Geometria Inversiva

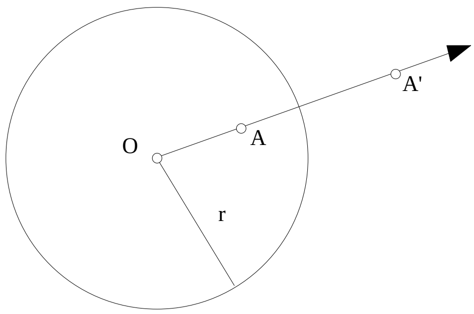
Agustí Reventós Tarrida

6 febrer 2002

Inversions: una eina poderosa

Definició. *Sigui $\mathcal{C}$ una circumferència de centre O i radi r. Una inversió respecte $\mathcal{C}$ és la transformació del pla que envia cada punt A al punt A' de la semirecta OA tal que*

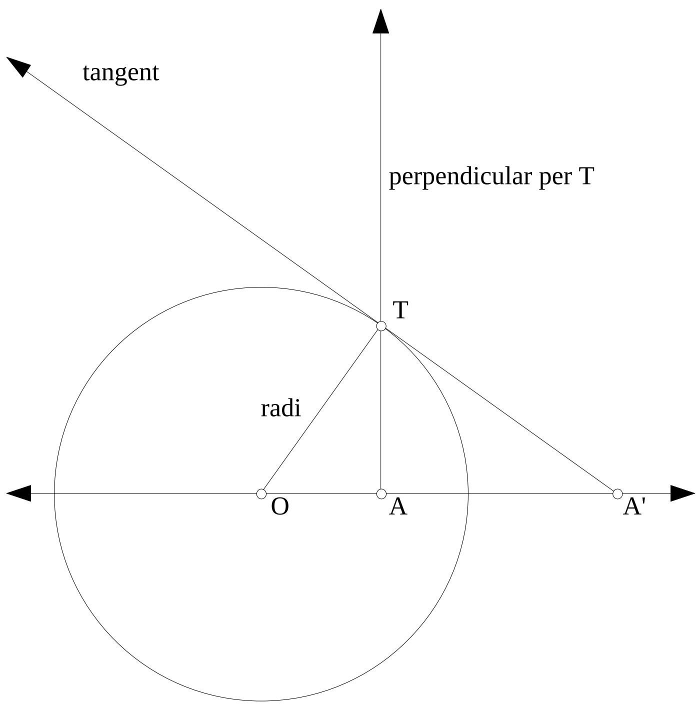
$$OA \cdot OA' = r^2.$$



Observem que tot punt interior a $\mathcal{C}$ té per imatge un punt exterior a $\mathcal{C}$ i recíprocament. Els punts de $\mathcal{C}$ són fixos.

Construcció geomètrica de l'inversió

Apliquem el teorema del catet al triangle rect-angle $\triangle OTA'$.

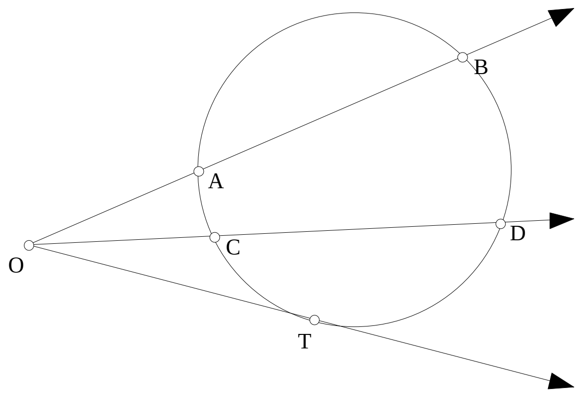


$$\frac{OA}{r} = \frac{r}{OA'}.$$

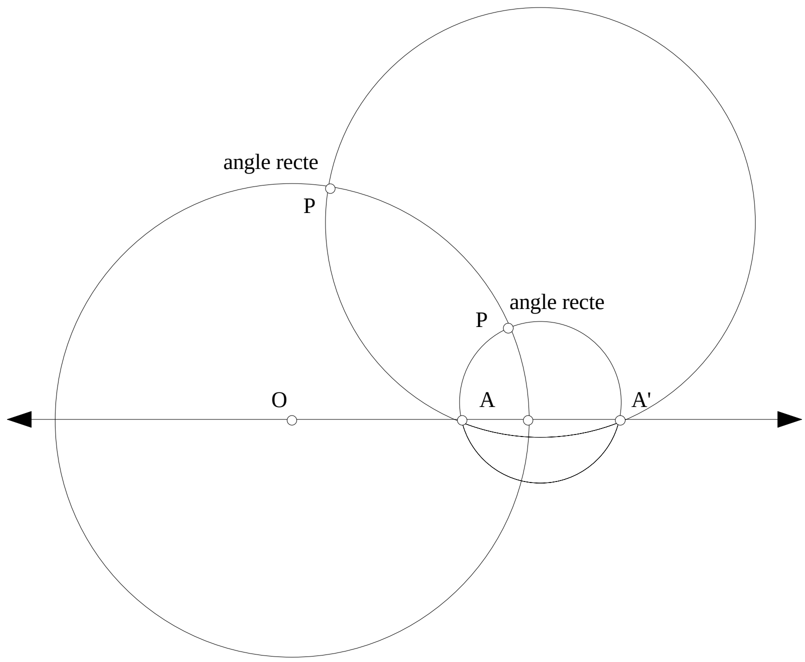
Propietats

I. *Qualsevol circumferència per A i A' és ortogonal a la circumferència d'inversió.*

Conseqüència de la potència.
$OA \cdot OB = OC \cdot OD = OT^2$.



En el nostre cas $OA \cdot OA' = OP^2 = OT^2 \Longrightarrow$ OP és tangent

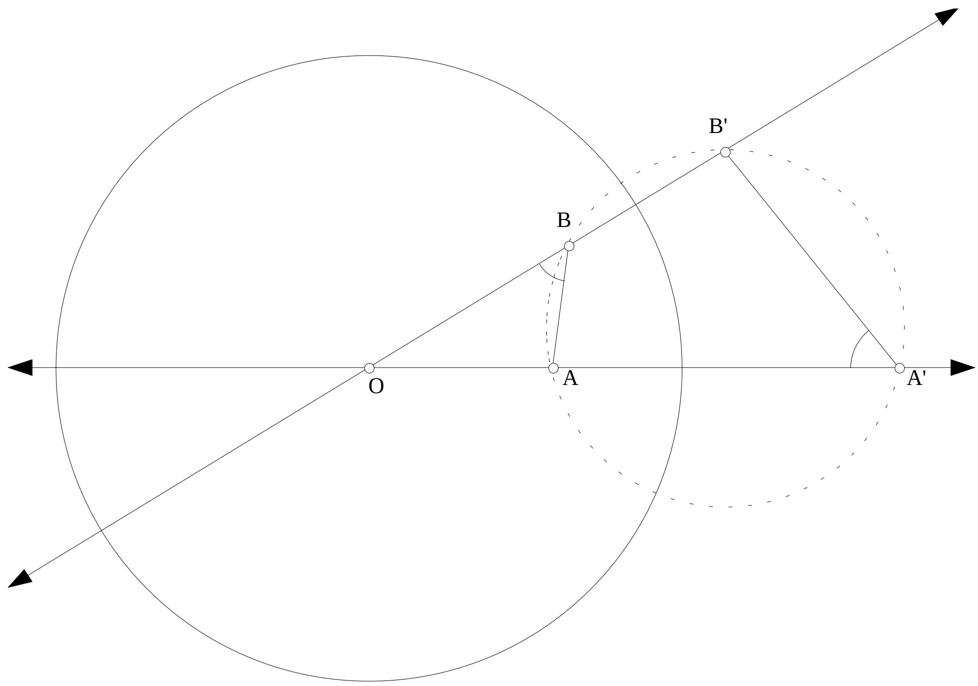


II. Idempotent. *$\varphi^2 = Id.$*

III. Concíclics. *Siguin A' i B' punts inversos respectivament de A i B. Llavors*

$$\angle OAB \equiv \angle OB'A' \quad \text{i} \quad \angle OBA \equiv \angle OA'B'.$$

En particular els punts A, B, A' i B' són concíclics.



En efecte

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' \Longleftrightarrow \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}.$$

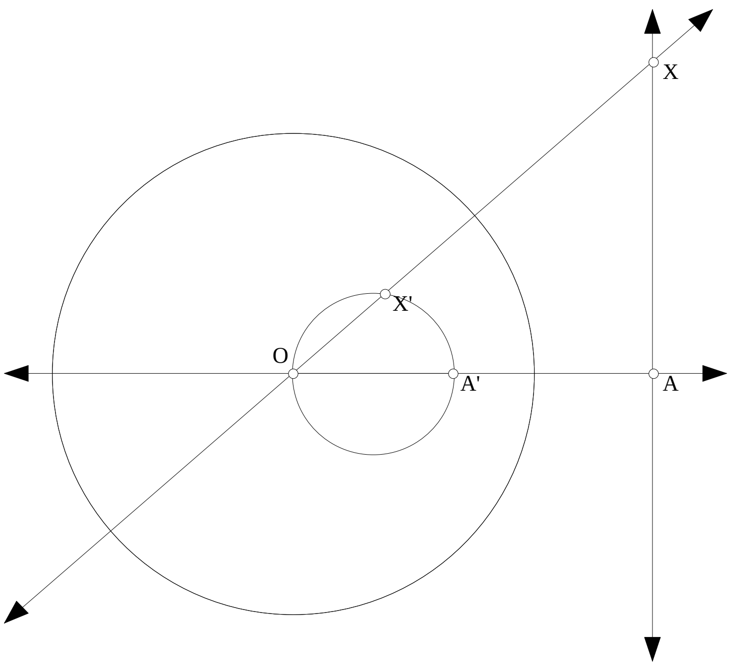
Per tant els triangles $\triangle OAB$ i $\triangle OB'A'$ són semblants.

IV. *φ porta rectes i/o circumferències a rectes i/o circumferències.*

• Recta pel centre $\longleftrightarrow$ Recta pel centre.
• Recta no pel centre $\longleftrightarrow$ Circumferència pel centre.
• Circumferència no pel centre $\longleftrightarrow$ Circumferència no pel centre.

Rectes a circumferències

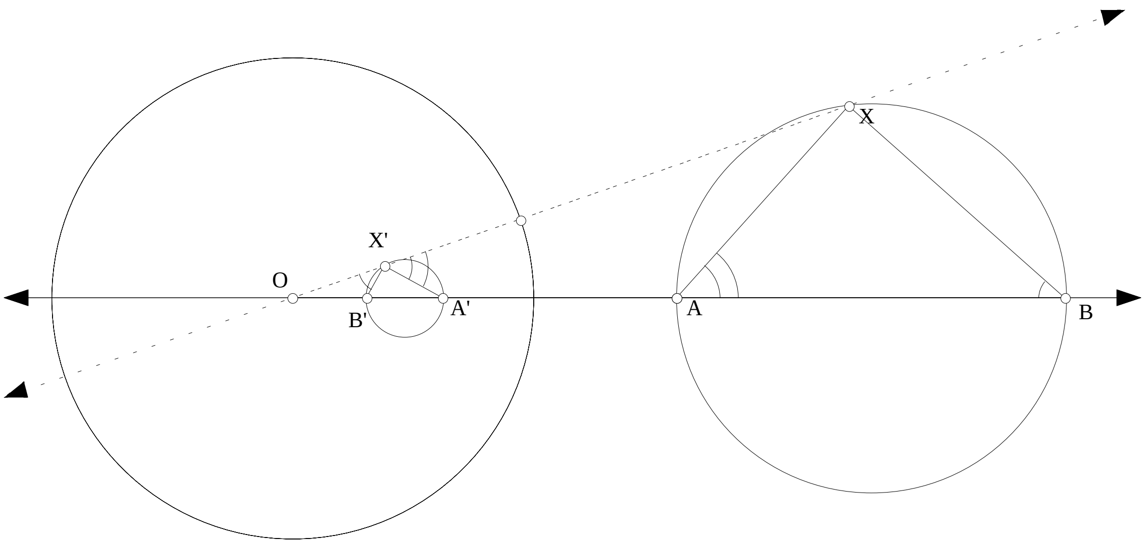
• Sigui s una recta que no passi pel centre d'inversió i sigui A el peu de O a s. Com que $\angle OAX = \angle OX'A' =$ recte, X' pertany a la circumferència de diàmetre OA'.



Circumferències a circumferències

• Considerem una circumferència que no passi pel centre d'inversió. Siguin A', B' els inversos del diàmetre A, B.

Tenim $\angle XBA = \angle OX'B'$ i $\angle XAB = \angle A'X'X$. Com que $\angle AXB$ és recte, ha de ser $\angle A'X'B'$ recte, i X' pertany a la circumferència de diàmetre $A'B'$.



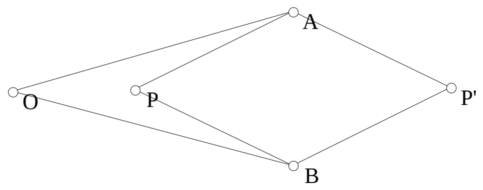
• El centre no va al centre.

V. *φ conserva angles.*

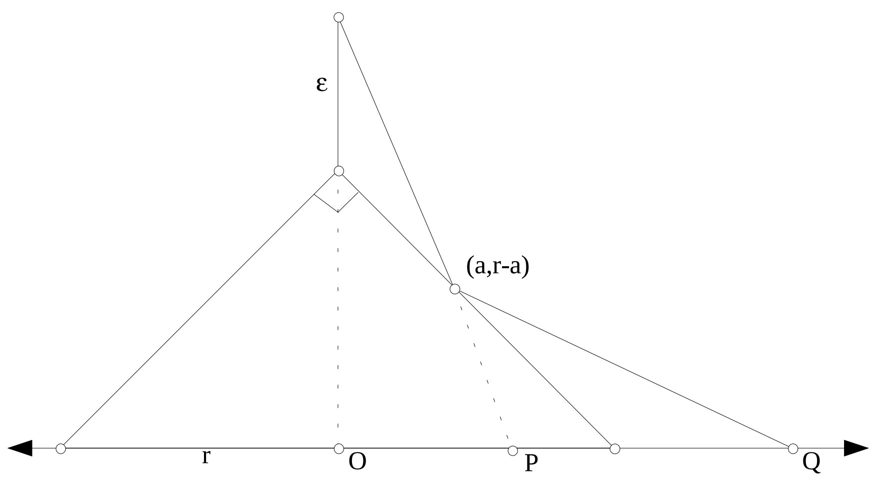
VI. *φ conserva la raó doble.* La *raó doble generalitzada* és

$$[A, B, C, D] = \frac{AC/BC}{AD/BD}.$$

Inversor de Peucellier

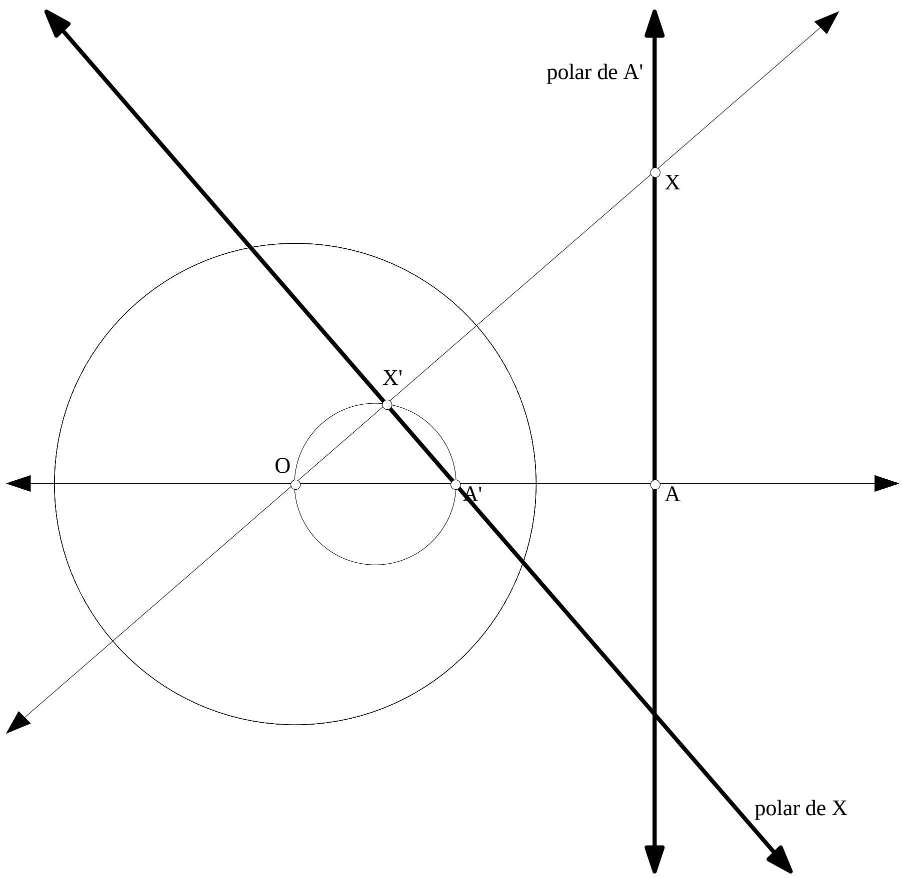


El con com inversor aproximat



$$OP \cdot OQ \longrightarrow r^2.$$

Inversions i geometria projectiva



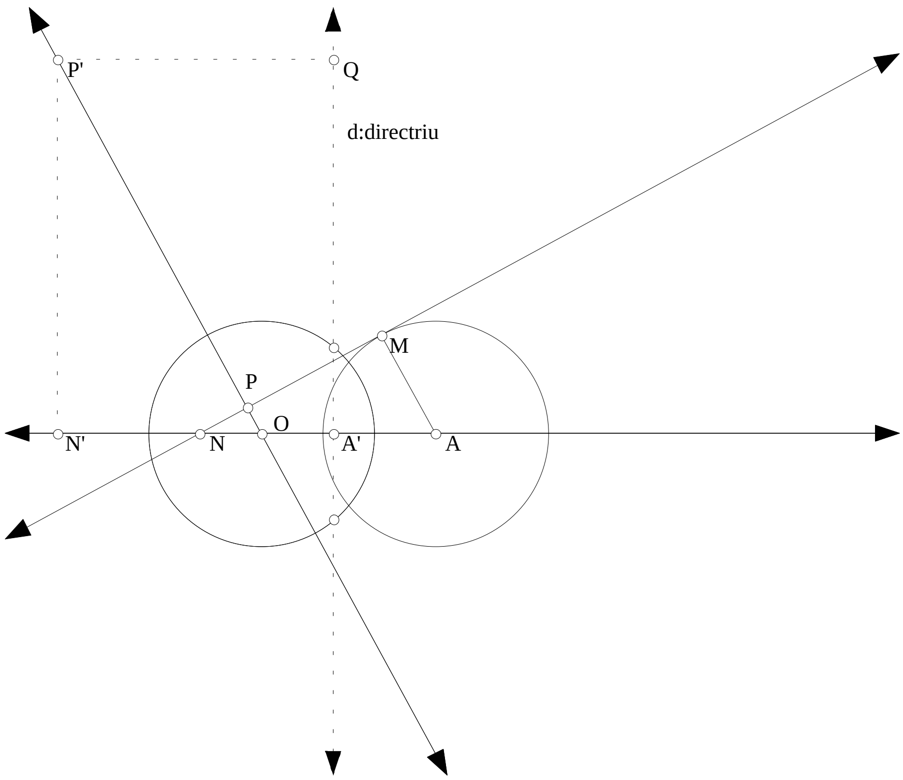
La polar de A' és la perpendicular a la recta OA' pel punt A invers de A'.

El dibuix diu que *la polar de tot punt X de la polar de A' passa per A'*.

La frase els punts P estan sobre la recta r, es transforma en les rectes polars de P es tallen en el punt pol de r.

Definició *Una cònica és el lloc geomètric dels pols de les tangents a una circumferència.*

Es diu simplement que una cònica és la polar recíproca d'una circumferència.

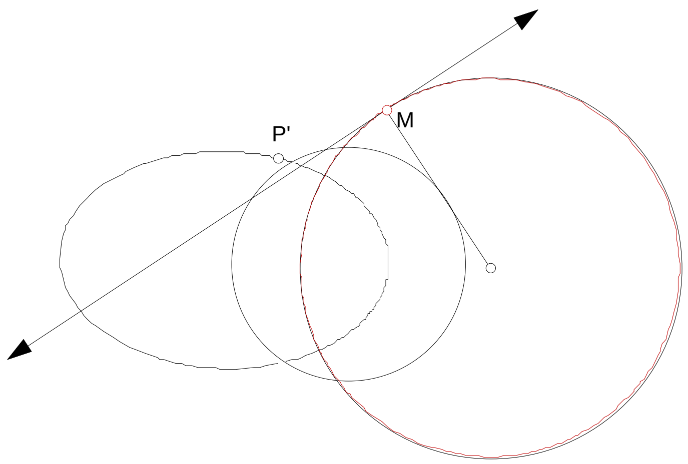


Per cada punt M d'una circumferència tracem la tangent i considerem el seu pol P' . Quan M és mou a la circumferència el punt P' descriu una cònica.

En efecte, es demostra que

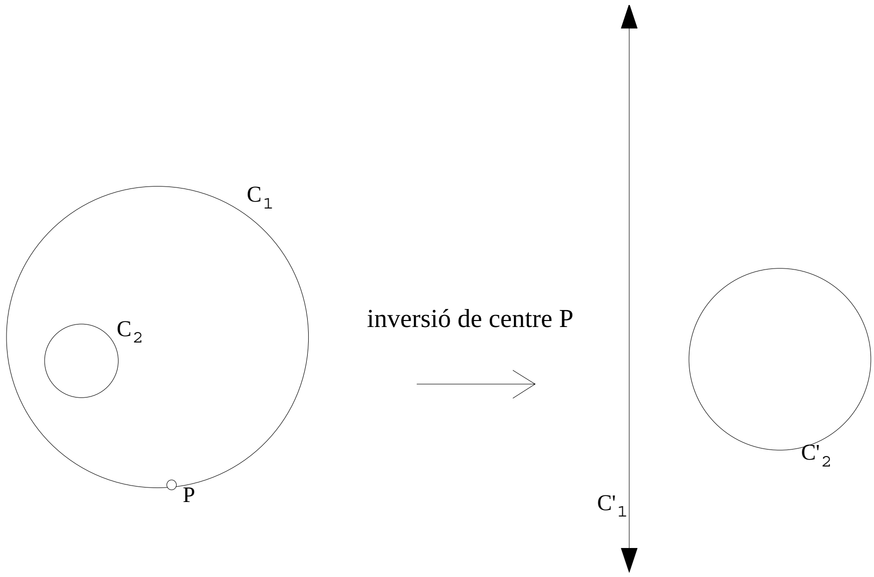
$$\frac{P'O}{P'Q} = \frac{OA}{AM},$$

però aquest quocient és constant. Es diu excentricitat i tenim la definició clàssica de cònica. La polar d de A és la directriu, i el centre O el focus.

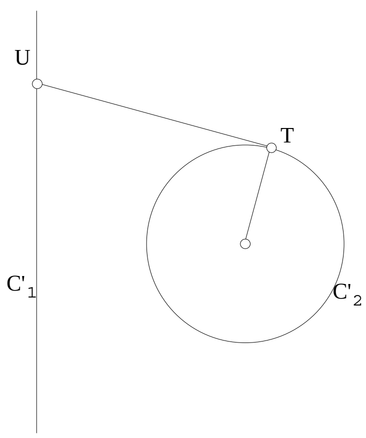


Concèntriques

Siguin $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$ dues circumferències no concèntriques. Les transformem primerament en recta i circumferència.



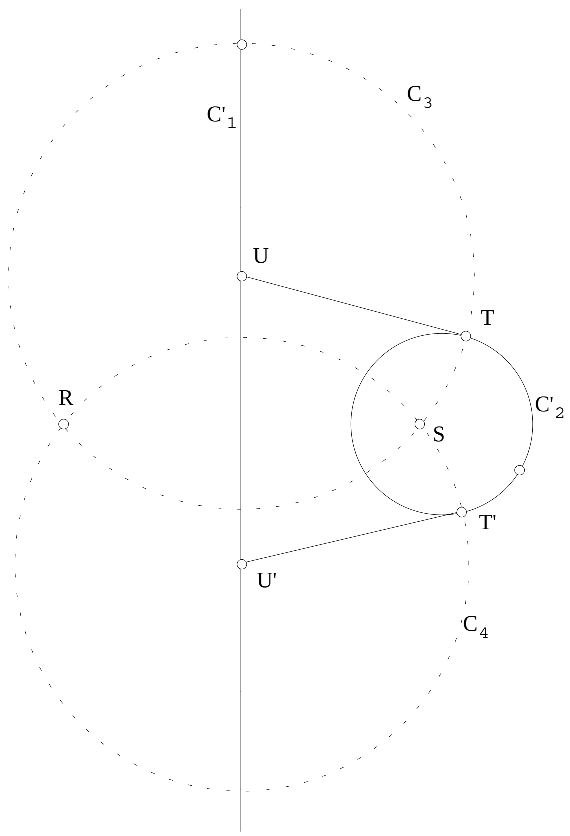
Dibuixem a continuació dues circumferències $\mathcal{C}_3$ (de centre U i radi UT) i $\mathcal{C}_4$ (de centre U' i radi $U'T'$) ortogonals a la vegada a $\mathcal{C}'_1$ i $\mathcal{C}'_2$.



Aquestes circumferències es tallen en dos punts R i S.

Qualsevol inversió de centre R transforma $\mathcal{C}'_1$ i $\mathcal{C}'_2$ en dues circumferències concèntriques.

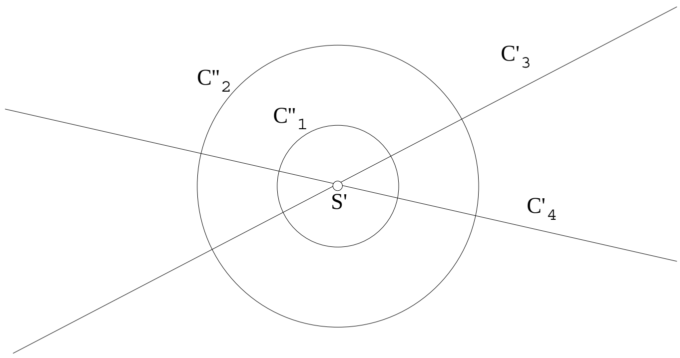
En efecte,



• $\mathcal{C}_3$ i $\mathcal{C}_4$ es transformen en rectes $\mathcal{C}'_3$ i $\mathcal{C}'_4$ que es tallen en el punt S' imatge de S.

• La recta $\mathcal{C}'_1$ es transforma en una circumferència $\mathcal{C}''_1$ ortogonal a $\mathcal{C}'_3$ i $\mathcal{C}'_4$.

• $\mathcal{C}'_2$ es transforma en una circumferència $\mathcal{C}''_2$ ortogonal a $\mathcal{C}'_3$ i $\mathcal{C}'_4$.



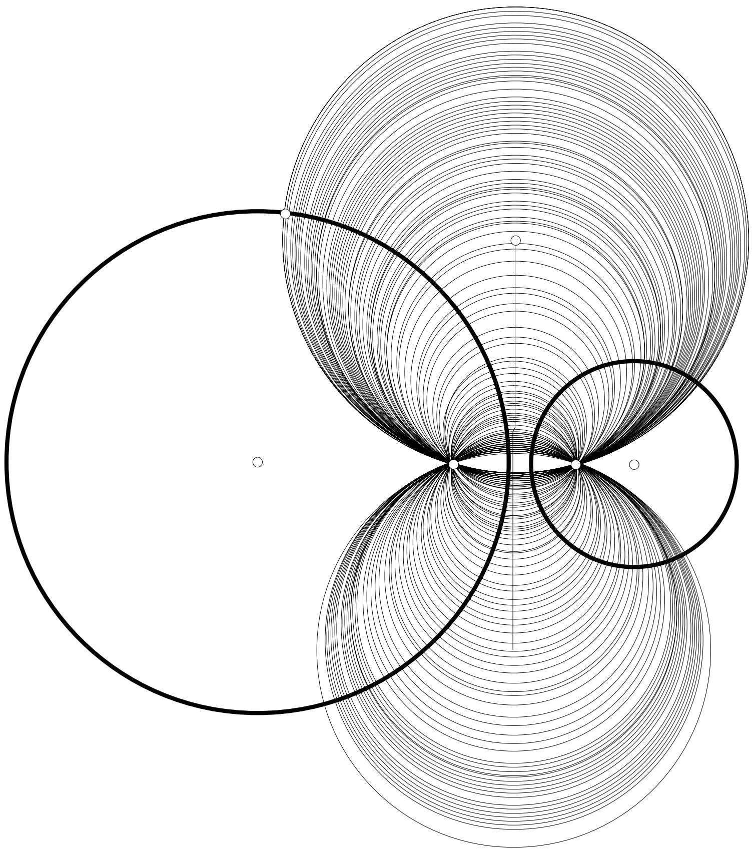
Per tant, el punt S' d'intersecció de $\mathcal{C}'_3$ i $\mathcal{C}'_4$ és el centre comú a $\mathcal{C}''_1$ i $\mathcal{C}''_2$.

Punts màgics

Teorema *Totes les circumferències ortogonals a dues circumferències donades tenen dos punts en comú.*

A partir d'aquest resultat podem simplificar l'anterior construcció tot dient:

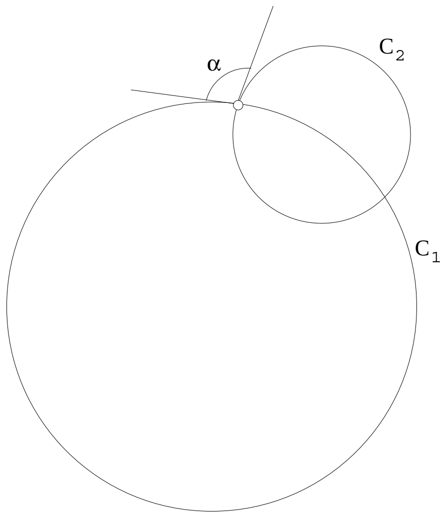
La inversió en un dels seus punts màgics posa dues circumferències qualssevol, concèntriques.



Producte inversiu de circumferències

Si $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ es tallen definim

$$\boxed{\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \cos\alpha}$$



Si

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : (x-a)^2 + (y-b)^2 &= R^2 \\ \mathcal{C}_2 : (x-c)^2 + (y-d)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

calculem el cosinus i obtenim

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \frac{1}{rR}\left(ac+bd-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2-R^2-r^2)\right)$$

Quan $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ es tallen és clar que $\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$ és invariant per inversions, ja que els angles es conserven.

Miracle *El número $\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$ abans definit és invariant per inversions, tant si les circumferències es tallen com si no es tallen. Es diu que és el producte inversiu de $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$.*

Proposició. *Si $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ són dues circumferències concèntriques de radis R i r, tenim*

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \frac{1}{2}(\frac{R}{r} + \frac{r}{R}).$$

Observem finalment que

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 < 1 &\iff \text{es tallen} \\
\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 &\iff \text{són tangents} \\
\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 > 1 &\iff \text{no es tallen}
\end{aligned}$$

Distància inversiva entre circumferències

La distància entre cercles concèntrics de radis $r \leq R$ es defineix com

$$\boxed{\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \ln \frac{R}{r}}$$

Si tenim tres circumferències concèntriques amb $s \leq r \leq R$,

$$\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) + \delta(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) = \ln \frac{R}{r} + \ln \frac{r}{s} = \ln \frac{R}{s} = \delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3)$$

que és una propietat que s'ha d'esperar de qualsevol funció distància sobre "punts alineats".

Definició *Si $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ són dues circumferències arbitraries es defineix la seva distància per*

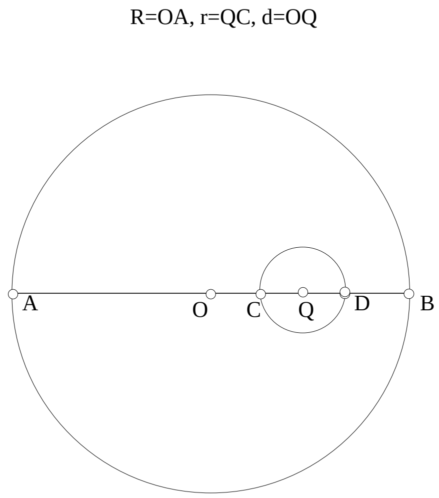
$$\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \delta(\varphi\mathcal{C}_1, \varphi\mathcal{C}_2)$$

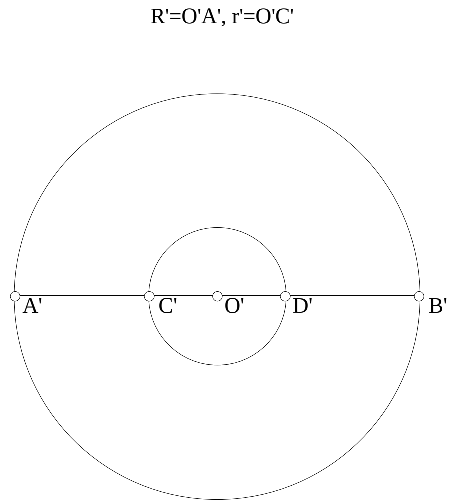
on φ és una inversió que les posa concèntriques.

- No depèn de la inversió.

Relació distància-producte

Suposem $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$. Volem calcular la distància inversiva δ entre $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ sense necessitat de posar-les concèntriques.





Sigui $R = OA, r = QC, \rho = OQ$. Tenim

$$(A, B, C, D) = \frac{AC/BC}{AD/BD} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

on

$$\gamma = \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr}$$

Les posem ara concèntriques. Els punts A, B, C, D van als punts A', B', C', D'. Els radis són $R' = O'A', r' = O'C'$ i la distància inversiva és

$$\delta = \ln \frac{R'}{r'}$$

Però la raó doble és invariant

$$(A', B', C', D') = \frac{A'C'/B'C'}{A'D'/B'D'} = \frac{\cosh\delta - 1}{\cosh\delta + 1}$$

Igualant obtenim $\cosh\delta = \gamma$, és a dir

$$\boxed{\cosh\delta = \tfrac{R^2+r^2-\rho^2}{2Rr}.}$$

Calculem explícitament ρ en funció dels centres i substituïm. Obtenim exactament l'expressió del producte inversiu (transp. 12).

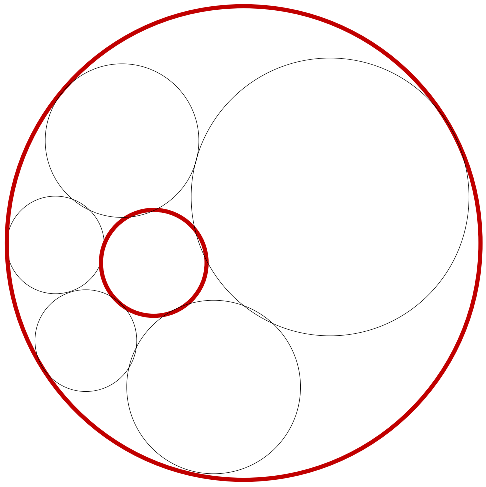
Teorema *Sigui δ la distància inversiva entre $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$. Llavors*

$$\boxed{\cosh\delta = \mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2}$$

Porisme de Steiner

Donats dos cercles no concèntrics, un interior a l'altra, es vol saber si hi ha una cadena de cercles cadascun d'ells tangent a l'anterior i al posterior i tangents tots ells als dos cercles donats.

Aquest problema o bé no té solució, o bé té infinites solucions (porisme).



Usant inversions podem demostrar fàcilment el següent resultat

Teorema *Dos cercles $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ admeten una cadena de cercles tangents si i només si*

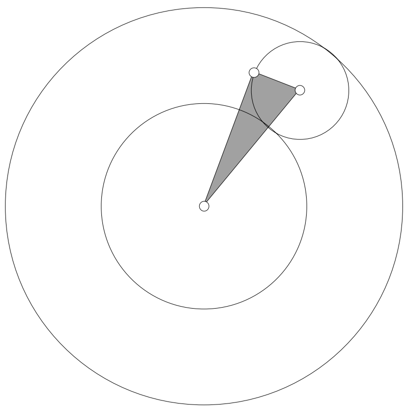
$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 + 2\tan^2\frac{\pi}{n}$$

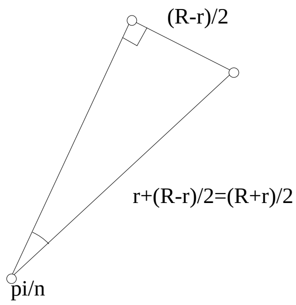
per a un cert n, que és el nombre de cercles de la cadena.

Cas concèntric

Lema *Dos cercles concèntrics de radis R i r admeten una cadena de n cercles tangents si i només si*

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{R-r}{R+r}$$





Demostració del teorema.

Sigui φ una inversió que posa les dues circumferències donades concèntriques. Tenim

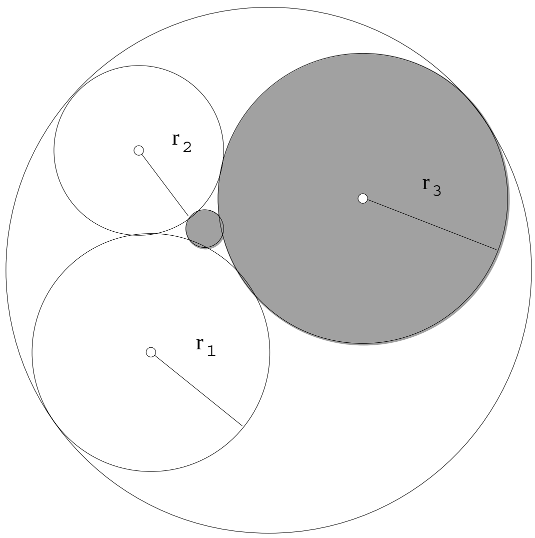
$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \varphi\mathcal{C}_1 * \varphi\mathcal{C}_2 = \frac{1}{2}(\frac{r}{R} + \frac{R}{r})$$

Substituint el valor obtingut en el lema per a r/R obtenim

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 + \tan^2\frac{\pi}{n}$$

Steiner $n = 3$

Un resultat molt interessant de Descartes, 1643, fa referència als anomenats posteriorment cercles de Soddy, i que representa un cas particular de Steiner amb $n = 3$.



Si r_i, $i = 1, 2, 3$ són els radis dels tres cercles tangents denotem

$$k_i = \frac{1}{r_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

les seves curvatures. Denotem per k_4 o bé l'invers del radi del cercle tangent interior o bé menys l'invers del radi del cercle tangent exterior. Llavors es compleix

$$\boxed{2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2}$$

• Observem però que les inversions no conserven les curvatures.

Four circles to the kissing come

the smaller are the benter

the bend is just the inverse of

the distance from the center

though their intrigue left Euclid dumb

there's now no need for rule of thumb

since zero bend's a dead straight line

and concave bends have minus sign

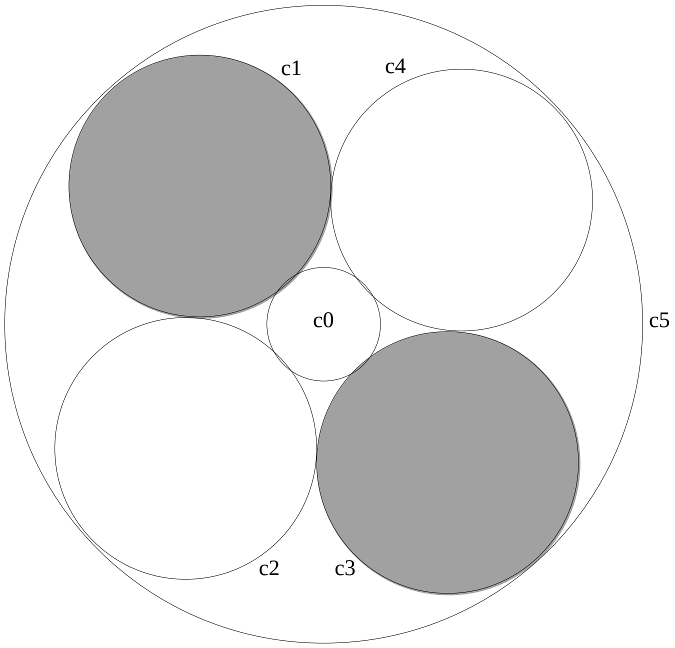
the sum of the squares of all four bends

is half the square of their sum.

(Soddy, 1936)

Steiner n=4

És interessant el cas $n = 4$ ja que la configuració que apareix és transitiva.



Una inversió que posi $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_3$ concèntrics transforma els demés cercles en tangents interiors comuns.

$$\begin{aligned}\delta &= d(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_5) = d(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3) \\ &= d(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4) = 2\ln\tan(\frac{3\pi}{8}) = 2\ln(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Taula resum

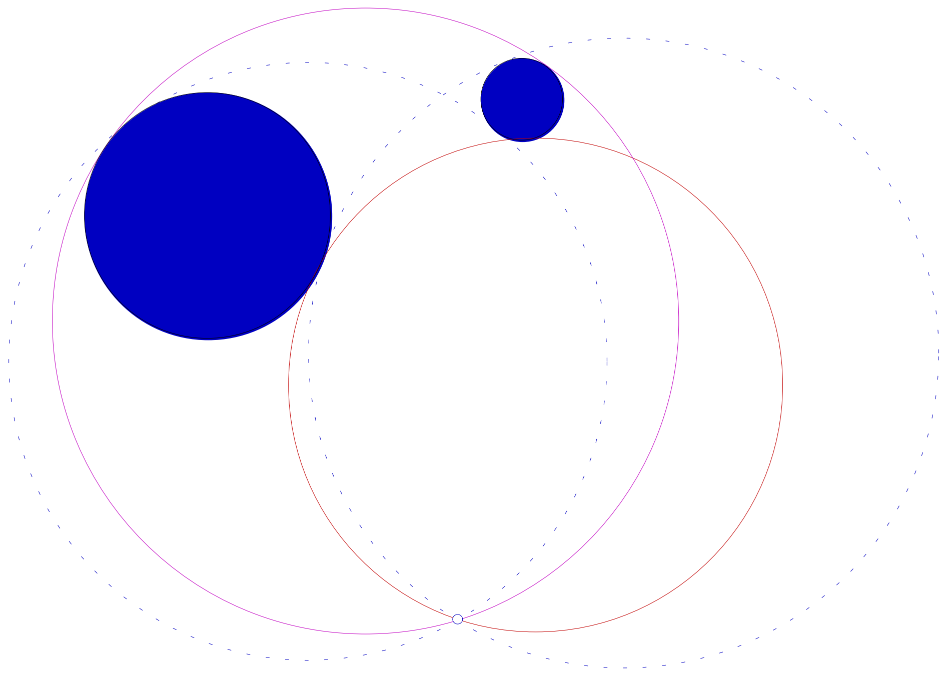
$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \cosh\delta$$

Concèntriques	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \frac{1}{2}(\frac{R}{r} + \frac{r}{R})$
Steiner	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 + 2\tan^2\frac{\pi}{n}$
Steiner n=3	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 7, \quad \cosh\frac{\delta}{2} = 2$
Steiner n=4	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 3, \quad \cosh\frac{\delta}{2} = \sqrt{2}$
Incercle, Cir	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 + \frac{r}{2R}, \ \sinh\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{R}}$

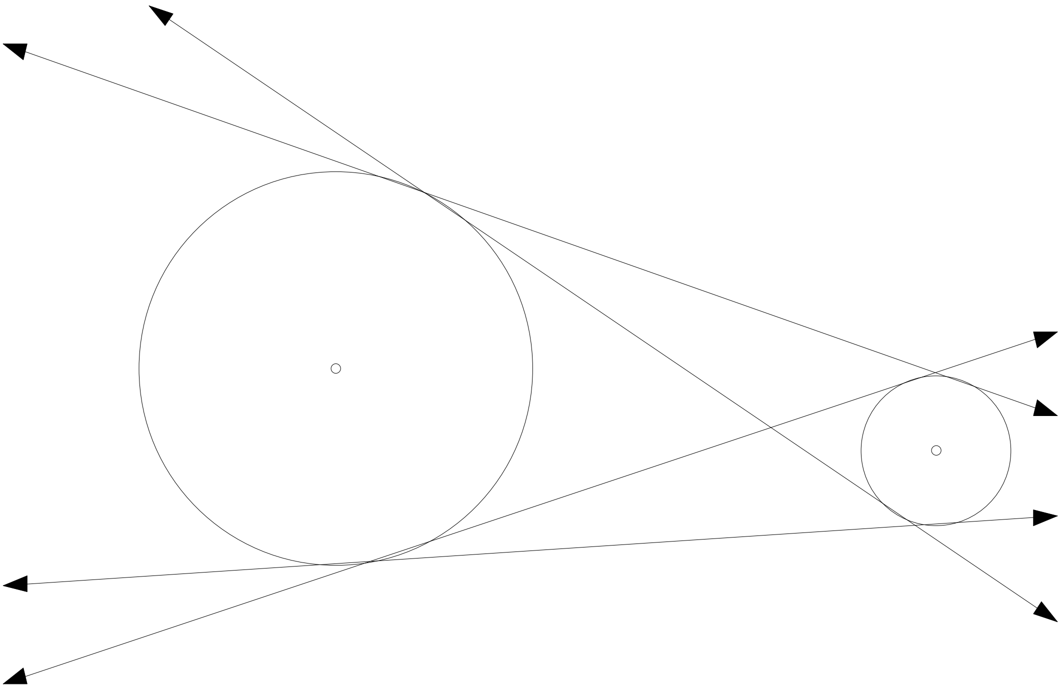
El problema d'Apoloni

Consisteix en construir totes les circumferències tangents a tres circumferències donades. Hi ha genèricament $2^3 = 8$ possibles solucions.

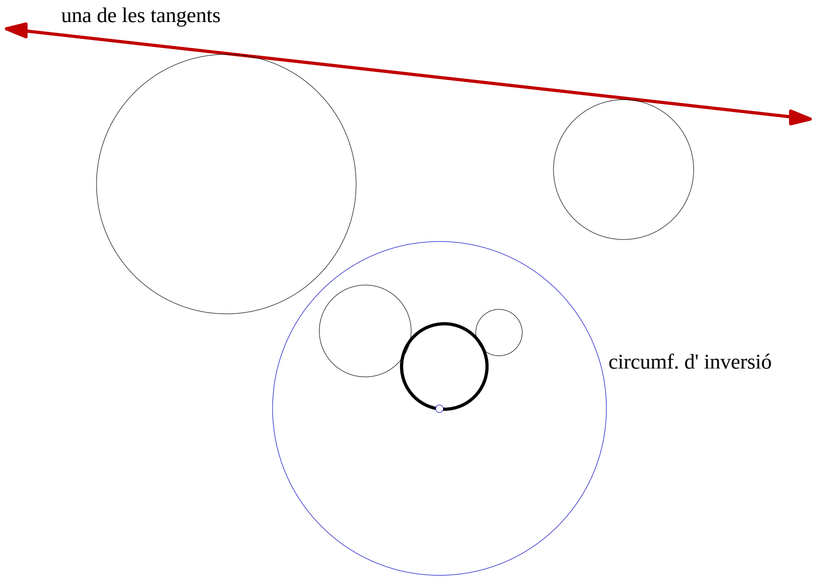
Cas particular *Circumferència tangent a dues circumferències donades $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ i que passa per un punt donat P.*



Suposarem conegut que donades dues circumferències exteriors hi ha quatre tangents, dues exteriors i dues interiors.



Fem una inversió i veiem el problema resolt.



Procediment (recordem $\varphi^2 = Id$):

1 • Fem una inversió φ de centre P i radi arbitrari.

2 • Construïm les quatre rectes tangents a

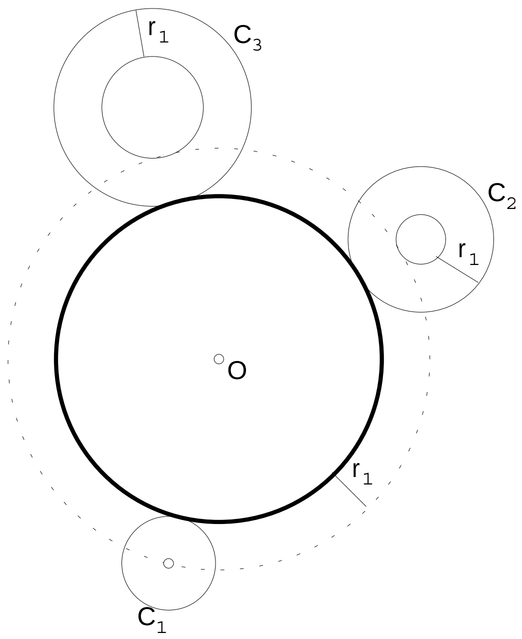
$\varphi(\mathcal{C}_1)$ i $\varphi(\mathcal{C}_2)$.
3 • Apliquem φ.

El problema d'Apoloni, cas general

Construcció d'una circumferència tangent a tres circumferències donades $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$.

Suposem que els radis respectius compleixen $r_1 \leq r_2 \leq r_3$. Construïm a continuació $\mathcal{C}'_2$ i $\mathcal{C}'_3$ amb el mateix centre respectivament que $\mathcal{C}_2$ i $\mathcal{C}_3$ i radis $r_3 - r_1$ i $r_2 - r_1$.

Construïm una circumferència que passi pel centre O_1 de $\mathcal{C}_1$ i sigui tangent a $\mathcal{C}'_2$ i $\mathcal{C}'_3$.



Ampliant o reduint tenim la circumferència buscada. Les vuit solucions provenen de que aquesta construcció es pot fer prenent $\mathcal{C}'_2$ i $\mathcal{C}'_3$ de radis $r_3 \pm r_1$ i $r_2 \pm r_1$.

Geometria Inversiva

Seguint F. Klein direm que Geometria és l'estudi de les propietats de les figures invariants per "moviments".

Per exemple la geometria euclidiana és l'estudi de les propietats de les figures invariants per transformacions que conserven la distància.

Anàlogament

Definició *La geometria inversiva és l'estudi de les propietats de les figures invariants per inversions.*

Per evitar problemes amb el centre d'inversió es completa el pla amb un punt, anomenat punt de l'infinit.

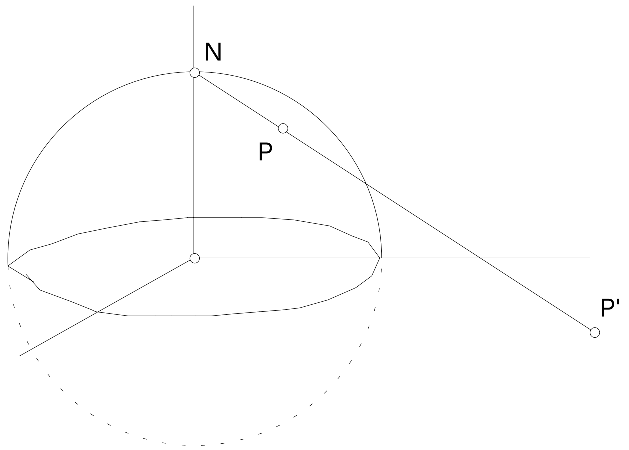
Així les inversions són transformacions de

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

La geometria de $\hat{\mathbb{C}}$ amb les inversions és coneix també com geometria conforme, ja que les inversions conserven angles.

Projecció estereogràfica

Hi ha una bijecció entre l'esfera i $\hat{\mathbb{C}}$ (projecció estereogràfica).



Observem també que la projecció estereogràfica, és una inversió respecte l'esfera de centre N i radi $\sqrt{2}$.

Quan s'estudia l'esfera des d'aquest punt de vista es parla de l'esfera de Riemann (com conjunt de punts és l'esfera però els "moviments" són les transformacions que provenen de les inversions del pla via la projecció estereogràfica).

Alguns resultats

Alguns resultats de geometria conforme són els següents:

Teorema *Donats tres punts A, B, C i tres punts més A', B', C' existeix una única composició d'inversions que porta A a A', B a B' i C a C'.*

Oblidem-nos doncs de parlar de distància.

Teorema fonamental *Tota bijecció que conserva cercles és composició d'inversions.*

Teorema *Tota bijecció analítica de $\widehat{\mathbb{C}}$ és una transformació de Möbius*

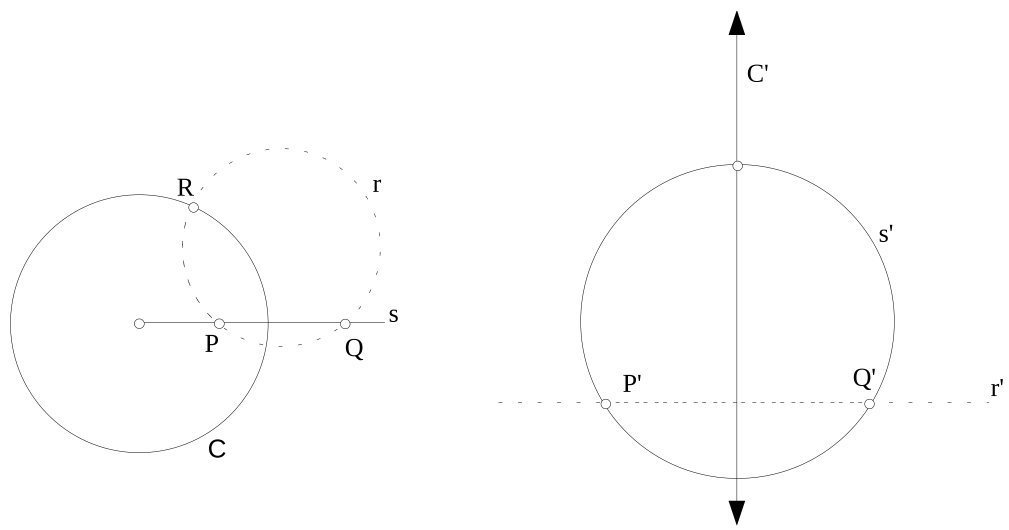
$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0.$$

Teorema *Tota composició d'inversions és una transformació de Möbius o una transformació de Möbius precedida de conjugació.*

Simetries euclidianes com inversions

Quan es parla de les inversions de $\hat{\mathbb{C}}$ s'hi inclouen les simetries respecte rectes de $\mathbb{C}$ (que són circumferències de $\hat{\mathbb{C}}$ ja que passen per l'∞.)

Una inversió de centre R porta el primer dibuix sobre el segon.



$$
\begin{array}{rcl}
\text{circumf. } \mathcal{C} & \longrightarrow & \text{recta } \mathcal{C}' \\
\text{recta } PQ & \longrightarrow & \text{circumf. } s' \\
\text{circumf. } RPQ & \longrightarrow & \text{recta } r' \\
r \perp \mathcal{C} & \longrightarrow & r' \perp \mathcal{C}' \\
s \perp \mathcal{C} & \longrightarrow & s' \perp \mathcal{C}' \\
P, Q \in r \cap s & \longrightarrow & P', Q' \in r' \cap s'
\end{array}
$$

Per tant P', Q' són simètrics respecte $\mathcal{C}'$.

Geometria hiperbòlica

El pla hiperbòlic és

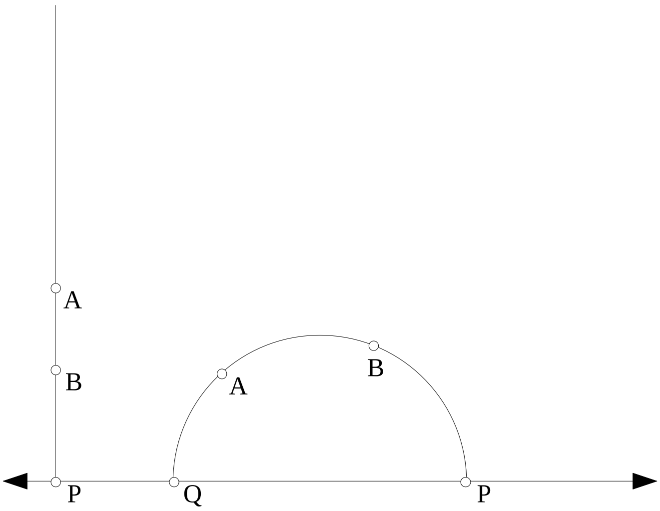
$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$$

amb els "moviments" donats per les inversions respecte circumferències de centre l'∞. D'aquestes circumferències se'n diuen rectes hiperbòliques.

Distància hiperbòlica

$$d(A, B) = |\ln(A, B, P, Q)|$$

on P, Q són els punts de l'infinit de la recta hiperbòlica AB.



Si A, B pertanyen a una recta $x = cte$ que talla $y = 0$ en P llavors

$$d(A, B) = |\ln(A, B, P, \infty)| = \ln \frac{AP}{BP}$$

Aquesta distància és invariant per inversions i per tant objecte d'estudi de la geometria hiperbòlica.

Tota aplicació que conserva aquesta distància és composició d'inversions (i es diu isometria hiperbòlica.)

Resumint

Definició *La geometria hiperbòlica és l'estudi de les propietats de les figures del pla hiperbòlic* $\mathbb{H}^2$ *invariants per isometries hiperbòliques.*

Distància entre cercles:

punt de vista hiperbòlic

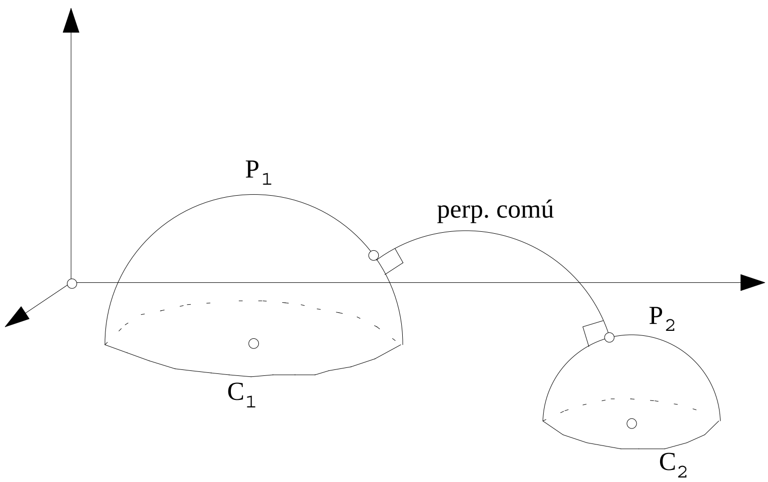
El següent bonic resultat me'l va fer observar en Gil Solanes.

Situem-nos primerament a l'espai hiperbòlic

$$\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}.$$

Els plans hiperbòlics de $\mathbb{H}^3$ són els plans $ax + by = c$ i les semiesferes amb centre a $z = 0$.

Tota circumferència de $z = 0$ es pot considerar com l'equador d'una esfera amb el mateix centre, i dóna lloc doncs a un pla hiperbòlic de $\mathbb{H}^3$.



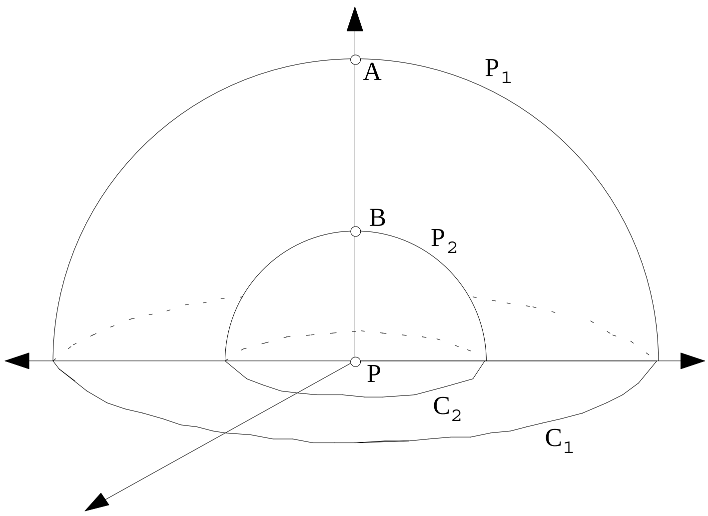
La distància hiperbòlica entre plans és la longitud hiperbòlica de la perpendicular comú.

Teorema *La distància entre els cercles $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ és igual a la distància hiperbòlica entre els plans hiperbòlics P_1 i P_2 que els tenen com infinit.*

$$\boxed{d(P_1, P_2) = \delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)}$$

Demostració: Sigui φ una inversió que posa $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ concèntrics. Estenem aquesta inversió del pla a una inversió de $\mathbb{H}^3$.

La perpendicular comú és transforma en un diàmetre, que talla $\varphi(\mathcal{C}_1)$ en A i $\varphi(\mathcal{C}_2)$ en B.



Així

$$d(P_1, P_2) = d(A, B) = \ln \frac{AP}{BP} = \ln \frac{R}{r} = \delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$$

Referències

1. H. S. Coxeter, S. L. Greitzer, Redécouvrons la Géométrie, *Dunod, París*, 1971.

2. M. de Guzman, Aventuras matemáticas, *Labor*, 1986.

3. B. Herrera, A. Reventós, Geometria Sintètica, En preparació, 2002.

4. P. Puig Adam, Curso de geometria mètrica, Euler editorial S.A., 1986.

5. A. S. Smogorzhevski, Acerca de la geometría de Lobatchevski, Lecciones populares de Matemàticas, Editorial MIR, 1978.