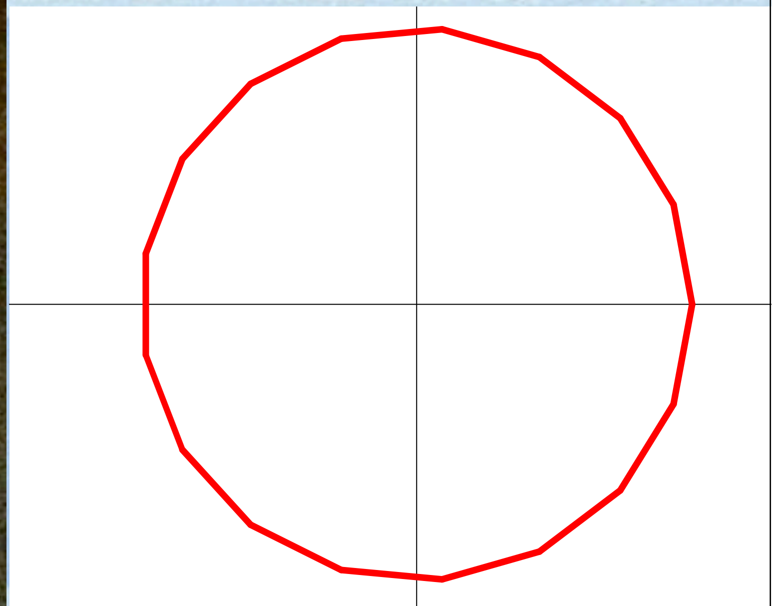
GAUSS 17



17 ENEM

Agustí Reventós

GAUSS 17

Primera publicación: 1 de Junio 1796 (19 años)

Neue Entdeckungen

Intellegenzblatt der allgemeinen Literaturzeitung,

Collegium Carolinum de Braunschweig.

Gauss 17

Como todo principiante en geometría sabe, hay diversos polígonos regulares, por ejemplo, el triángulo, tetrágono, pentágono, 15-gon, y aquellos que se obtienen doblando el número de lados de alguno de ellos, que son geométricamente construibles.

GAUSS 17

Ésto ya se sabía desde tiempos de Euclides, y parece que se ha dicho desde entonces que el campo de la geometría elemental no va más allá: almenos yo no conozco ningún intento exitoso de extender sus límites en esta dirección.

Gauss 17

Con más razón, el descubrimiento merece atención... que a parte de aquellos polígonos regulares hay otros, por ejemplo el 17-gon, que se pueden construir geométricamente. Este descubrimiento es, en realidad, sólo un caso especial de una teoría más general, aún no completada, y que se presentará al público en cuanto esté lista.

Carl Friedrich Gauss
Estudiante de Matemáticas en Göttingen

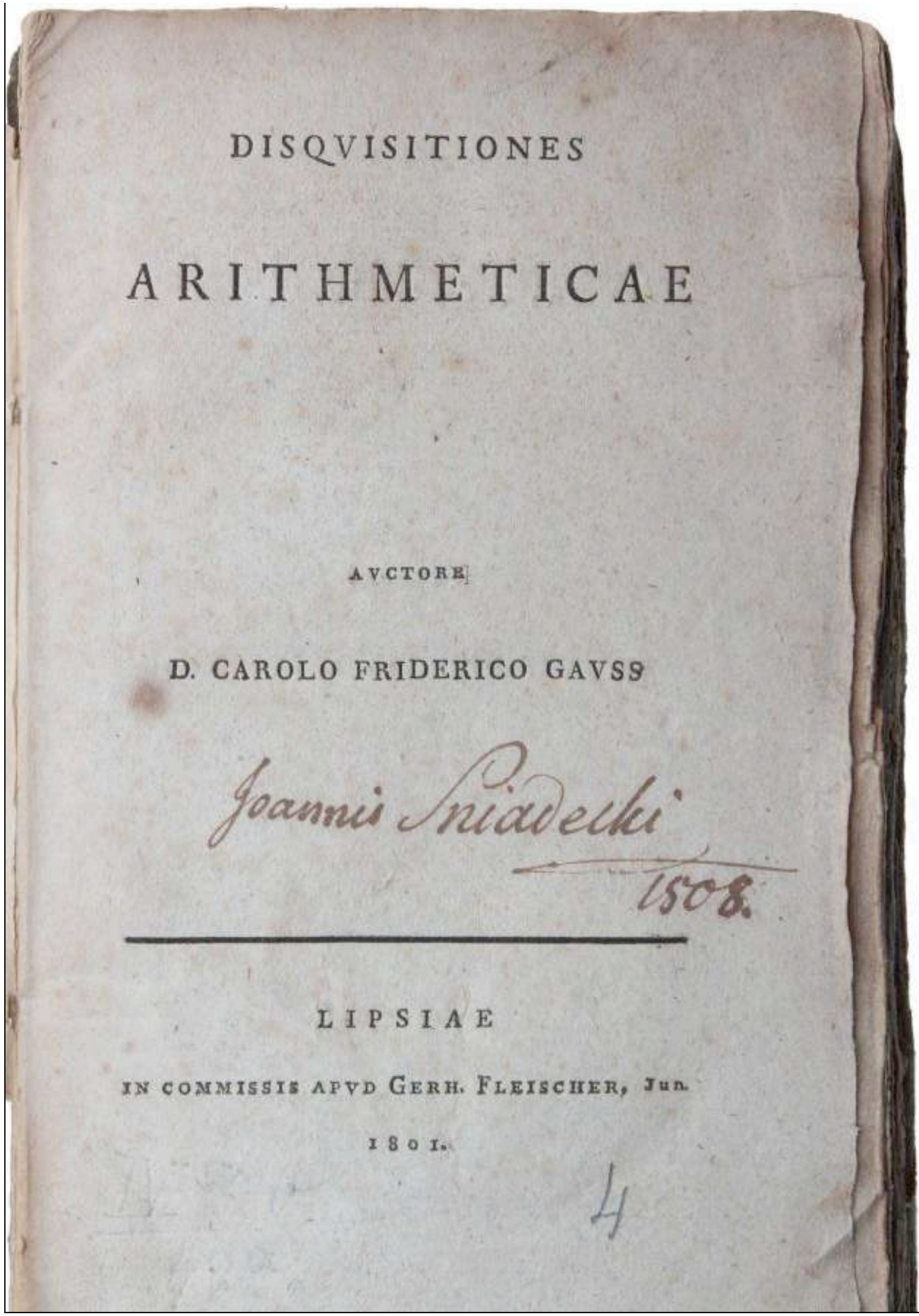
GAUSS 17

Es importante remarcar que el Sr. Gauss tiene ahora 18 años, y se dedica aquí en Braunschweig con igual éxito a la filosofía y a la literatura clásica así como a la alta matemática.

8 Abril, 1796 E. A. W. Zimmermann, Prof.

GAUSS 17

Gauss cumple su palabra y cinco años más tarde, en 1801, publica *Disquisitiones Arithmeticae*, dónde entre otras muchas cosas responde completamente la pregunta de qué polígonos regulares se pueden construir.


DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

Joannis Sniadecki

1808.

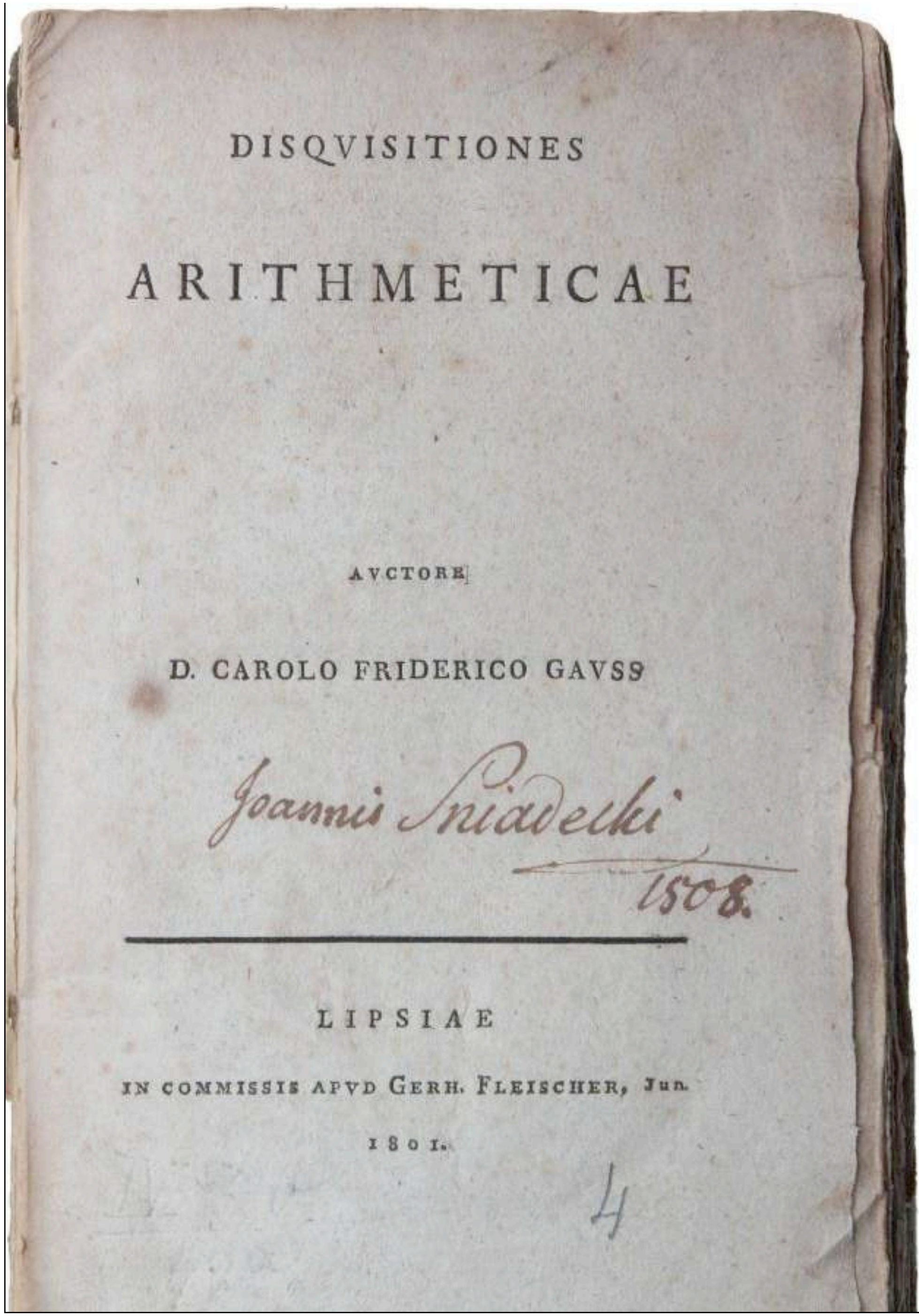
LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, Jun.

1801.

4

Gauss 17


DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

Joannis Sniadecki

1808.

LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, Jun.

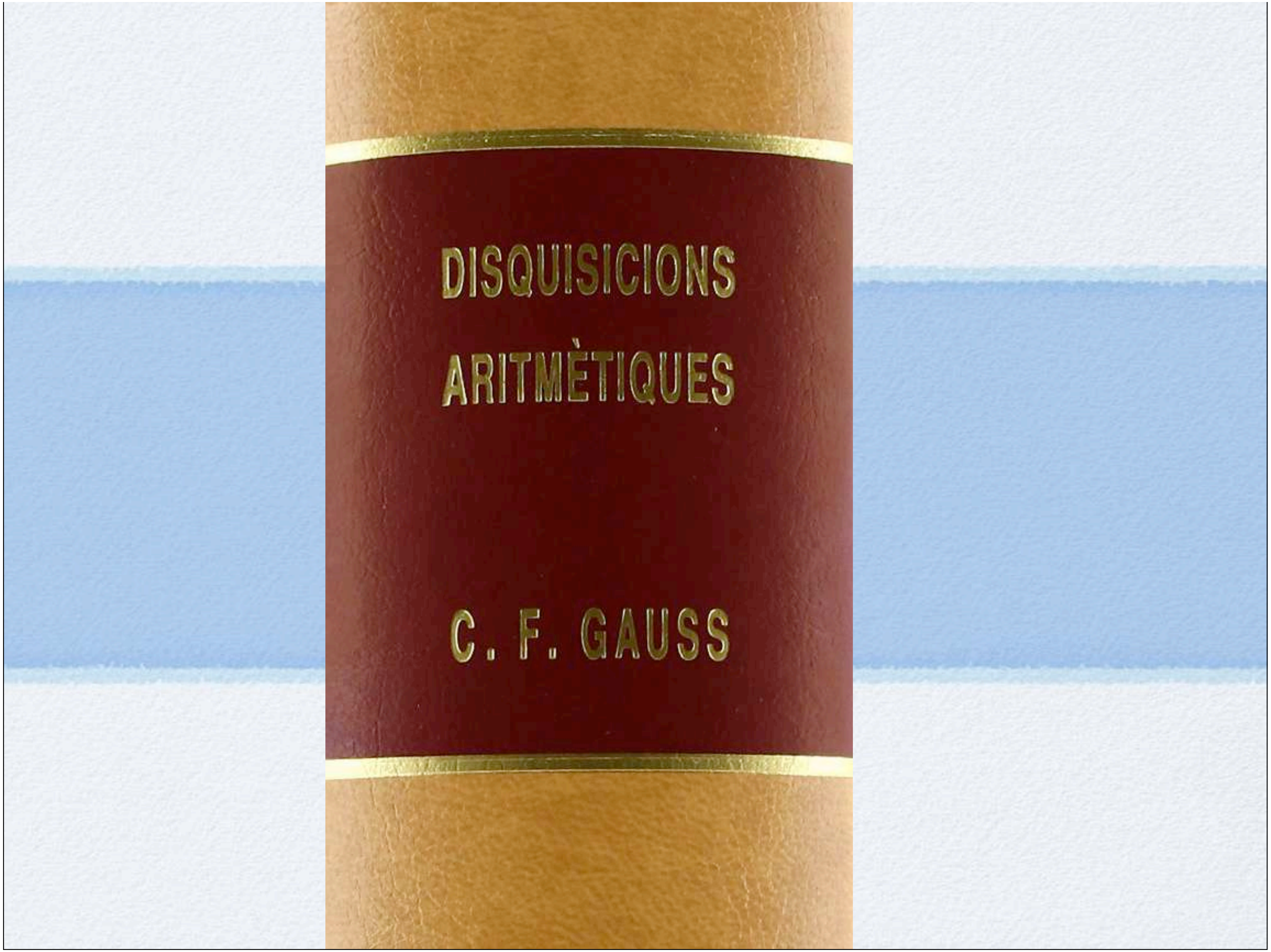
1801.

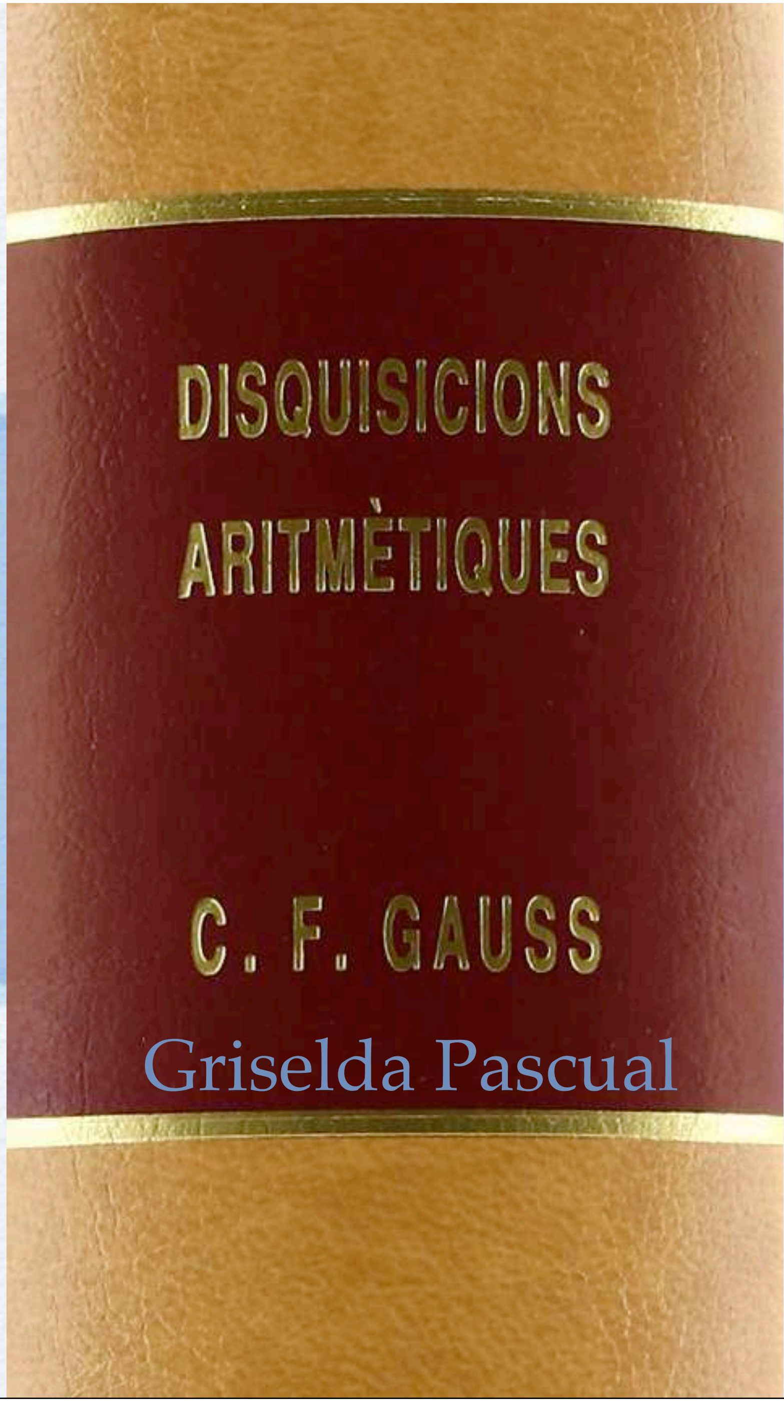
4

Gauss 17

Serenissimo
Prinipi ac domino
Carolo Guilielmo Ferdinando
brunovicensium ac
luneburgensium duci

Celsitudinis Tuae servus
addictissimus
C.F.Gauss


DISQUISICIONS
ARITMÈTIQUES
C. F. GAUSS



Griselda Pascual

GAUSS 17

Carta a Gerling, 6 enero 1819

GAUSS 17

La historia de este descubrimiento no la he explicado nunca hasta ahora, pero puedo indicarla exactamente. Fue el 29 de marzo de 1796, y la casualidad no tuvo nada que ver. Todo estaba en dividir las raices de la ecuación

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$$

en dos grupos [...]

Gauss 17

A partir de esforzadas meditaciones entre las conexiones de las raices y los fundamentos de la aritmética, feliz por unas vacaciones en Braunschweig, la mañana de aquel día, antes de levantarme, tuve la suerte de ver con gran claridad toda esta correlación, de manera que allá mismo e immediatamente apliqué al heptadecágono la correspondiente confirmación numèrica.

GAUSS 17

A partir de esforzadas meditaciones entre las conexiones de las raices y los fundamentos de la aritmética, feliz por unas vacaciones en Braunschweig, la mañana de aquel día, antes de levantarme, tuve la suerte de ver con gran claridad toda esta correlación, de manera que allá mismo e immediatamente apliqué al heptadecágono la correspondiente confirmación numérica.


CARL FRIEDRICH
GAUSS
GEB. 30. APRIL 1777
GEST. 23. FEBRUAR 1855

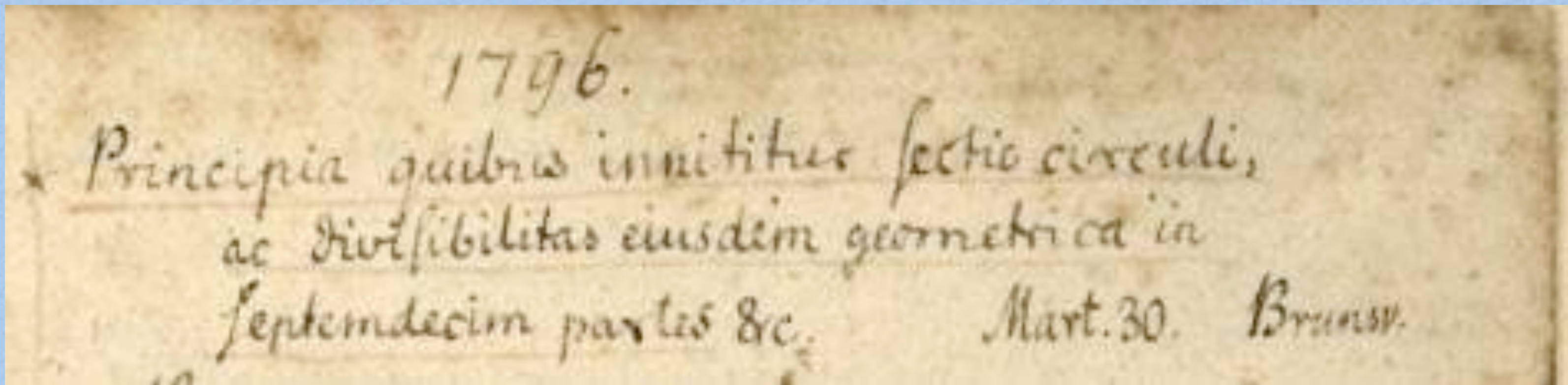

1801 Òrbita de Ceres

El más refinado geòmetra y el perfecto astrónomo, éstos son dos títulos separados que amo con todo mi corazón, y que adoro con pasión siempre que estan unidos.

Gauss a Olbers

GAUSS 17

30 marzo 1796, empieza su DIARIO



1796.

Principia quibus innititur ſectio circuli, ac diviſibilitas eiusdem geometrica in ſeptemdecim partes &c. Mart. 30. Brunsv.

GAUSS 17

30 marzo 1796, empieza su DIARIO

[1] Los principios de los cuales depende la división del círculo, i la divisibilidad geométrica del mismo en 17 partes.

GAUSS 17

[3] Las fórmulas para el coseno de los submútiplos de los ángulos de una circunferéncia.

GAUSS 17

[55] He encontrado un distiguido suplemento a la descripción de los polígonos. Concretamente, si a,b,c,d,.. son los factores primos del número primo p disminuido en una unidad, entonces para describir un polígono de p lados sólo necesitamos (1) dividir el arco en partes a, b, c, d, ...(2) describir los polígonos de a,b,c,d...lados.

GAUSS 17

[65] (1797) He perfeccionado una segunda deducción del teorema sobre polígonos.

GAUSS 17

[116] (1801) Provado que es imposible reducir la división del círculo a una ecuación de grado menor al sugerido por la teoría.

GAUSS 17

Qué entendemos por

construcciones con regla y compás

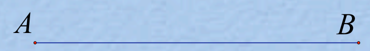
GAUSS 17

Se dan dos puntos.
Se dice que una recta está construida si estan construidos dos de sus puntos.

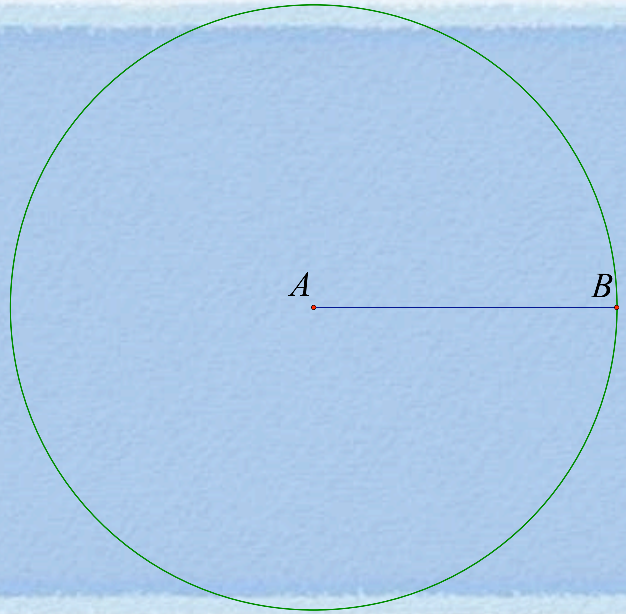
Gauss 17

Se dan dos puntos.
Se dice que una recta está construida si estan construidos dos de sus puntos.
Se dice que una circunferéncia está construida si estan construidos el centro y el radio (dos puntos).
Se dice que un punto está construido si se da como intersección de rectas o circunferéncias ya construidas.

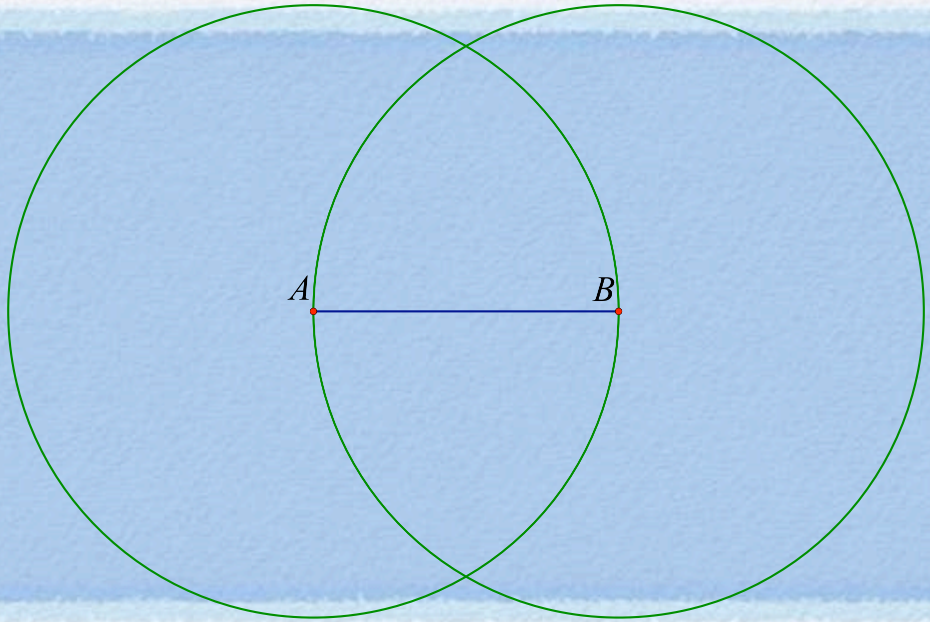
Mediatriz



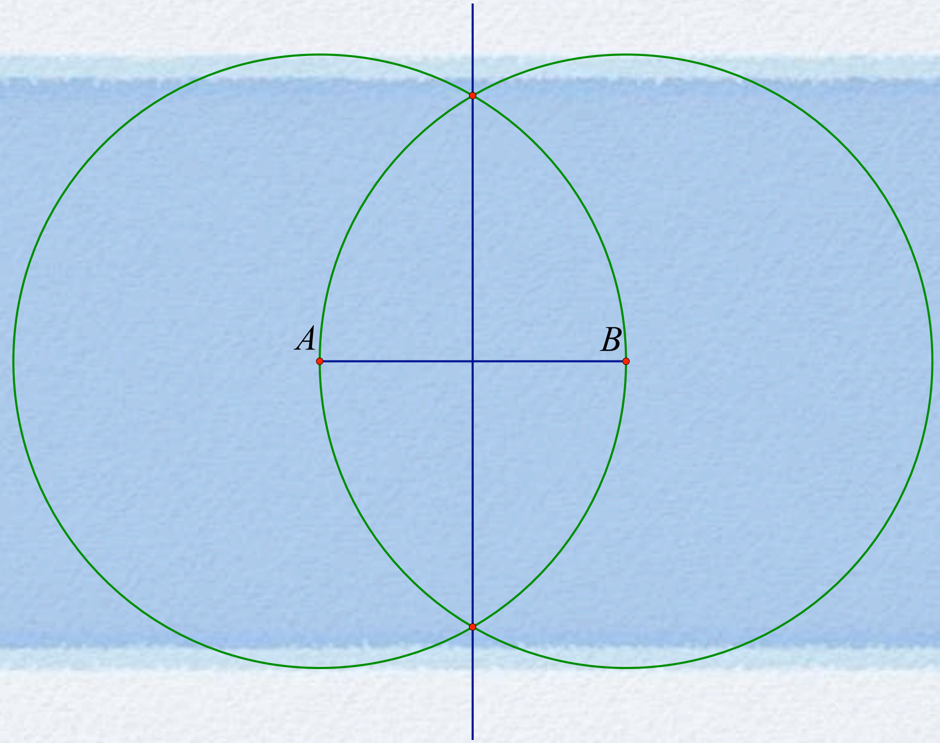
Mediatriz



Mediatriz



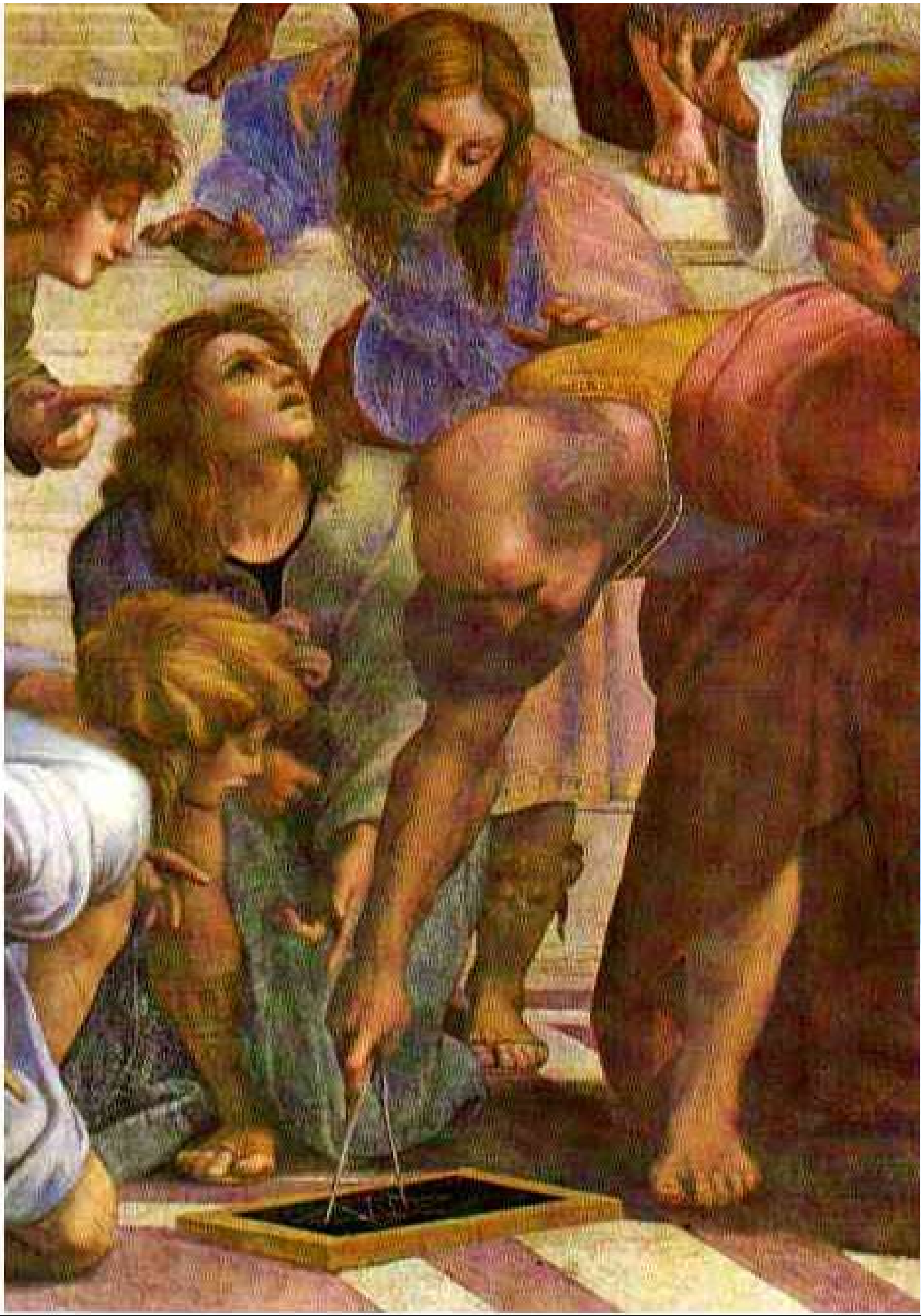
Mediatriz

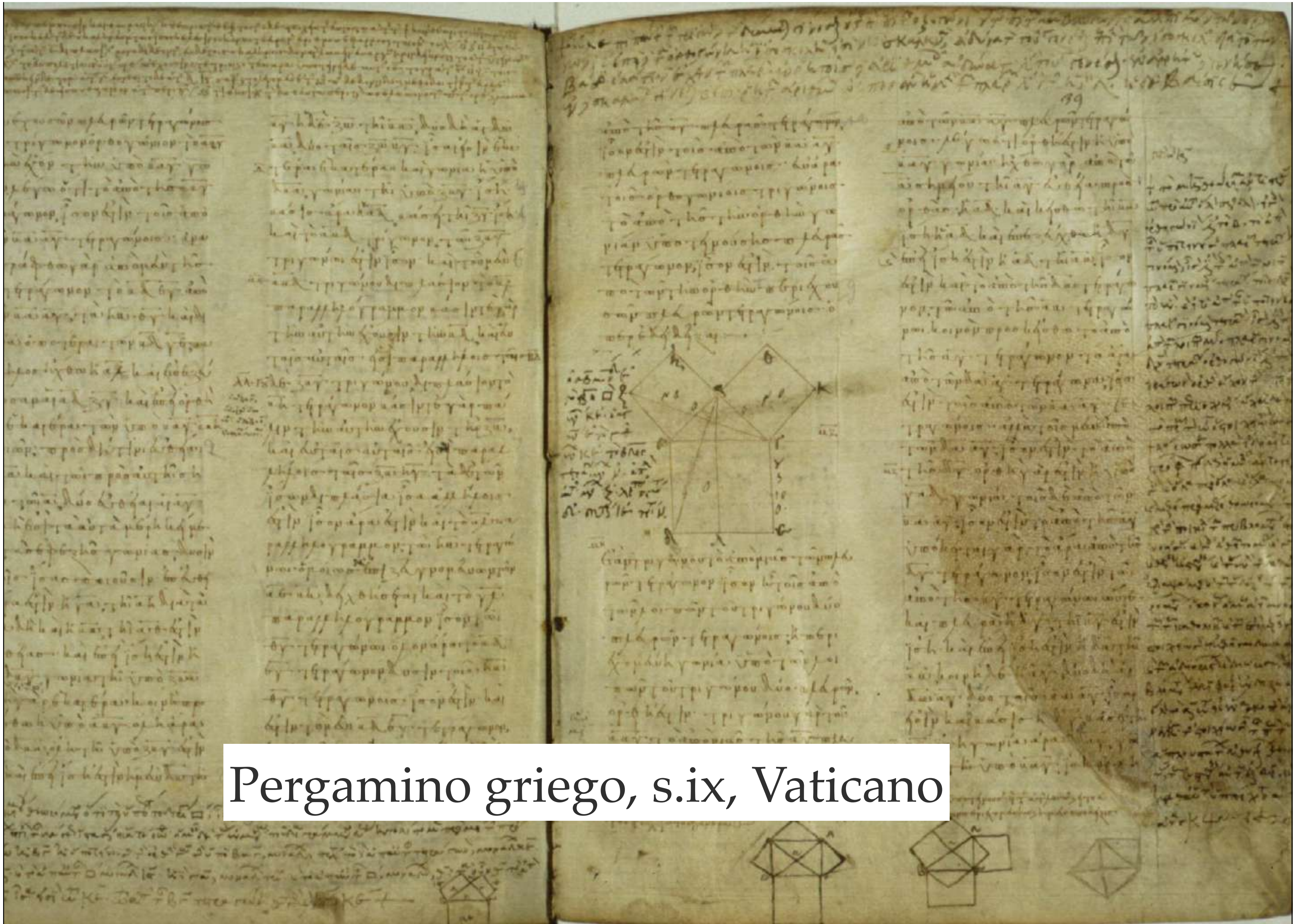


Suma y resta de segmentos

Tres primeras proposiciones de los Elementos de Euclides

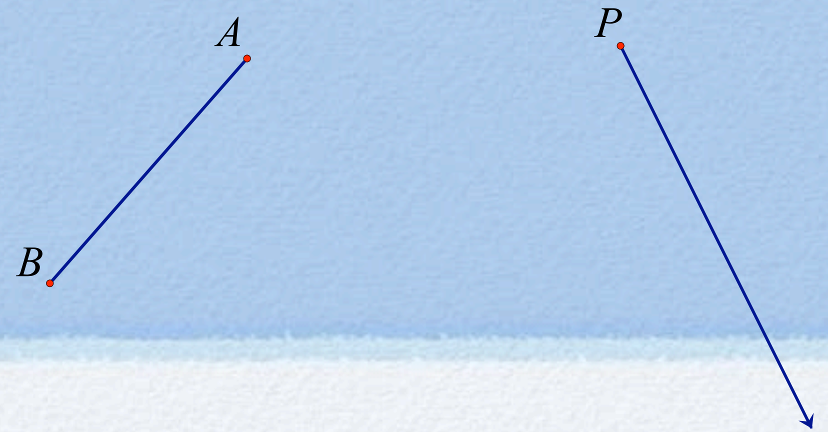
Raffaello,
1510





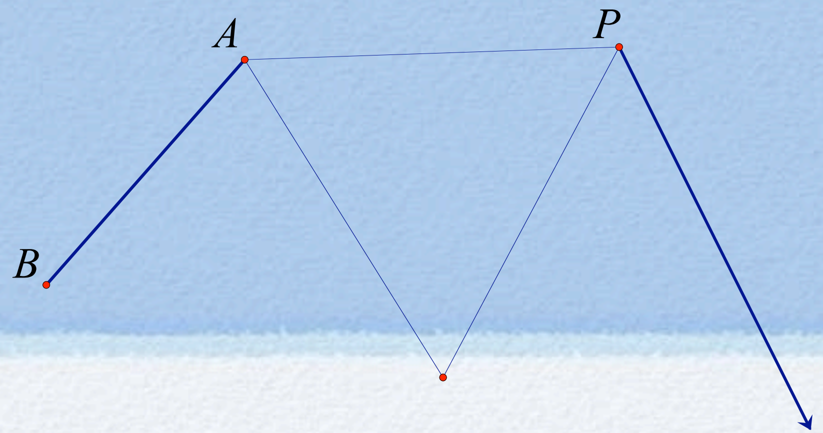
Pergamino griego, s.ix, Vaticano

Suma y resta de segmentos

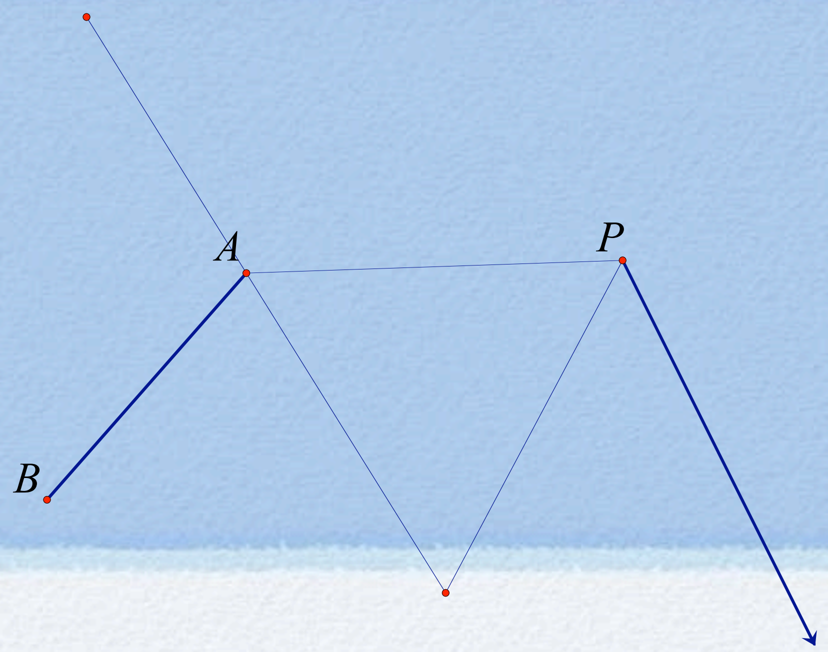


Tres primeras Proposiciones

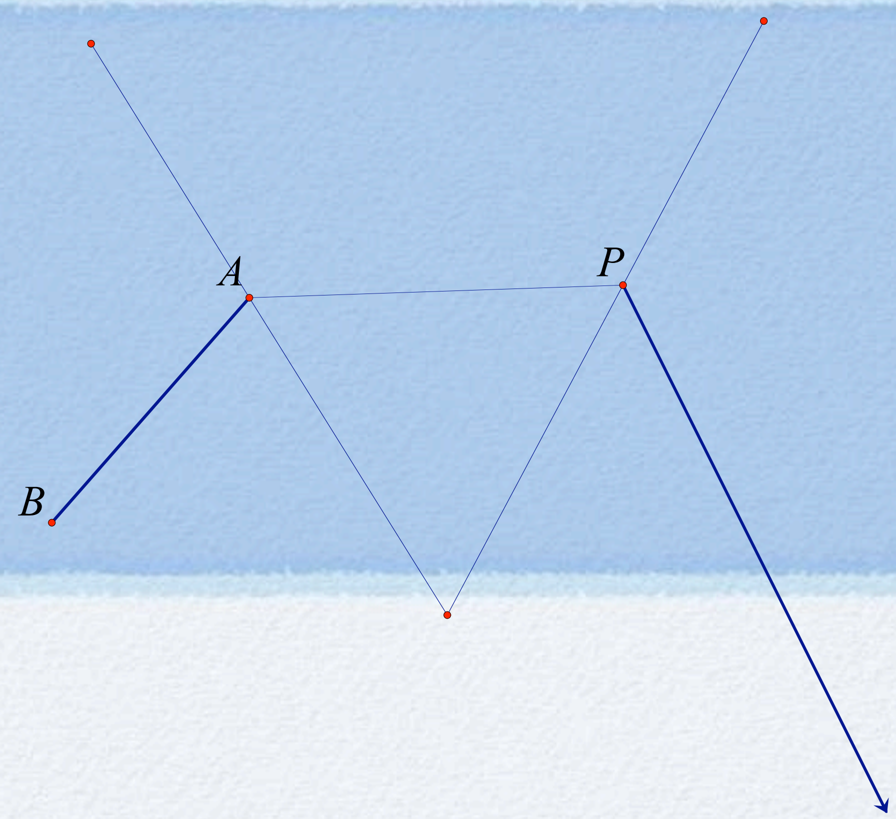
Suma y resta de segmentos



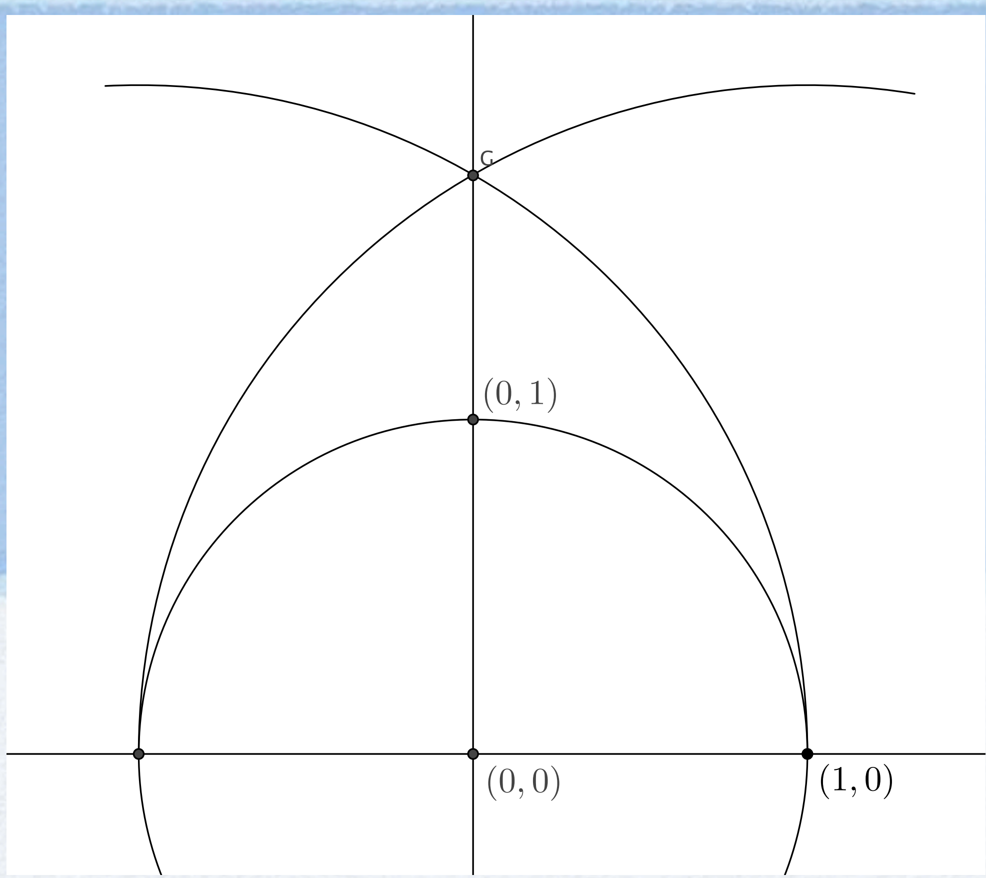
Suma y resta de segmentos



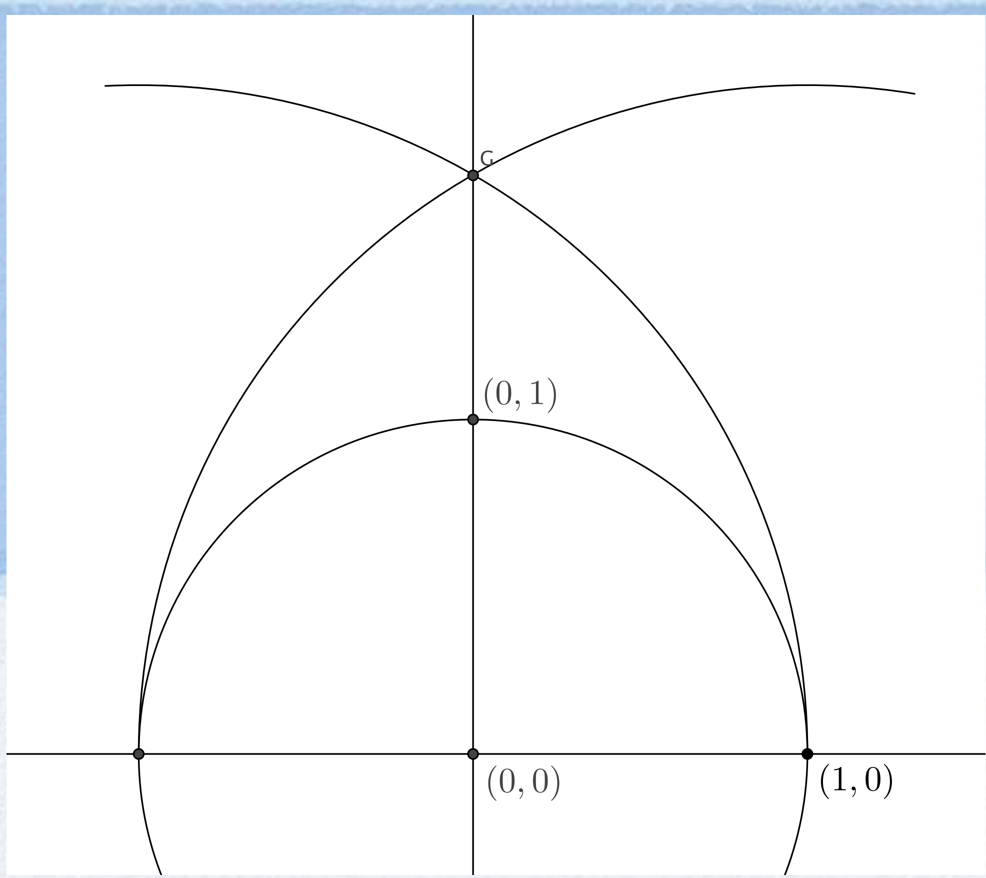
Suma y resta de segmentos



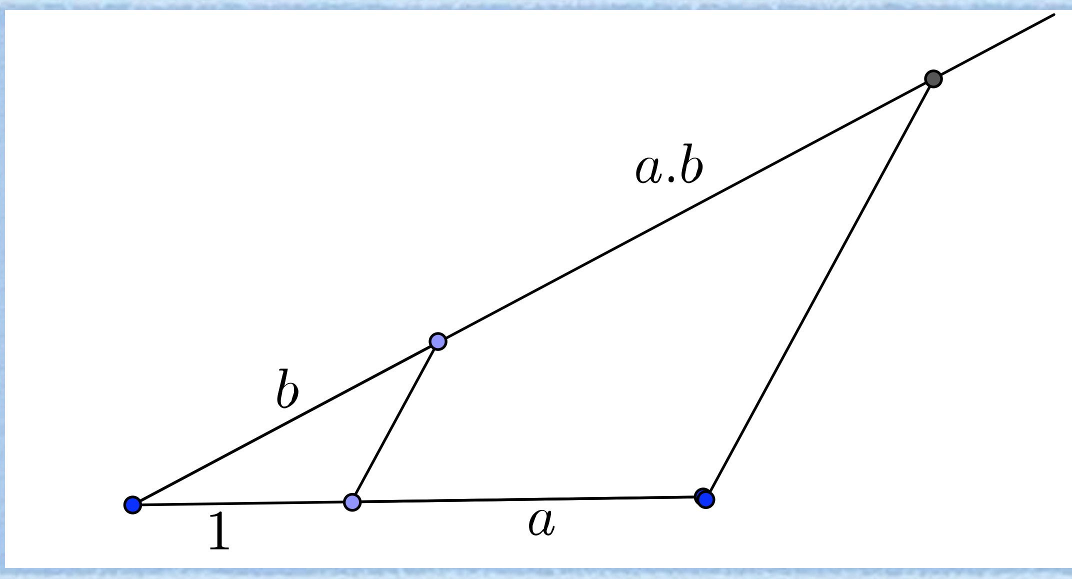
Medida de segmentos



Números construibles

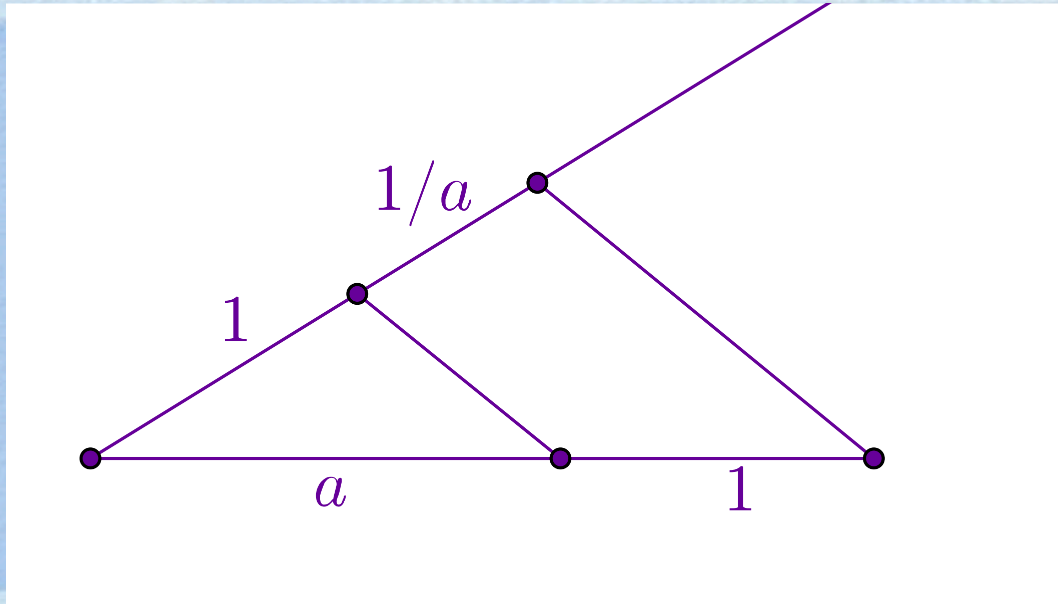


Producto de segmentos



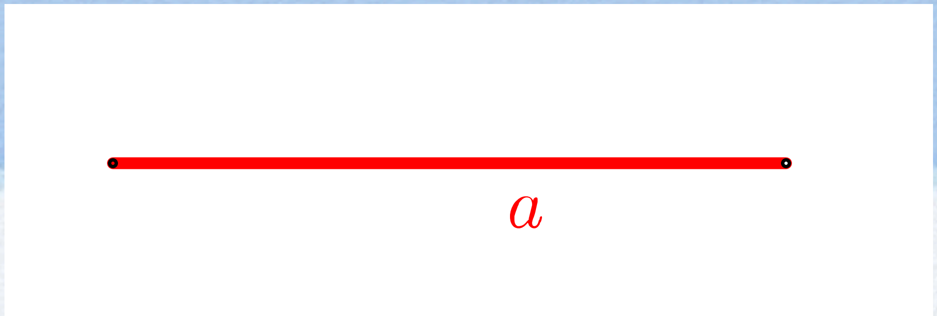
$$\frac{b}{1} = \frac{ab}{a}$$

Inversos de segmentos

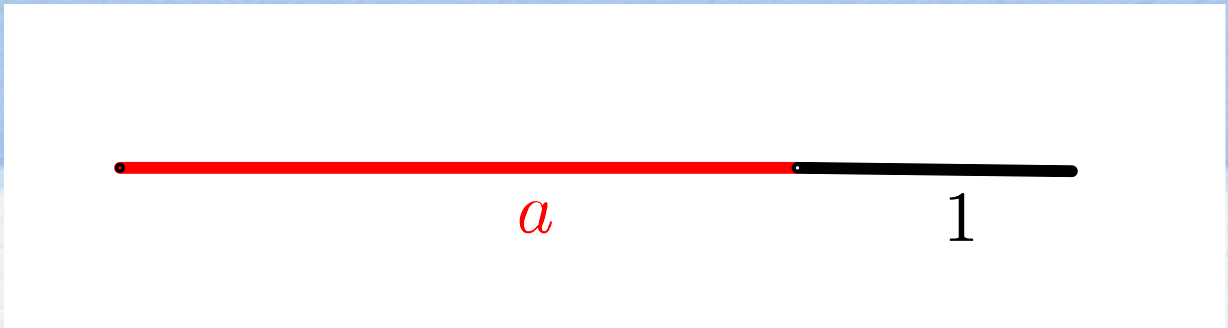


$$\frac{a}{1} = \frac{1}{x}$$

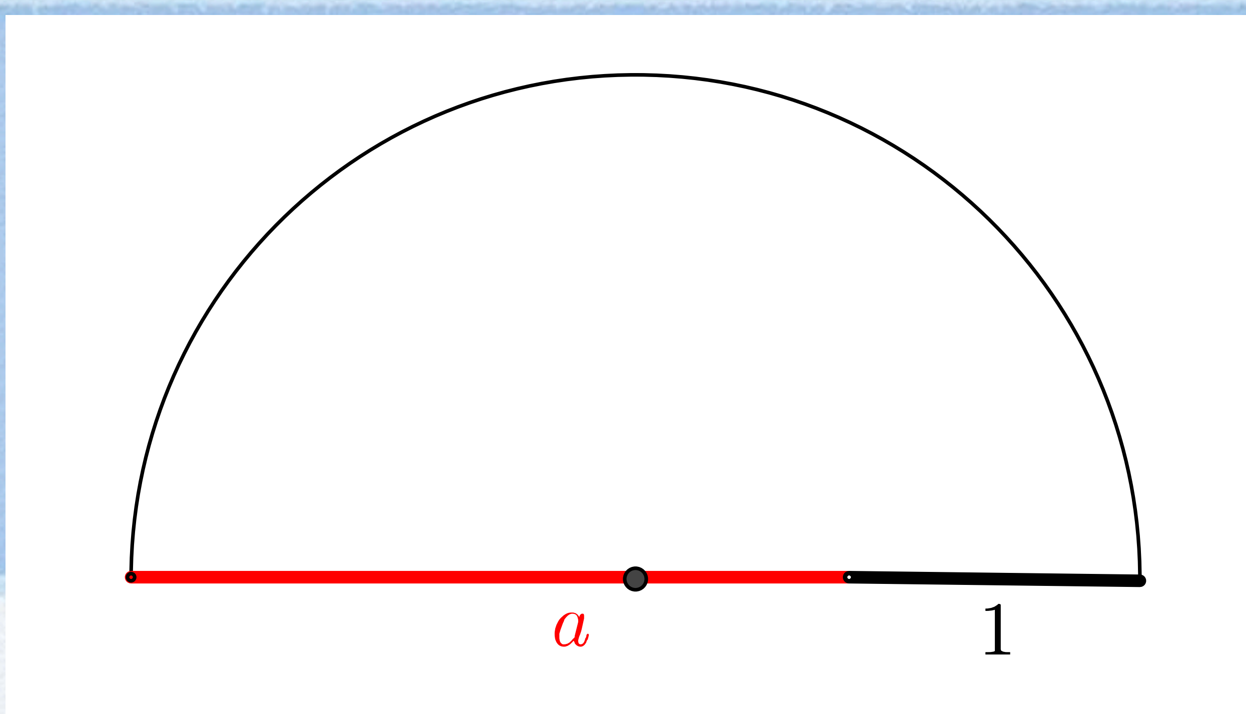
Raíz cuadrada



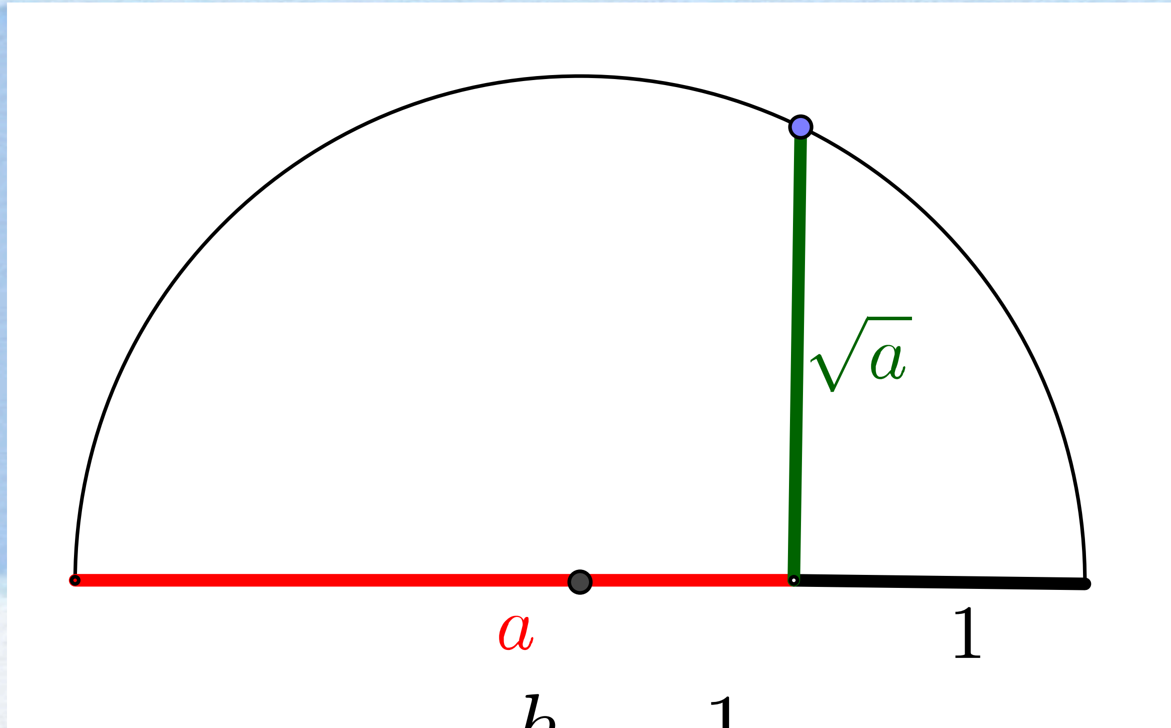
Raíz cuadrada



Raíz cuadrada

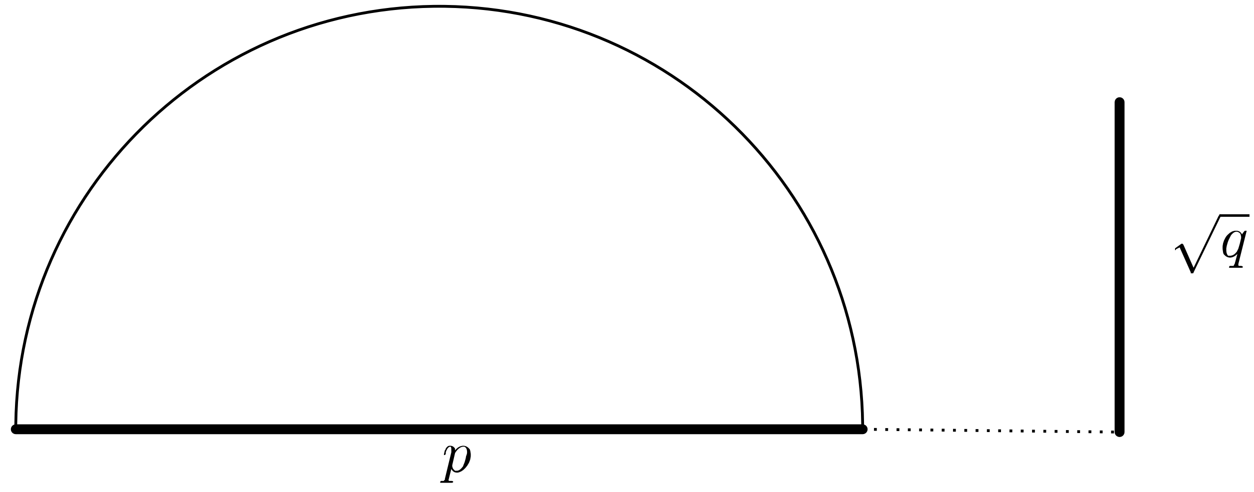


Raíz cuadrada



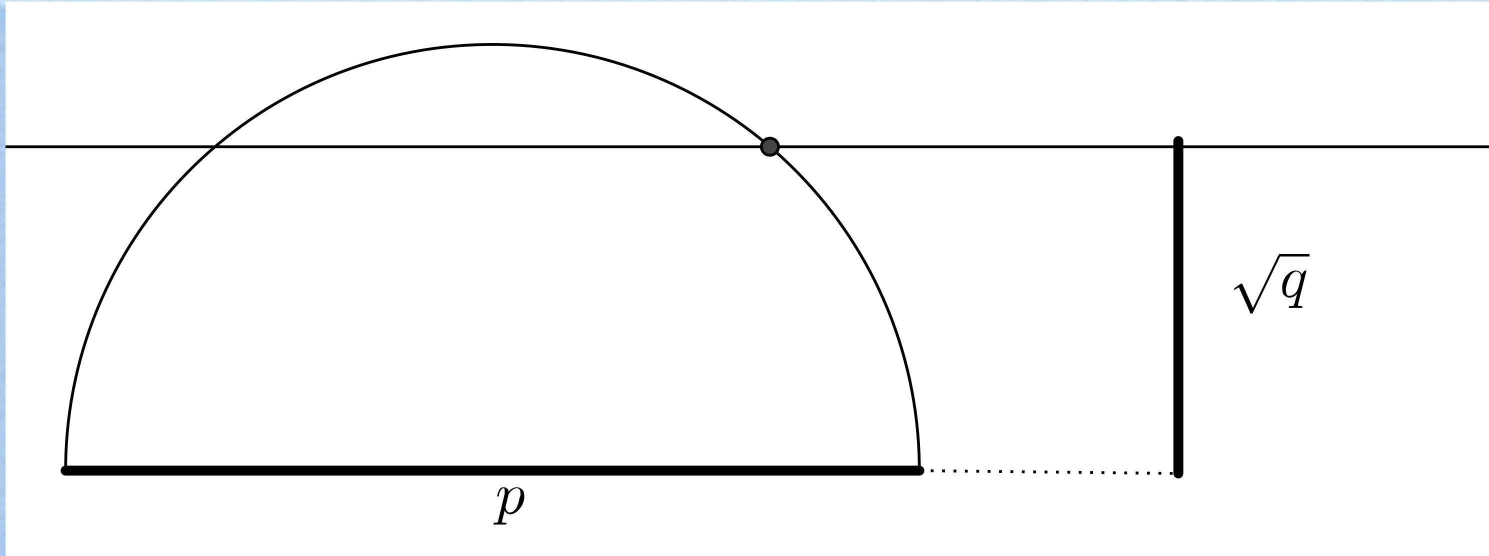
$$\frac{h}{a} = \frac{1}{h}$$

Ecuación de segundo grado



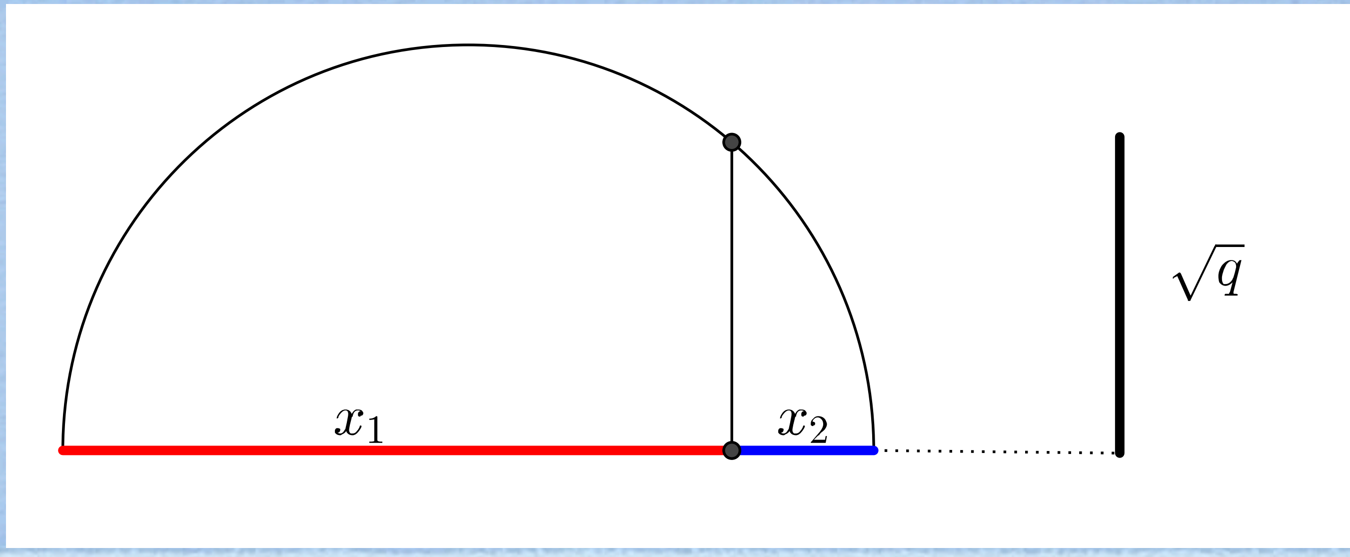
$x^2-px+q=0$

Ecuación de segundo grado



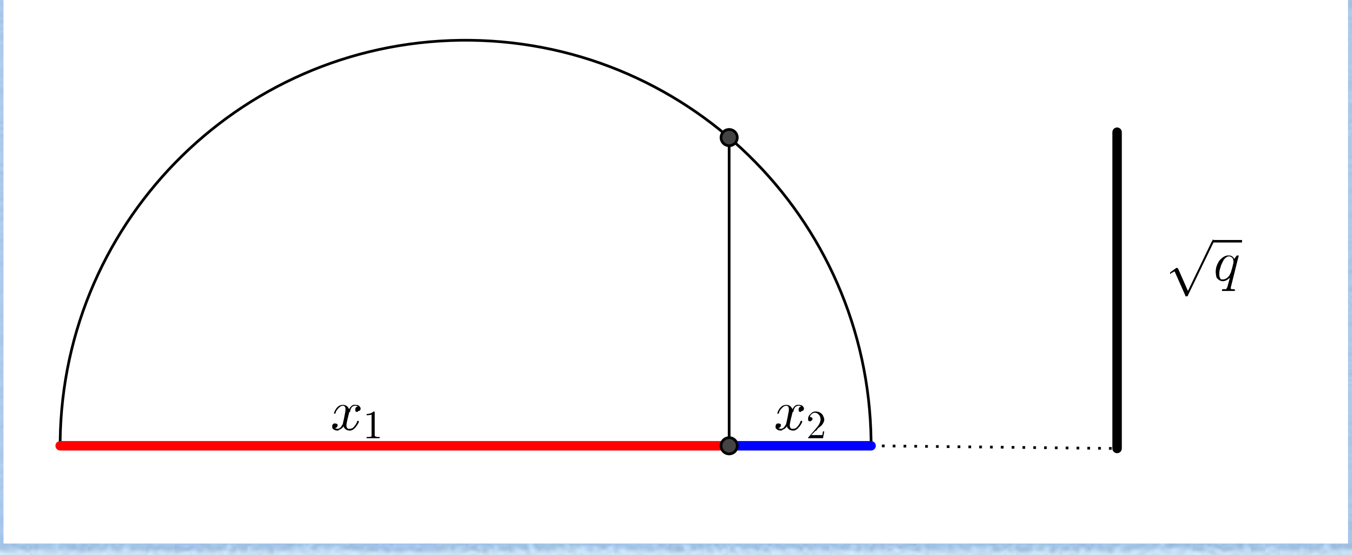
x^2-px+q=0

Ecuación de segundo grado



$x^2 - px + q = 0$

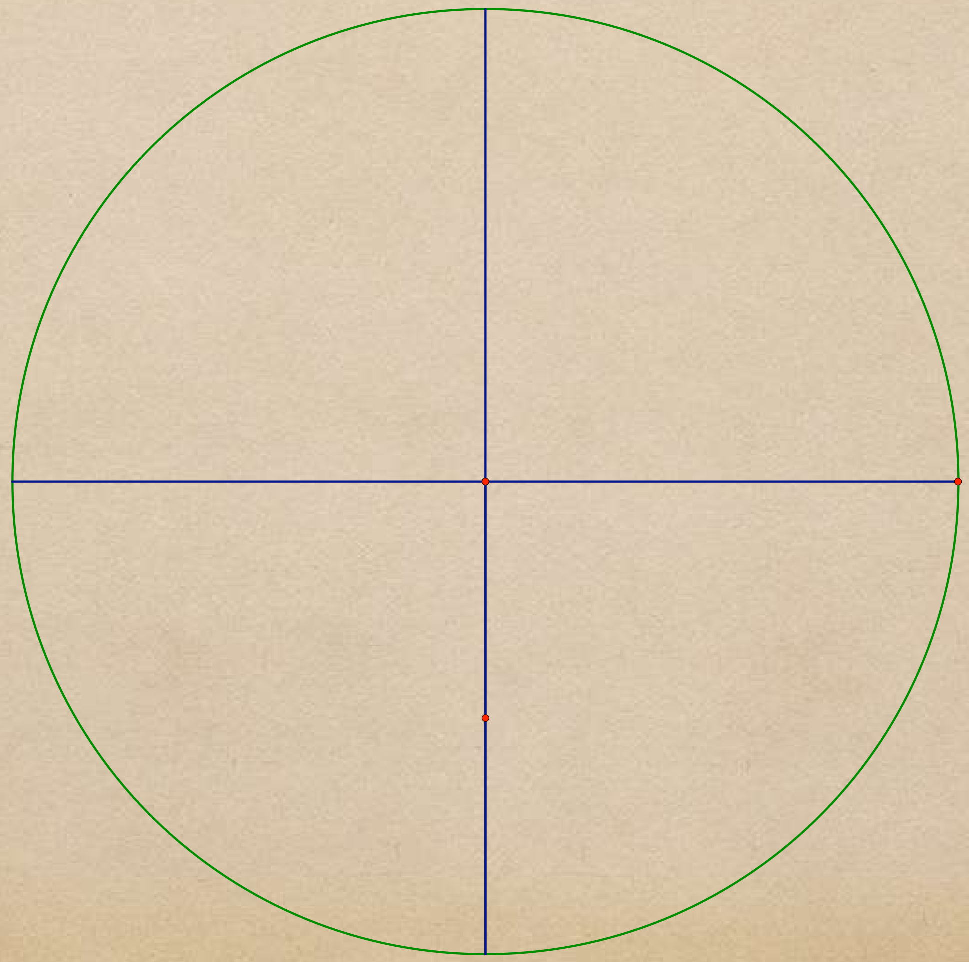
Ecuación de segundo grado



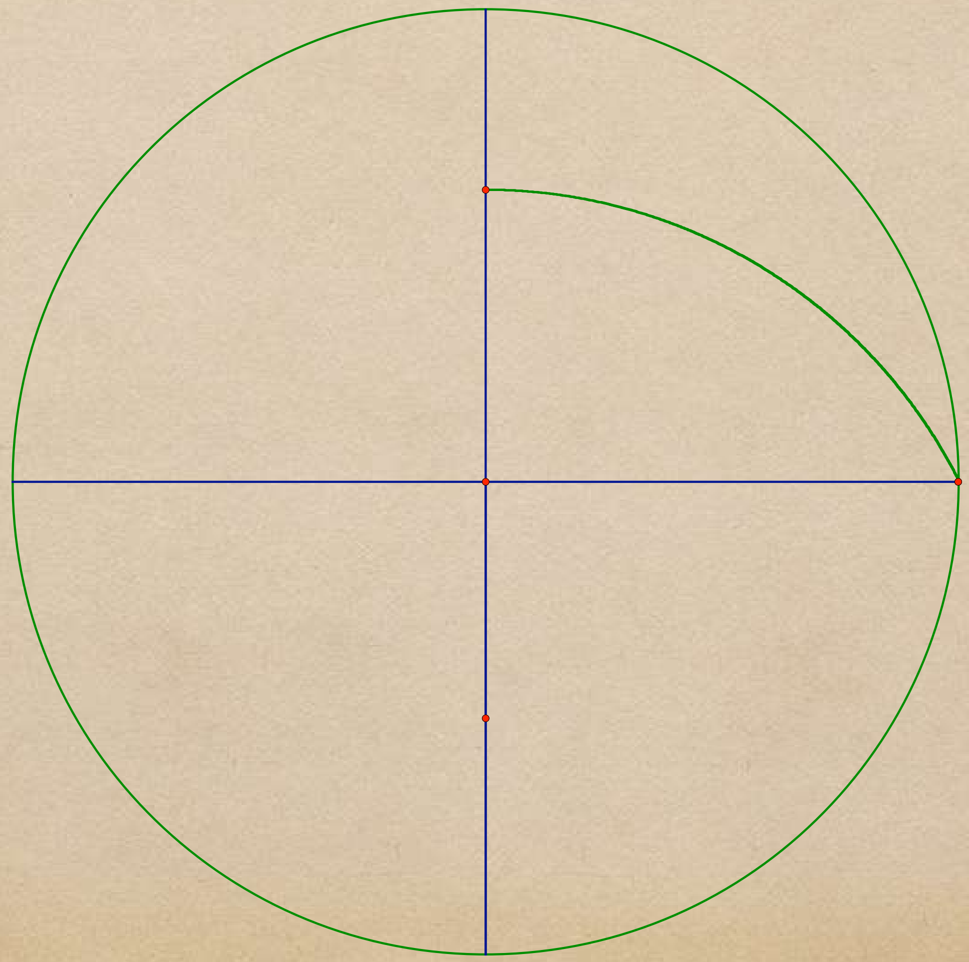
Sabemos construir irracionales cuadráticos

Polígonos regulares

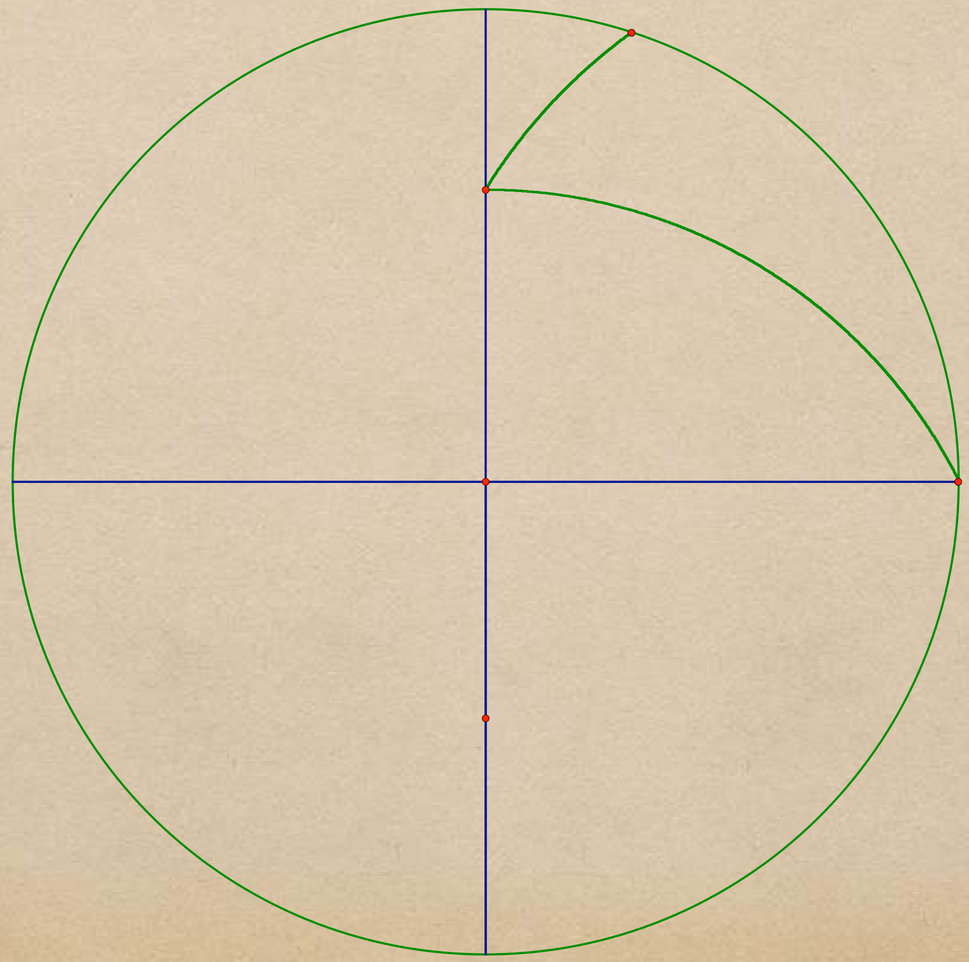
Pentágono



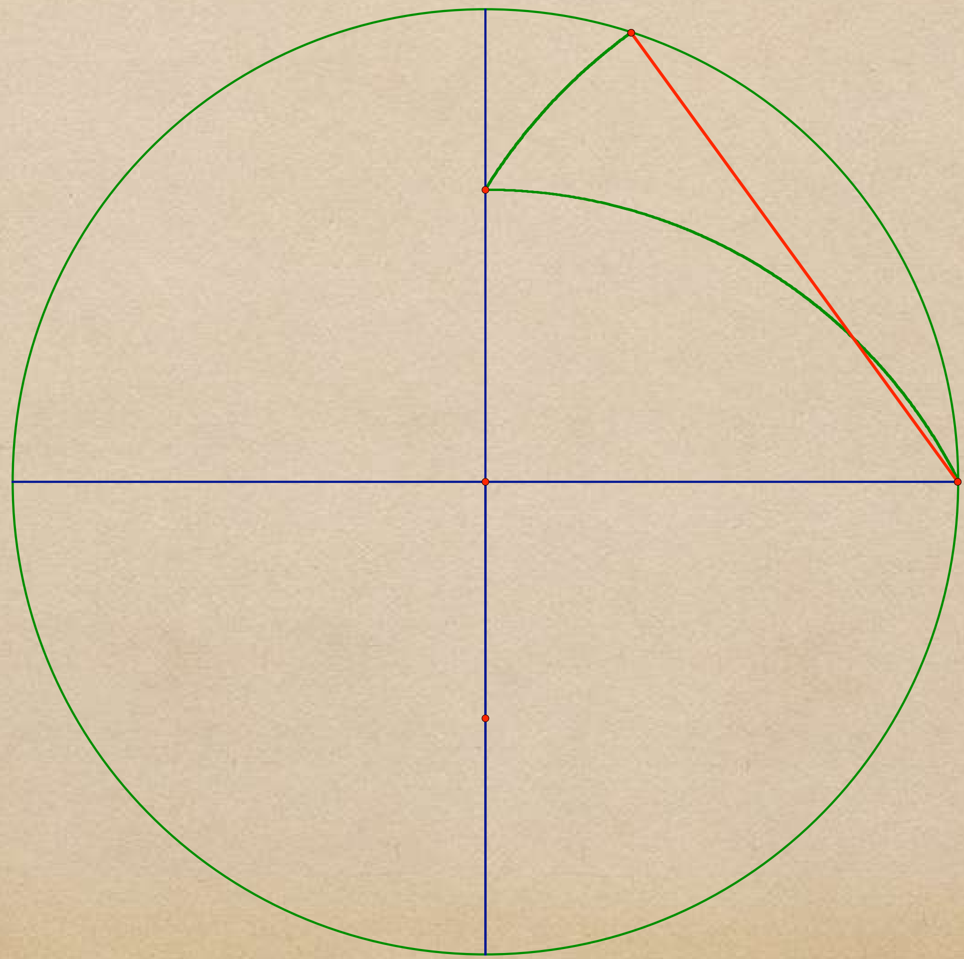
Pentágono



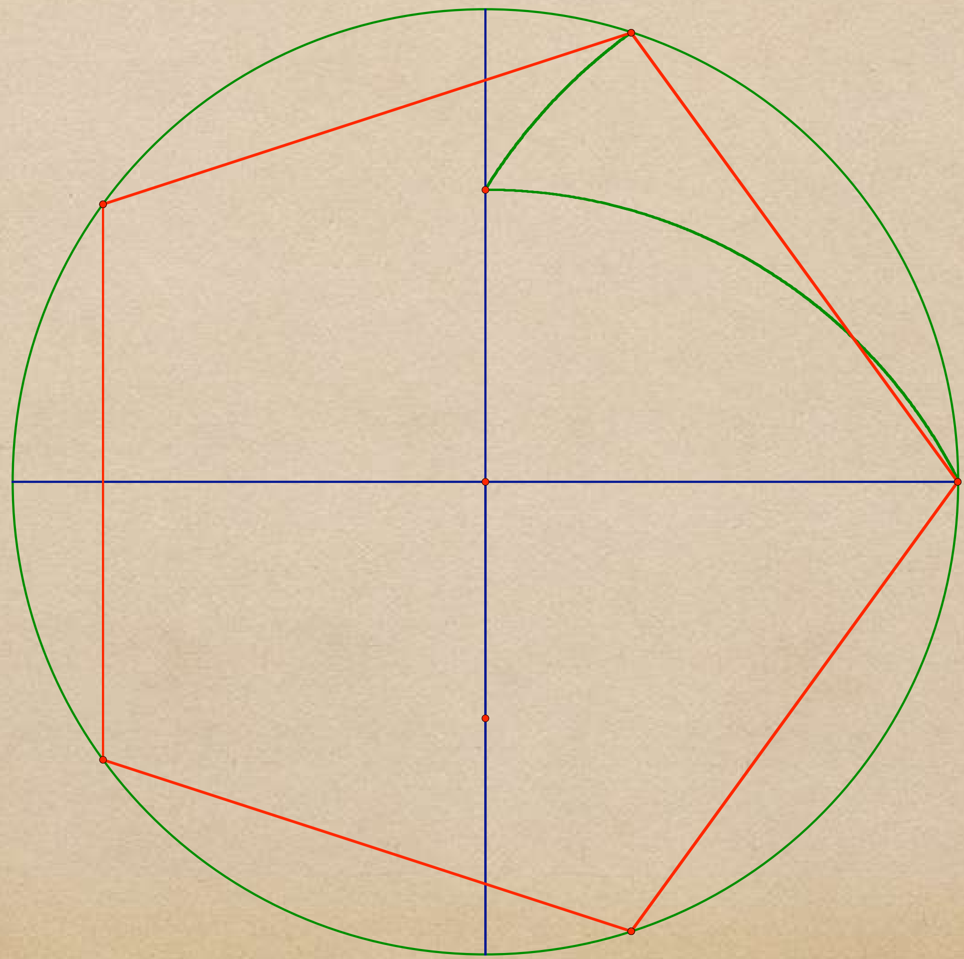
Pentágono



Pentágono



Pentágono



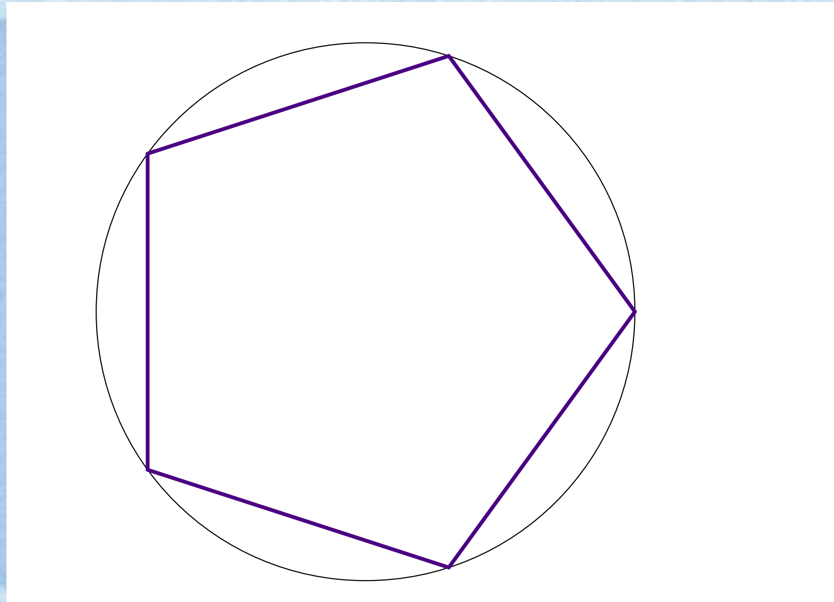
Leda Atómica

Dalí, 1979

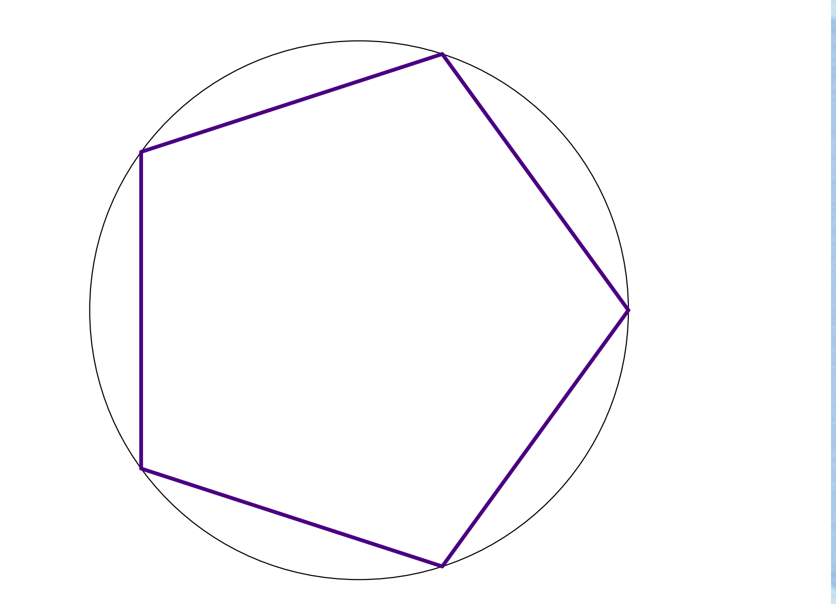
Leda Atómica

Dalí, 1979

Segunda construcción del Pentágono

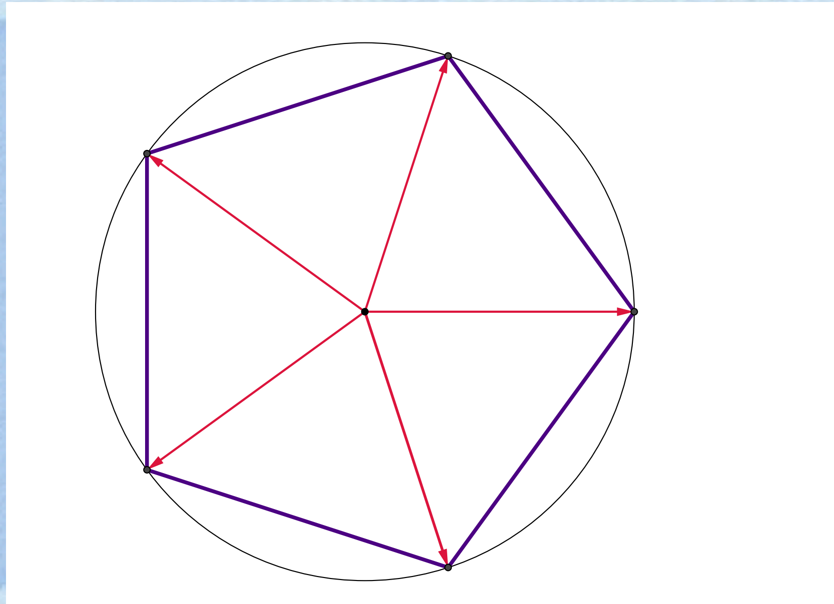


Segunda construcción del Pentágono



Lo períodos de Gauss

Segunda construcción del Pentágono



Segunda construcción del Pentágono

Vértices: raices de $z^5-1=0$

Raices: $1, w, w^2, w^3, w^4$ $\quad w=e^{2\pi i/5}$

Segunda construcción del Pentágono

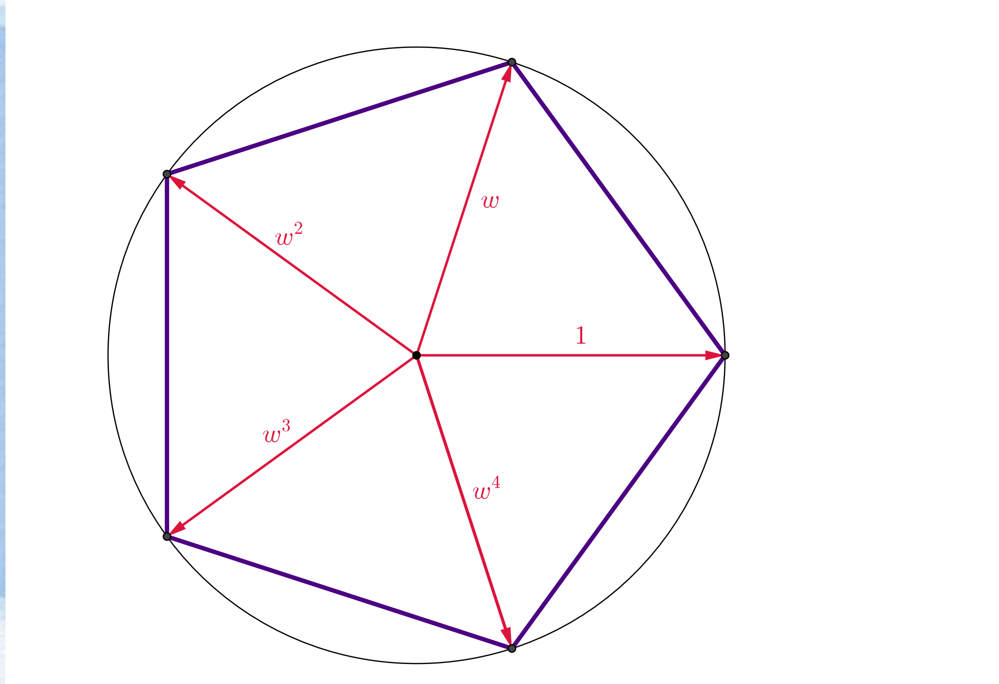
Utilizaremos más adelante que la parte real de

$$w=e^{2\pi i/5}$$

es

$$\cos(2\pi/5)$$

Segunda construcción del Pentágono



Segunda construcción del Pentágono

Polinomio ciclotómico

$$\frac{z^5 - 1}{z - 1} = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1,$$

Raices: w,w^2,w^3,w^4

Segunda construcción del Pentágono

Reagrupamiento de las raices

Primer período: $u_1 = w + w^4$

Segundo período: $u_2 = w^2 + w^3$

Segunda construcción del Pentágono

Reagrupamiento de las raices

Primer período: $u_1 = w + w^4$

Segundo período: $u_2 = w^2 + w^3$

u_1 y u_2 son números reales !!

Gauss 17

Todo estaba en dividir las raices de la ecuación

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$$

en dos grupos [...]

Segunda construcción del Pentágono

u_1 y u_2 cumplen

$$u_1+u_2=u_1u_2=-1$$

Por tanto, u_1 y u_2 son soluciones de

$$x^2+x-1=0$$

Segunda construcción del Pentágono

La soluciones de $x^2+x-1=0$ son $1/\boldsymbol{\tau}$ y $-\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = \boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$\boldsymbol{\tau}$ es el número áureo (que es construible)

Segunda construcción del Pentágono

Concretamente $u_1 = w + w^4 = 1/\tau$

Multiplicando por w

$$w^2 + 1 = w/\tau$$

w es raíz de

$$x^2 - (1/\tau)x + 1 = 0$$

Segunda construcción del Pentágono

Concretamente $u_1 = w + w^4 = 1/\boldsymbol{\tau}$

Multiplicando por w

$$w^2 + 1 = w/\boldsymbol{\tau}$$

w es raíz de

$$x^2 - u_1 x + 1 = 0$$

Segunda construcción del Pentágono

Resumiendo u_1, u_2 <-----------> $x^2 + x - 1 = 0$

w <-----------> $x^2 - u_1 x + 1 = 0$

Segunda construcción del Pentágono

La parte real de la raíz de $x^2 - (1/\tau)x + 1 = 0$

es $1/(2\tau)$. Por tanto

$$\cos(2\pi/5) = 1/(2\tau)$$

Segunda construcción del Pentágono

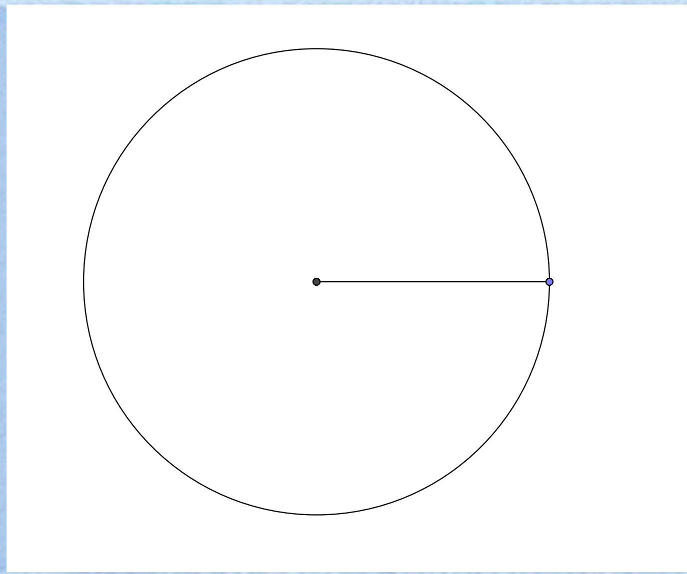
La parte real de la raíz de $x^2 - (1/\boldsymbol{\tau})x + 1 = 0$

es $1/(2\boldsymbol{\tau})$. Por tanto

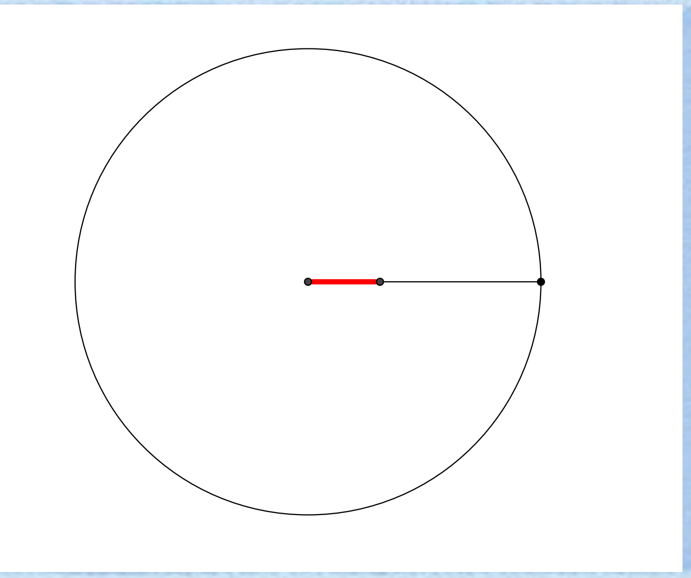
$$\cos(2\boldsymbol{\pi}/5) = 1/(2\boldsymbol{\tau})$$

Sabemos construir $\cos(2\boldsymbol{\pi}/5)$

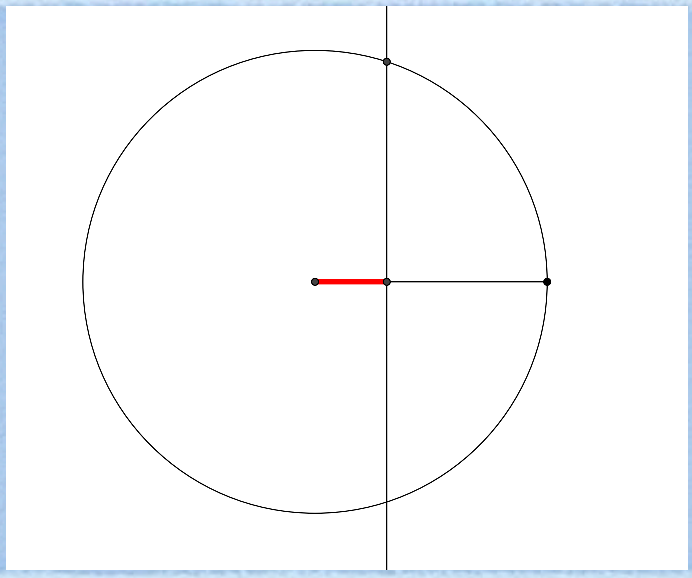
Segunda construcción del Pentágono



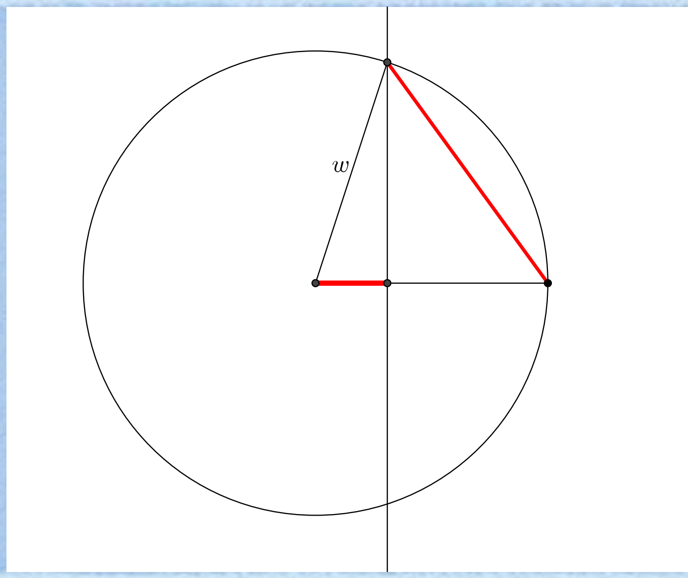
Segunda construcción del Pentágono



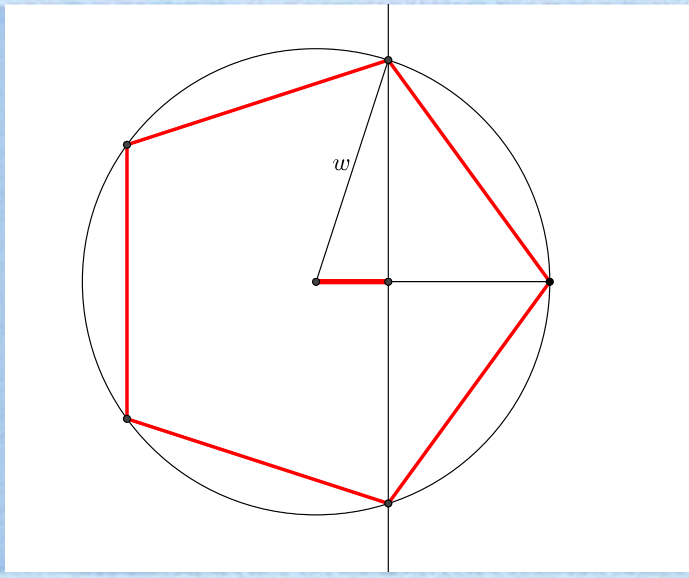
Segunda construcción del Pentágono



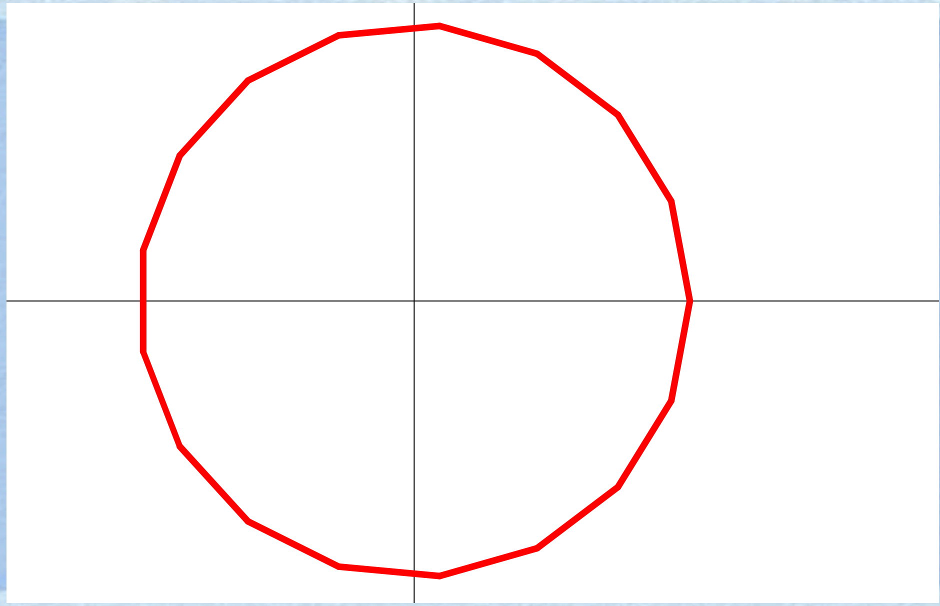
Segunda construcción del Pentágono



Segunda construcción del Pentágono



Construcción del Heptadecágono



Construcción del Heptadecágono

$$\frac{z^{17}-1}{z-1} = z^{16} + z^{15} + \cdots + z^2 + z + 1,$$

Las 16 raíces del ciclotómico $w, w^2, \ldots, w^{16}$

$$w = e^{2\pi i/17}$$

Construcción del Heptadecágono

Poténcias de 3 en Z/(17)

1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6

Construcción del Heptadecágono

Poténcias de 3 en Z/(17)

1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6

Construcción del Heptadecágono

Poténcies de 3 en Z/(17)

1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6

$$u_1=w^1+w^9+w^{13}+w^{15}+w^{16}+w^8+w^4+w^2$$

$$u_2=w^3+w^{10}+w^5+w^{11}+w^{14}+w^7+w^{12}+w^6$$

Períodos

Gauss 17

Todo estaba en dividir las raices de la ecuación

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$$

en dos grupos [...]

Construcción del Heptadecágono

Períodos

$$u_1=w^1+w^9+w^{13}+w^{15}+w^{16}+w^8+w^4+w^2$$

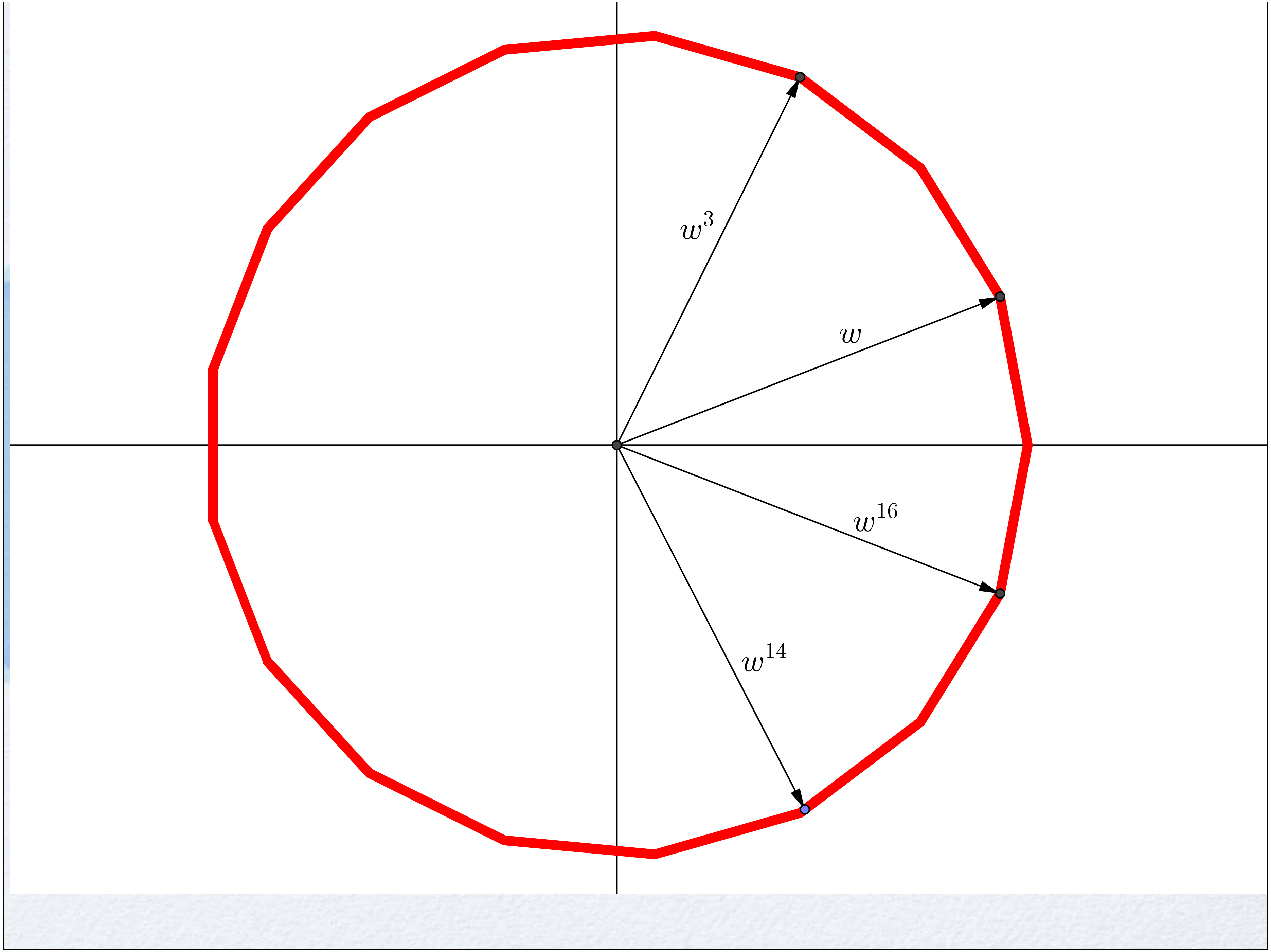
$$u_2=w^3+w^{10}+w^5+w^{11}+w^{14}+w^7+w^{12}+w^6$$

Construcción del Heptadecágono

Períodos

$$u_1=w^1+w^9+w^{13}+w^{15}+w^{16}+w^8+w^4+w^2$$

$$u_2=w^3+w^{10}+w^5+w^{11}+w^{14}+w^7+w^{12}+w^6$$



w^3
w
w^{16}
w^{14}

Construcción del Heptadecágono

Períodos

$$u_1=w^1+w^9+w^{13}+w^{15}+w^{16}+w^8+w^4+w^2$$

$$u_2=w^3+w^{10}+w^5+w^{11}+w^{14}+w^7+w^{12}+w^6$$

Son números reales!!

Construcción del Heptadecágono

Se ve fácilmente que $u_1 + u_2 = -1$ y $u_1 u_2 = -4$

Construcción del Heptadecágono

Se ve fácilmente que $u_1 + u_2 = -1$ y $u_1 u_2 = -4$

Por tanto son las raices de $x^2 + x - 4 = 0$

Construcción del Heptadecágono

Se ve fácilmente que $u_1 + u_2 = -1$ y $u_1 u_2 = -4$

Por tanto son las raices de $x^2 + x - 4 = 0$

Son iracionales cuadráticos

Construcción del Heptadecágono

Partimos cada período en dos

$$v_1 = w^1 + w^{13} + w^{16} + w^4$$

$$u_1 = v_1 + v_2$$

$$v_2 = w^9 + w^{15} + w^8 + w^2$$

$$v_3 = w^3 + w^5 + w^{14} + w^{12}$$

$$u_2 = v_3 + v_4$$

$$v_4 = w^{10} + w^{11} + w^7 + w^6$$

Construcción del Heptadecágono

$v_1 + v_2 = u_1$ $\quad$ $v_1 v_2 = -1$ $\quad$ $x^2 - u_1 x - 1 = 0$

$v_3 + v_4 = u_2$ $\quad$ $v_3 v_4 = -1$ $\quad$ $x^2 - u_2 x - 1 = 0$

Punto central de la demostración: v_1, v_2, v_3, v_4 son racionales cuadráticos!!!

Construcción del Heptadecágono

Partimos cada período v_i en dos

$$w^k + w^{17-k} = 2\cos(2k\boldsymbol{\pi}/17), \quad k=1,\ldots,8$$

Construcción del Heptadecágono

Partimos cada período v_i en dos

$$v_{1=} w^1 + w^{13} + w^{16} + w^4$$

Construcción del Heptadecágono

Partimos cada período v_i en dos

$$v_{1=}\, (w^1 + w^{16}) + (w^4 + w^{13})$$

Construcción del Heptadecágono

$$(w^1 + w^{16}) + (w^4 + w^{13}) = v_1$$

Es fácil ver

$$(w^1 + w^{16})\,(w^4 + w^{13}) = v_3$$

$$x^2 - v_1\, x + v_3 = 0$$

Construcción del Heptadecágono

$$(w^1 + w^{16}) + (w^4 + w^{13}) = v_1$$

Es fácil ver

$$(w^1 + w^{16})\,(w^4 + w^{13}) = v_3$$

$$x^2 - v_1\, x + v_3 = 0$$

$w^1 + w^{16}$ es racional cuadrático

Construcción del Heptadecágono

$$(w^1 + w^{16}) + (w^4 + w^{13}) = v_1$$

Es fácil ver

$$(w^1 + w^{16})\,(w^4 + w^{13}) = v_3$$

$$x^2 - v_1\, x + v_3 = 0$$

$2\cos(2\boldsymbol{\pi}/17)$ es racional cuadrático

Construcción del Heptadecágono

Resumiendo

u_1, u_2 <-----------> $x^2 + x - 4 = 0$

v_1, v_2 <-----------> $x^2 - u_1 x - 1 = 0$

$w^1 + w^{16}$ <-----------> $x^2 - v_1 x + v_3 = 0$

Construcción del Heptadecágono

Sabemos construir $\cos(2\boldsymbol{\pi}/17)$ y por tanto el heptadecágono

Construcción del Heptadecágono

Si resolvemos $x^2 - v_1 x + v_3 = 0$, para obtener $2\cos(2\boldsymbol{\pi}/17)$, teniendo en cuenta que v_1 y v_3 son soluciones de

$x^2 - u_1 x - 1 = 0$ y $x^2 - u_1 x - 1 = 0$

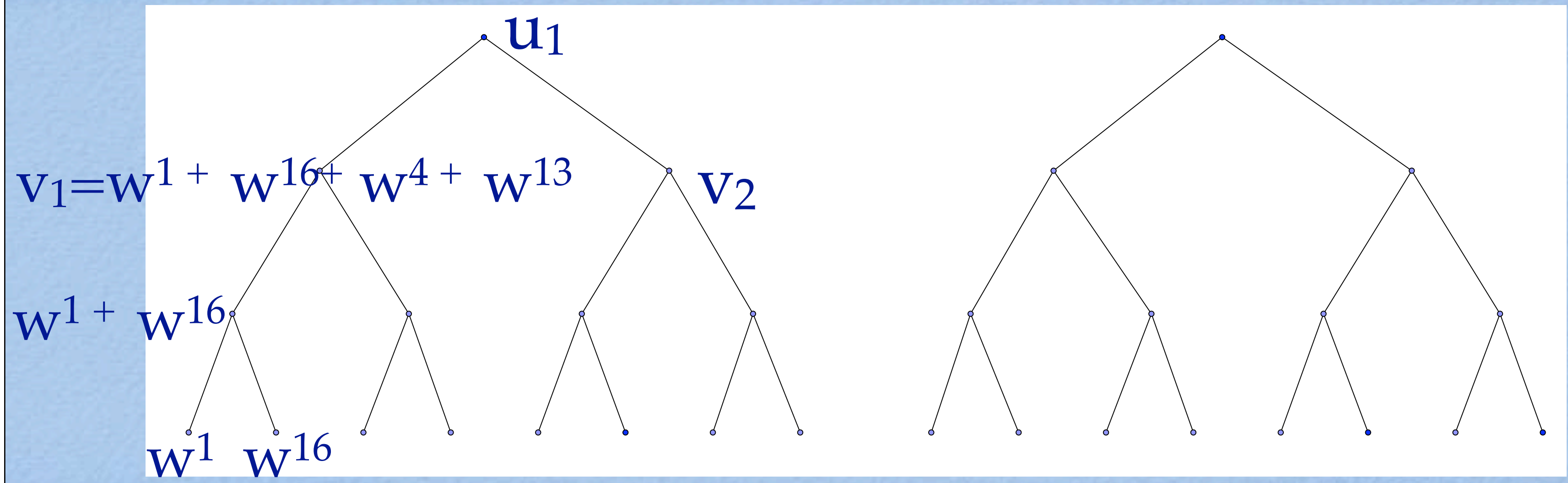
obtenemos

Fórmula de Gauss

$$16 \cdot \cos\frac{2\pi}{17} = -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} +$$

$$+\sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2(1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}.$$

Fórmula de Gauss



Teorema de Gauss

El polígono regular de n lados se puede construir con regla y compás si y sólo si la descomposición de n en factores primos es de la forma

$$n = 2^{\alpha}(2^{2^{\alpha_1}} + 1) \cdot (2^{2^{\alpha_2}} + 1) \cdots (2^{2^{\alpha_k}} + 1)$$

con los α_i distintos entre ellos

Teorema de Gauss

$$
\begin{aligned}
4 &= 2^2 \\
5 &= 2^{2^1} + 1 \\
6 &= 2(2^{2^0} + 1) \\
7 &\neq \\
8 &= 2^3 \\
9 &\neq \\
10 &= 2(2^{2^1} + 1) \\
11 &\neq \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Teorema de Gauss

$$
\begin{array}{rcl}
4 & = & 2^2 \\
5 & = & 2^{2^1}+1 \\
6 & = & 2(2^{2^0}+1) \\
7 & \neq & \\
8 & = & 2^3 \\
9 & \neq & \\
10 & = & 2(2^{2^1}+1) \\
11 & \neq & \\
\vdots & &
\end{array}
$$

$17 = 2^{2^2}+1$

Teorema de Gauss

3,4,5,6,8,10,12,15,16,17,20,
24,30,32,34,40,48,51, 60,64,68,
80,85,96,102,120,128,136,160,
170,192,204,240,255,256,257,272

Teorema de Gauss

Los números primos de la forma

$$2^{2^{\alpha}} + 1$$

se llaman

primos de Fermat

Teorema de Gauss

Los números primos de la forma

$$2^{2^{\alpha}} + 1$$

se llaman

primos de Fermat

3, 5, 17, 257, 65537

Teorema de Gauss

Euler demuestra que el sexto número de Fermat

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297$$

no es primo

Teorema de Gauss

Euler demuestra que el sexto número de Fermat

$$2^{2^5} + 1 = 641 \,.\, 6700417$$

no és primo

Teorema de Gauss

Euler demuestra que el sexto número de Fermat

$$2^{2^5} + 1 = 641 \,.\, 6700417$$

no és primo

No se sabe si hay más primos de Fermat

Teorema de Gauss

Gauss demuestra que si n descompone en producto de primos de Fermat, por potencias de 2, el correspondiente polígono se puede construir. Sobre el recíproco, que si n no es de esta forma no se puede construir, dice....

Teorema de Gauss

PODEMOS DEMOSTRAR CON TODO RIGOR QUE ESTAS ECUACIONES ELEVADAS NO SE PUEDEN NI EVITAR NI REDUIR DE NINGUNA MANERA A INFERIORES, pero los límites de esta obra no permiten transmitir aquí esta demostración;

Teorema de Gauss

pero hemos considerado que se tiene que advertir para que nadie espere encontar otras construcciones geométricas que las que nuestra teoría sugiere, es decir, las divisiones en 7,11,13,19 etc., partes, y consuma el tiempo inútilmente

Teorema de Gauss

pero hemos considerado que se tiene que advertir para que nadie espere encontar otras construcciones geométricas que las que nuestra teoría sugiere, es decir, las divisiones en 7,11,13,19 etc., partes, y consuma el tiempo inútilmente

Probado con rigor por Wantzel, 1837

Teorema de Wantzel

Si el número real a ha sido construido, entonces el polinomio mínimo de a con coeficientes en Q tiene grado potencia de dos

Teorema de Wantzel

$x^3-2=0$

$x^3-3x-1=0$ $\qquad$ $x=2\cos(\pi/9)$

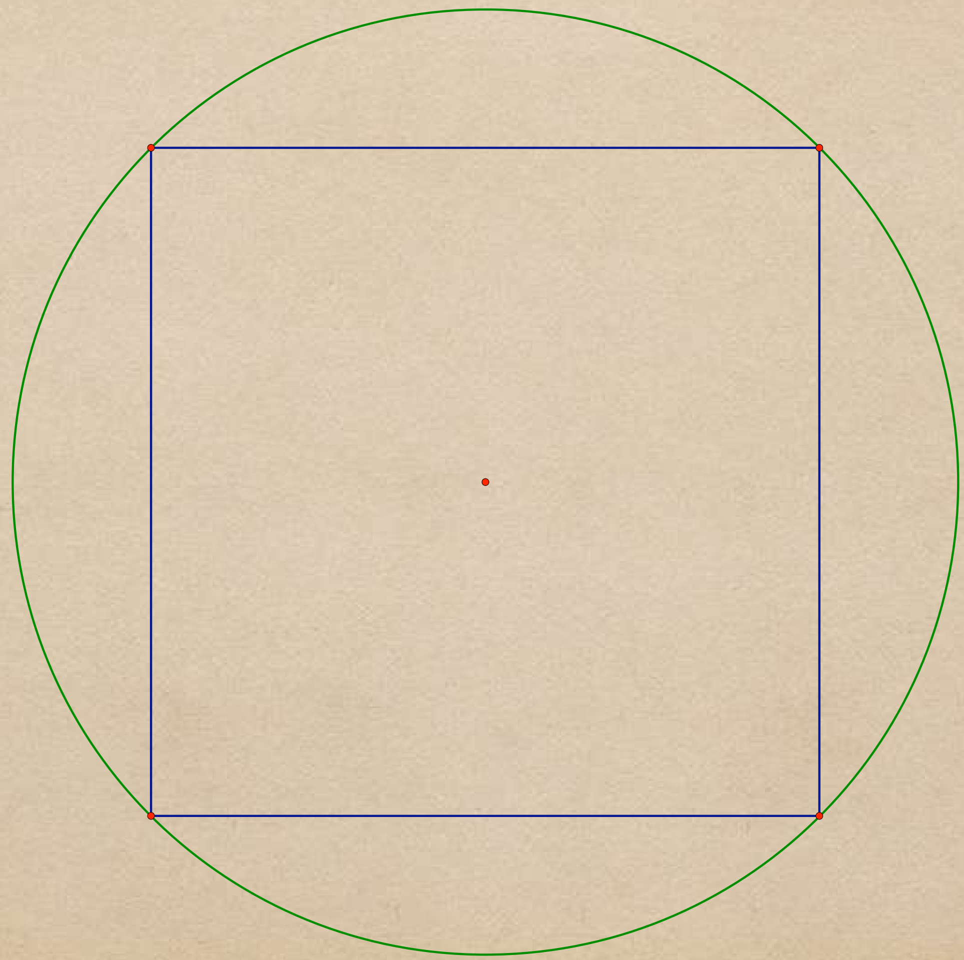
π

Teorema de Gauss

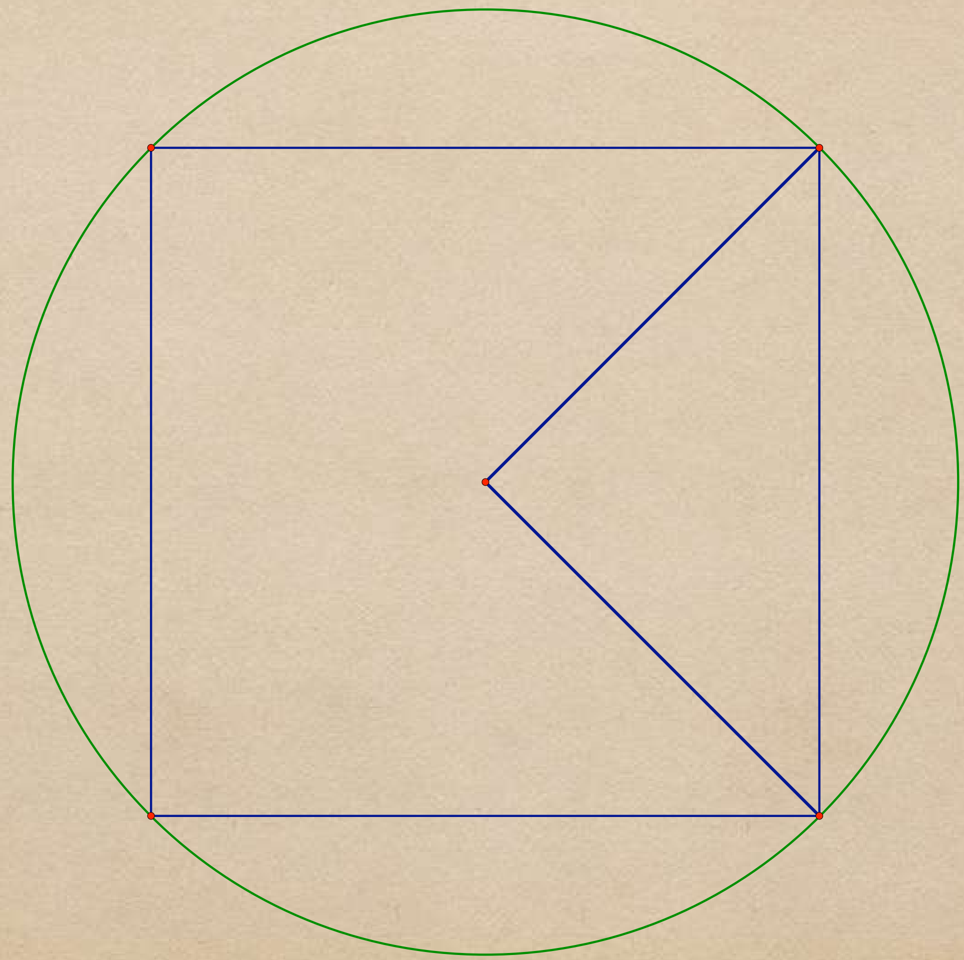
Idea de la de demostración

1. Si sabemos construir el polígono de m lados, sabemos construir el de 2^n m lados.

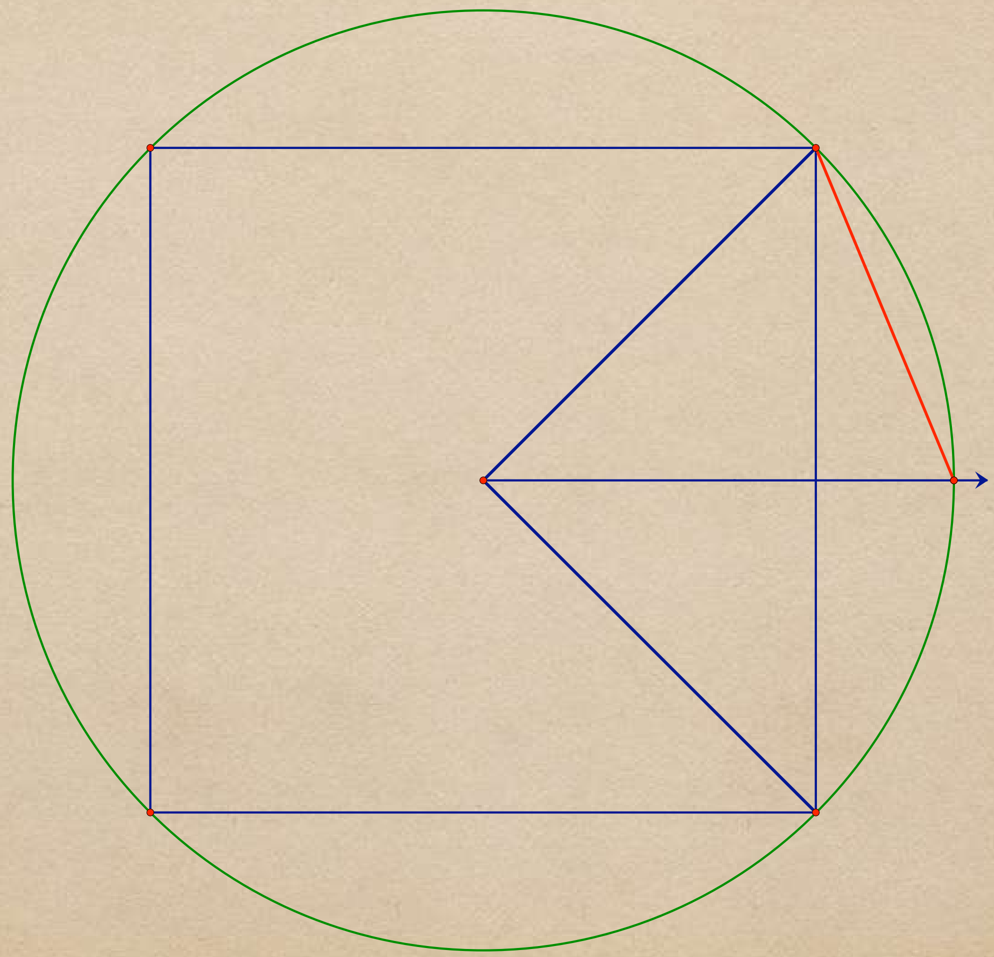
Ejemplo



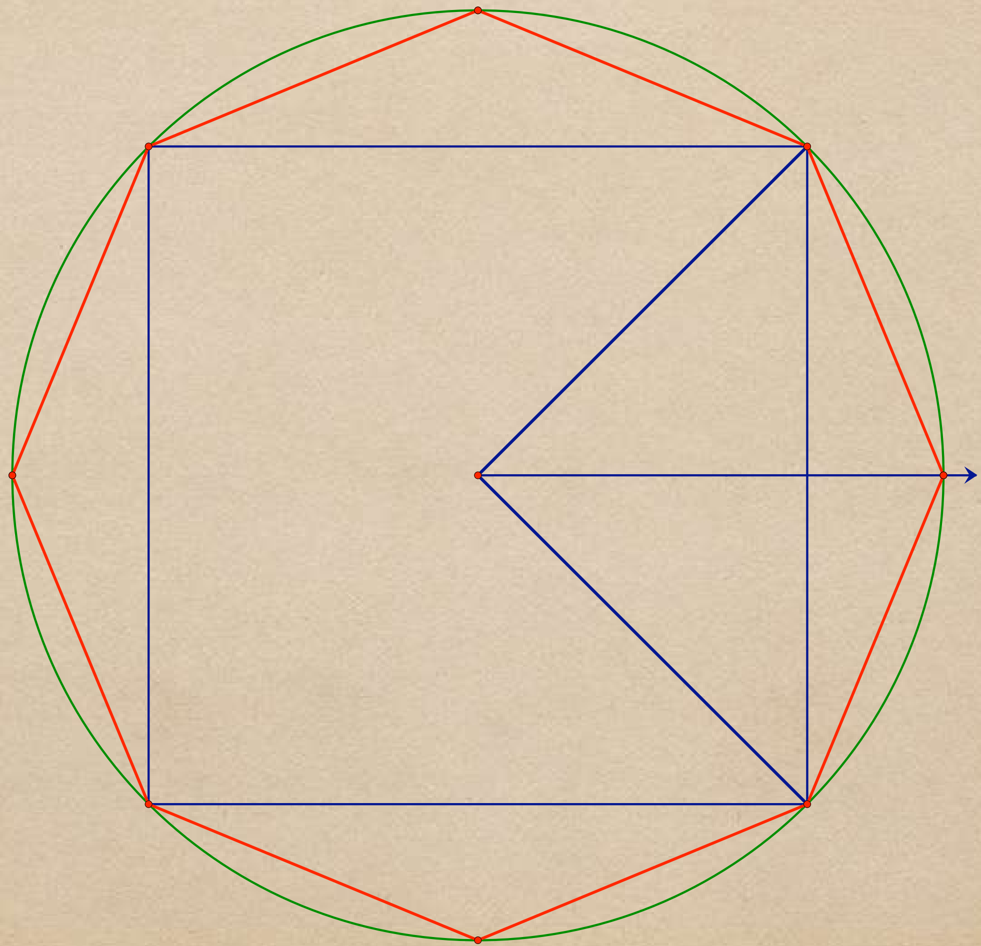
Ejemplo



Ejemplo



Ejemplo



Teorema de Gauss

Idea de la de demostración

1. Si sabemos construir el polígono de m lados, sabemos construir el de $2^n \cdot m$ lados.

Teorema de Gauss

Idea de la demostración

1. Si sabemos construir el polígono de m lados, sabemos construir el de $2^n m$ lados.
2. Si p y q son números primos entre si y sabemos construir los polígonos de p y q lados, sabemos construir el polígono de pq lados

Teorema de Gauss

Idea de la demostración

1. Si sabemos construir el polígono de m lados, sabemos construir el de 2^n m lados.
2. Si p y q son números primos entre si y sabemos construir los polígonos de p y q lados, sabemos construir el polígono de pq lados

Si sabemos construir pq sabemos construir p (uniendo de q en q), y q (uniendo de p en p)

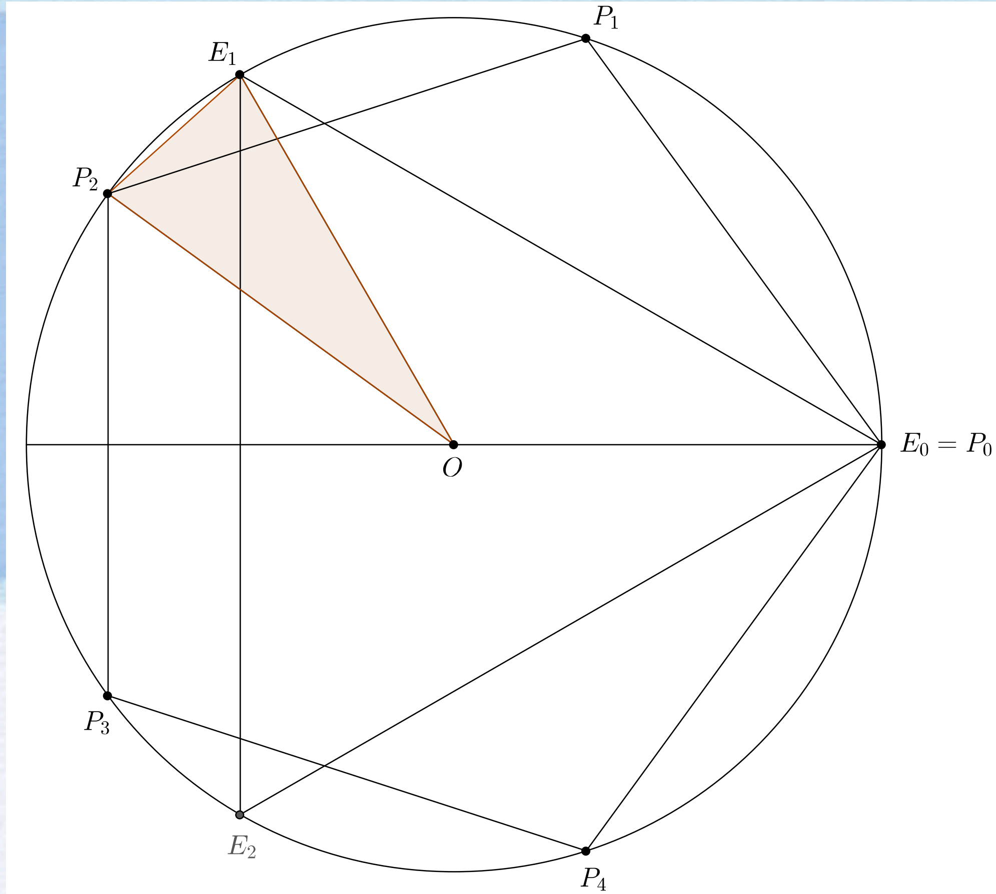
Identitat de Bézout

$$m\,p + n\,q = 1, \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$m\,\frac{2\pi}{q} + n\,\frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{p\,q}$$

15 lados

$$2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + (-1)\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{15},$$



Teorema de Gauss

Consecuéncia de 2: Si $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$...entonces el polígono de n lados se puede construir si y sólo si se pueden construir los polígonos de 2^a lados, de 3^b lados, de 5^c lados, etc.

Teorema de Gauss

Todo se reduce a estudiar si los polígonos con p^n lados, con p primo, se pueden construir o no.

Teorema de Gauss

Gauss demuestra que la respuesta es esencialmente negativa

3. El polígono de p^a se puede construir si y sólo si $p = 2$, o $a=1$

Teorema de Gauss

Gauss demuestra que la respuesta es esencialmente negativa

3. El polígono de p^a se puede construir si y sólo si $p = 2$, o $a=1$

$$n = 2^a \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots\ldots$$

Teorema de Gauss

Idea de la demostración

Teorema de Gauss

$$\frac{z^{p^a}-1}{z-1} = \frac{z^{p^{a-1}}-1}{z-1}\cdot\frac{z^{p^a}-1}{z^{p^{a-1}}-1}.$$

última sección
Disquisitiones

$$p^a - p^{a-1} = p^{a-1}(p-1) = 2^k,$$

Teorema de Gauss

El problema se reduce a saber si el polígono con p lados, con p primo, se puede construir o no.

Teorema de Gauss

4. El polígono regular con p lados, p primo, se puede construir si y sólo si

$$p = 2^{2^{a}} + 1$$

Teorema de Gauss

4. El polígono regular con p lados, p primo, se puede construir si y sólo si

$$p = 2^{2^a} + 1$$

$$n = 2^{\alpha}(2^{2^{\alpha_1}} + 1) \cdot (2^{2^{\alpha_2}} + 1) \cdots (2^{2^{\alpha_k}} + 1)$$

Teorema de Gauss

4. El polígono regular con p lados, p primo, se puede construir si y sólo si

$$p = 2^{2^{a}} + 1$$

$$n = 2^{\alpha}(2^{2^{\alpha_1}} + 1) \cdot (2^{2^{\alpha_2}} + 1) \cdots (2^{2^{\alpha_k}} + 1)$$

Demostración: Si p-1 es potència de 2 aplicamos el mismo método que 5 y 17.

Teorema de Gauss

4. El polígono regular con p lados, p primo, se puede construir si y sólo si

$$p = 2^{2^a} + 1$$

$$n = 2^{\alpha}(2^{2^{\alpha_1}} + 1) \cdot (2^{2^{\alpha_2}} + 1) \cdots (2^{2^{\alpha_k}} + 1)$$

Pero $p-1=2^k$ implica k potència de 2.

Teorema de Gauss

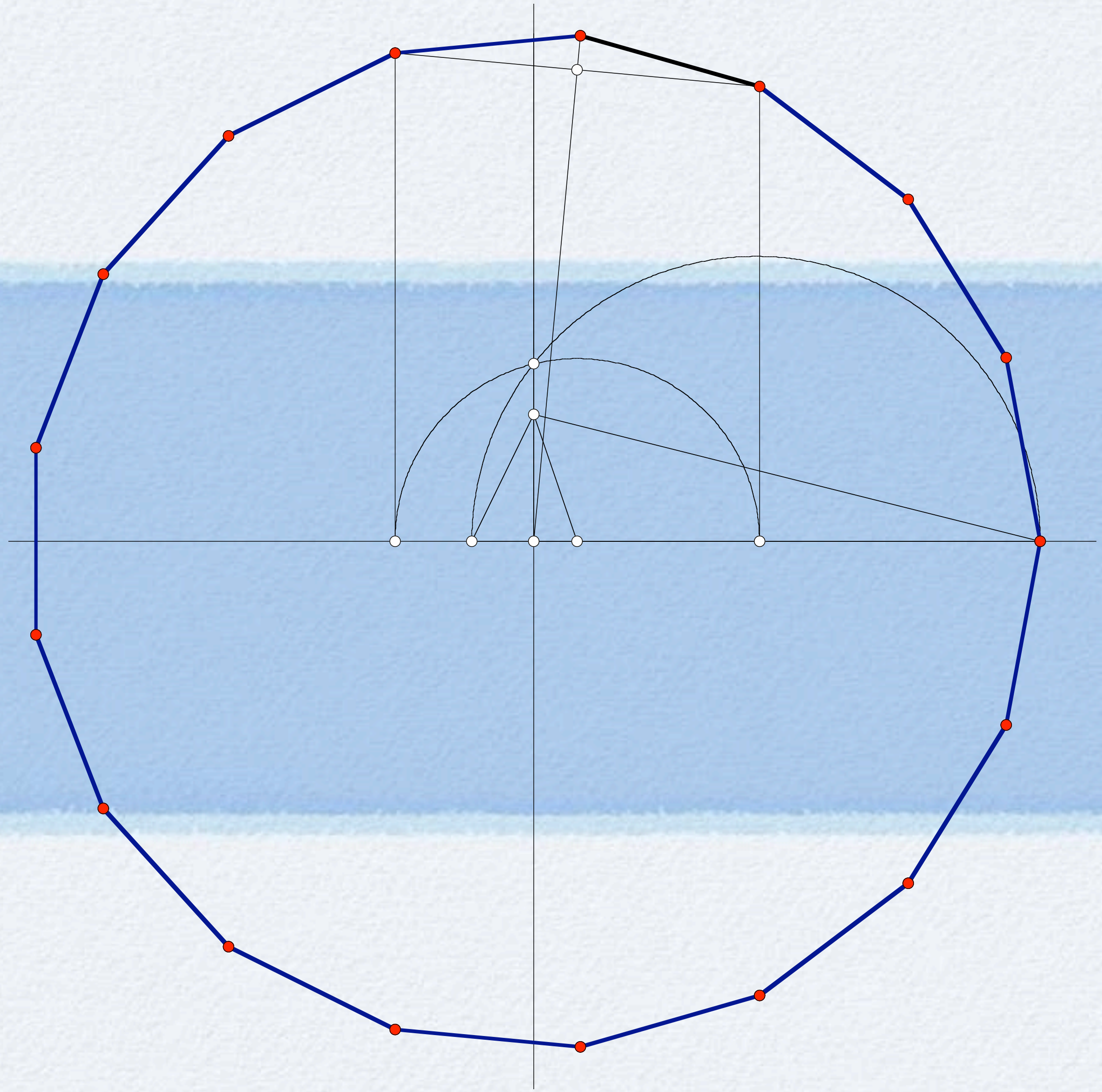
4. El polígono regular con p lados, p primo, se puede construir si y sólo si

$$p = 2^{2^a} + 1$$

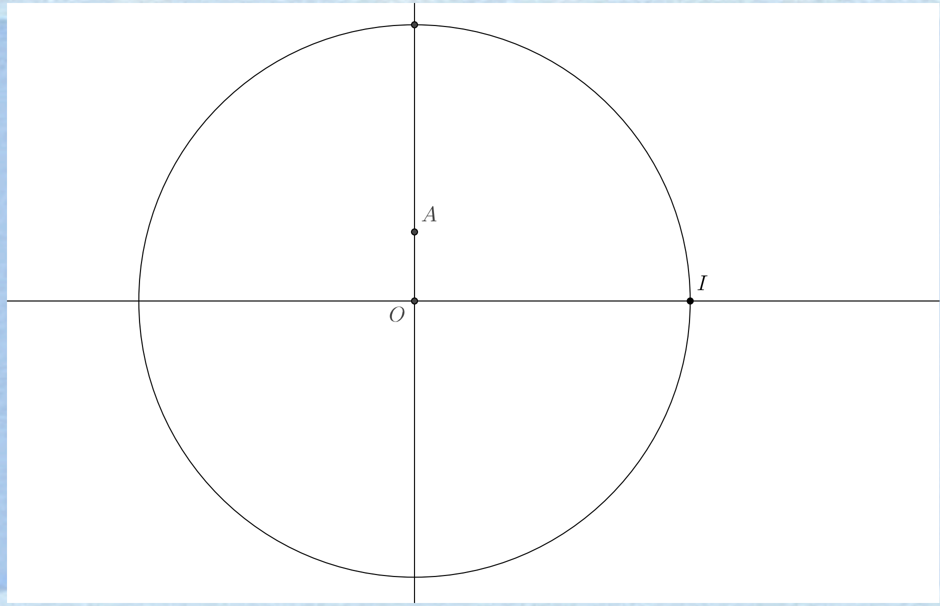
$$n = 2^{\alpha}(2^{2^{\alpha_1}} + 1) \cdot (2^{2^{\alpha_2}} + 1) \cdots (2^{2^{\alpha_k}} + 1)$$

Que si p-1 no és poténcia de 2 no se puede construir es Wantzel

CONSTRUCCIÓN DE RICHMOND 1893

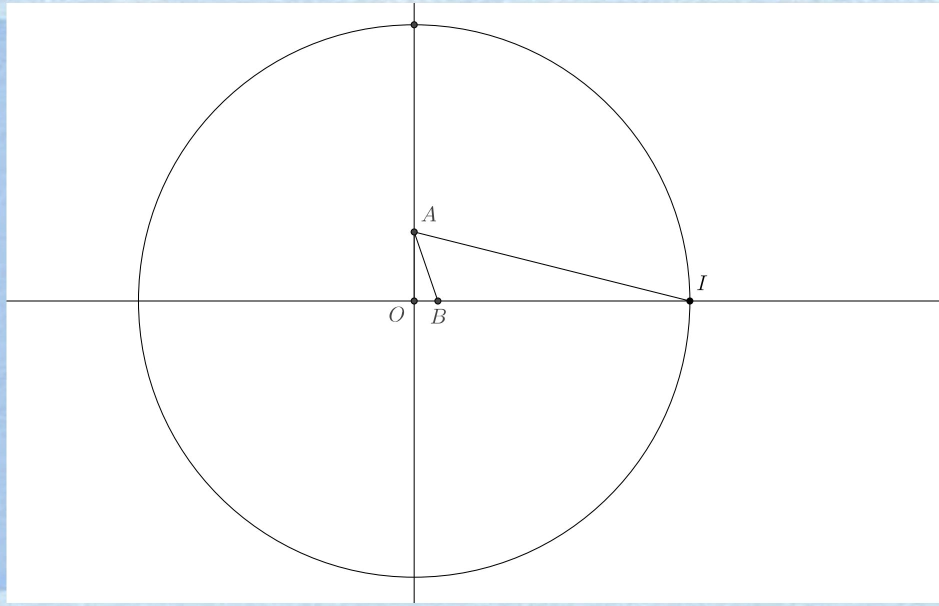


RICHMOND



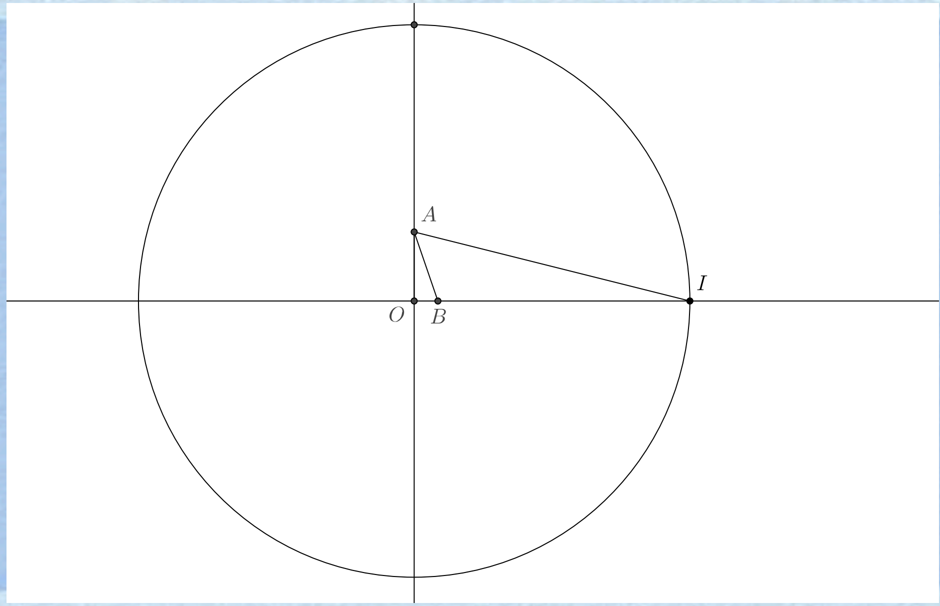
OA=1/4

RICHMOND



OAB=(1/4)OAI

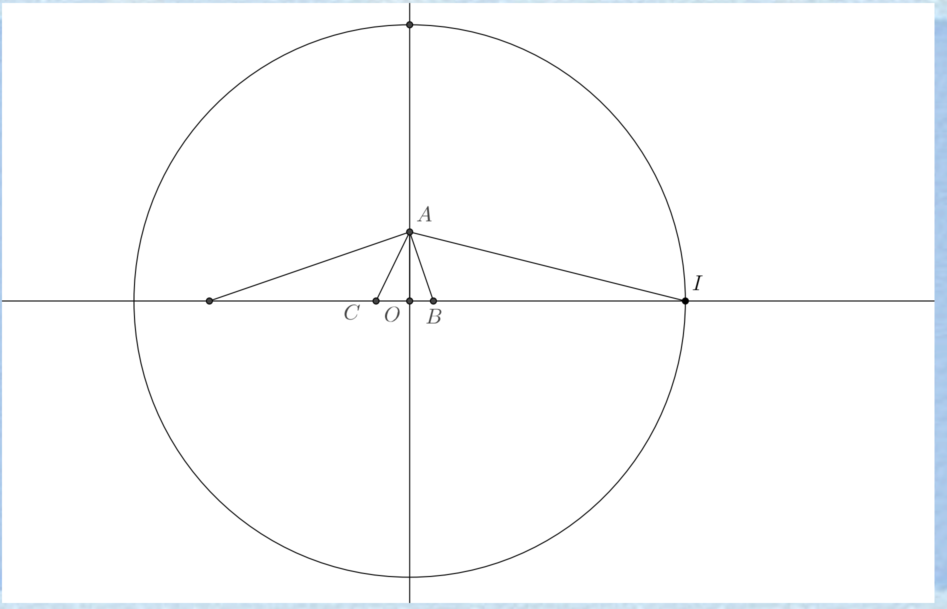
RICHMOND



OAB=(1/4)OAI

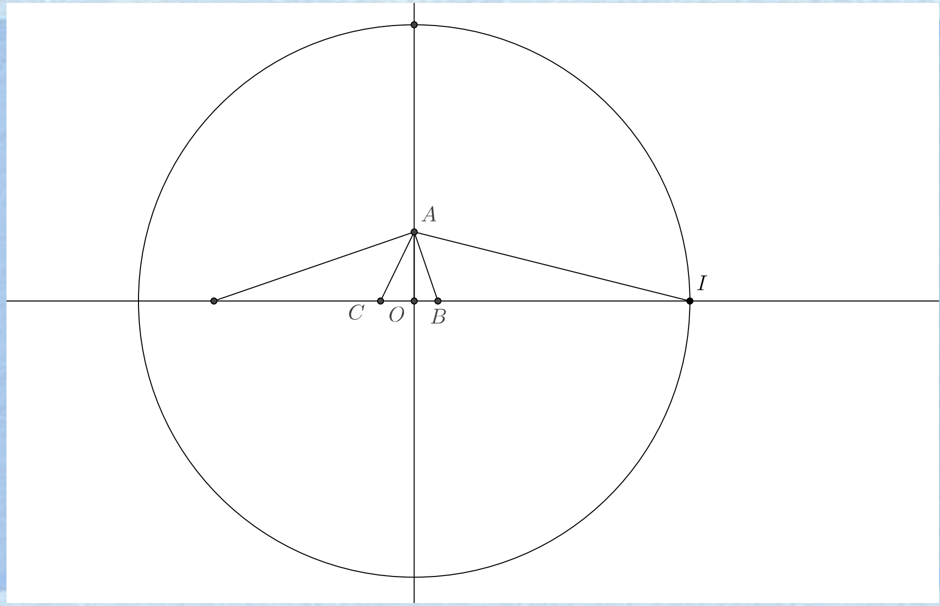
Dos bisectrices

RICHMOND



BAC=$\pi/4$

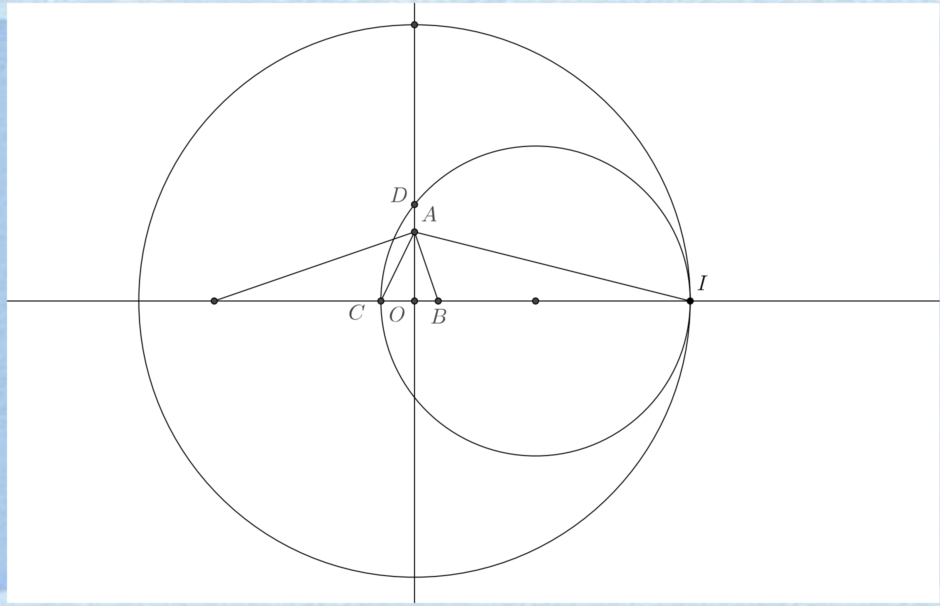
RICHMOND



BAC=$\pi/4$

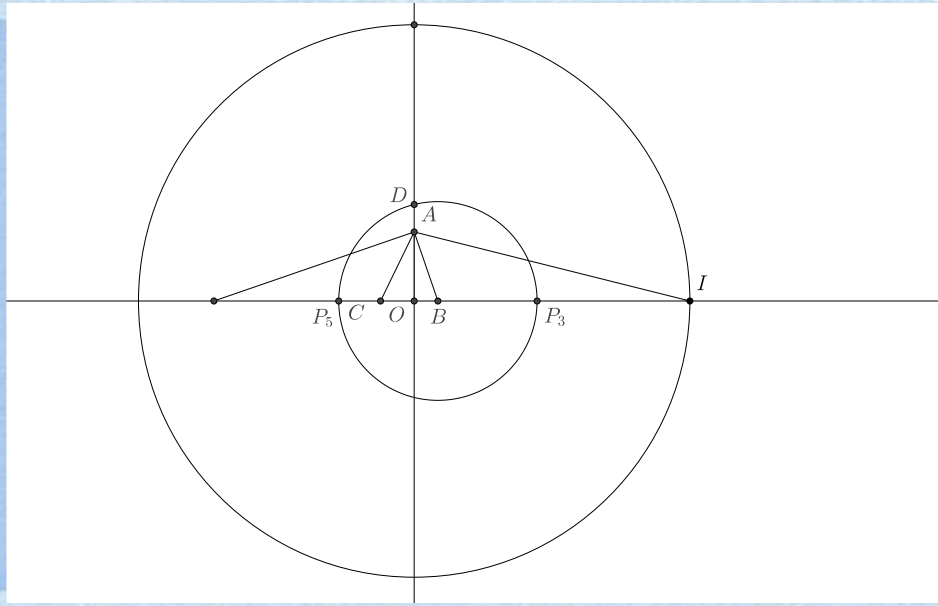
Perpendicular y bisectriz

RICHMOND



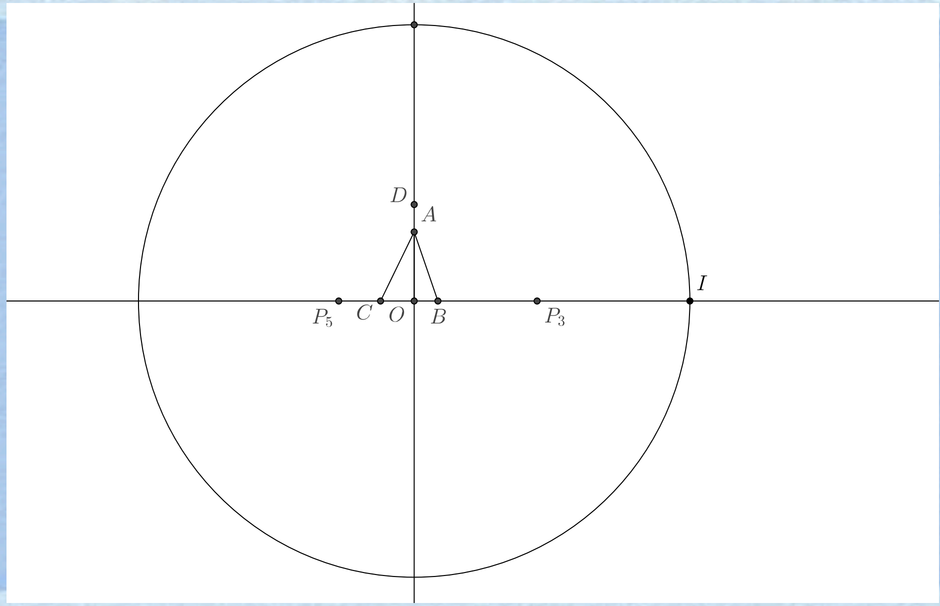
Circunferéncia de diámetro CI

RICHMOND



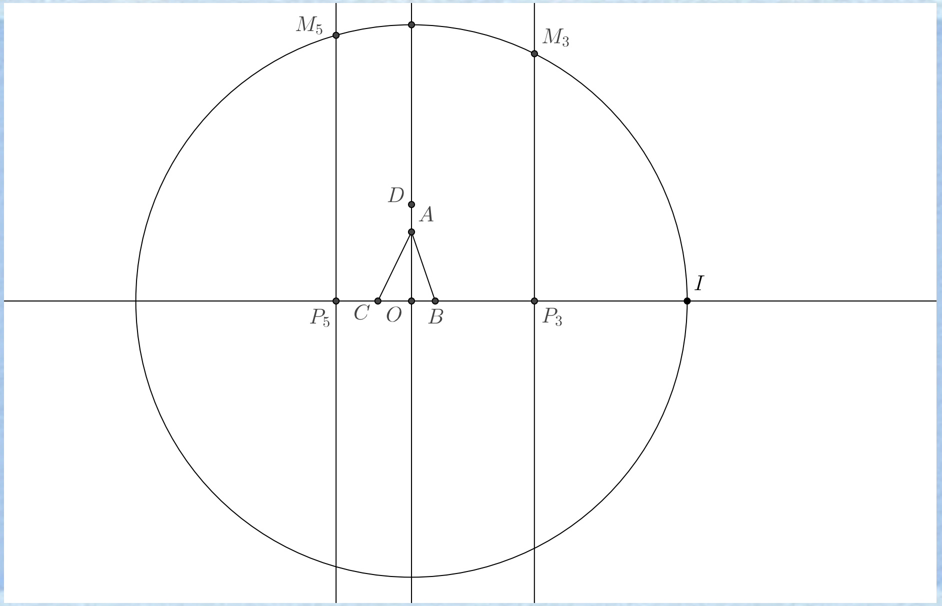
Circunferéncia de centro B por D

RICHMOND



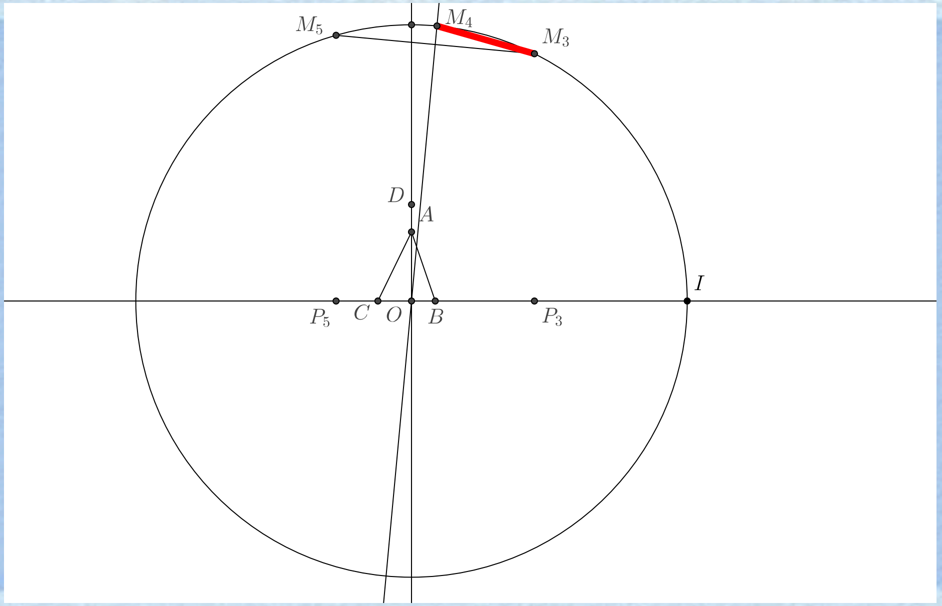
P_3; P_5

RICHMOND



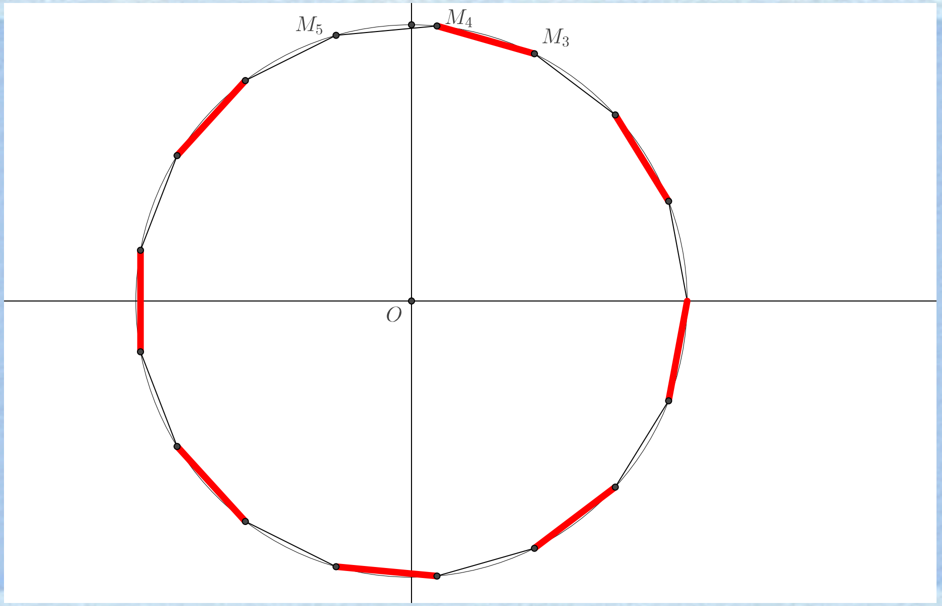
M_3; M_5

RICHMOND



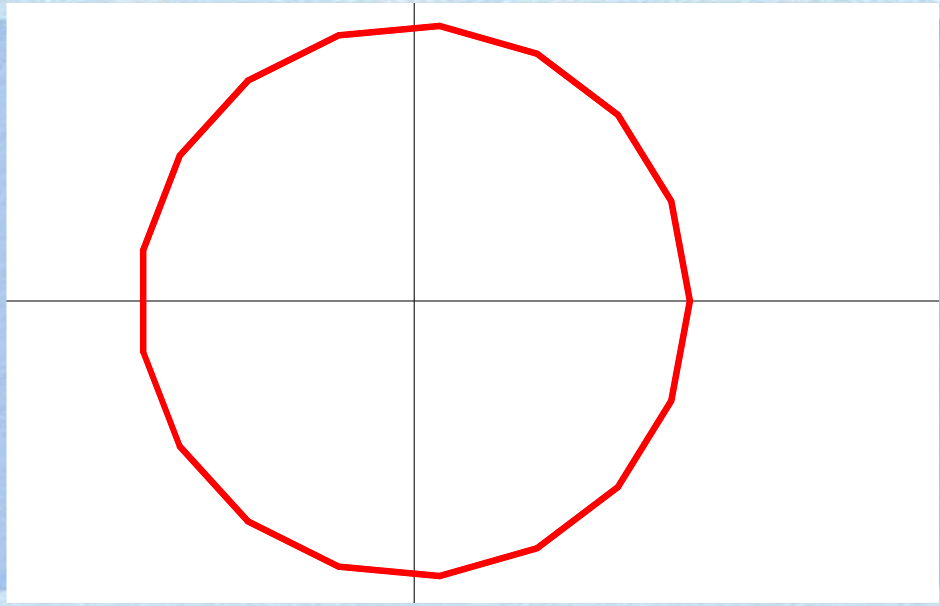
M_4

RICHMOND



17

RICHMOND



17

Gracias
por
vuestra
atención