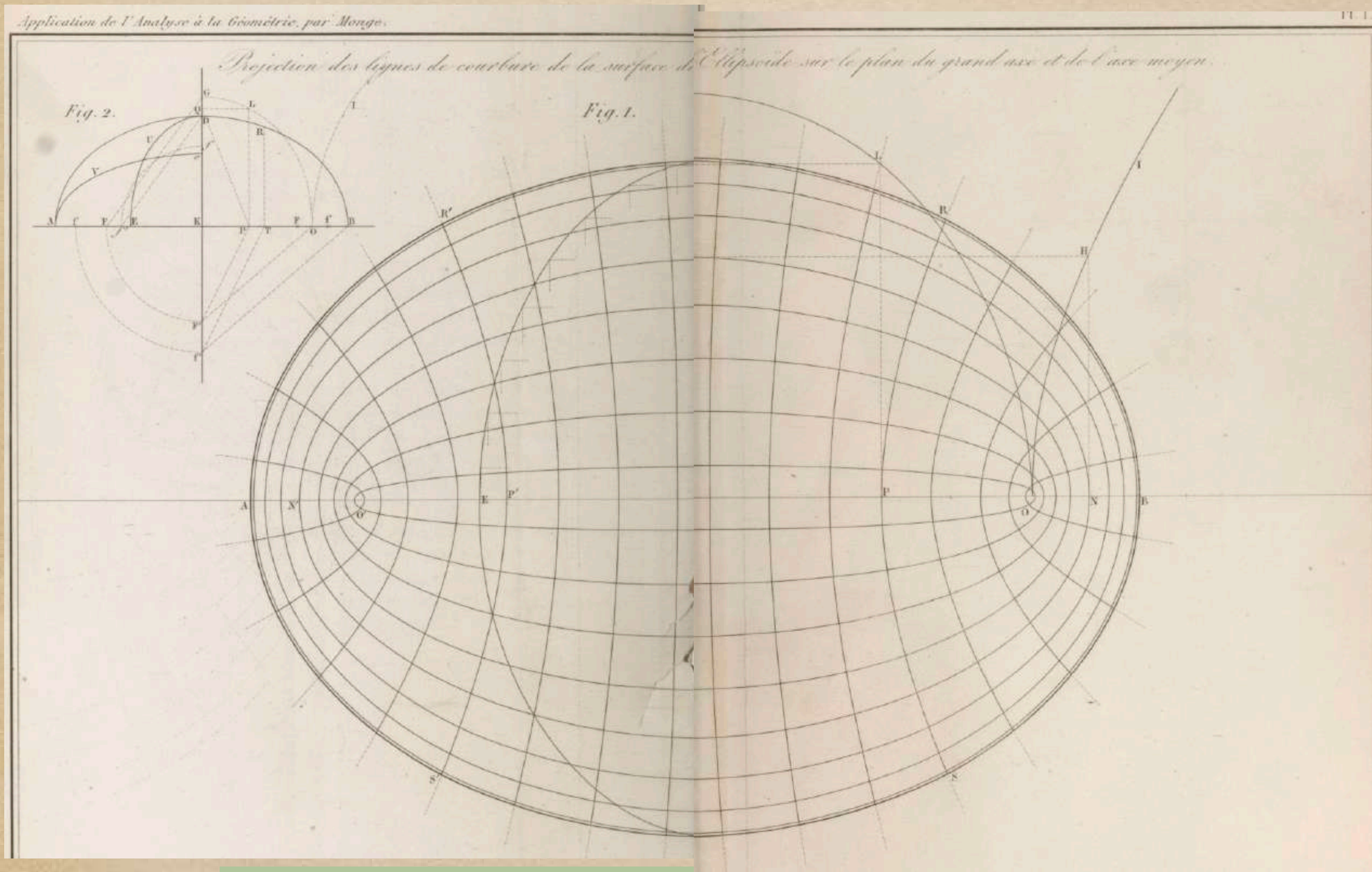
# Línies de curvatura de l'el.lipsoide




Monge: Les lignes de courbure de la surface de l'Ellipsoïde, 1795

Recordatori

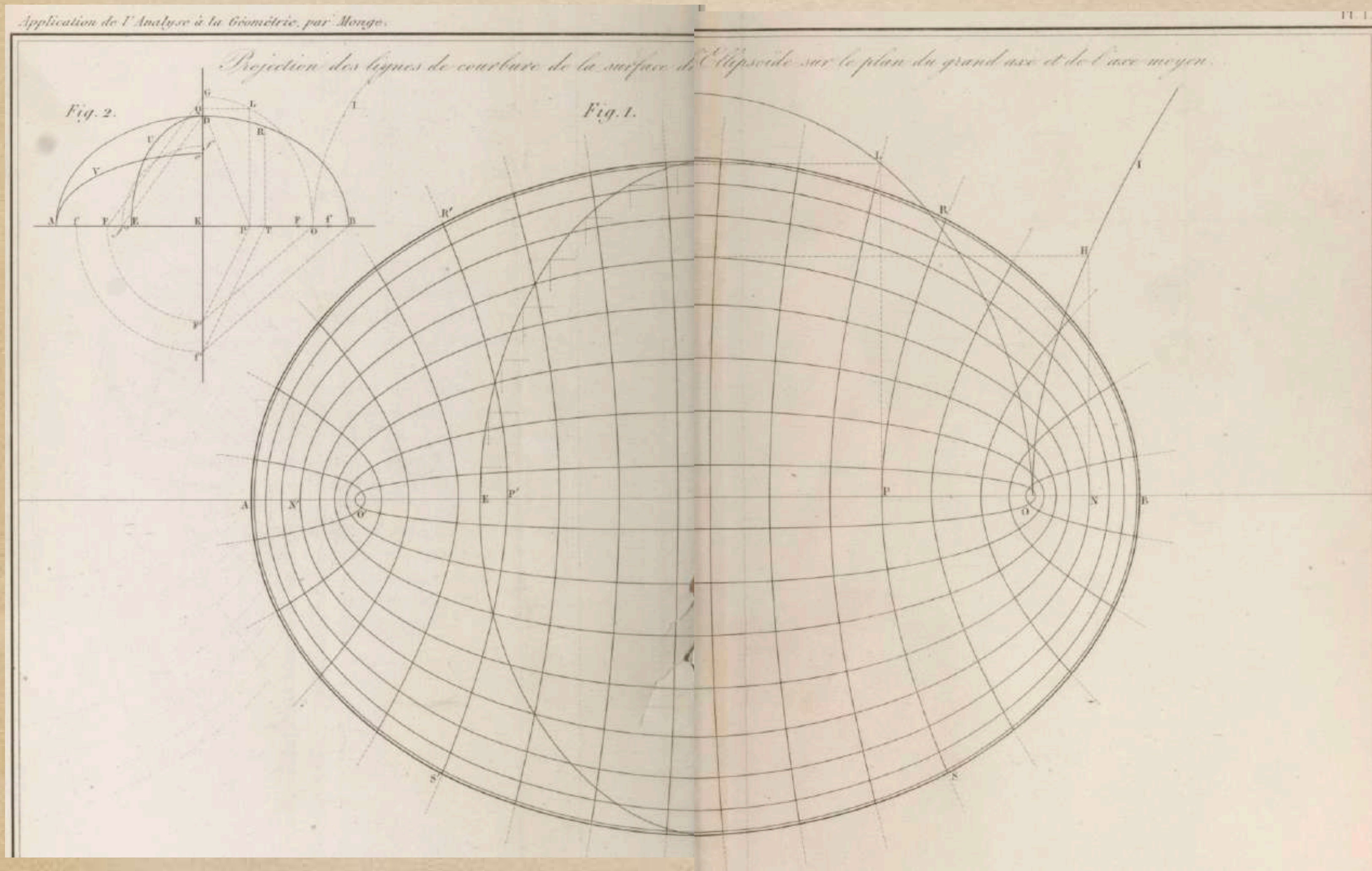
# Línies de curvatura




$$Axyy'^2 + y'(x^2 - Ay^2 - B) - xy = 0.$$

Recordatori

# Línies de curvatura




$$y^2 = \beta x^2 + \gamma$$

Recordatori

# Línies de curvatura

``Si s'ha de cobrir un espai que es projecta sobre una el.lipse no es pot donar cap superfície més convenient que la meitat d'un el.lipsoide [...] si suposem que aquesta volta s'ha d'executar en pedra tallada caldrà que la divisió en dovelles es faci mitjançant les línies de curvatura i que les unions siguin les superfícies desenvolupables normals a la volta.''

## I llums d'aranya als umbilicals

Monge: Les lignes de courbure de la surface de l'Ellipsoide, 1795

Gràcies per la vostra atenció