Geometria Inversiva

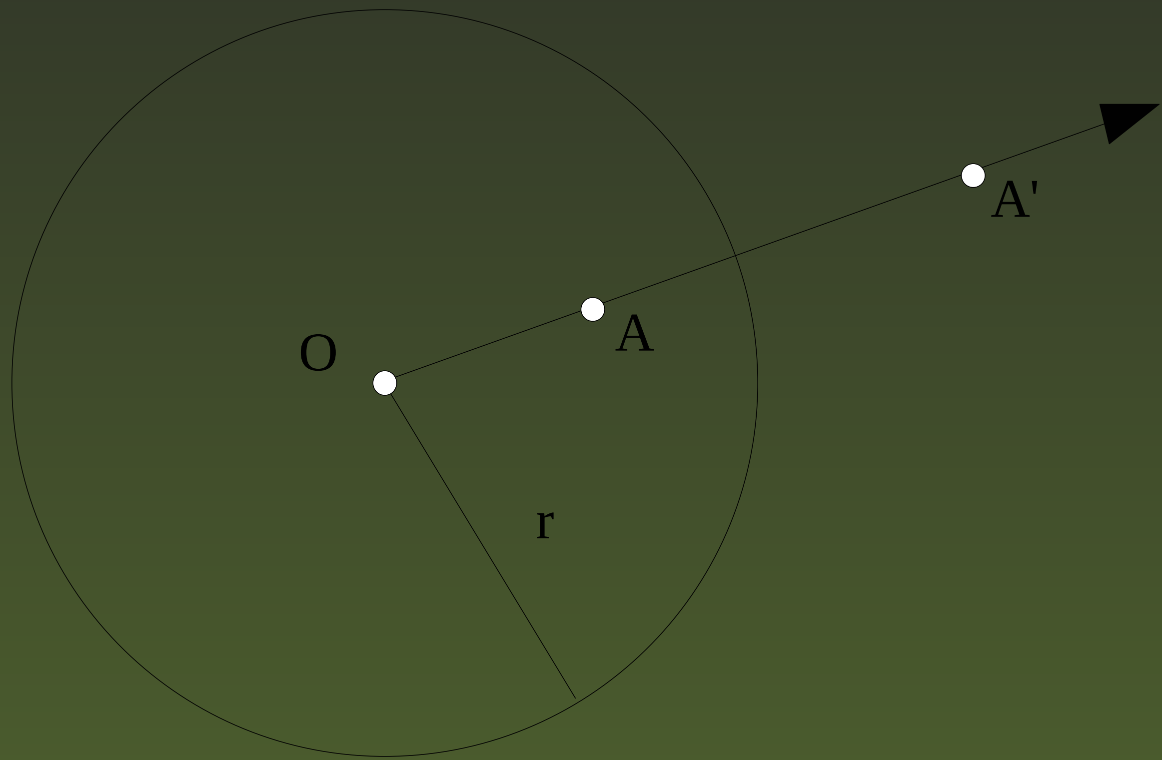
Agustí Reventós Tarrida

Inversions: una eina poderosa

Definició. *Sigui $\mathcal{C}$ una circumferència de centre O i radi r. Una inversió respecte $\mathcal{C}$ és la transformació del pla que envia cada punt A al punt A' de la semirecta OA tal que*

$$OA \cdot OA' = r^2.$$

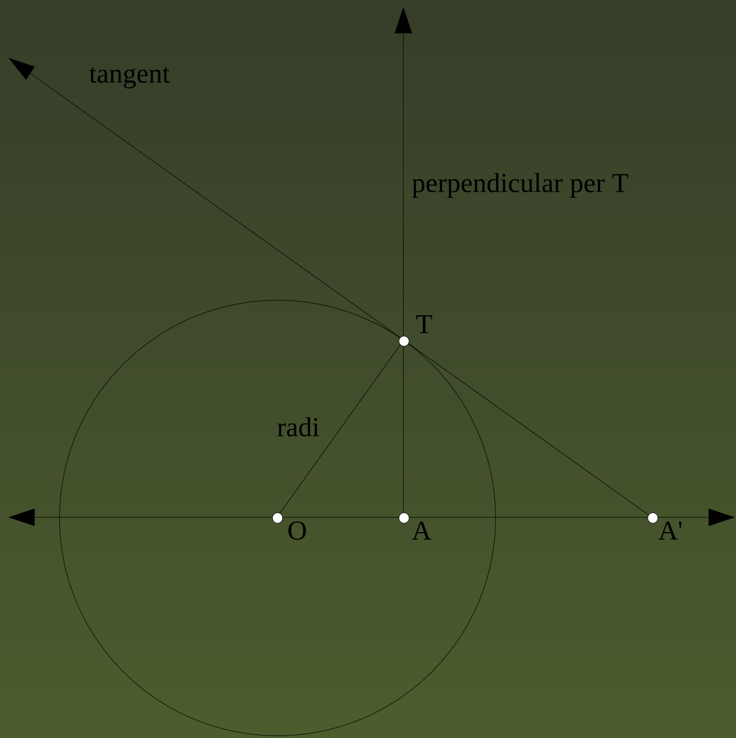
Inversions: una eina poderosa



Observem que tot punt interior a $\mathcal{C}$ té per imatge un punt exterior a $\mathcal{C}$ i recíprocament. Els punts de $\mathcal{C}$ són fixos.

Construcció geomètrica de l'inversió

Apliquem el teorema del catet al triangle rectangle $\triangle OTA'$.



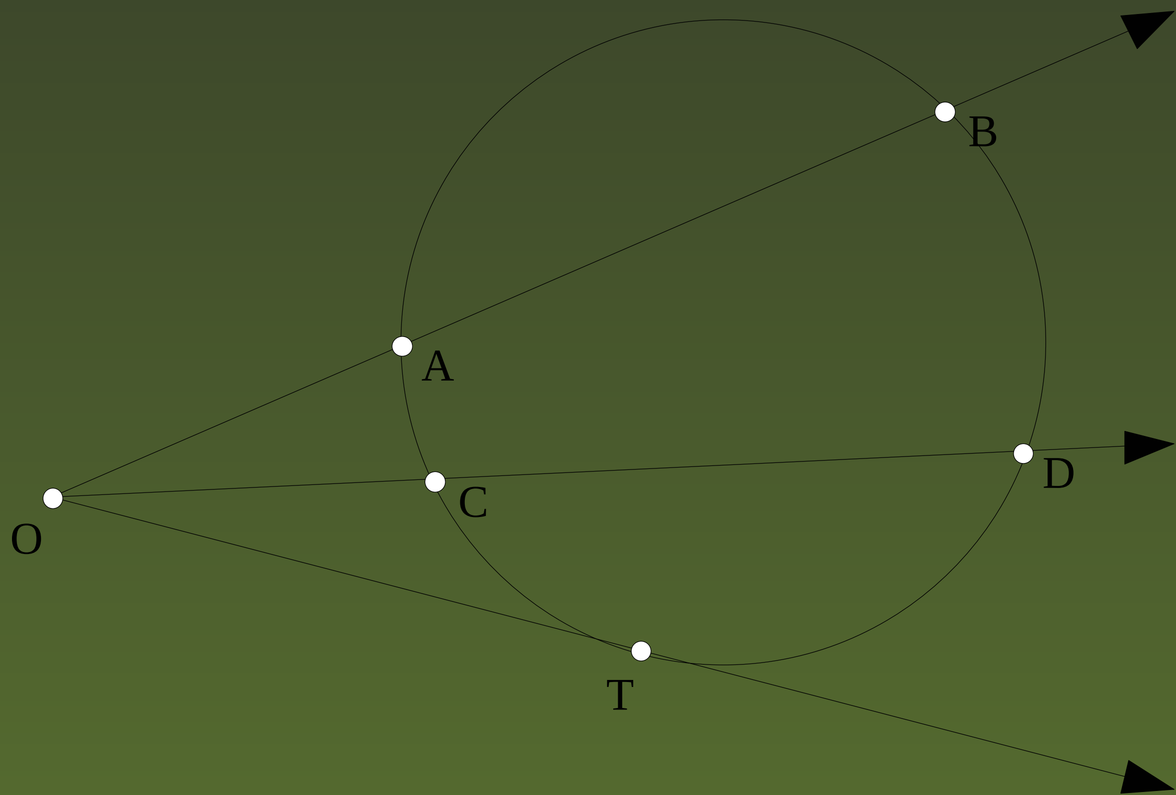
$$\frac{OA}{r} = \frac{r}{OA'}.$$

Propietats

I. *Qualsevol circumferència per A i A' és ortogonal a la circumferència d'inversió.*

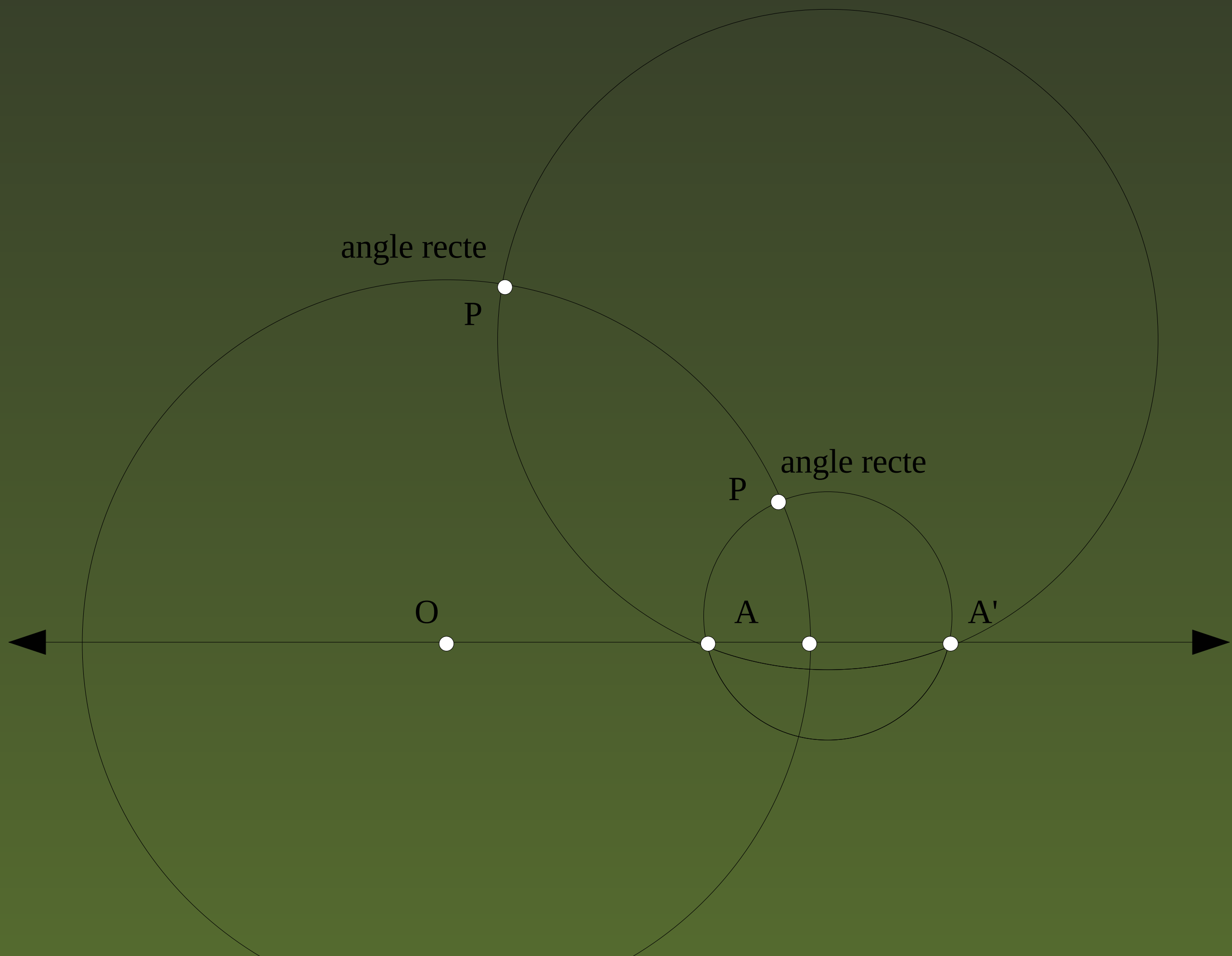
Conseqüència de la potència.

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD = OT^2.$$



Propietats

En el nostre cas
$OA \cdot OA' = OP^2 = OT^2 \Longrightarrow OP$ és tangent



Propietats

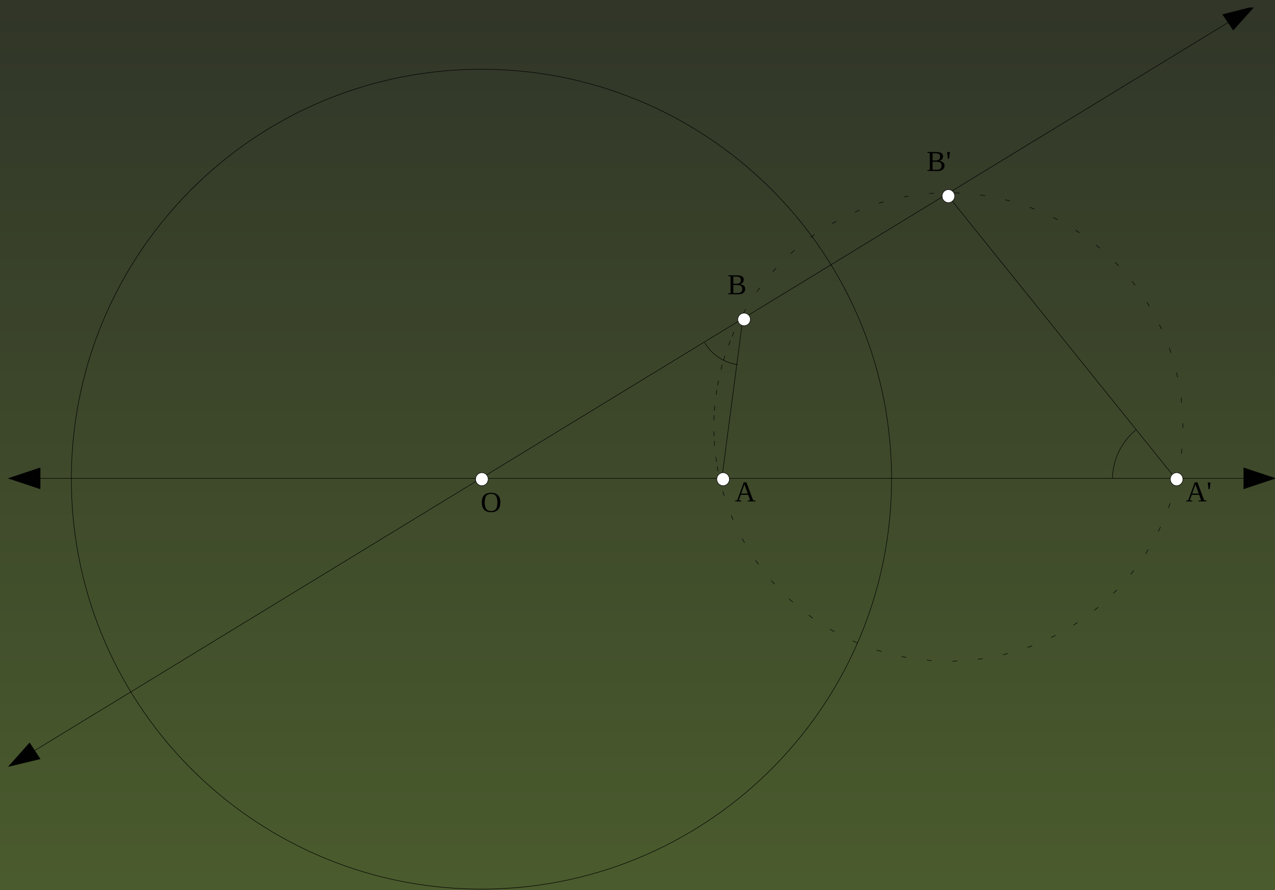
II. Idempotent. $\varphi^2 = Id$.

III. Concíclics. *Siguin A' i B' punts inversos respectivament de A i B. Llavors*

$$\angle OAB \equiv \angle OB'A' \quad \text{i} \quad \angle OBA \equiv \angle OA'B'.$$

En particular els punts A, B, A' i B' són concíclics.

Propietats



En efecte

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' \iff \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}.$$

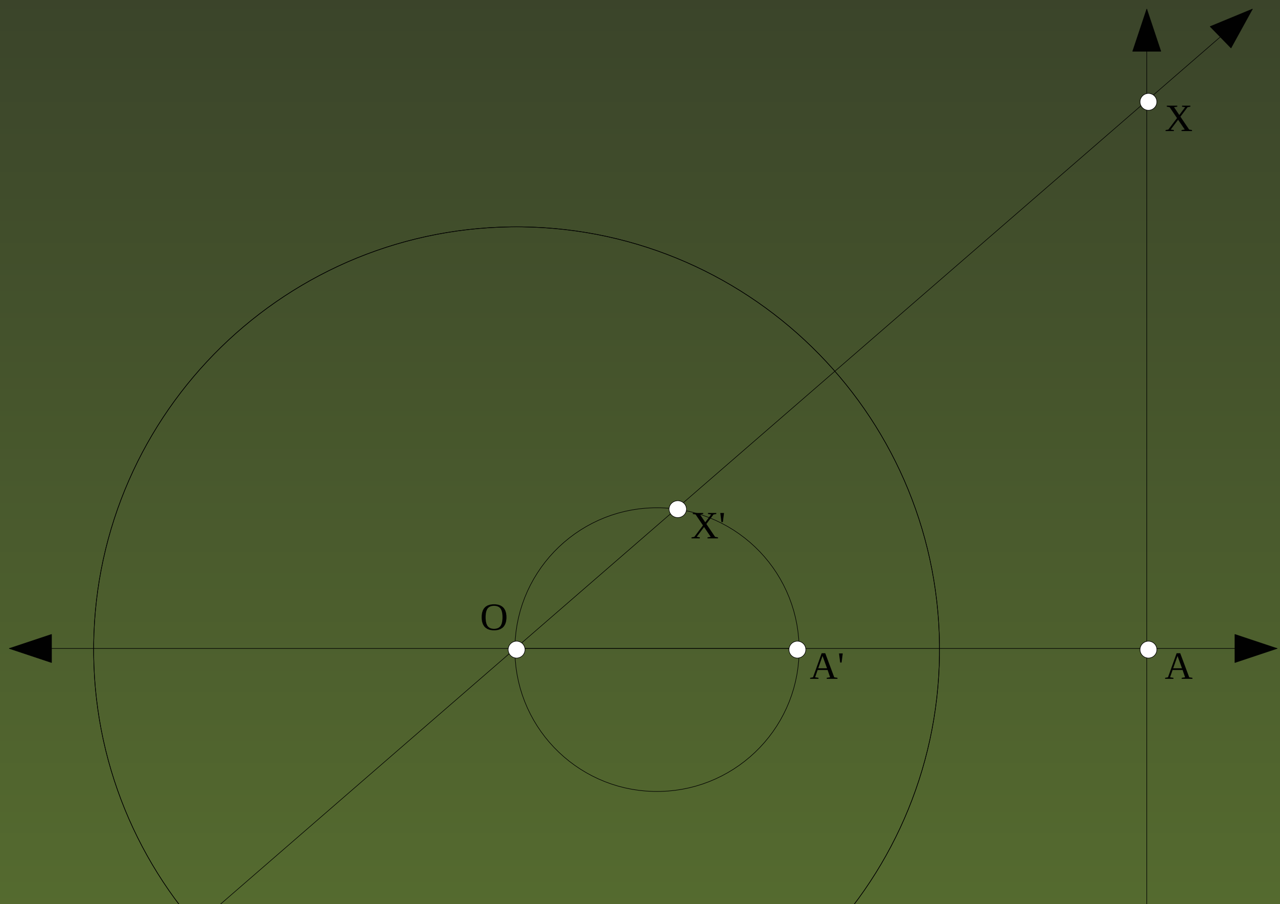
Propietats

IV. *φ porta rectes i/o circumferències a rectes i/o circumferències.*

- Recta pel centre $\longleftrightarrow$ Recta pel centre.
- Recta no pel centre $\longleftrightarrow$ Circumferència pel centre.
- Circumferència no pel centre $\longleftrightarrow$ Circumferència no pel centre.

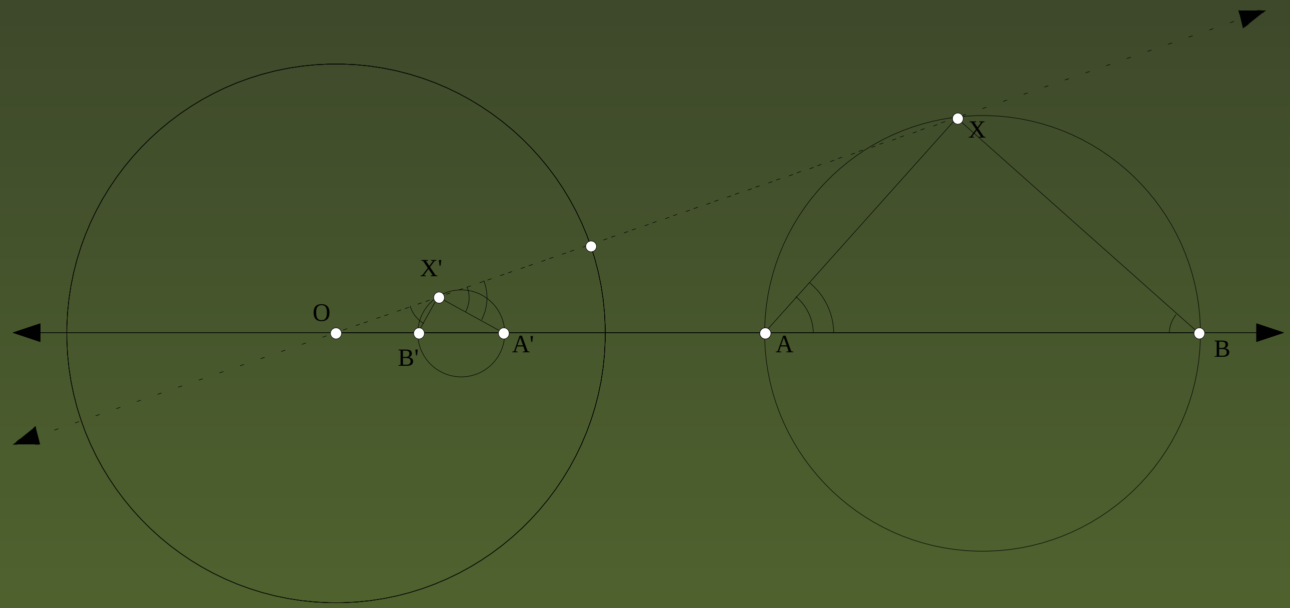
Rectes a circumferències

- Sigui s una recta que no passi pel centre d'inversió i sigui A el peu de O a s. Com que $\angle OAX = \angle OX'A' =$ recte, X' pertany a la circumferència de diàmetre OA'.



Circumferències a circumferències

- Considerem una circumferència que no passi pel centre d'inversió. Siguin A', B' els inversos del diàmetre A, B. Tenim $\angle XBA = \angle OX'B'$ i $\angle XAB = \angle A'X'X$. Com que $\angle AXB$ és recte, ha de ser $\angle A'X'B'$ recte, i X' pertany a la circumferència de diàmetre $A'B'$.



- El centre no va al centre.

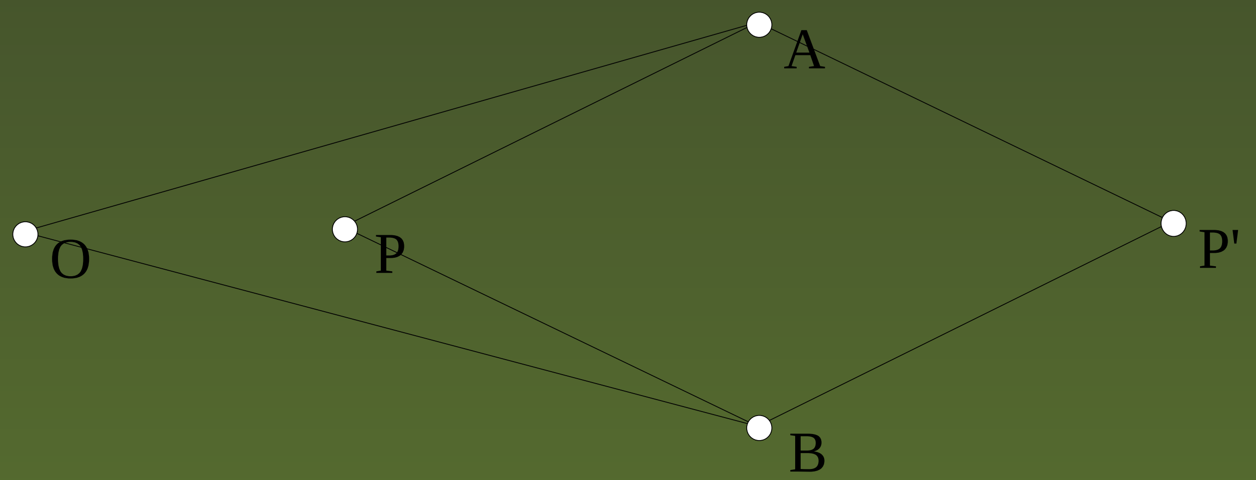
Propietats

V. *φ conserva angles.*
VI. *φ conserva la raó doble.* La *raó doble generalitzada* és

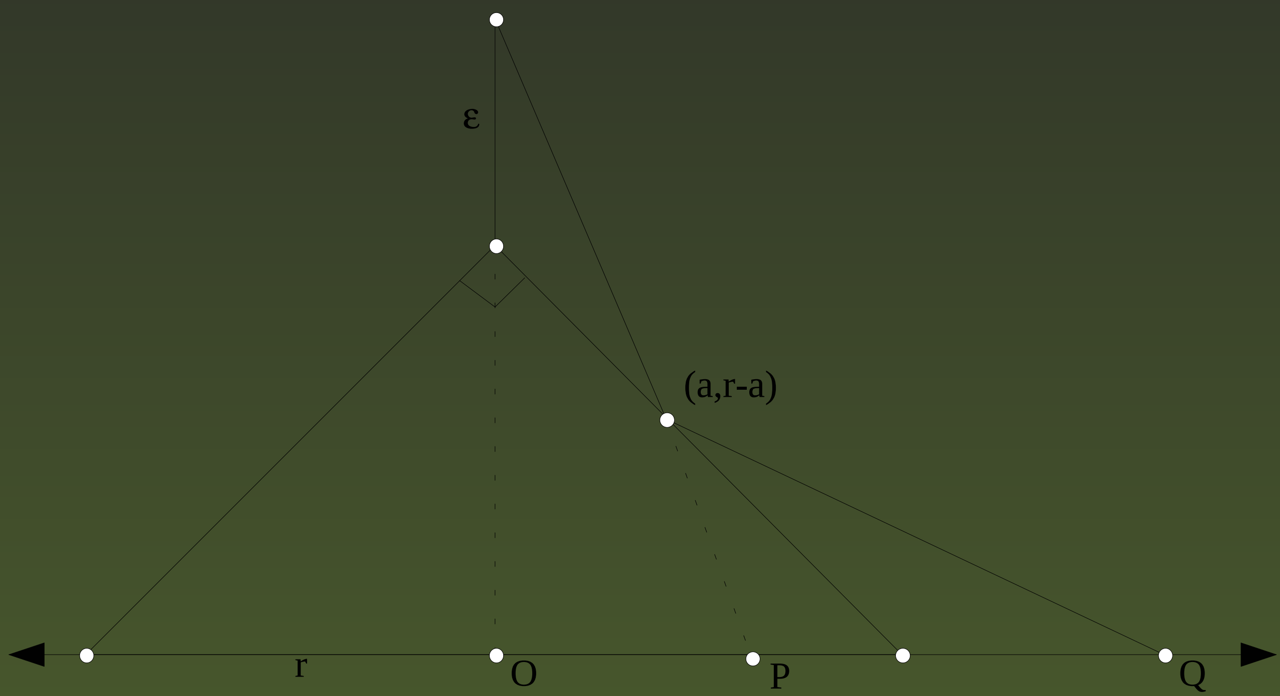
$$[A, B, C, D] = \frac{AC/BC}{AD/BD}.$$

— —

Inversor de Peucellier

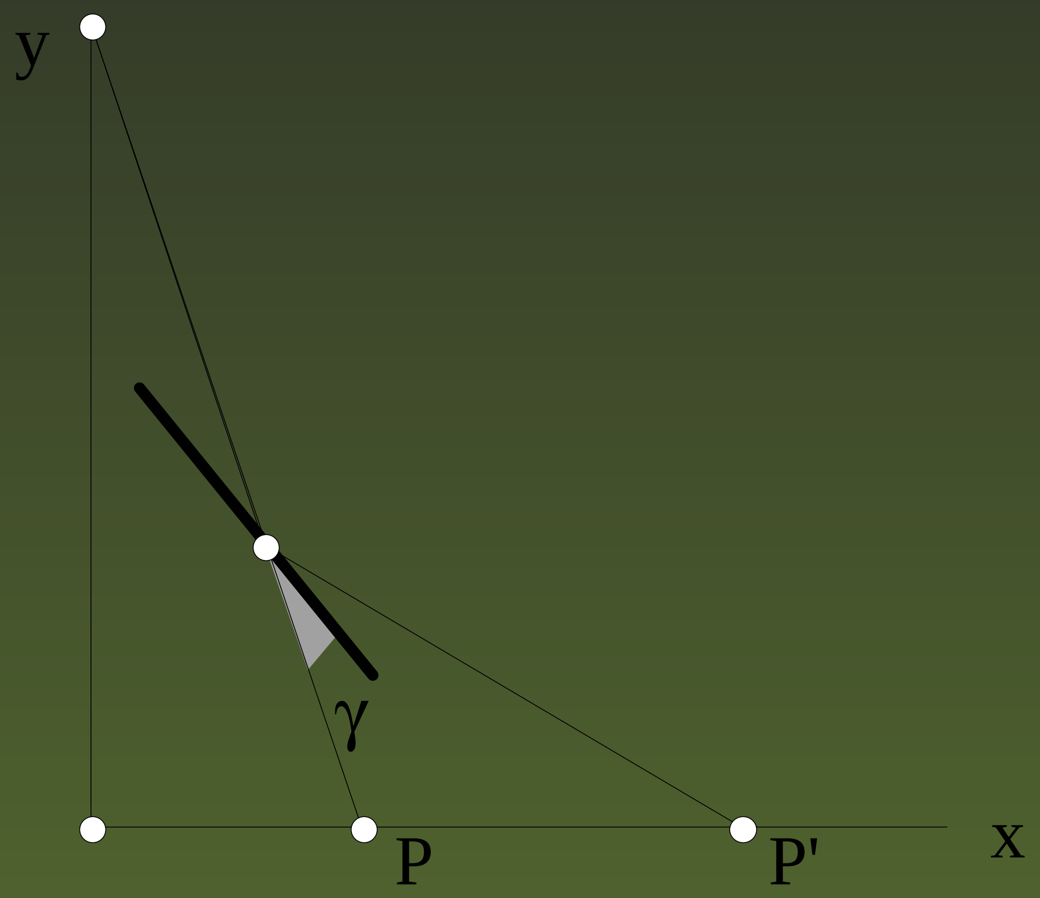


El con com inversor aproximat

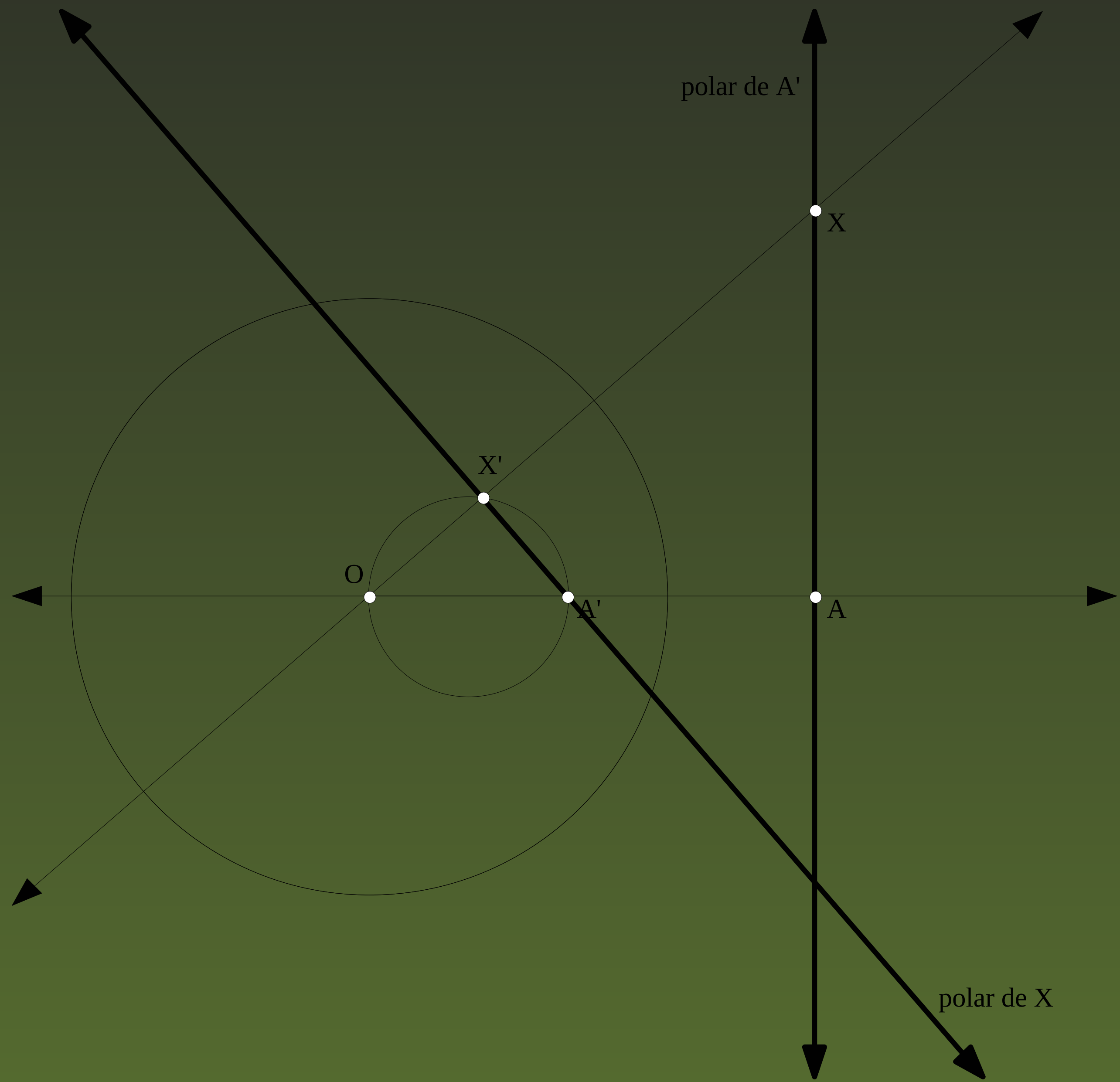


$$OP \cdot OQ \longrightarrow r^2.$$

2002. Cargo-Graver-Troutman (Siracusa Univ. NY)



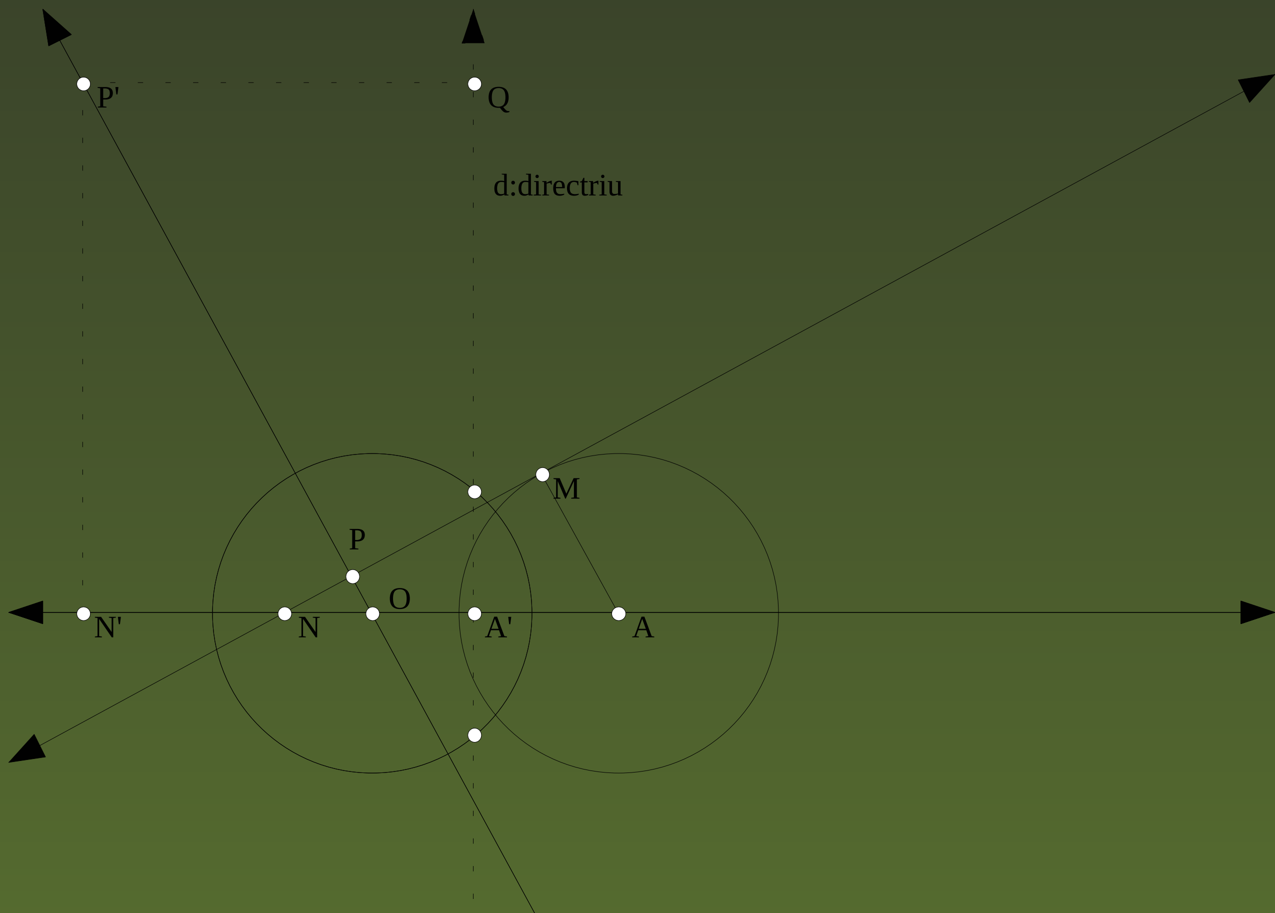
Inversions i geometria projectiva



Inversions i Còniques

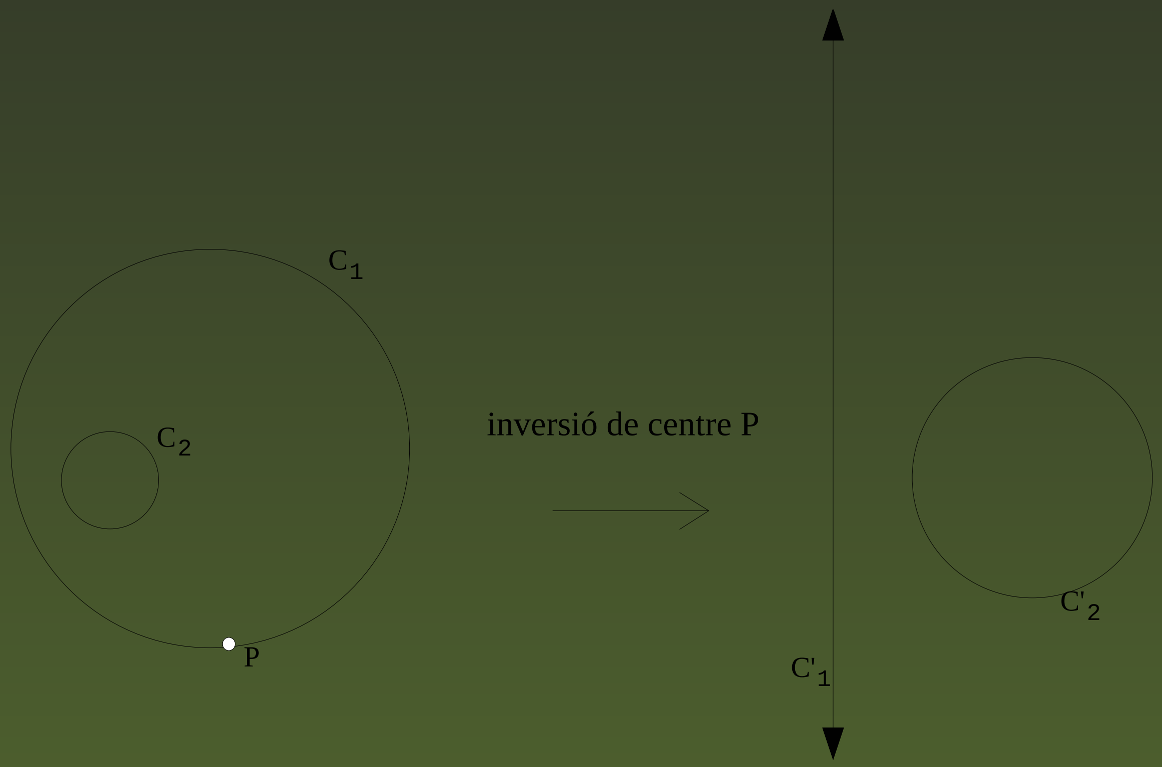
Definició *Una cònica és el lloc geomètric dels pols de les tangents a una circumferència.*

Es diu simplement que una cònica és la polar recíproca d'una circumferència.



Concèntriques

Siguin $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$ dues circumferències no concèntriques. Les transformem primerament en recta i circumferència.



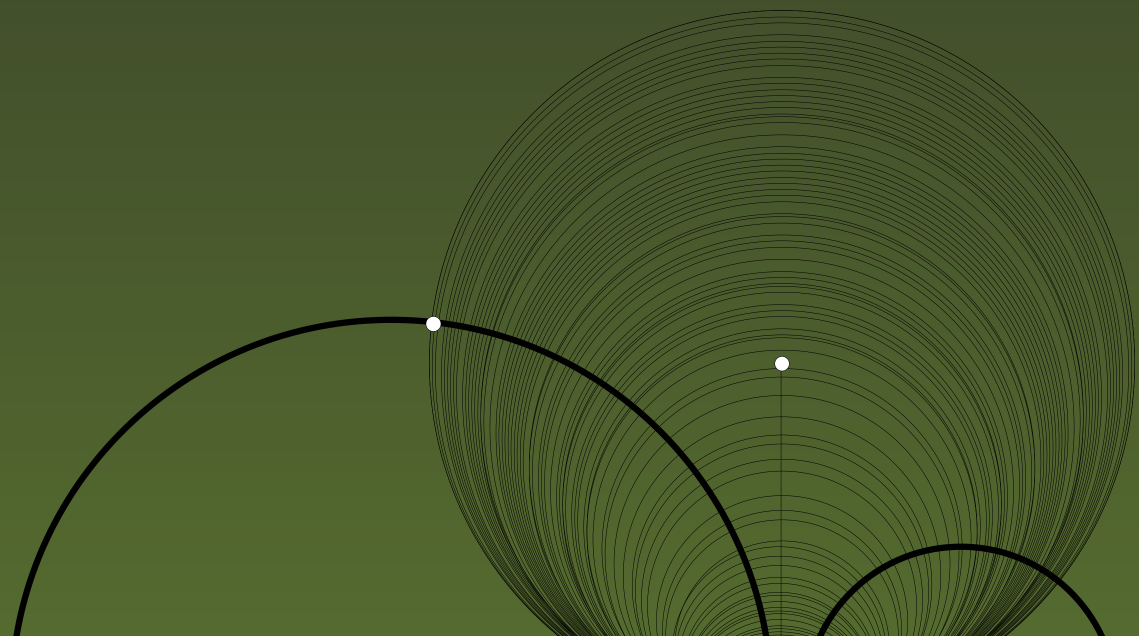
Dibuixem a continuació dues circumferències $\mathcal{C}_3$ (de centre U i radi UT) i $\mathcal{C}_4$ (de centre U' i radi $U'T'$) ortogonals a la vegada a $\mathcal{C}'_1$ i $\mathcal{C}'_2$.

Punts màgics

Teorema *Totes les circumferències ortogonals a dues circumferències donades tenen dos punts en comú.*

A partir d’aquest resultat podem simplificar l’anterior construcció tot dient:

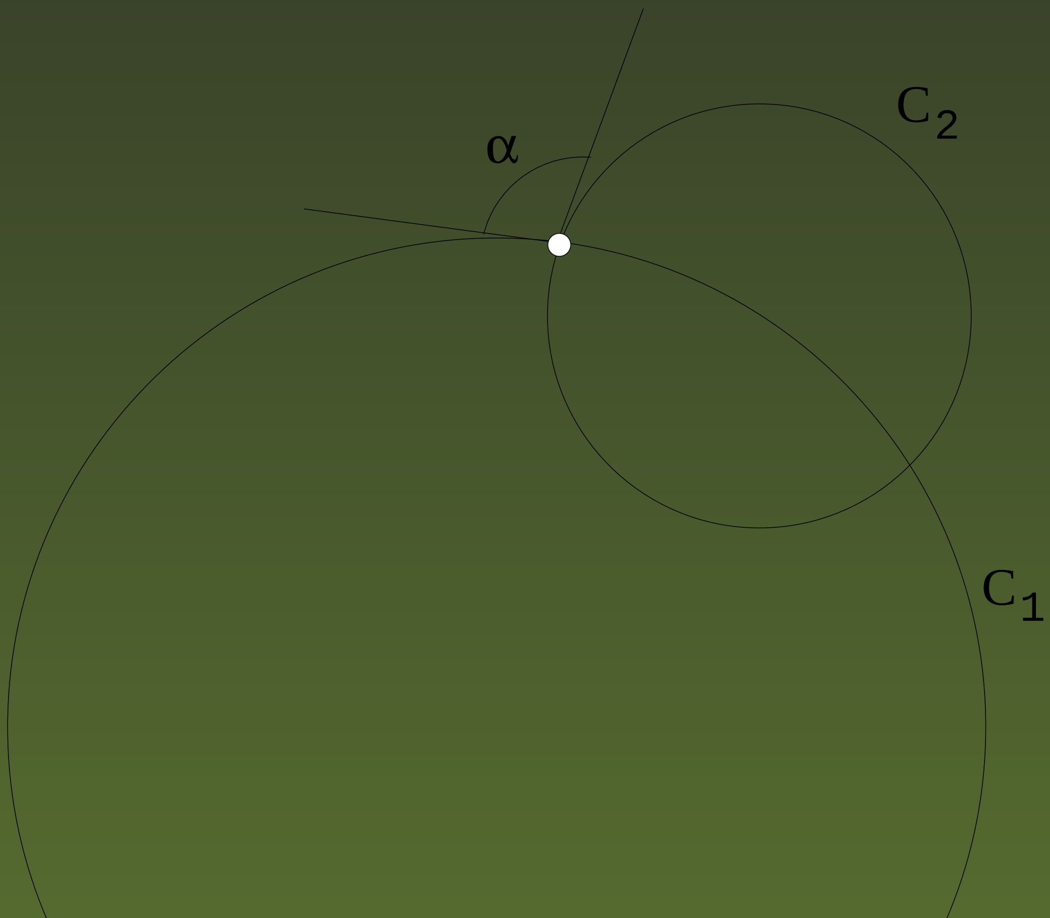
La inversió en un dels seus punts màgics posa dues circumferències qualssevol, concèntriques.



Producte inversiu de circumferències

Si $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ es tallen definim

$$\boxed{\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \cos\alpha}$$



Producte inversiu de circumferències

Quan $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ es tallen és clar que $\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$ és invariant per inversions, ja que els angles es conserven.

Miracle *El número $\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$ abans definit és invariant per inversions, tant si les circumferències es tallen com si no es tallen. Es diu que és el producte inversiu de $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$.*

Proposició. *Si $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ són dues circumferències concèntriques de radis R i r, tenim*

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R}\right).$$

Observem finalment que

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 < 1 \iff \text{es tallen}$$

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 \iff \text{són tangents}$$

Distància inversiva entre circumferències

La distància entre cercles concèntrics de radis $r \leq R$ es defineix com

$$\boxed{\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \ln \frac{R}{r}}$$

Si tenim tres circumferències concèntriques amb $s \leq r \leq R$,

$$\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) + \delta(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) = \ln \frac{R}{r} + \ln \frac{r}{s} = \ln \frac{R}{s} = \delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3)$$

que és una propietat que s'ha d'esperar de qualsevol funció distància sobre "punts alineats".

Definició *Si $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ són dues circumferències arbitraries es defineix la seva distància per*

$$\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \delta(\varphi\mathcal{C}_1, \varphi\mathcal{C}_2)$$

Relació distància-producte

Sabem que

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R}\right)$$

i que

$$\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \ln \frac{R}{r}$$

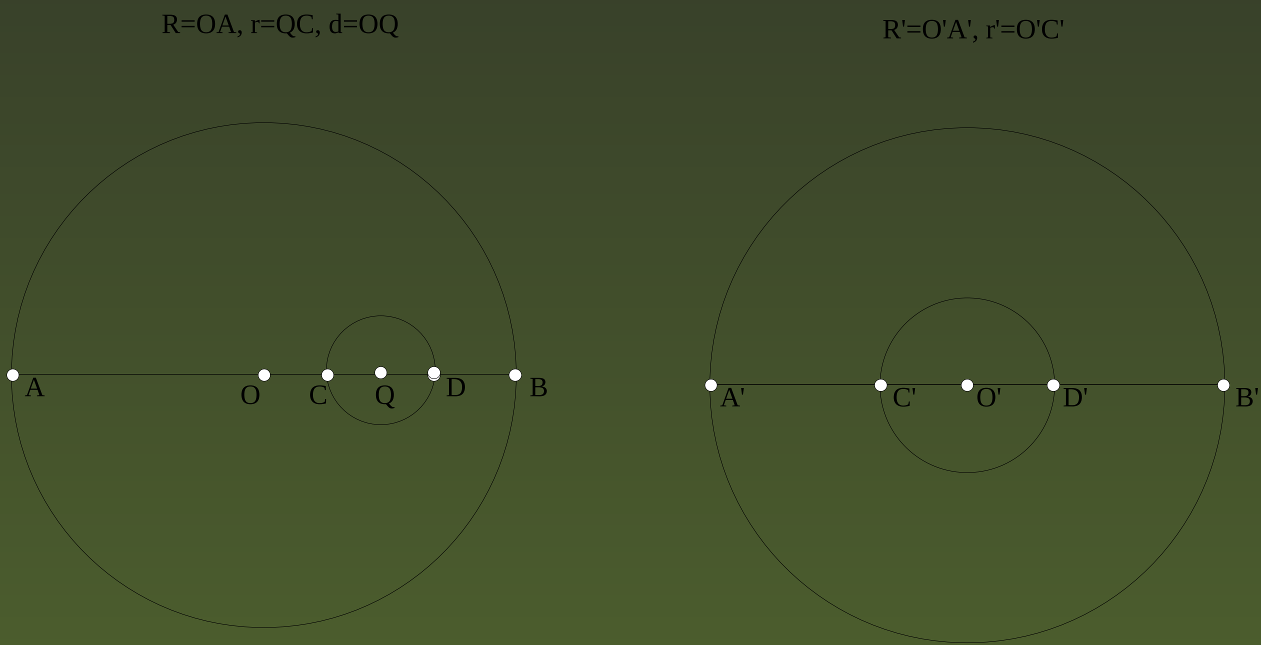
on R, r són els radis d'aquestes circumferències un cop posades concèntriques. Per tant

Teorema *Sigui δ la distància inversiva entre $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$. Llavors*

$$\boxed{\cosh \delta = \mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2}$$

Càlcul directe de la distància inversiva

(en funció dels radis R, r i la distància entre els centres ρ)
Suposem $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$. Volem calcular la distància inversiva δ entre $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ sense necessitat de posar-les concèntriques.

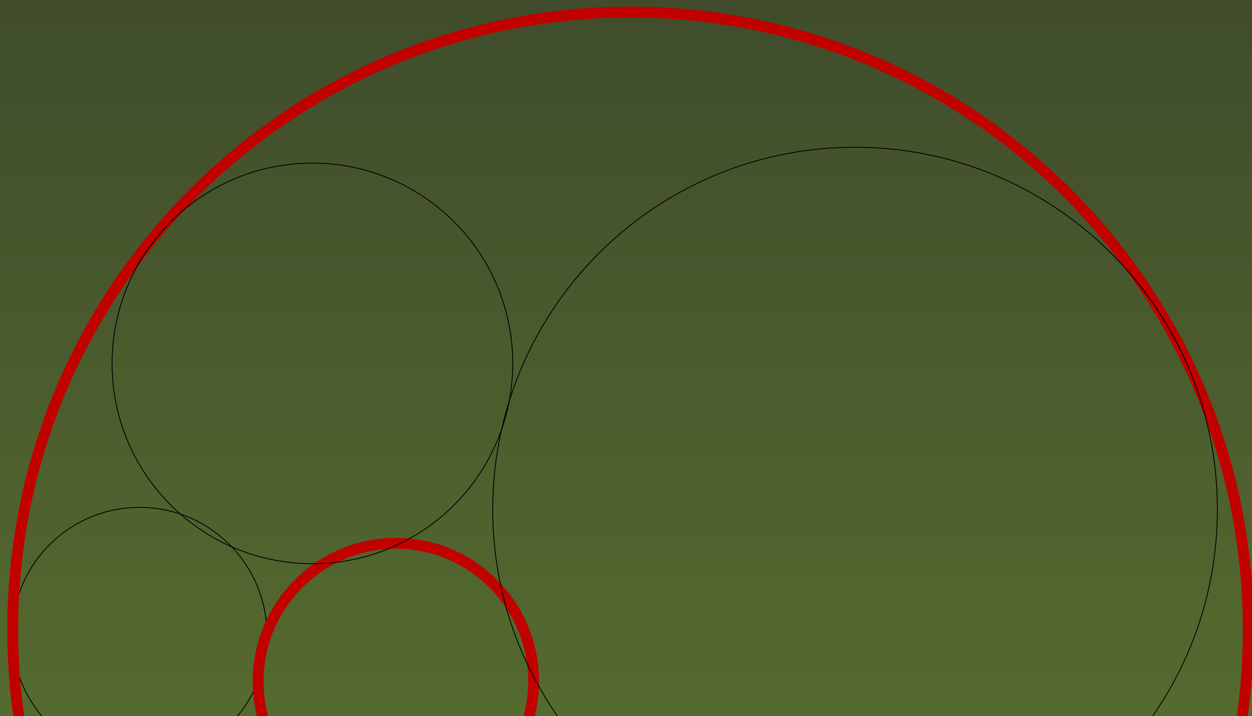


Sigui $R = OA, r = QC, \rho = OQ$. Tenim

$$(A, B, C, D) = \frac{AC/BC}{AD/BD} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

Porisme de Steiner

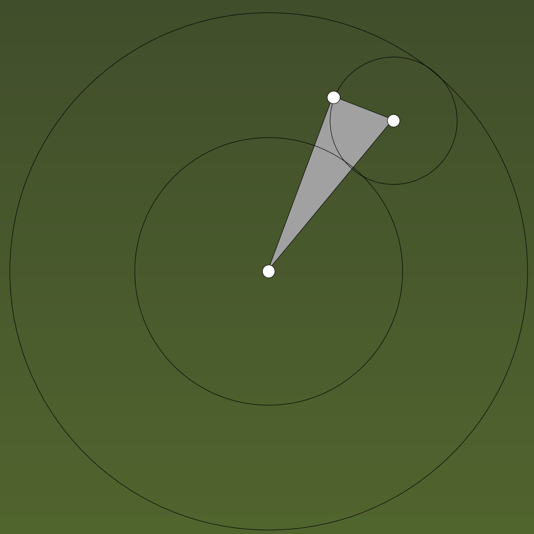
Donats dos cercles no concèntrics, un interior a l'altra, es vol saber si hi ha una cadena de cercles cadascun d'ells tangent a l'anterior i al posterior i tangents tots ells als dos cercles donats.
Aquest problema o bé no té solució, o bé té infinites solucions (porisme).

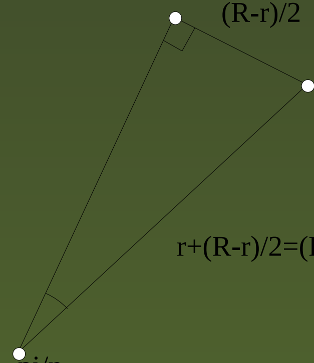


Cas concèntric

Lema *Dos cercles concèntrics de radis R i r admeten una cadena de n cercles tangents si i només si*

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{R-r}{R+r}$$

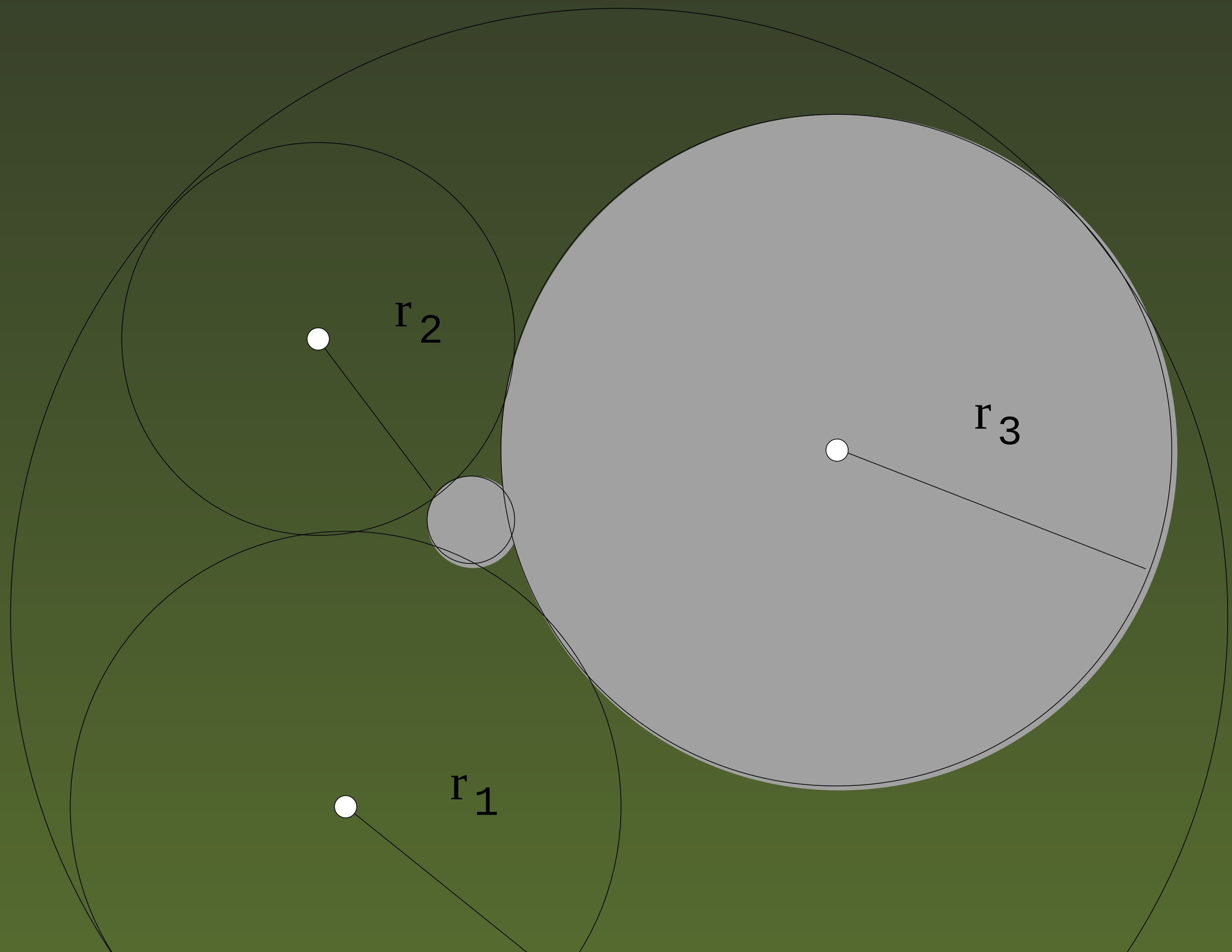




Demostració del teorema. Sigui φ una inversió que posa

Steiner $n = 3$

Un resultat molt interessant de Descartes, 1643, fa referència als anomenats posteriorment cercles de Soddy, i que representa un cas particular de Steiner amb $n = 3$.



Un vers

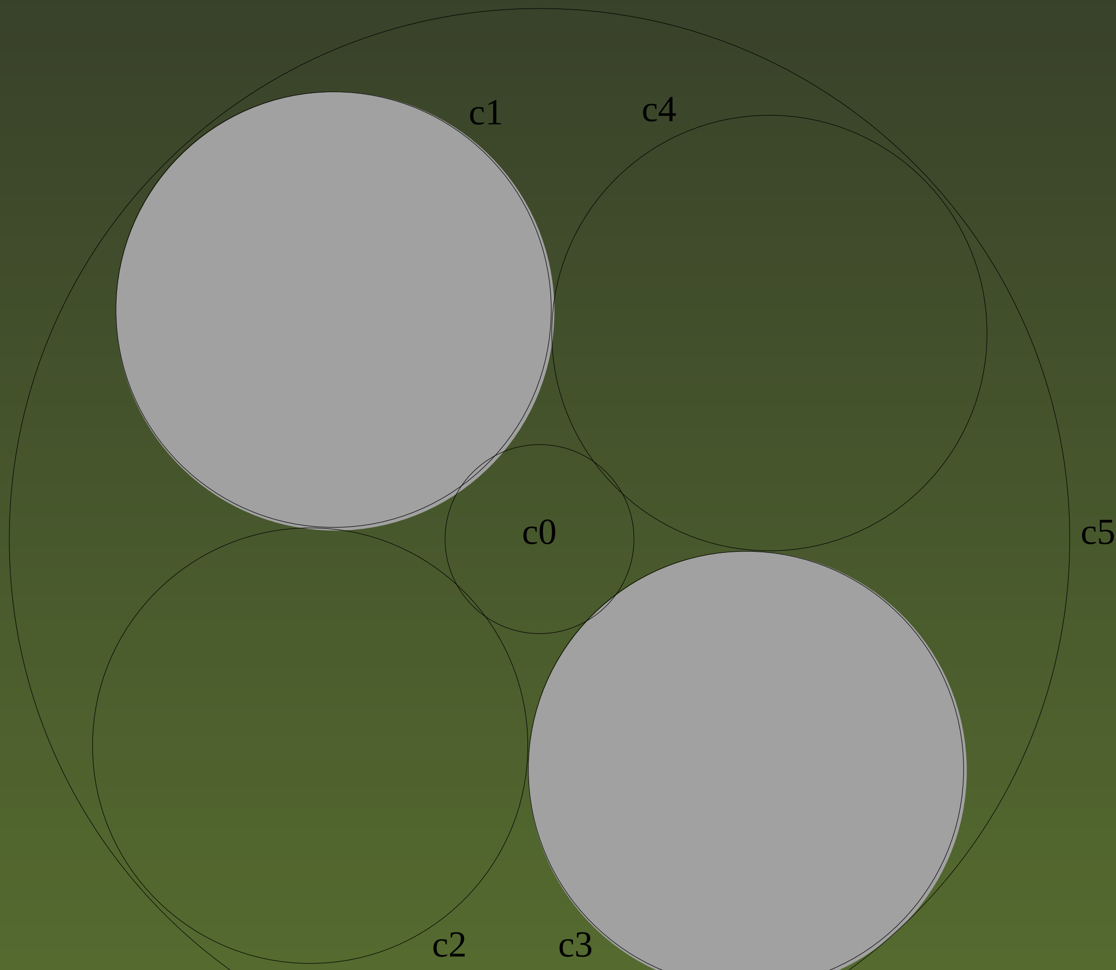
- Observem però que les inversions no conserven les curvatures.

Four circles to the kissing come
the smaller are the benter
the bend is just the inverse of
the distance from the center
though their intrigue left Euclid dumb
there's now no need for rule of thumb
since zero bend's a dead straight line
and concave bends have minus sign
the sum of the squares of all four bends
is half the square of their sum.

(Soddy, 1936)

Steiner n=4

És interessant el cas $n = 4$ ja que la configuració que apareix és transitiva.



Taula resum

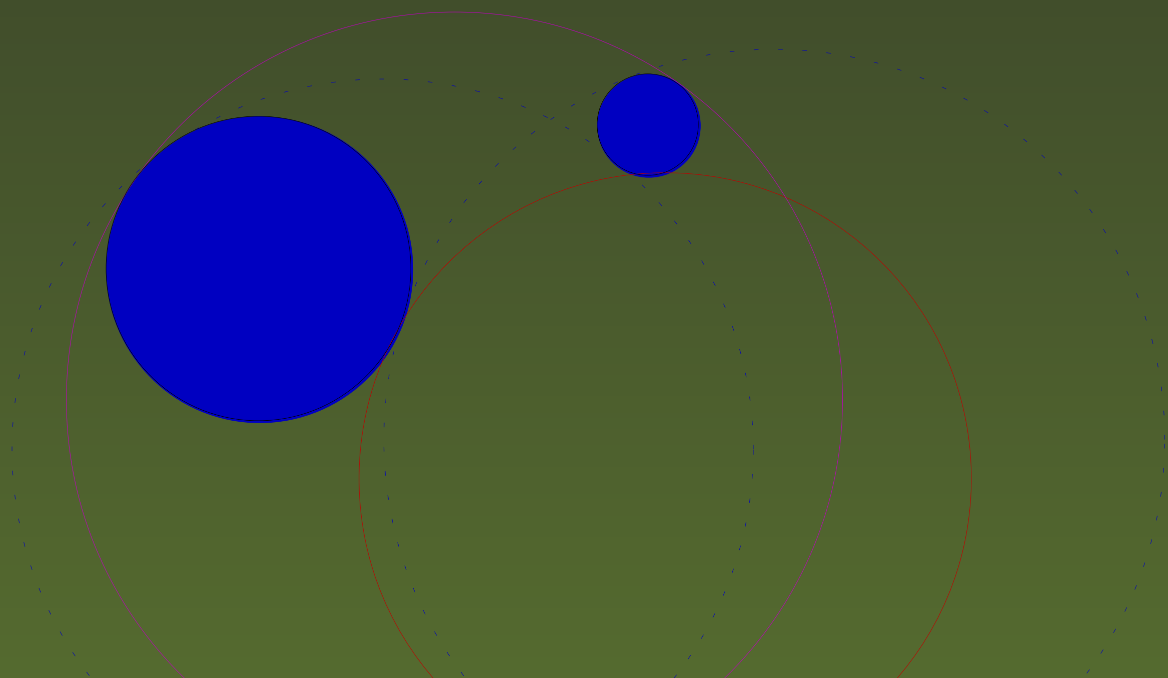
$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \cosh \delta$$

Concèntriques	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \frac{1}{2}(\frac{R}{r} + \frac{r}{R})$
Steiner	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 + 2\tan^2 \frac{\pi}{n}$
Steiner n=3	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 7, \quad \cosh \frac{\delta}{2} = 2$
Steiner n=4	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 3, \quad \cosh \frac{\delta}{2} = \sqrt{2}$

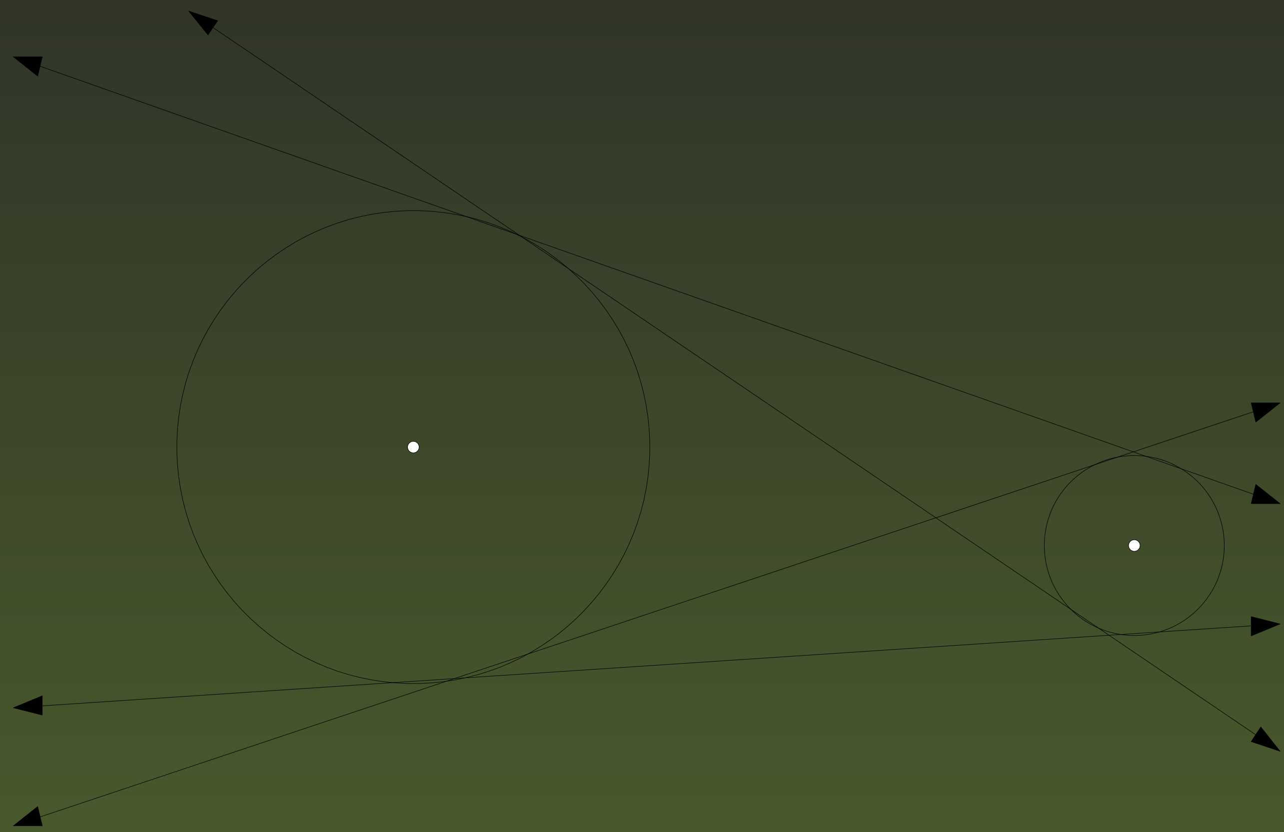
El problema d'Apoloni

Consisteix en construir totes les circumferències tangents a tres circumferències donades. Hi ha genèricament $2^3 = 8$ possibles solucions.

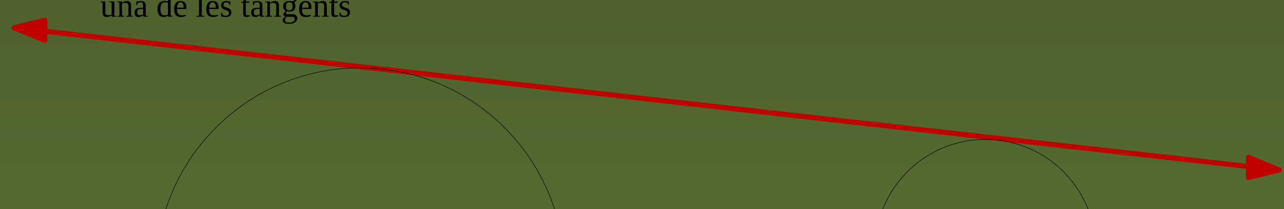
Cas particular *Circumferència tangent a dues circumferències donades $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ i que passa per un punt donat P.*



Apoloni



Fem una inversió i veiem el problema resolt.

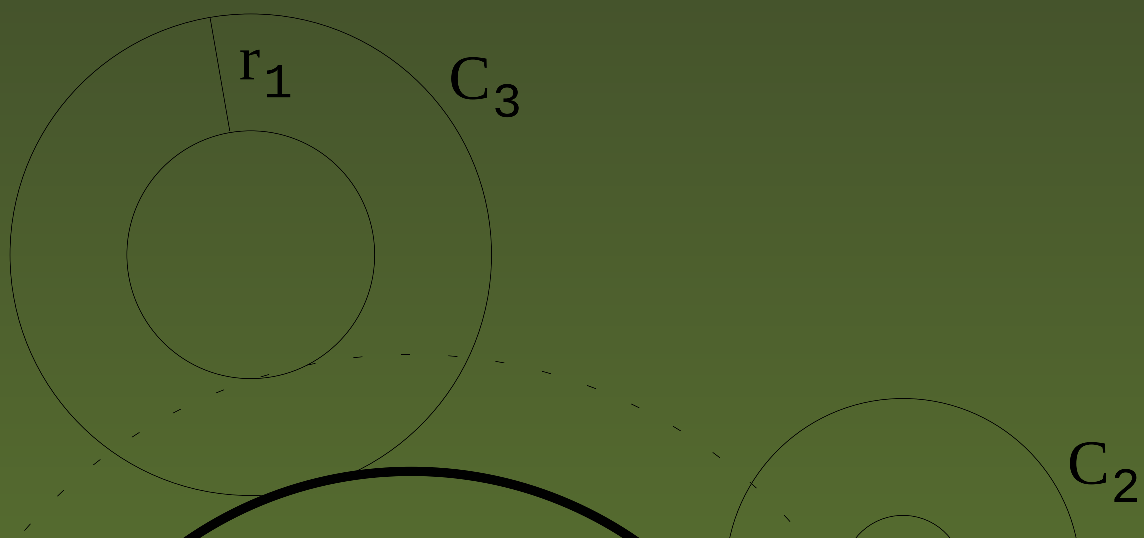


El problema d'Apoloni, cas general

Construcció d'una circumferència tangent a tres circumferències donades $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$.

Suposem que els radis respectius compleixen $r_1 \leq r_2 \leq r_3$. Construïm a continuació $\mathcal{C}'_2$ i $\mathcal{C}'_3$ amb el mateix centre respectivament que $\mathcal{C}_2$ i $\mathcal{C}_3$ i radis $r_3 - r_1$ i $r_2 - r_1$.

Construïm una circumferència que passi pel centre O_1 de $\mathcal{C}_1$ i sigui tangent a $\mathcal{C}'_2$ i $\mathcal{C}'_3$.



Geometria Inversiva

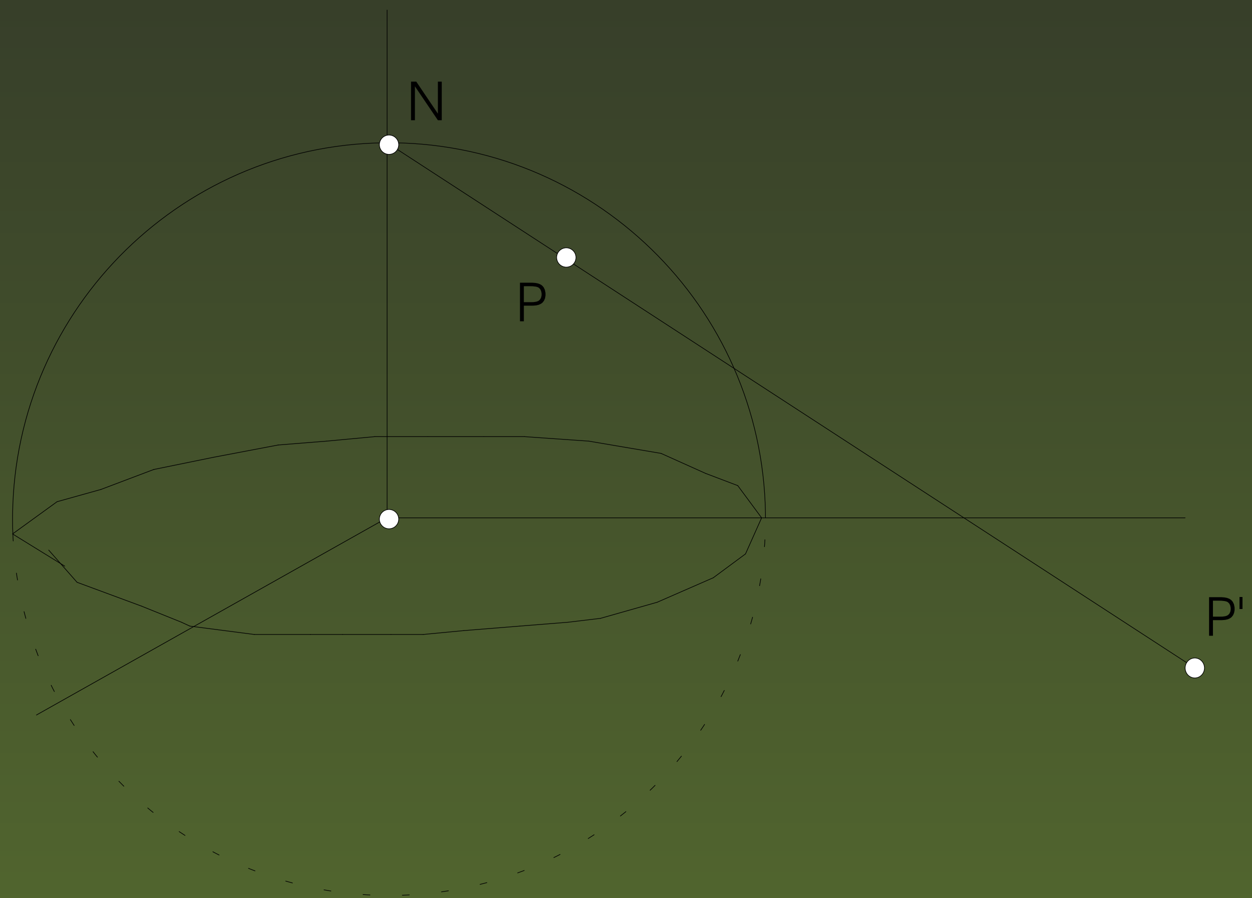
Seguint F. Klein direm que Geometria és l'estudi de les propietats de les figures invariants per "moviments".
Per exemple la geometria euclidiana és l'estudi de les propietats de les figures invariants per transformacions que conserven la distància.
Anàlogament
Definició *La geometria inversiva és l'estudi de les propietats de les figures invariants per inversions.*
Per evitar problemes amb el centre d'inversió es completa el pla amb un punt, anomenat punt de l'infinit.
Així les inversions són transformacions de

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

La geometria de $\hat{\mathbb{C}}$ amb les inversions és coneix també

Projecció estereogràfica

Hi ha una bijecció entre l'esfera i $\hat{\mathbb{C}}$ (projecció estereogràfica).



Observem també que la projecció estereogràfica, és una

Alguns resultats

Alguns resultats de geometria conforme són els següents:

Teorema *Donats tres punts A, B, C i tres punts més A', B', C' existeix una única composició d'inversions que porta A a A', B a B' i C a C'.*

Oblidem-nos doncs de parlar de distància.

Teorema fonamental *Tota bijecció que conserva cercles és composició d'inversions.*

Teorema *Tota bijecció analítica de $\hat{\mathbb{C}}$ és una transformació de Möbius*

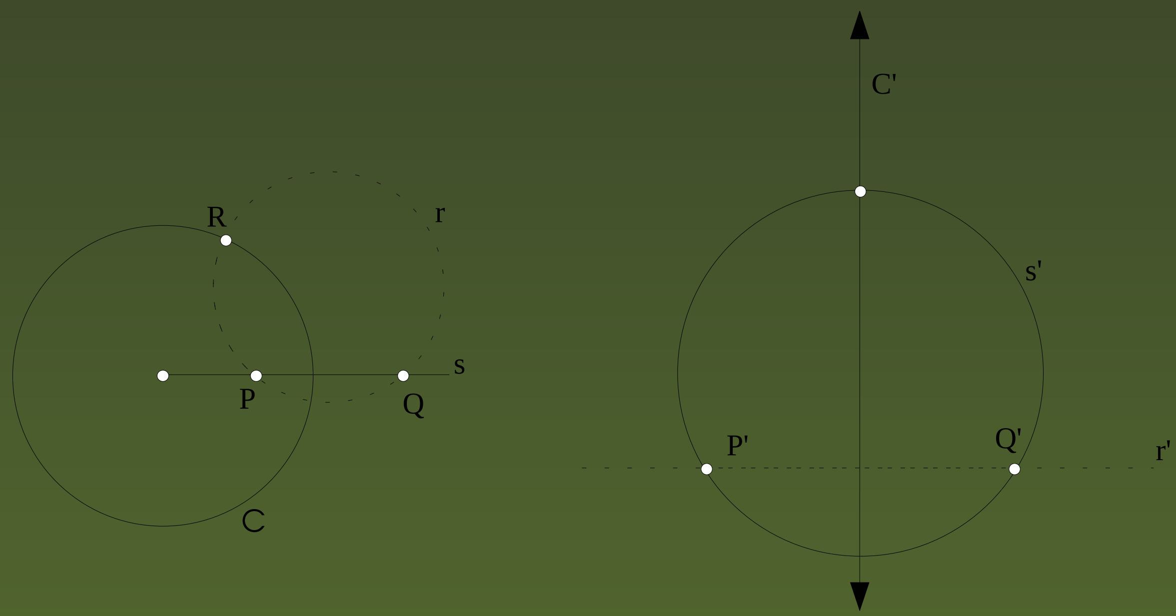
$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0.$$

Teorema *Tota composició d'inversions és una transfor-*

Simetries euclidianes com inversions

Quan es parla de les inversions de $\hat{\mathbb{C}}$ s'hi inclouen les simetries respecte rectes de $\mathbb{C}$ (que són circumferències de $\hat{\mathbb{C}}$ ja que passen per l'∞.)

Una inversió de centre R porta el primer dibuix sobre el segon.



circumf. $C \longrightarrow$ recta C'

Geometria hiperbòlica

El pla hiperbòlic és

$$\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$$

amb els "moviments" donats per les inversions respecte circumferències de centre l'∞. D'aquestes circumferències se'n diuen rectes hiperbòliques.

Distància hiperbòlica

$$d(A,B) = |\ln(A,B,P,Q)|$$

on P, Q són els punts de l'infinit de la recta hiperbòlica AB.

Distància entre cercles:

punt de vista hiperbòlic El següent bonic resultat me'l va fer observar en Gil Solanes.
Situem-nos primerament a l'espai hiperbòlic

$$\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}.$$

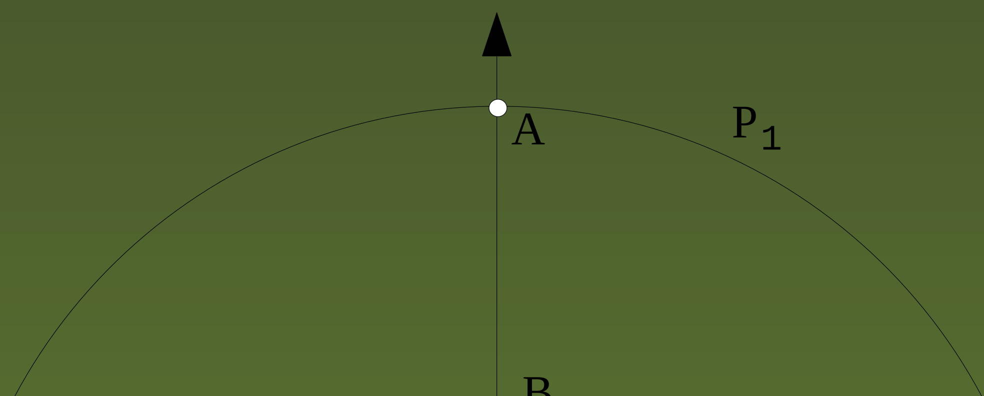
Els plans hiperbòlics de $\mathbb{H}^3$ són els plans $ax + by = c$ i les semiesferes amb centre a $z = 0$.
Tota circumferència de $z = 0$ es pot considerar com l'equador d'una esfera amb el mateix centre, i dóna lloc doncs a un pla hiperbòlic de $\mathbb{H}^3$.

Distància

Teorema *La distància entre els cercles $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ és igual a la distància hiperbòlica entre els plans hiperbòlics P_1 i P_2 que els tenen com infinit.*

$$\boxed{d(P_1, P_2) = \delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)}$$

Demostració: Sigui φ una inversió que posa $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ concèntrics. Estenem aquesta inversió del pla a una inversió de $\mathbb{H}^3$.
La perpendicular comú és transforma en un diàmetre, que talla $\varphi(\mathcal{C}_1)$ en A i $\varphi(\mathcal{C}_2)$ en B.



Referències

1. H. S. Coxeter, S. L. Greitzer, Redécouvrons la Géométrie, *Dunod*, *París*, 1971.
2. M. de Guzman, Aventuras matemáticas, *Labor*, 1986.
3. B. Herrera, A. Reventós, Geometria Sintètica, En preparació, 2002.
4. P. Puig Adam, Curso de geometria mètrica, Euler editorial S.A., 1986.
5. A. Reventós, Geometria inversiva, http://mat.uab.es/dpt/Varis/trobades.html, 2002.
6. A. S. Smogorzhevski, Acerca de la geometría de Lobatchevski, Lecciones populares de Matemàticas, Editorial MIR, 1978.