GEOMETRIA INVERSIVA*

Agustí Reventós Tarrida

6-febrer-2002

Resum

Presentem una d'aquestes eines tant potents que té la matemàtica que ens permeten resoldre problemes que, sense elles, serien molt difícils. Amb les inversions resoldrem el porisme de Steiner i el problema d'Apoloni. A més veurem que les inversions estan presents en molts llocs, sovint d'una manera injustament oblidada, com ara en variable complexa, còniques, projectiva, etc.

1 Inversions: una eina poderosa

Definició 1.1 *Sigui $\mathcal{C}$ una circumferència de centre O i radi r. Una inversió respecte $\mathcal{C}$ és la transformació del pla que envia cada punt A al punt A' de la semirecta OA tal que*

$$OA \cdot OA' = r^2.$$

En lloc de dir *inversió respecte una circumferència de centre O i radi r* es diu també directament inversió de centre O i radi r, o inversió de centre O i *potència* r^2. Semirecta OA vol dir la semirecta d'origen O que conté A.

Observem que la definició té sentit només quan $A \neq O$, és a dir que la podem pensar com una transformació bijectiva del pla menys O. En altres contextos és millor pensar que la imatge de O és el punt de l'infinit, però això suposa introduir prèviament aquest punt de l'infinit.

Observi's també que, de manera evident, tot punt interior a $\mathcal{C}$ té per imatge un punt exterior a $\mathcal{C}$ i recíprocament. Els punts de $\mathcal{C}$ són fixos.

*Conferència pronunciada en el marc de les Trobades UAB - Secundària, organitzades per Gregori Guasp Balaguer, a qui agraeixo la invitació. Agraeixo també a Gil Solanes Farrés, que va participar a la conferència amb projeccions de dibuixos amb Sketchpad, i a Eduardo Gallego Gómez, la seva col·laboració en la preparació d'aquestes notes.

La composició d'una inversió amb una simetria central respecte el centre de la circumferència d'inversió es coneix, en alguns textos, com inversió de potència negativa.

Construcció 1.2 *Construcció geomètrica de l'inversió*

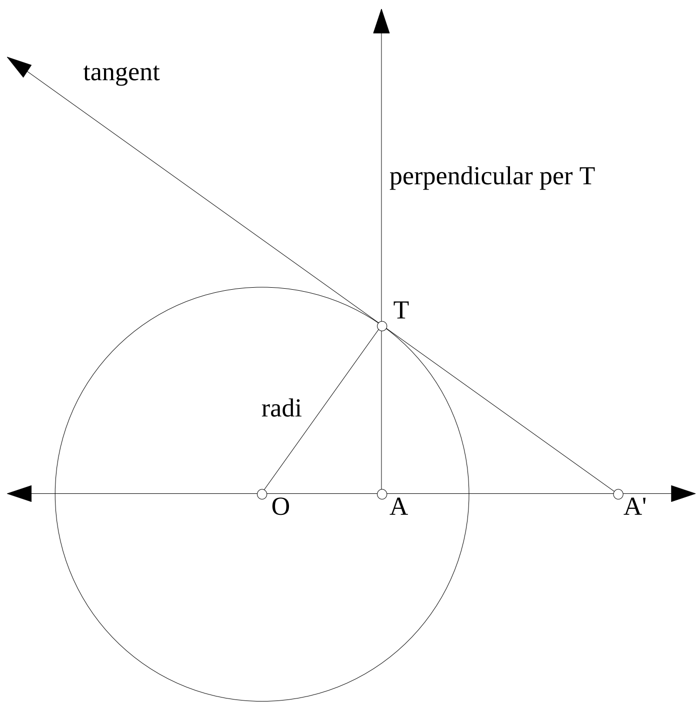
Sigui A un punt interior a $\mathcal{C}$. Sigui T un dels punts de la intersecció de $\mathcal{C}$ amb la perpendicular a la recta OA des de A. En particular $OT = r$. Llavors el punt A', intersecció de la recta OA amb la tangent a $\mathcal{C}$ des de T, és l'invers de A. En efecte, els triangles $\triangle OAT$ i $\triangle OTA'$ són semblants, per ser rectangles amb un angle comú, per tant

$$\frac{OA}{r} = \frac{r}{OA'},$$

és a dir $OA \cdot OA' = r^2$, com volíem.

De fet, és el teorema del catet aplicat al triangle rectangle $\triangle OTA'$.

Si A és exterior, val la mateixa construcció però començant per A' en lloc de A.



2 Propietats de les inversions

És clar que si A' és l'invers de A llavors A és l'invers de A'. De manera que tenim

Propietat 2.1 *Les inversions són involutives. És a dir, si φ és una inversió, llavors $\varphi^2 = Id$.*

Per angle entre dues circumferències entenem l'angle de les tangents en el punt de contacte, o equivalentment l'angle entre els radis en aquest punt.

Propietat 2.2 *Siguin A i A' punts inversos respecte $\mathcal{C}$, i sigui $\mathcal{C}'$ qualsevol circumferència que passi per A i A'. Llavors $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ són ortogonals.*

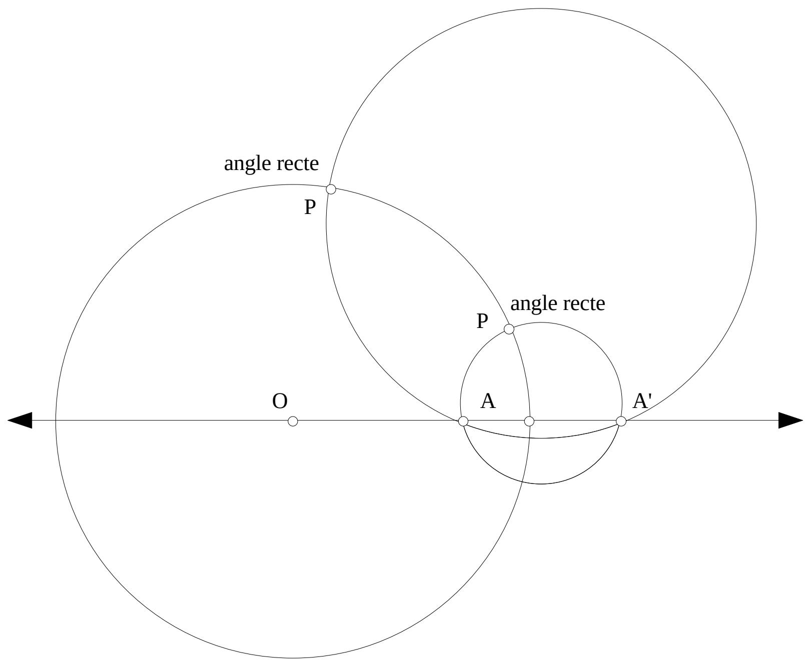
Demostració. Sigui P un dels punts d'intersecció de $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$. Per ser A i A' inversos respecte $\mathcal{C}$ tenim

$$OA \cdot OA' = OP^2,$$

on O és el centre de $\mathcal{C}$. Ara bé, $OA \cdot OA'$ és la potència de O respecte $\mathcal{C}'$, amb signe positiu per ser O exterior a $\mathcal{C}'$. Per tant

$$OA \cdot OA' = OT^2,$$

on T és el punt d'intersecció de la tangent a $\mathcal{C}'$ des de O amb $\mathcal{C}'$. Això implica $T \in \mathcal{C}$, i per tant el radi OT de $\mathcal{C}$ coincideix amb la tangent a $\mathcal{C}'$ des de O. Per tant, les circumferències són ortogonals. $\square$



Propietat 2.3 *Siguin A' i B' punts inversos respectivament de A i B per una inversió respecte una circumferència $\mathcal{C}$ de centre O. Llavors*

$$\angle OAB \equiv \angle OB'A' \quad i \quad \angle OBA \equiv \angle OA'B'.$$

En particular els punts A, B, A' i B' són concíclics, és a dir estan sobre una circumferència.

Demostració. És suficient observar que la relació

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$$

es pot escriure com

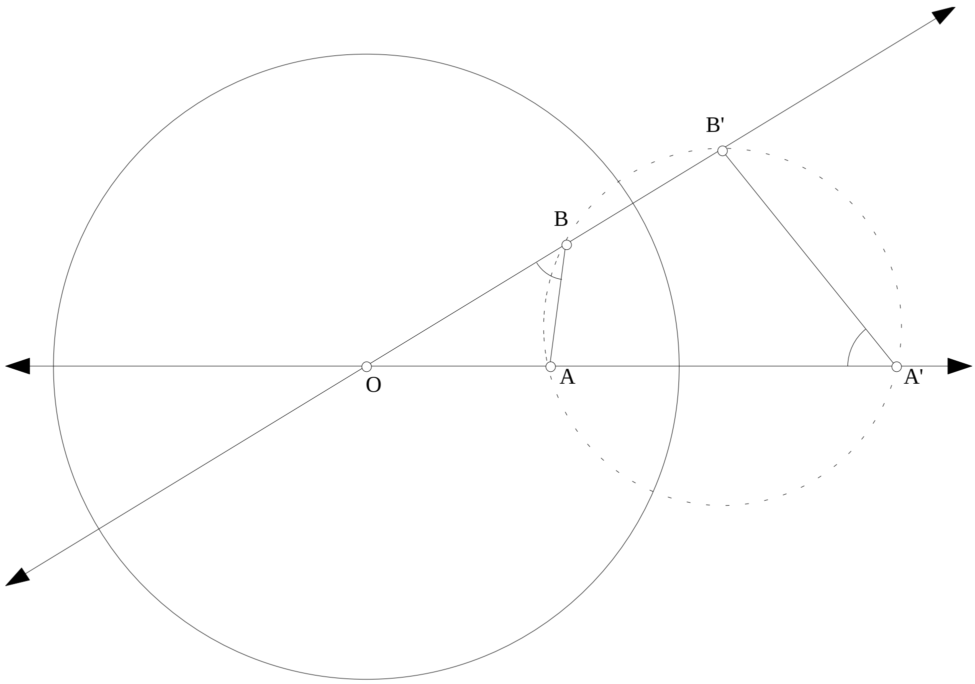
$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'},$$

i per tant els triangles $\triangle OAB$ i $\triangle OB'A'$, que tenen un angle comú, són semblants. Així, els angles corresponents són iguals, com volíem demostrar.

Observem que en particular tenim

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Per veure que són concíclics observem que els angles $\angle A'AB$ i $\angle A'B'B$ són suplementaris, ja que $\angle OAB \equiv \angle A'B'B$. Llavors, per la propietat dels angles inscrits a una circumferència, aplicada a la circumferència determinada per A, A', B, ha de ser $B' \in \mathcal{C}$. $\square$



Observacions:

- Per la proposició **??**, la circumferència d'inversió i la circumferència determinada per A, A', B, B' són ortogonals.
- Si sabem que per una inversió de centre O, un punt A es transforma en un punt A', amb O, A, A' coneguts, llavors podem construir fàcilment el transformat de qualsevol altra punt B, com intersecció de la recta OB amb la circumferència determinada per A, A', B.
- Qualsevol circumferència que passi per un punt A i pel seu invers A', és invariant. És a dir, es transforma en ella mateixa per la inversió.

Propietat 2.4 *Les inversions porten circumferències i/o rectes a circumferències i/o rectes, segons passin o no pel centre d'inversió. Concretament:*

a) *La imatge d'una recta que no passa pel centre d'inversió és una circumferència que sí que hi passa, menys el centre d'inversió.*

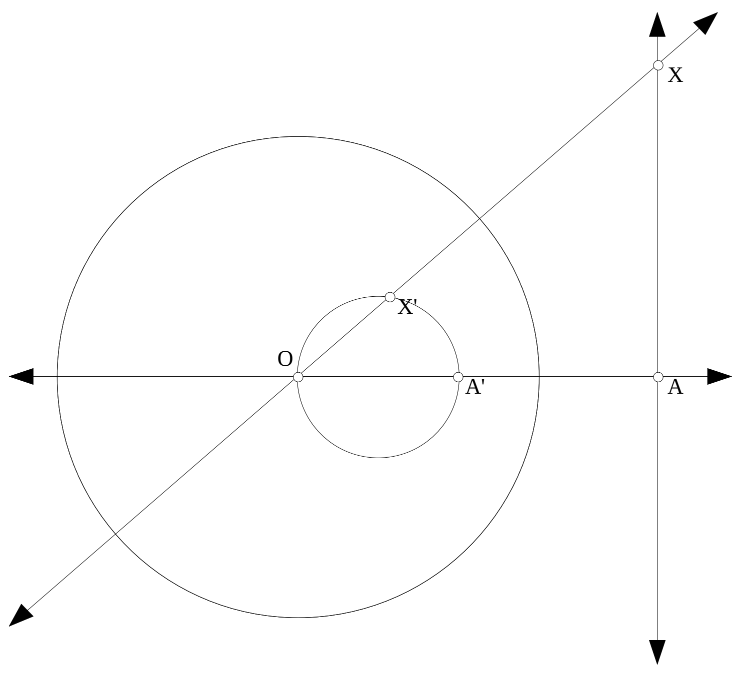
b) *La imatge d'una circumferència que no passa pel centre d'inversió és una circumferència que tampoc hi passa.*

c) *La imatge d'una circumferència que passa pel centre d'inversió, menys el propi centre, és una recta que no hi passa.*

d) *La imatge d'una recta que passa pel centre d'inversió és ella mateixa, menys el centre.*

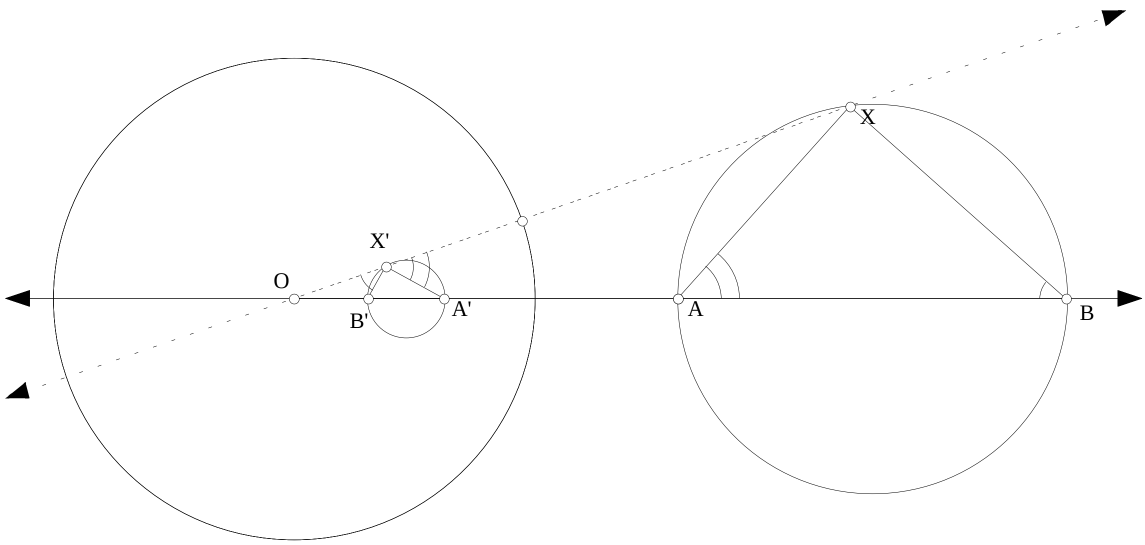
Demostració. Recordem que el centre d'inversió no té imatge i que, per tant, quan parlem per exemple de la imatge d'una circumferència que passa pel centre d'inversió, volem dir la imatge de tots els punts d'aquesta circumferència menys el centre d'inversió.

a) Sigui s una recta que no passi pel centre d'inversió i sigui A el peu de la perpendicular des de O a s. Sigui X un punt arbitrari de s i siguin A' i X' respectivament els inversos de A i X. Per la proposició **??**, $\angle OAX \equiv \angle OX'A'$, i com l'angle $\angle OAX$ és recte, X' pertany a la circumferència de diàmetre OA'. Com X és qualsevol, això demostra que la imatge de s està inclosa en aquesta circumferència. Anàlogament es pot veure que qualsevol punt d'aquesta circumferència té el seu invers sobre s, llevat de O que no té imatge.



b) Considerem una circumferència $\mathcal{C}$ que no passi pel centre d'inversió. Siguin A, B els punts en que aquesta circumferència talla la recta que uneix el seu centre amb el centre d'inversió. Siguin A', B' els inversos d'aquests punts.

Prenem un punt arbitrari X de $\mathcal{C}$. Per la propietat **??** tenim $\angle XBA = \angle OX'B'$ i $\angle XAB = \angle A'X'X$. Com que $\angle AXB$ és recte, per ser AB diàmetre, ha de ser $\angle A'X'B'$ recte, i X' pertany a la circumferència de diàmetre $A'B'$. Com X és arbitrari, tot punt de $\mathcal{C}$ té la imatge sobre aquesta circumferència, i recíprocament.



Observem però que el centre de la primera circumferència no va a parar pas al centre de la segona.

c) i d) són ara conseqüència immediata de ser les inversions involutives. $\square$

Propietat 2.5 *Les inversions conserven els angles.*

Demostració. Acceptarem la idea intuïtiva de que la tangent és la posició límit de les secants.

Sigui $\mathcal{C}$ una circumferència (o una recta), i sigui $A \in \mathcal{C}$. Com que la recta que passa per A i pel centre d'inversió O és fixa, és suficient demostrar que l'angle entre aquesta recta i $\mathcal{C}$ en el punt A, és el mateix que l'angle entre aquesta recta i la inversa $\mathcal{C}$' de $\mathcal{C}$ en el punt A' invers de A.

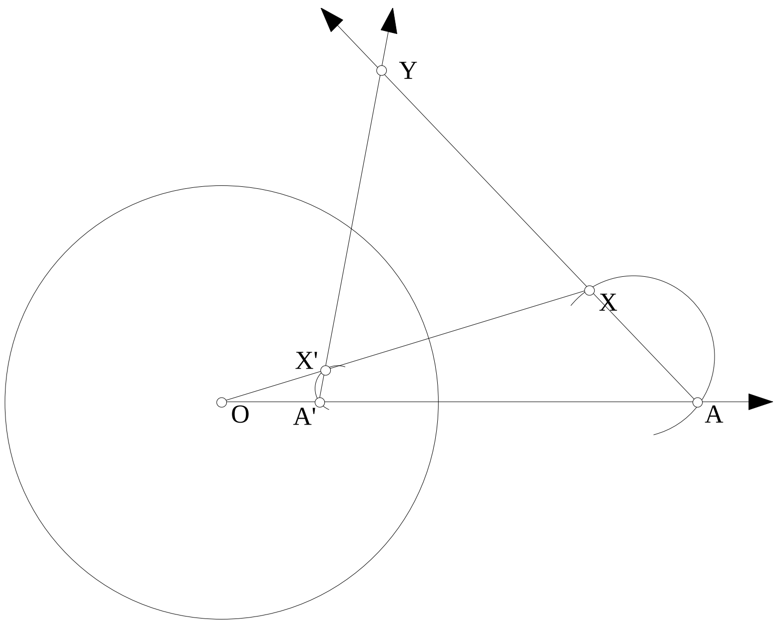
Sigui X un punt arbitrari de $\mathcal{C}$ i sigui $X' \in \mathcal{C}'$ el seu invers. Sigui Y el punt d'intersecció de les rectes AX i $A'X'$ (depèn doncs de X). Sabem, per la propietat **??**, que

$$\angle OX'A' = \angle OAX.$$

A partir d'aquí tenim

$$\angle OA'X' + \angle AOX = \angle YAO = \pi - \angle XAO$$

Per altra banda considerarem que l'angle entre la recta OA i la tangent per A és l'angle adjacent a l'angle límit de $\angle OAX$ quan X s'acosta a A. Aquest angle es transforma per la inversió en l'angle límit de $\angle OA'X'$ quan X' s'acosta a A'.



Prenent ara límits, quan X tendeix a A, a l'anterior igualtat tenim

$$\lim_{X \to A} \angle OA'X' + \lim_{X \to A} \angle AOX = \lim_{X \to A} (\pi - \angle XAO),$$

és a dir

$$\lim_{X \to A} \angle OA'X' = \lim_{X \to A} (\pi - \angle XAO).$$

Però el segon terme és l'angle entre la recta OA i la tangent a Γ que hem considerat i el primer terme és la imatge d'aquest angle per la inversió, és a dir l'angle entre la recta OA i la tangent a Γ', com volíem. $\square$.

Definició 2.6 *Donats quatre punts arbitraris A, B, C, D del pla, definim la* raó doble generalitzada *per la fórmula*

$$[A, B, C, D] = \frac{AC/BC}{AD/BD}.$$

Observem que si estan alineats la raó doble generalitzada coincideix amb la raó doble, llevat del signe.

Tenim el següent resultat

Propietat 2.7 *Les inversions conserven la raó doble generalitzada.*

Demostració. Considerem la inversió de centre O i radi r, i denotem per A', B', C', D' respectivament els transformats dels punts A, B, C, D.

Tenim

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AC}{OA} \cdot \frac{OA}{AD} = \frac{A'C'}{OC'} \cdot \frac{OD'}{A'D'}$$

a causa de la propietat **??**.

Però igualment

$$\frac{BC}{BD} = \frac{B'C'}{OC'} \cdot \frac{OD'}{B'D'},$$

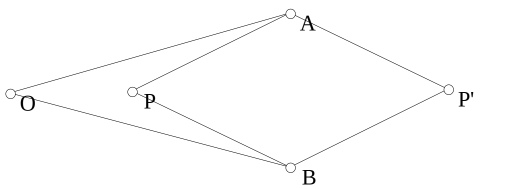
i per tant

$$\begin{aligned}[A, B, C, D] = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} &= \frac{A'C'}{OC'} \cdot \frac{OD'}{A'D'} \cdot \frac{OC'}{B'C'} \cdot \frac{B'D'}{OD'} = \\ &= \frac{A'C' \cdot B'D'}{A'D' \cdot B'C'} = [A', B', C', D']\end{aligned}$$

com volíem.□

2.1 Inversor de Peucellier

Es poden trobar a la literatura diversos artefactes que realitzen inversions i tot i que avui dia les realitzem amb programes d'ordinador és interessant mostrar-ne almenys un. Expliquem breument l'inversor de Peucellier.



El punt O es fixa al paper i en els punts P i P' hi ha dos llapis. Quan dibuixem amb P, P' dibuixa la figura inversa i recíprocament. Això és conseqüència de que

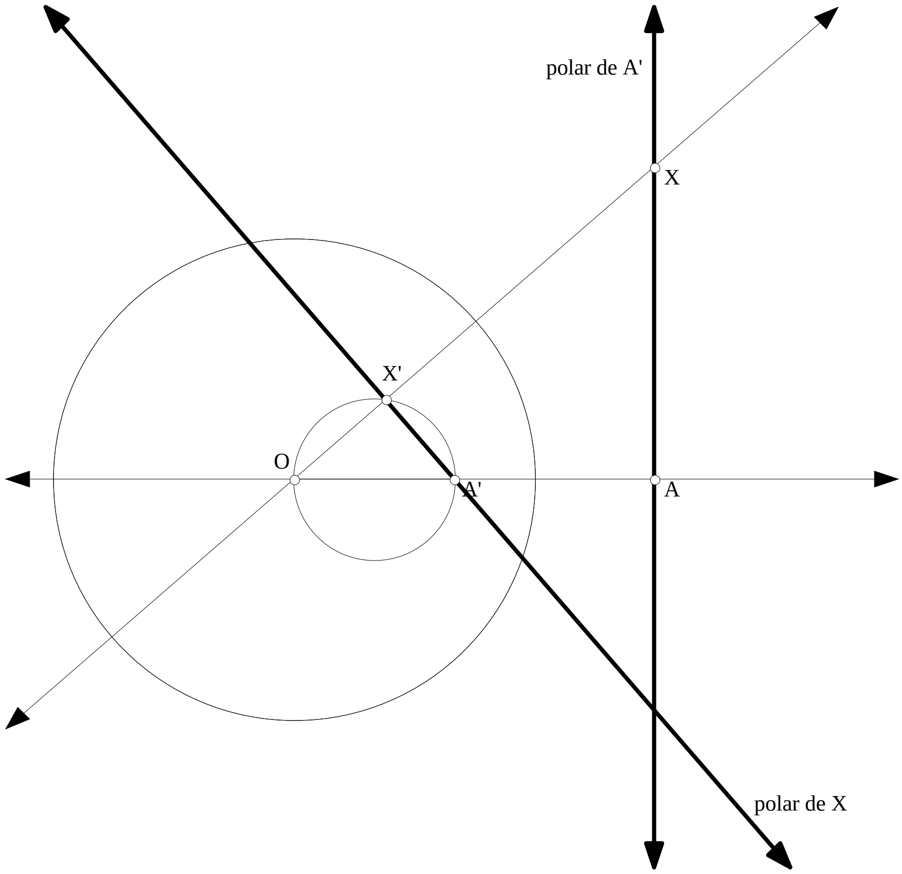
$$OP \cdot OP' = OA^2 - PA^2$$

i que aquest segon terme és constant (igual al radi al quadrat de la circumferència d'inversió).

No podem però dibuixar qualsevol figura ja que no podem arribar a l'infinit.

3 Inversions i geometria projectiva

Aprofitant el dibuix que il·lustra la propietat **??** , tenim



i recordant que la *polar* de A' respecte la circumferència d'inversió és la perpendicular a la recta OA' pel punt A invers de A', tenim que *la polar de tot punt X de la polar de A' passa per A'*. És conseqüència de que l'angle $\angle OX'A'$ és recte, per tot X. Es diu que A' és el *pol* de la corresponent recta polar.

Estem acostumats a que les aplicacions portin punts a punts i rectes a rectes però tenim aquí ara una aplicació que porta punts a rectes i rectes a punts en el sentit que fa correspondre a cada punt la seva polar o a cada polar el seu pol. A més, aquesta aplicació és tal que transforma la frase

Els punts P estan sobre la recta r.

per

Les rectes polars de P es tallen en el punt pol de r.

Això és el principi de dualitat propi de la geometria projectiva.

Fixem-nos també que si abans teníem que introduir un punt de l'∞ per tenir imatge del centre d'inversió, ara, com els punts i les rectes són equivalents, haurem d'introduir una recta de l'infinit, la polar del centre d'inversió. Podem pensar que el pla projectiu és el pla completat amb la recta de l'infinit.

4 Inversions i Còniques

Les còniques es presenten de diverses formes: seccions d'un con; lloc geomètric dels punts del pla tals que el quocient de distàncies a un punt (focus) i a una recta (directriu) és constant; lloc geomètric del punts del pla tals que la suma (diferència) de distàncies a dos punts donats (focus) és constant, etc. Vegeu l'equivalència d'aquestes definicions.

També es pot definir cònica com *la polar recíproca d'una circumferència.*

Definició 4.1 *Una cònica és el lloc geomètric dels pols de les tangents a una circumferència.*

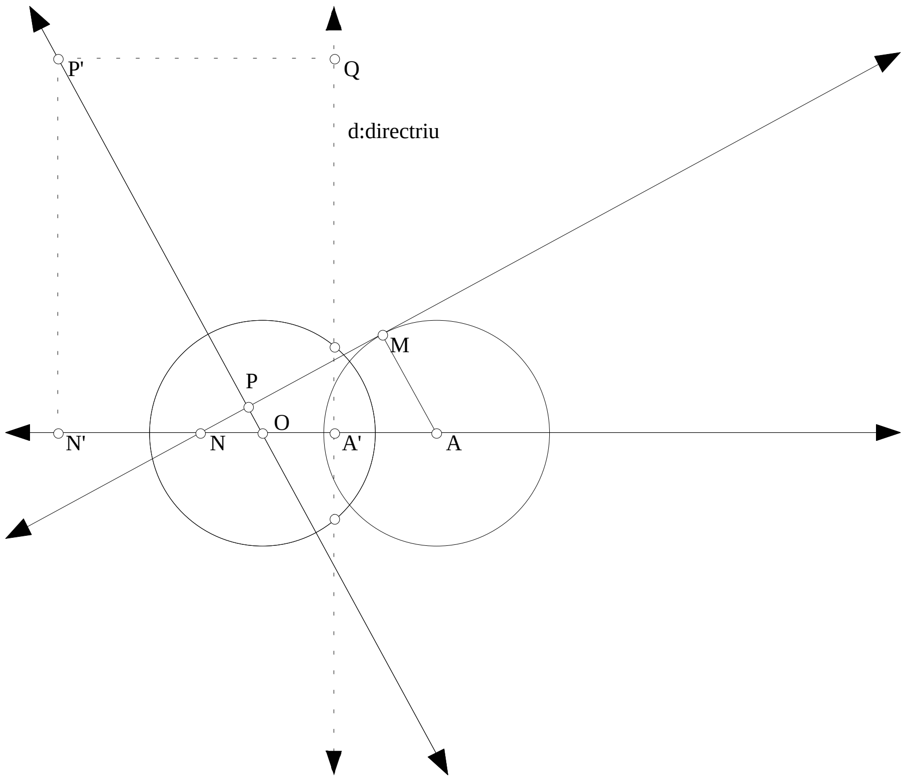
Concretament, fixem una circumferència d'inversió de centre O i radi arbitrari, i considerem una segona circumferència de centre A i radi arbitrari.

Per cada punt M de la segona circumferència tracem la tangent i considerem el seu *pol*. Per construcció el pol de la tangent és el punt P' situat sobre la perpendicular per O a la tangent i tal que $OP{\cdot}OP' = k^2$, on P és el punt d'intersecció de la tangent amb la seva perpendicular per O. Sigui N el punt d'intersecció de la tangent amb la recta OA i N' el seu invers.

Estem dient que quan M és mou a la circumferència el punt P' descriu una cònica. La polar d de A serà la directriu, i el centre O el focus.

En efecte, per la propietat **??**, les rectes $P'N'$ i OA són perpendiculars. Per tant $P'Q = N'O + OA'$ on Q és el peu de P' sobre d. Com que $OA \cdot OA' = k^2$ i $ON \cdot ON' = k^2$ tenim

$$\frac{P'O}{P'Q} = \frac{\frac{k^2}{OP}}{\frac{k^2}{ON} + \frac{k^2}{OA}} = \frac{ON \cdot OA}{OP(ON + OA)}$$



Però, per Tales,

$$\frac{NA}{NO} = \frac{NM}{NP} = \frac{AM}{OP}$$

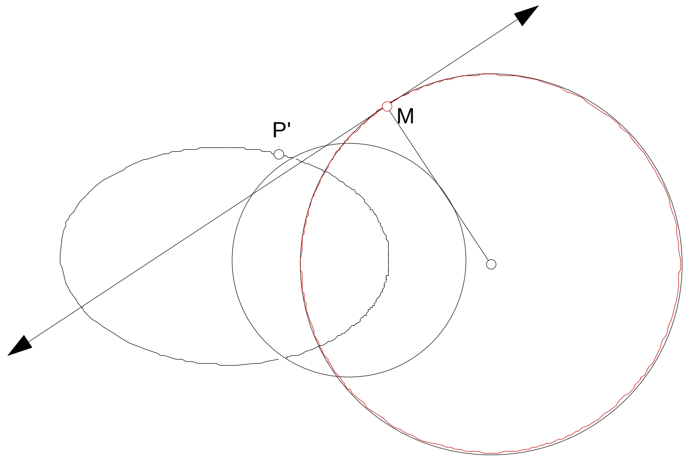
de manera que

$$\frac{P'O}{P'Q} = \frac{OA}{OP(NA/ON)} = \frac{OA}{OP(AM/OP)} = \frac{OA}{AM} = e$$

que és constant. Aquesta constant

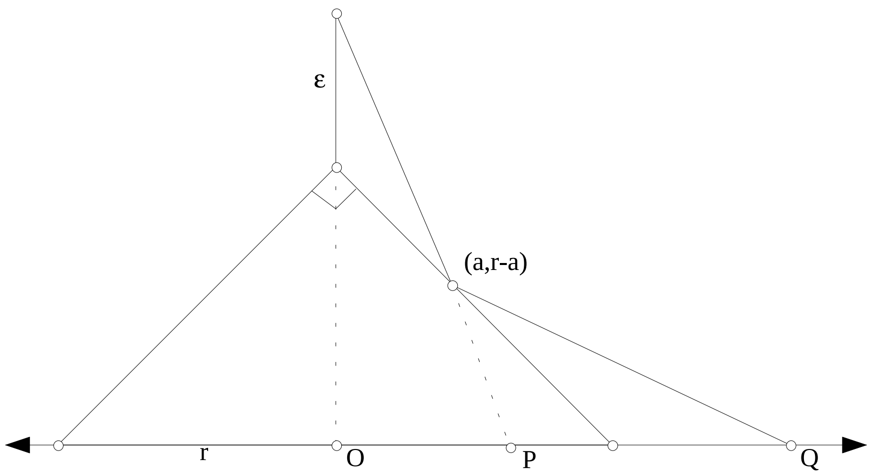
$$e = \frac{\text{distància entre centres}}{\text{radi}}$$

es diu excentricitat. Per tant si O és interior a la circumferència de centre A i radi AM tenim $e < 1$ i es tracte d'una el·lipse, si és exterior tenim $e > 1$ i es tracta d'una hipèrbola i si hi pertany tenim $e = 1$ i es tracta d'una paràbola.



5 El con com inversor aproximat

Suposem que tenim un con tal que la seva superfície és un mirall. Si mirem des d'un punt situat prop del vèrtex i en la seva vertical veurem les figures de la base del con deformades. Concretament tindrem el següent esquema que usa tant sols la llei física de que l'angle d'incidència és igual a l'angle de reflexió.



Si denotem per r el radi de la base del con, ϵ la distància vertical entre l'ull i el vèrtex del con, i a un paràmetre que fa que el punt $(a, r-a)$ es mogui per la generatriu del con $x+y=r$, i suposem que l'angle del con en el vèrtex és recte, llavors càlculs elementals demostren que

$$OP = \frac{a(r+\epsilon)}{a+\epsilon}, \qquad OQ = \frac{ra+(r-a)\epsilon}{a},$$

on P és la imatge aparent de Q.

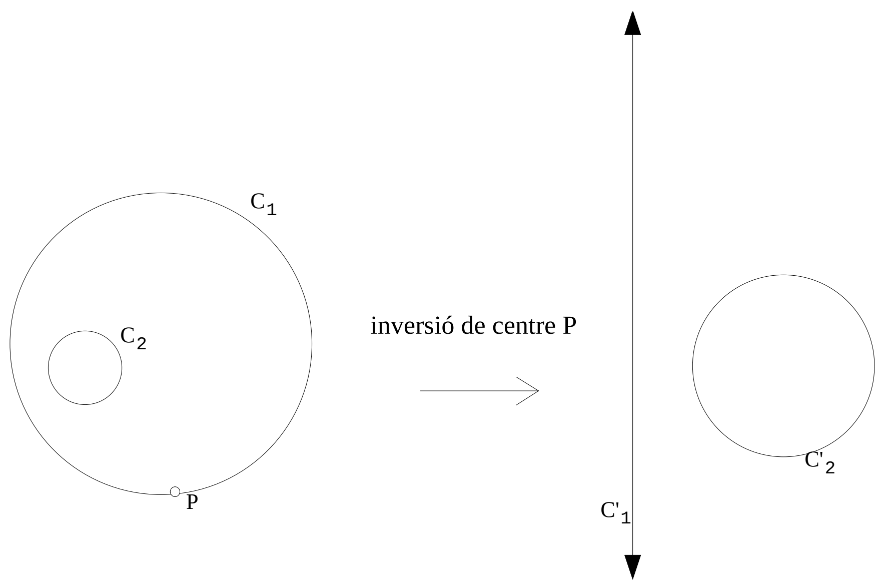
Per tant

$$OP \cdot OQ = \frac{r+\epsilon}{a+\epsilon}(ra+\epsilon(r-a)) \quad \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} r^2,$$

és a dir que quan ϵ tendeix a zero Q tendeix a l'invers de P.

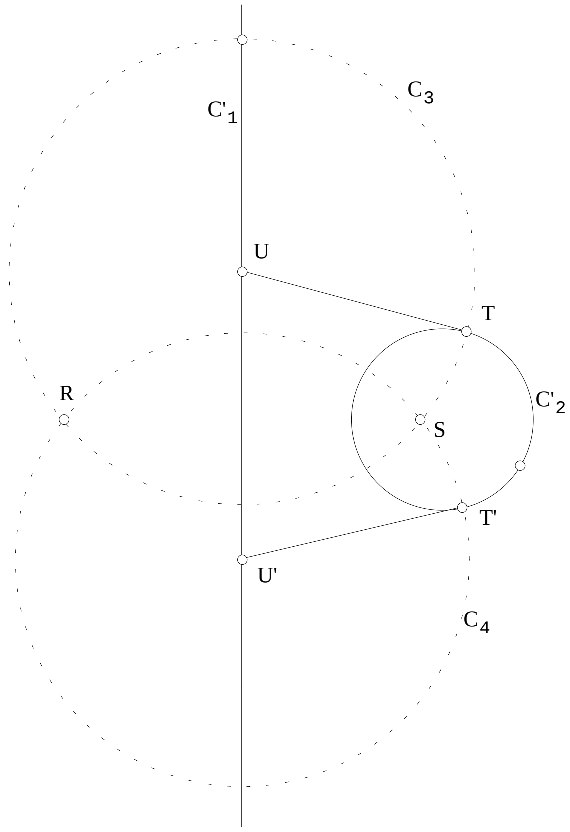
6 Inversió que posa concèntriques dues circumferències donades

Siguin $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$ dues circumferències no concèntriques. Si fem una inversió amb centre un punt qualsevol $P \in \mathcal{C}_1$ el parell de circumferències es transformen respectivament en una circumferència $\mathcal{C}'_2$ i una recta $\mathcal{C}'_1$.



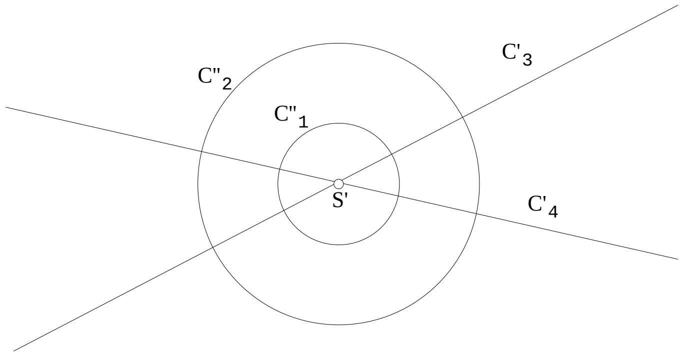
Dibuixem a continuació dues circumferències ortogonals a la vegada a $\mathcal{C}'_1$ i $\mathcal{C}'_2$. Per fer això prenem $T, T' \in \mathcal{C}'_2$ amb la precaució de que no pertanyin al diàmetre de $\mathcal{C}'_2$ perpendicular a $\mathcal{C}'_1$. Siguin U i U'

respectivament els punts d'intersecció amb $\mathcal{C}'_1$ de les tangents a $\mathcal{C}'_2$ per T i T'.



Llavors les circumferències $\mathcal{C}_3$ (de centre U i radi UT) i $\mathcal{C}_4$ (de centre U' i radi $U'T'$) són ortogonals a $\mathcal{C}'_1$ i $\mathcal{C}'_2$ i es tallen en dos punts R i S.

Ara ja és clar que qualsevol inversió de centre R transforma $\mathcal{C}'_1$ i $\mathcal{C}'_2$ en dues circumferències concèntriques $\mathcal{C}''_1$ i $\mathcal{C}''_2$. En efecte, $\mathcal{C}_3$ i $\mathcal{C}_4$ passen a ser rectes $\mathcal{C}'_3$ i $\mathcal{C}'_4$ que es tallen en un punt S' imatge de S. La recta $\mathcal{C}'_1$ es transforma en una circumferència per R ortogonal a $\mathcal{C}'_3$ i $\mathcal{C}'_4$. Per tant, el punt S' d'intersecció de $\mathcal{C}'_3$ i $\mathcal{C}'_4$ és el seu centre.



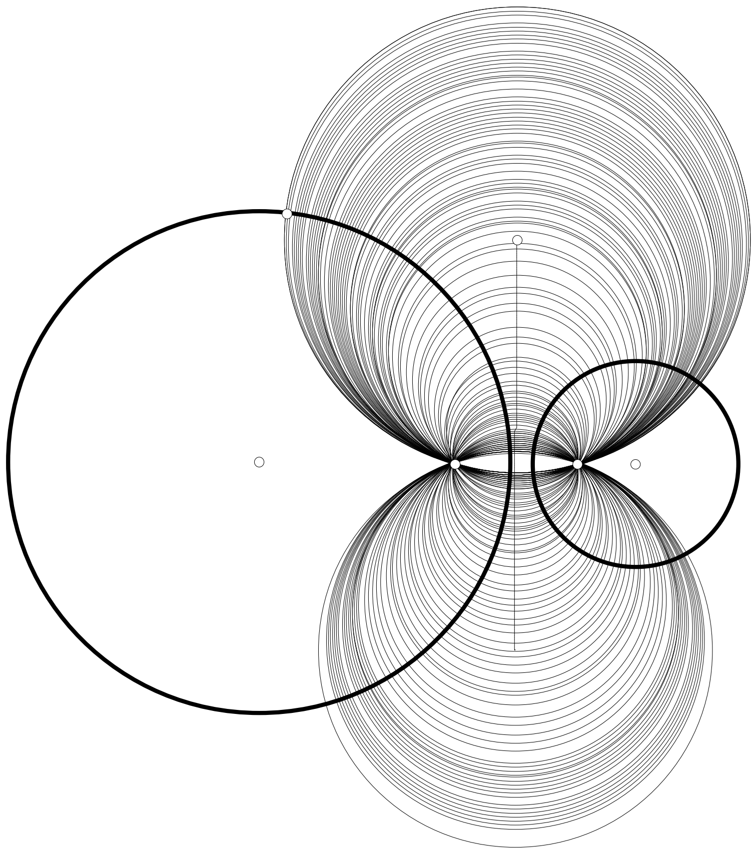
Anàlogament $\mathcal{C}'_2$ es transforma en una circumferència ortogonal a $\mathcal{C}'_3$ i $\mathcal{C}'_4$. Per tant, el punt d'intersecció de $\mathcal{C}'_3$ i $\mathcal{C}'_4$ és el seu centre. Així doncs els transformats $\mathcal{C}''_1$ i $\mathcal{C}''_2$ de $\mathcal{C}'_1$ i $\mathcal{C}'_2$ són circumferències concèntriques, com volíem.

6.1 Punts màgics

Hi ha un resultat que diu que totes les circumferències ortogonals a dues circumferències donades passen per dos punts, determinats per les dues circumferències, i anomenats punts màgics.

A partir d'aquest resultat podem simplificar l'anterior construcció tot dient:

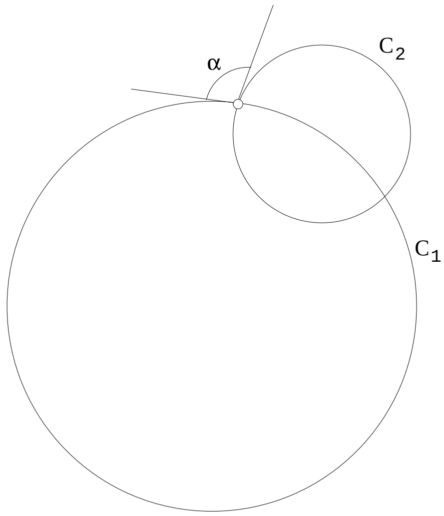
La inversió en un dels seus punts màgics posa dues circumferències qualssevol, concèntriques.



7 Producte inversiu de circumferències

Suposem que les circumferències $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ es tallen formant en el punt d'intersecció un angle α. Llavors definim

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_1 = \cos\alpha$$



Si les equacions de les circumferències donades són

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 : (x-a)^2 + (y-b)^2 &= R^2 \\ \mathcal{C}_2 : (x-c)^2 + (y-d)^2 &= r^2\end{aligned}$$

un petit càlcul ens diu que

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_1 = \frac{1}{rR}(ac + bd - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2)). \tag{1}$$

Quan $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ es tallen és clar que $\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$ és invariant per inversions, ja que els angles es conserven. Però es produeix el següent fet, gairebé miraculós, sobre tot si no coneguéssim el nombres complexos:

Teorema 7.1 *El número $\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$ abans definit és invariant per inversions, tant si les circumferències es tallen com si no es tallen.*

És fàcil veure que

Teorema 7.2 *Si $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ són dues circumferències concèntriques de radis R i r, tenim*

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \frac{1}{2}(\frac{R}{r} + \frac{r}{R}).$$

Observem finalment que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 < 1 &\iff \text{es tallen} \\ \mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 &\iff \text{són tangents} \\ \mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 > 1 &\iff \text{no es tallen}\end{aligned}$$

8 Distància inversiva entre circumferències

La distància entre cercles concèntrics de radis $r \leq R$ es defineix com

$$\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \ln \frac{R}{r}$$

D'aquesta manera si tenim tres circumferències concèntriques amb $s \leq r \leq R$ tenim

$$\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) + \delta(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) = \ln \frac{R}{r} + \ln \frac{r}{s} = \ln \frac{R}{s} = \delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3)$$

que és una propietat que s'ha d'esperar de qualsevol funció distància sobre "punts alineats".

Definició 8.1 *Si $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ són dues circumferències arbitraries es defineix la seva distància per*

$$\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \delta(\varphi\mathcal{C}_1, \varphi\mathcal{C}_2)$$

on φ és una inversió que les posa concèntriques.

Es veu fàcilment que aquesta definició no depèn de la inversió o composició d'inversions usades per posar concèntriques les dues circumferències donades.

En efecte, si φ i Ψ són composicions d'inversions que posen concèntriques les dues circumferències donades llavors $\Phi = \varphi \circ \Psi^{-1}$ és una composició d'inversions que porta circumferències concèntriques de radis $r' \leq R'$ a circumferències concèntriques de radis $r \leq R$. (No diem que r vagi a r').

Però el producte de circumferències concèntriques, que és invariant per inversions, val

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r}\right)$$

de manera que

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \Phi\mathcal{C}_1 * \Phi\mathcal{C}_2$$

implica

$$\frac{r}{R} + \frac{R}{r} = \frac{r'}{R'} + \frac{R'}{r'}$$

igualtat del tipus

$$x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$$

que implica $x = y$ o $x = \frac{1}{y}$ i per tant

$$|\ln \frac{R}{r}| = |\ln \frac{R'}{r'}|.$$

Com que

$$\delta(\varphi\mathcal{C}_1, \varphi\mathcal{C}_2) = |\ln\frac{R}{r}|$$

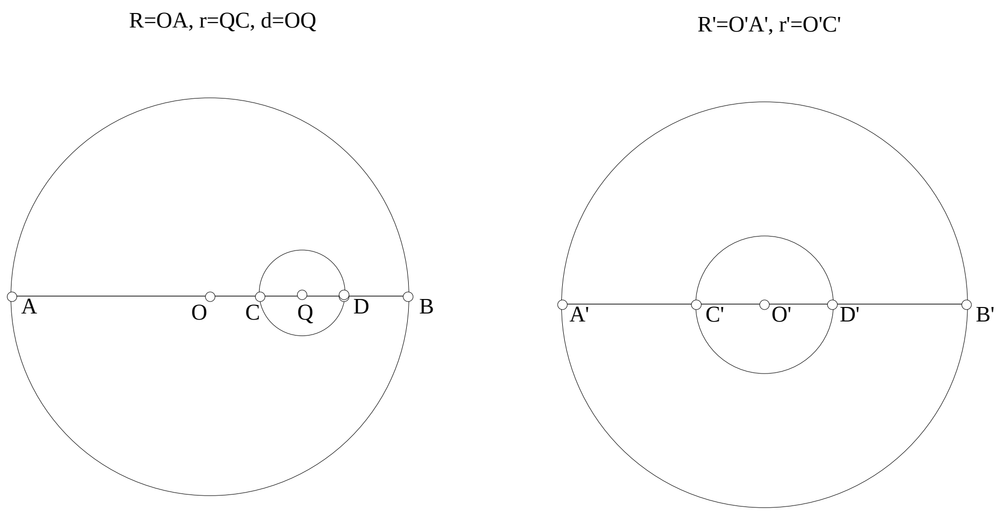
i

$$\delta(\Psi\mathcal{C}_1, \Psi\mathcal{C}_2) = |\ln\frac{R'}{r'}|$$

la definició de distància no depèn de la inversió o composició d'inversions que posa les circumferències concèntriques.

9 Distància inversiva en funció dels radis i distància entre centres. Relació distància-producte

Suposem $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$, en principi no concèntriques. Volem calcular la distància inversiva δ entre $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ sense necessitat de posar-les concèntriques, és a dir directament a partir dels seus radis i la distància entre els centres. Siguin A, B, C, D punts sobre un diàmetre comú com indica la figura:



Els radis i la distància són llavors $R = OA, r = QC, \rho = OQ$. Tenim

$$(A, B, C, D) = \frac{AC/BC}{AD/BD} = \frac{(AO + OQ - CQ)/(AO - OQ + CQ)}{(AO + OQ + CQ)/(AO - OQ - CQ)} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

on

$$\gamma = \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr}$$

Si per una inversió posem les circumferències concèntriques el diàmetre va al diàmetre i els punts A, B, C, D van als punts A', B', C', D' com indica la figura. Els nous radis són llavors $R' = O'A', r' = O'C'$ i en particular la distància inversiva és

$$\delta = \ln \frac{R'}{r'}.$$

Tenim

$$(A', B', C', D') = \frac{A'C'/B'C'}{A'D'/B'D'} = \frac{(R' - r')/(R' + r')}{(R' + r')/(R' - r')} = \frac{\cosh \delta - 1}{\cosh \delta + 1}$$

Com que la raó doble és invariant per inversions podem igualar les dues expressions anteriors i obtenim $\cosh \delta = \gamma$, és a dir

$$\cosh \delta = \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr}.$$

Amb la notació de la secció **??** tenim $\rho^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2$, que substituint a l'anterior fórmula i comparant amb la fórmula **??** de la mateixa secció **??** ens diu

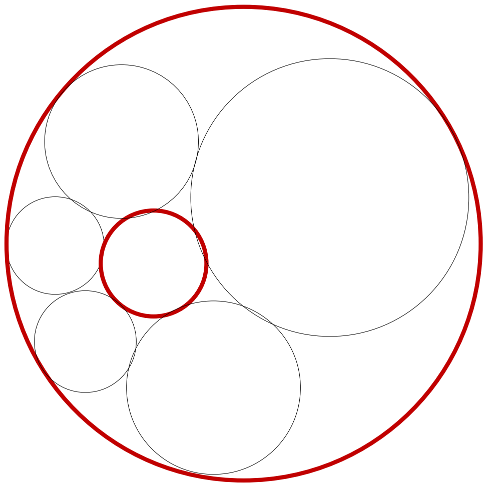
Teorema 9.1 *Sigui δ la distància inversiva entre $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$. Llavors*

$$\cosh \delta = \mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$$

10 Porisme de Steiner

Un primer exemple on es veu el poder de les inversions és l'anomenat porisme de Steiner. Donats dos cercles no concèntrics, un interior a l'altra, es vol saber si hi ha una cadena de cercles cadascun d'ells tangent a l'anterior i al posterior i tangents tots ells als dos cercles donats.

Aquest problema o bé no té solució, o bé té infinites solucions. Aquesta situació es descriu dient que tenim un "porisme", en aquest cas el porisme de Steiner.



Usant inversions podem demostrar fàcilment el següent resultat

Teorema 10.1 *Dos cercles $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ admeten una cadena de cercles tangents si i només si*

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 + 2\tan^2\frac{\pi}{n}$$

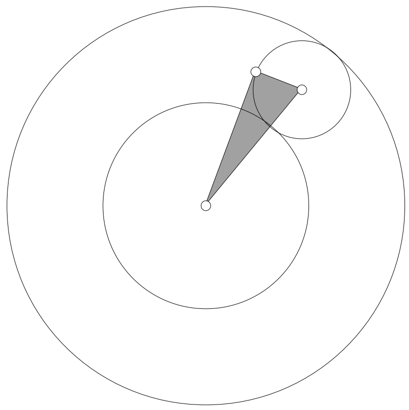
per a un cert n, que és el nombre de cercles de la cadena.

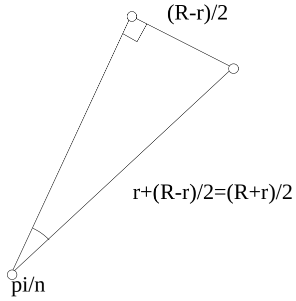
Comencem estudiant el cas concèntric.

Lema 10.2 *Dos cercles concèntrics de radis R i r admeten una cadena de n cercles tangents si i només si*

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{R-r}{R+r}$$

Demostració. Si una tal cadena existeix es formen triangles rectangles com indica la figura, i el resultat és evident.□





Observem que aïllant de la darrera expressió obtenim

$$\frac{r}{R} = \frac{1 - \sin\frac{\pi}{n}}{1 + \sin\frac{\pi}{n}}. \tag{2}$$

Demostració del teorema. Sigui φ una inversió que posa les dues circumferències donades concèntriques. Tenim

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \varphi\mathcal{C}_1 * \varphi\mathcal{C}_2 = \frac{1}{2}(\frac{r}{R} + \frac{R}{r})$$

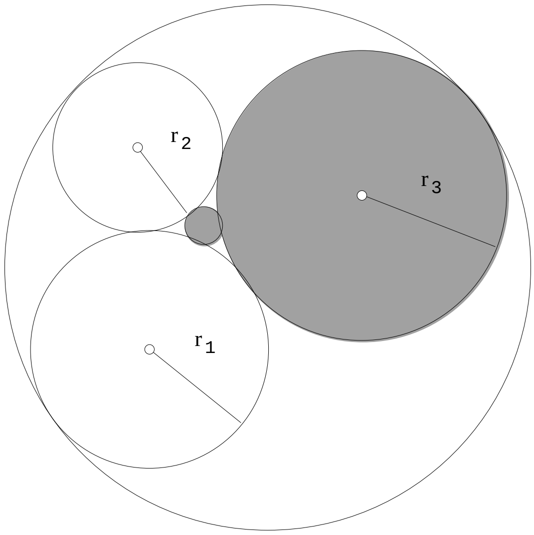
on R, r són els radis de les circumferències concèntriques (no els radis de $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$). Substituint el valor obtingut anteriorment a la fórmula **??** per a r/R obtenim

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 + \tan^2\frac{\pi}{n}$$

com volíem.□

10.1 Steiner $n = 3$

Un resultat molt interessant de Descartes, 1643, fa referència als anomenats posteriorment cercles de Soddy, i que representa un cas particular de Steiner amb $n = 3$. Concretament, donats tres punts es poden considerar sempre tres cercles amb centre aquests punts i tangents entre ells. Si a, b, c són les distàncies entre aquests punts, els radis dels cercles són $p-a, p-b, p-c$ amb $2p = a+b+c$. Existeixen llavors dos cercles tangents als tres cercles anteriors. Aquest cercles no es tallen i es diuen cercles de Soddy.



Si $r_i,\ i = 1, 2, 3$ són els radis dels tres cercles tangents denotem

$$k_i = \frac{1}{r_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

les seves curvatures. Denotem per k_4 o bé l'invers del radi del cercle tangent interior o bé menys l'invers del radi del cercle tangent exterior. Llavors es compleix

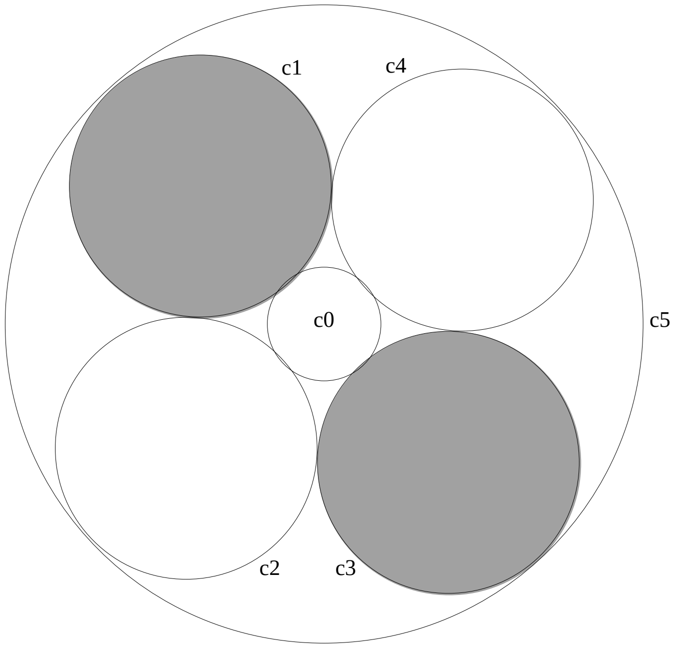
$$2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2$$

Observem que les inversions, per exemple la que posa els cercles de Soddy concèntrics, no conserven les distàncies i per tant tampoc les curvatures però en canvi sempre es compleix que el quadrat de la suma és el doble de la suma dels quadrats.

> Four circles to the kissing come
> the smaller are the benter
> the bend is just the inverse of
> the distance from the center
> though their intrigue left Euclid dumb
> there's now no need for rule of thumb
> since zero bend's a dead straight line
> and concave bends have minus sign
> *the sum of the squares of all four bends*
> *is half the square of their sum.*
>
> (Soddy, 1936)

Steiner n=4

És interessant el cas $n = 4$ ja que la configuració que apareix



és transitiva en el sentit de que el paper jugat per $\mathcal{C}_0$ i $\mathcal{C}_5$ és el mateix que el jugat per $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_3$ o per $\mathcal{C}_2$ i $\mathcal{C}_4$. En efecte, una inversió que posi $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_3$ concèntrics transforma els demés cercles en tangents interiors comuns. En particular

$$\delta = d(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_5) = d(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3) = d(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4) = 2 \ln \tan(\frac{3\pi}{8}) = 2 \ln(1 + \sqrt{2}).$$

10.2 Taula resum

Com que la relació entre producte i distància és

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \cosh \delta$$

tenim

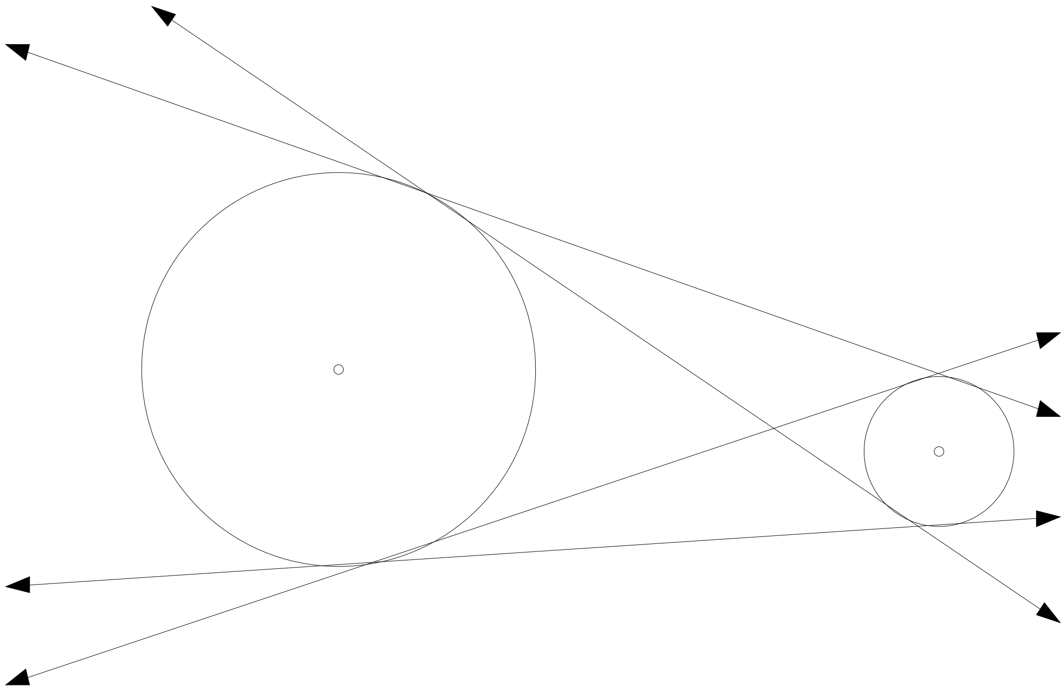
Concèntriques	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \frac{1}{2}(\frac{R}{r} + \frac{r}{R})$
Steiner	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 + 2\tan^2 \frac{\pi}{n}$
Steiner n=3 (Soddy)	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 7, \qquad \cosh \frac{\delta}{2} = 2$
Steiner n=4	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 3, \qquad \cosh \frac{\delta}{2} = \sqrt{2}$
Incercle, Circumcercle	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 + \frac{r}{2R}, \qquad \sinh \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{R}}$

11 El problema d'Apoloni

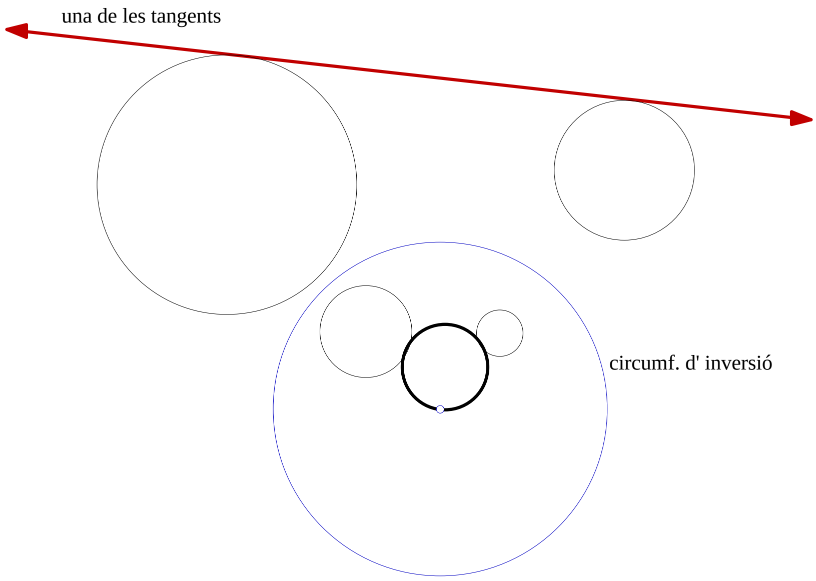
Un altra problema on es veu el poder de les inversions és el problema d'Apoloni, que consisteix en construir totes les circumferències tangents a tres circumferències donades. Cadascuna d'aquestes circumferències podrà ser en principi interior o exterior a la circumferència tangent que busquem de manera que tenim $2^3 = 8$ possibles solucions. Veurem que genèricament hi ha vuit solucions, que poden ser menys en funció de la posició relativa de les tres circumferències inicials.

11.1 Circumferència tangent a dues circumferències donades i que passa per un punt donat

Suposarem conegut que donades dues circumferències exteriors hi ha quatre tangents, dues exteriors i dues interiors. Les exteriors deixen les circumferències a un mateix costat i les interiors les deixen una a cada costat. Són fàcils de construir.

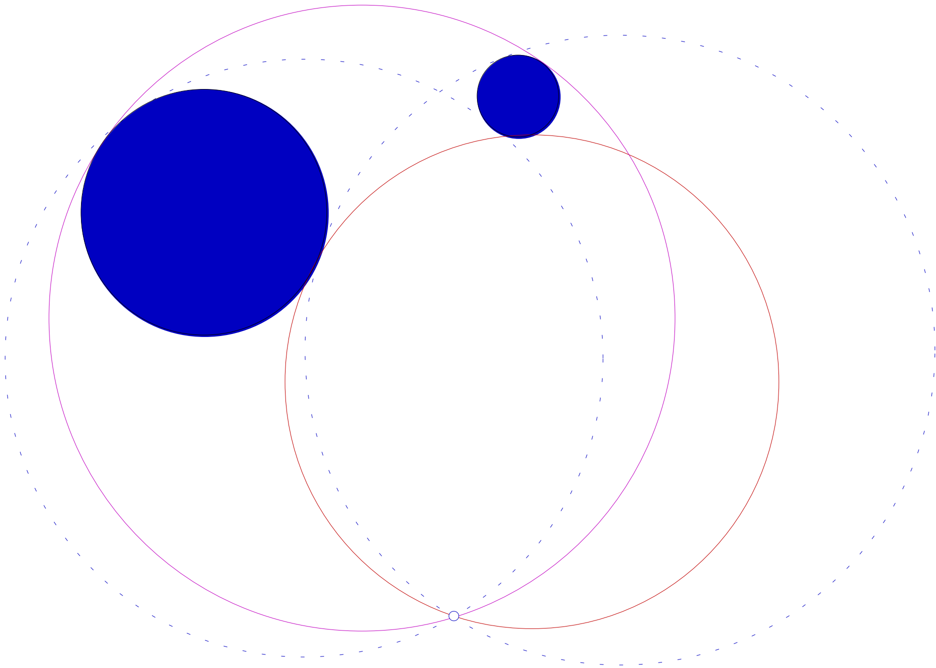


A continuació farem una inversió de l'anterior figura. Suposarem que el centre no pertany ni a les circumferències ni a les tangents. Les quatre rectes tangents es transformen en quatre circumferències que passen pel centre d'inversió i que són tangents a les transformades de la dues circumferències donades.



Com que les inversions són involutives, els anteriors comentaris ens diuen que per construir una circumferència que passi per un punt donat P i sigui tangent a dues circumferències donades $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ hem de procedir així:

- Fem una inversió φ de centre P i radi arbitrari.
- Construïm les quatre rectes tangents a $\varphi(\mathcal{C}_1)$ i $\varphi(\mathcal{C}_1)$.
- Apliquem φ.



11.2 El problema d'Apoloni, construcció final

Construïm ara una de les circumferències tangents a tres circumferències donades $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$.

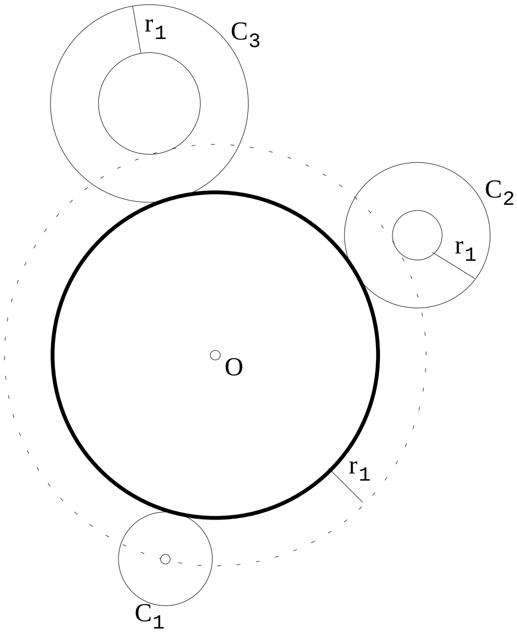
Suposem que els radis respectius compleixen $r_1 \leq r_2 \leq r_3$. Construïm a continuació $\mathcal{C}'_2$ i $\mathcal{C}'_3$ amb el mateix centre respectivament que $\mathcal{C}_2$ i $\mathcal{C}_3$ i radis $r_3 - r_1$ i $r_2 - r_1$.

Construïm, usant els comentaris de la secció anterior, una de les circumferències que passen pel centre O_1 de $\mathcal{C}_1$ i és tangent a $\mathcal{C}'_2$ i $\mathcal{C}'_3$. Hi ha quatre possibilitats, però només ens interessen dues.

La primera és quan la circumferència que construïm $\mathcal{C}$ és tal que $\mathcal{C}'_2$ i $\mathcal{C}'_3$ són exteriors a ella. Sigui O el seu centre i R el seu radi. Llavors la circumferència de centre O i radi $R - r_1$ és la circumferència buscada tangent a $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ i $\mathcal{C}_3$.

La segona possibilitat és quan la circumferència que construïm $\mathcal{C}$ és tal que $\mathcal{C}'_2$ i $\mathcal{C}'_3$ són interiors a ella. Llavors la circumferència de centre O i radi $R + r_1$ és la circumferència buscada tangent a $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ i $\mathcal{C}_3$.

Així hem construït dues de les circumferències buscades. Les vuit solucions provenen de que aquesta construcció es pot fer prenent $\mathcal{C}'_2$ i $\mathcal{C}'_3$ de radis $r_3 \pm r_1$ i $r_2 \pm r_1$.



12 Geometria Inversiva

Recordem molt breument que des del punt de vista de F.Klein la Geometria és l'estudi de les propietats de les figures invariants per "moviments".

Per exemple la geometria euclidiana és l'estudi de les propietats de les figures invariants per transformacions que conserven la distància. Aquestes transformacions es diuen moviments euclidians.

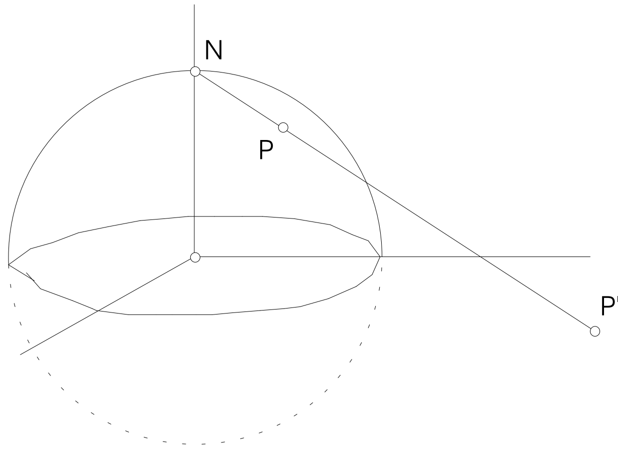
Anàlogament

Definició 12.1 *La geometria inversiva és l'estudi de les propietats de les figures invariants per inversions.*

Per ser una mica més precisos hauríem de dir que la geometria inversiva *plana* és l'estudi de les propietats de les figures del pla invariants per inversions. Però recordem que les inversions no són pròpiament transformacions del pla, ja que el centre d'inversió no té imatge.

Per evitar això el que es fa és completar el pla amb un punt, anomenat punt de l'infinit. Si identifiquem el pla amb el pla complex $\mathbb{C}$ el que tenim és un conjunt $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ i ara sí que les inversions són transformacions de $\hat{\mathbb{C}}$, és a dir tota inversió φ es pot pensar com $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$. La geometria de $\hat{\mathbb{C}}$ amb les inversions és coneix també com *geometria conforme*, ja que la propietat més característica de les inversions és que conserven angles.

Una manera de pensar $\hat{\mathbb{C}}$ és com l'esfera de centre l'origen i radi 1, ja que tenim una bijecció entre l'esfera menys el pol nord i el pla $\mathbb{C}$, via la projecció estereogràfica, i per tant pensant que el pol nord va a l'∞, tenim una bijecció entre tota l'esfera i $\hat{\mathbb{C}}$.



Observem també que la projecció estereogràfica, definida com l'aplicació que envia tot punt P de l'esfera al punt P' intersecció de la recta NP (N = pol nord) amb el pla $\mathbb{C} : \{z = 0\}$, és de fet una inversió respecte l'esfera de centre N i radi $\sqrt{2}$. En particular cercles van a cercles (les rectes són cercles per l'∞), i es conserven els angles. Observem que ara parlem d'inversions respecte esferes mentre que en aquestes notes només hem definit inversions respecte cercles, però tot funciona igual.

Quan s'estudia l'esfera des d'aquest punt de vista es parla de l'*esfera de Riemann* (com conjunt de punts és l'esfera però els "moviments" són les transformacions que provenen de les inversions del pla via la projecció estereogràfica).

Alguns resultats de geometria conforme són els següents:

Teorema 12.2 (Transitivitat a nivell de ternes de punts) *Donats tres punts A, B, C i tres punts més A', B', C' existeix una única composició d'inversions que porta A a A', B a B' i C a C'.*

En particular oblidem-nos de parlar de distància entre dos punts, ja que dues parelles de punts qualssevol són equivalents des del punt de vista de les inversions i per tant tots el punts estan a la mateixa distància entre ells.

Com a conseqüència tenim

Teorema 12.3 *Donats dos cercles, sempre podem passar d'un a l'altra per una composició d'inversions.*

Observem el paral·lelisme entre el següent teorema i el teorema fonamental de la geometria afí o projectiva.

Teorema 12.4 (Teorema fonamental de la geometria inversiva) *Tota bijecció que conserva cercles és composició d'inversions.*

Relacionat amb variable complexa recordem

Teorema 12.5 *Tota bijecció analítica de $\hat{\mathbb{C}}$ és una transformació de Möbius*

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0.$$

Segons es conservin o no orientacions tenim

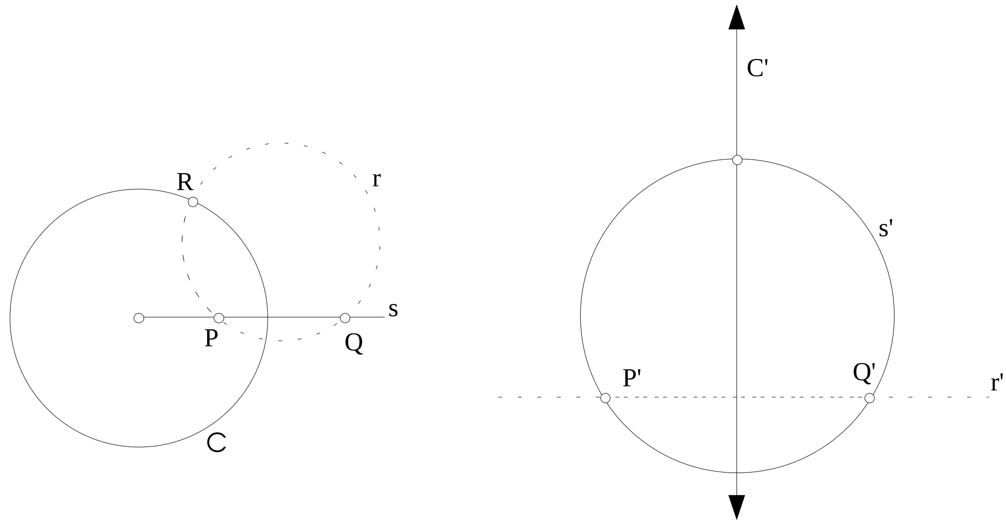
Teorema 12.6 *Tota composició d'inversions és una transformació de Möbius o una transformació de Möbius precedida de conjugació.*

De manera que quan s'estudia l'esfera com a varietat complexa (el projectiu complex $P^1(\mathbb{C})$) les transformacions que es permeten són les analítiques, és a dir les de Möbius, mentre que quan s'estudia com a varietat conforme es consideren també les composicions de Möbius amb conjugació, per tenir així totes les transformacions, tant si conserven orientacions com si no.

12.1 Simetria euclidiana com inversió respecte una circumferència per l'∞

Quan es parla de les inversions de $\hat{\mathbb{C}}$ s'hi inclouen les simetries respecte rectes de $\mathbb{C}$ (que són circumferències de $\hat{\mathbb{C}}$ ja que passen per l'∞.)

Siguin P, Q inversos per una inversió respecte una circumferència $\mathcal{C}$ de centre O i radi OR. Sabem que $OP \cdot OQ = OR^2$ i que la circumferència r determinada per P, Q, R és ortogonal a la circumferència d'inversió. Denotem per s la recta PQ.



Fem una inversió de centre R. Esquemàticament tindrem

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{C} & \longrightarrow & \text{recta } \mathcal{C}' \\
\text{recta } PQ & \longrightarrow & \text{circumf. } s' \\
\text{circumf. } RPQ & \longrightarrow & \text{recta } r' \\
r \perp \mathcal{C} & \longrightarrow & r' \perp \mathcal{C}' \\
s \perp \mathcal{C} & \longrightarrow & s' \perp \mathcal{C}' \\
P, Q \in r \cap s & \longrightarrow & P', Q' \in r' \cap s'
\end{array}$$

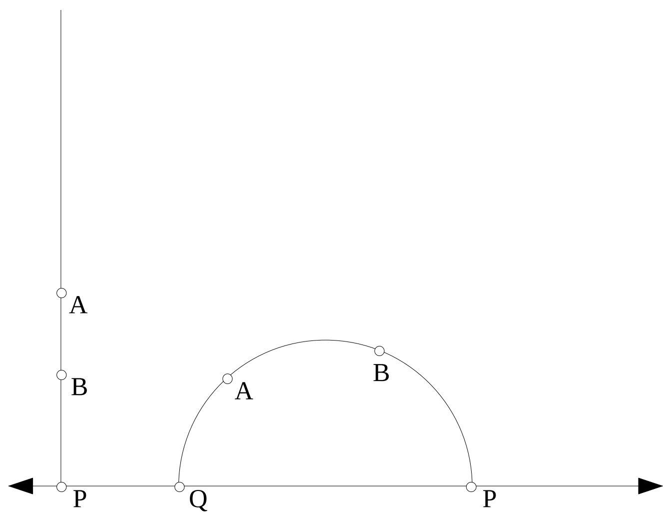
Les dues últimes afirmacions ens diuen que P', Q' són simètrics respecte $\mathcal{C}'$.

Per tant i resumint, llevat d'inversions és el mateix dir que dos punts són simètrics respecte una recta que inversos respecte una circumferència.

13 Geometria hiperbòlica

Si en lloc de considerar totes les inversions en considerem només unes quantes el teorema fonamental de la geometria conforme no es complirà i tindrem esperances de definir una distància. Concretament quan parlem del *pla hiperbòlic* ens referim al semipla $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ en el que considerem els "moviments" donats per les inversions respecte circumferències de centre sobre la recta $y = 0$ i simetries respecte rectes $x = cte$ (que es poden considerar com inversions respecte circumferències de radi infinit). D'aquestes rectes i circumferències se'n diuen rectes hiperbòliques.

Donats dos punts A, B es defineix la distància hiperbòlica entre ells per
$$d(A, B) = |\ln(A, B, P, Q)|$$
on P, Q són els punts de l'infinit de la recta hiperbòlica AB.



Si A, B pertanyen a una recta $x = cte$ que talla $y = 0$ en P llavors
$$d(A, B) = |\ln(A, B, P, \infty)| = |\ln(A, B, P)| = |\ln \frac{AP}{BP}|$$

Com que la raó doble és invariant per inversions aquesta distància és també invariant per inversions i per tant objecte d'estudi de la geometria hiperbòlica.

De fet tota aplicació que conserva aquesta distància és composició d'inversions. D'aquestes aplicacions se'n diuen isometries hiperbòliques.

Resumint

Definició 13.1 *La geometria hiperbòlica és l'estudi de les propietats de les figures de del pla hiperbòlic* $\mathbb{H}^2$ *invariants per isometries hiperbòliques.*

13.1 Distància entre cercles: punt de vista hiperbòlic

El següent bonic resultat me'l va fer observar en Gil Solanes.

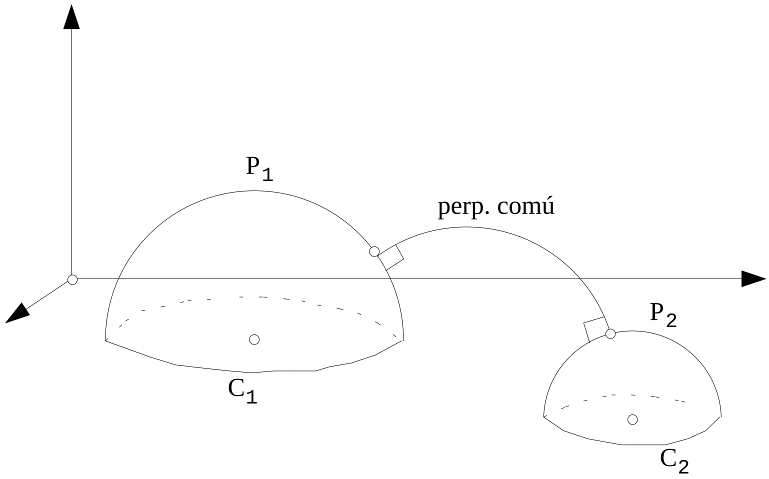
Situem-nos primerament a l'espai hiperbòlic

$$\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}.$$

Per definició, els plans hiperbòlics de $\mathbb{H}^3$ (recordem com eren les rectes de $\mathbb{H}^2$) són els plans $ax + by = c$ i les semiesferes que tenen l'equador en $z = 0$. El teorema diu que si $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ són dos d'aquest equadors corresponents respectivament als plans hiperbòlics P_1, P_2 llavors

$$d(P_1, P_2) = \delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$$

on $d(P_1, P_2)$ és la distància hiperbòlica entre aquests plans, és a dir la longitud hiperbòlica de la perpendicular comú.



Teorema 13.2 *La distància entre cercles és la distància hiperbòlica entre els plans hiperbòlics que els tenen com infinit.*

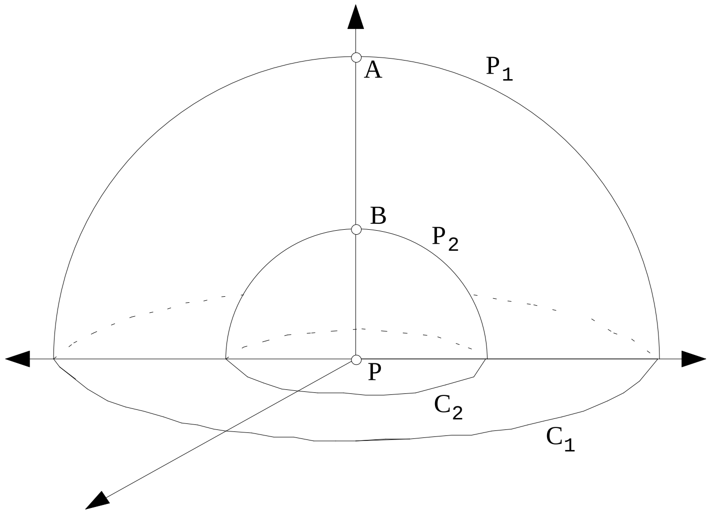
Demostració: Sigui φ una inversió que posa $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ concèntrics. Sigui P aquest centre. Estenem aquesta inversió del pla a una inversió de $\mathbb{H}^3$ fent inversió respecte una esfera que tingui la circumferència d'inversió de φ com equador, és a dir com infinit.

Llavors

$$\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \delta(\varphi\mathcal{C}_1, \varphi\mathcal{C}_2) = |\ln \frac{R}{r}|$$

on R, r són els radis de $\varphi\mathcal{C}_1$ i $\varphi\mathcal{C}_2$.

Però, per altra banda, quina és la distància hiperbòlica entre els plans P_1, P_2? La perpendicular comú a $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ és transforma en la perpendicular comú a $\varphi(\mathcal{C}_1)$ i $\varphi(\mathcal{C}_2)$ que, com són concèntriques, és un diàmetre. Aquest diàmetre talla $\varphi(\mathcal{C}_1)$ en el punt A i $\varphi(\mathcal{C}_2)$ en el punt B.



Així

$$d(P_1, P_2) = d(A, B) = \ln \frac{AP}{BP} = \ln \frac{R}{r} = \delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2),$$

com volíem. □

Així doncs, el fet de que en calcular a la secció **??** la distància entre cercles apareguin cosinus hiperbòlics no és pas casualitat sinó que ens diu que la manera natural de pensar aquestes coses és des del punt de vista de la geometria hiperbòlica.

Referències

[1] H. S. Coxeter, S. L. Greitzer, *Redécouvrons la Géométrie,* Dunod, París, 1971.

[2] M. de Guzman, *Aventuras matemáticas,* Labor, 1986.

[3] B. Herrera, A. Reventós, *Geometria Sintètica,* En preparació, 2002.

[4] P. Puig Adam, *Curso de geometria mètrica,* Euler editorial S.A., 1986.

[5] A. S. Smogorzhevski, *Acerca de la geometría de Lobatchevski,* Lecciones populares de Matemàticas, Editorial MIR, 1978.

Índex

Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona, 08193, Bellaterra, Barcelona. agusti@mat.uab.es