Càlcul dels coeficients de Gauss Bonnet

per a hipersuperfícies de $\mathbb{H}^{2m}$

Agustí Reventós 2006

Sigui Q un domini de $\mathbb{H}^{2m}$ de manera que

$\dim(\partial Q) = 2m-1$.

Tot i tenir dimensió imparella a part de

Gauss Bonnet a ∂Q, potser de manera

impròpia ja que les integrals que apareixen

són les integrals de curvatura mitjà, que

són extrínseques. (depenen de la normal)

En aplicar GB a aquestes hipersuperfícies i

tenint en compte la relació fonamental

$$\langle R(X,Y)Y, X\rangle = \langle \bar{R}(X,Y)Y, X\rangle \pm \det \mathrm{II}(X,Y)$$

obtenim

$$[1] \quad c_{n-1} M_{n-1} + c_{n-3} M_{n-3} + \dots + c_1 M_1 + (\varepsilon K)^{n/2} V = \frac{1}{2} O_n \chi(Q)$$

$n = 2m$

curvatura de l'ambient $= \varepsilon K$

Com que les constants no depenen de la particular hipersuperfície que considerem, les determinarem aplicant la fórmula al cas Q = bola ($\partial Q = S^{n-1}$)

<u>Lema computacional previ</u> Suposem i, j imparells.

$$O_i \cdot O_j = O_{i+2} \cdot O_{j-2} \cdot \frac{i+1}{j-1}$$

<u>Prof.</u> $$O_r = \frac{2\pi^{(r+1)/2}}{\Gamma((r+1)/2)}$$

Com que $i+j = (i+2)+(j-2)$ no cal que ens preocupem del numerador. Tan sols cal veure

$$\frac{1}{\Gamma((i+1)/2)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{j+1}{2})} = \frac{1}{\Gamma(\frac{i+3}{2})} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{j-1}{2})} \cdot \frac{i+1}{j-1}$$

però posant $i = 2\lambda+1$ $j = 2\mu+1$ i recordant $\Gamma(r) = (r-1)!$ tenim

$$\frac{1}{\lambda!} \frac{1}{\mu!} = \frac{1}{(\lambda+1)!} \cdot \frac{1}{(\mu-1)!} \cdot \frac{2(\lambda+1)}{2\mu} \qquad //.$$

Prop $\quad C_{n-1} = \dfrac{O_n}{O_0 \cdot O_{n-1}} = \dfrac{O_n}{2\, O_{n-1}}$

Proof. Apliquem la fórmula de la pàg 1 a una esfera de radi r i fem $r=0$.

$\chi(Q) = 1.$

Denotem $\quad a_r = \dfrac{O_{n-1}}{(\varepsilon K)^{(n-1-r)/2}}$

~~Llavors~~

Llavors, per a esferes de radi ρ, sabem

$$\boxed{M_r = a_r \sin^{n-r-1}\tau \cdot \cos^r \tau} \qquad \begin{aligned} \tau &= \sqrt{\varepsilon K}\cdot \rho \\ d\tau &= \sqrt{\varepsilon K}\, d\rho \end{aligned}$$

[2] $\quad C_{n-1}\cdot a_{n-1} \cos^{n-1}\tau$ + termes en què apareix $\sin \tau$

$+ (\varepsilon K)^m V = \frac{1}{2} O_n \qquad V$ = volum esfera radi ρ

$$\rho \to 0 \;\Rightarrow\; C_{n-1} = \frac{\frac{1}{2} O_n}{a_{n-1}} = \frac{O_n}{2\cdot O_{n-1}} \; .//.$$

Proposició

$$\boxed{C_{h-2} = \frac{h}{n-h+1} \cdot C_h \cdot \quad (\varepsilon K)}$$

Demostració. ~~[illegible]~~ Derivarem respecte ρ [2] i igualarem coeficients de les expressions $\sin^l \cos^j$

~~[illegible]~~

Observem $M'_r = \dfrac{dM_r(\rho)}{d\rho} =$

[3] $= a_r (n-r-1) \sin^{(n-r-2)} \tau \cdot \cos^{r+1} \tau \cdot \sqrt{\varepsilon K} +$

$- a_r\, r \cos^{r-1} \tau \cdot \sin^{n-r} \tau \ \sqrt{\varepsilon K}$

(els exponents de sinus i cosinus sumen $n-1$)

Recordem també: $\dfrac{dV}{d\rho} = \dfrac{O_{n-1}}{(\varepsilon K)^{(n-1)/2}} \cdot \sin^{n-1}(\tau)$.

$$C_{n-1} M'_{n-1} + C_{n-3} M'_{n-3} + \dots + C_1 M'_1 + (\varepsilon K)^m V' = 0$$

Coeficient de $\sin^{n-r-2}\tau \cdot \cos^{r+1}\tau$

Aquest terme apareix en derivar M_r (pàg 4) i

també en derivar $M_{r+2} = a_{r+2} \sin^{n-r-3}\tau \cdot \cos^{r+2}\tau$

[4] $$M'_{r+2} = a_{r+2}(n-r-3)\sin^{n-r-4}\tau \cdot \cos^{r+3}\tau \sqrt{\varepsilon K} - a_{r+2}(r+2)\,\underline{\sin^{n-r-2}\tau \cdot \cos^{r+1}\tau}\,\sqrt{\varepsilon K}$$

igualant [3] i [4] tenim. (multiplicant pel respectiu c_r)

$$c_r a_r (n-r-1)\sqrt{\varepsilon K} = + a_{r+2}(r+2)\sqrt{\varepsilon K}\, c_{r+2}$$

però $$\frac{a_r}{a_{r+2}} = \frac{(\varepsilon K)^{(n-3-r)/2}}{(\varepsilon K)^{(n-1-r)/2}} = \frac{1}{\varepsilon K}$$ així

$$c_r (n-r-1) = + c_{r+2}(r+2)\cdot(\varepsilon K)$$ canviant $r \to h-2$

$$c_{h-2} = + \frac{h}{n-h+1} \cdot c_h \cdot (\varepsilon K)$$ ./.

Prop $$C_h = \binom{n-1}{h} \frac{O_n}{O_h \, O_{n-1-h}} (\varepsilon K)^{(n-1-h)/2}$$

Proof Inducció. $h = n-1$ és la pàgina (3).

Suposem cert per a h.

Calculem C_{h-2}.

$$C_{h-2} = \frac{h}{n-h+1} \cdot (\varepsilon K) \cdot \binom{n-1}{h} \frac{O_n}{O_h \, O_{n-1-h}} (\varepsilon K)^{(n-1-h)/2}$$

$$= \frac{h}{n-h+1} \binom{n-1}{h} (\varepsilon K)^{(n+1-h)/2} \cdot \frac{O_n}{O_{h-2} \cdot O_{n+1-h}} \cdot \frac{h-\ldots}{n-\ldots}$$

lema pàg 2

$$= \binom{n-1}{h-2} \frac{O_n}{O_{h-2} \, O_{n+1-h}} \cdot (\varepsilon K)^{(n+1-h)/2} \quad //$$

Càlcul dels coeficients de Gauss Bonnet per a hipersuperfícies de $\mathbb{H}^{2m+1}$

Sigui Q un domini de $\mathbb{H}^{2m+1}$ de manera que $\dim(\partial Q) = 2m$. Posem $n = 2m+1$

Sabem

$$c_{n-1} M_{n-1} + c_{n-3} M_{n-3} + \dots + c_2 M_2 + c_0 F = \tfrac{1}{2} O_n \chi(Q)$$

Ho apliquem a esferes (posem $r = 2k$ a M_r pàg 3)

$$[5] \qquad \sum_k^m c_{2k}\, a_{2k} \sin^{2m-2k}\tau \cdot \cos^{2k}\tau = \frac{1}{2} O_n$$

(recordem F = àrea esfera $= \dfrac{O_{n-1}}{(2k)^{(n-1)/2}} \sin^{n-1}(\tau)$.)

Dividim [5] per $\frac{1}{2} O_n$ per tenir $1 = (\cos^2\tau + \sin^2\tau)^m$ a la dreta. Llavors

$$\frac{c_{2k}\, a_{2k}}{\frac{1}{2} O_n} = \text{coeficient corresponent a } (\cos^2\tau + \sin^2\tau)^m = 1$$

$$= \binom{m}{k}$$

$$c_{2k} = \binom{m}{k} \frac{O_n}{2 \cdot a_{2k}} =$$

$$C_{2k} = \binom{m}{k} \frac{O_n}{2 \cdot O_{n-1}} (\varepsilon K)^{(2m-2k)/2}$$

$$\boxed{C_{2k} = \binom{m}{k} \frac{O_n}{2 \cdot O_{n-1}} (\varepsilon K)^{m-k}}$$

Versió agradable dels coeficients de A.B.

(càlcul directe)

$$\text{Però} \quad \binom{m}{k} = \binom{2m}{2k} \cdot \frac{2\, O_{2m}}{O_{2k} \cdot O_{2m-2k}}$$

En el nostre cas $n = 2m+1$

$$C_{2k} = \binom{2m}{2k} \frac{\cancel{2\, O_{2m}}}{O_{2k} O_{2m-2k}} \cdot \frac{O_{2m+1}}{\cancel{2\, O_{2m}}} (\varepsilon K)^{m-k}$$

$$\boxed{C_h = \binom{n-1}{h} \frac{O_n}{O_h\, O_{n-1-h}} (\varepsilon K)^{(n-1-h)/2}}$$ versió semblant.

Resum, $\dim(\partial Q) = n-1$ hipersuperfície a $\mathbb{X}^n_{\varepsilon K}$

n parell $\quad c_{n-1} M_{n-1} + c_{n-3} M_{n-3} + \dots + c_1 M_1 + (\varepsilon K)^{n/2} V = \frac{1}{2} O_n \chi(Q)$

n imparell $\quad c_{n-1} M_{n-1} + c_{n-3} M_{n-3} + \dots + c_2 M_2 + c_0 F = \frac{1}{2} O_n \chi(Q)$

and $\quad c_h = \binom{n-1}{h} \dfrac{O_n}{O_h \, O_{n-1-h}} (\varepsilon K)^{(n-1-h)/2}$

7. desembre. 2006