# Ein Genie erster Grösse

3 Octubre 2008

Dedicado a

ANTONIO DÍAZ MIRANDA

# János Bolyai

# Fundador de la geometría no euclidiana

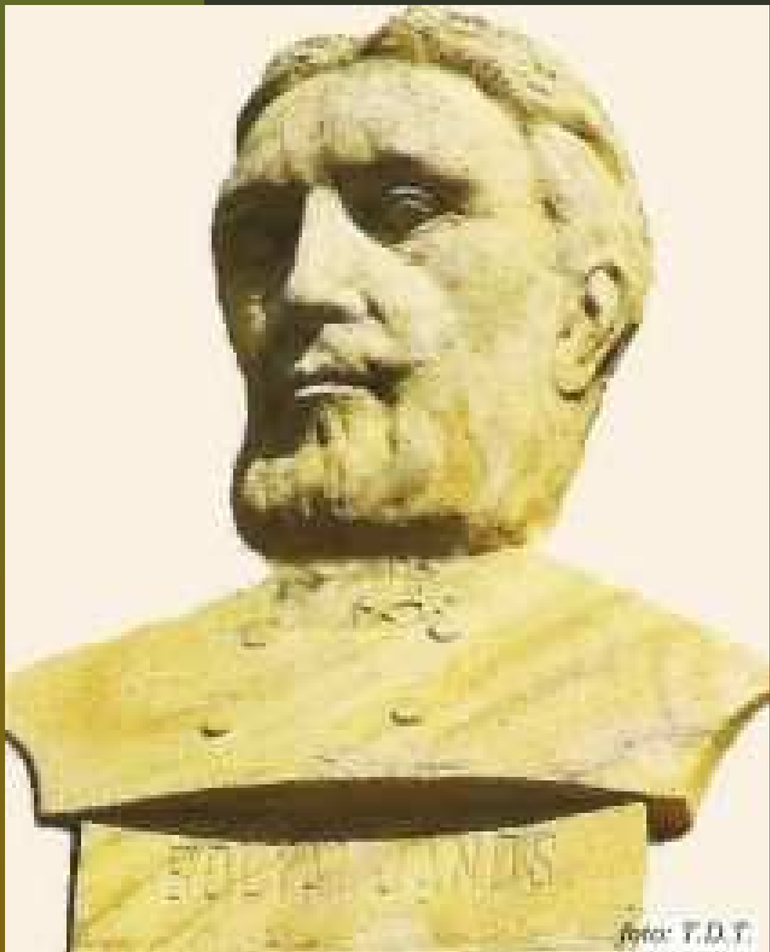
# János Bolyai

- Nace en Kolozsvar (Hungria) en 1802.
- Hijo de Farkas.
- Vive en Marosvásárhely (Tirgu Mures, Rumania).
- Muere en Marosvásárhely en 1860.

# János Bolyai

Medalla commemorativa del 200 aniversario. Budapest 2002.

# János Bolyai





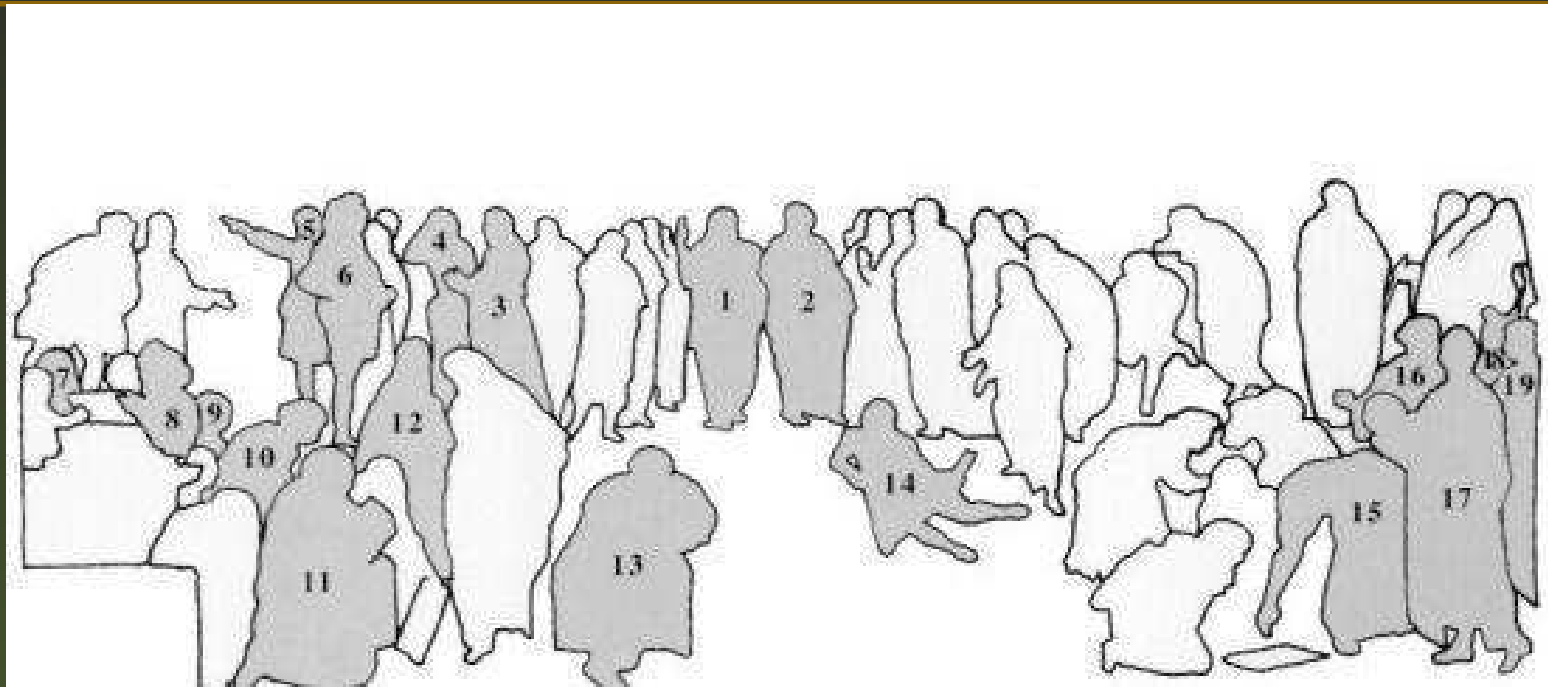
Marosvásárhely (Tirgu Mures, Transilvania, Rumania)

# Antecedentes

# El quinto postulado

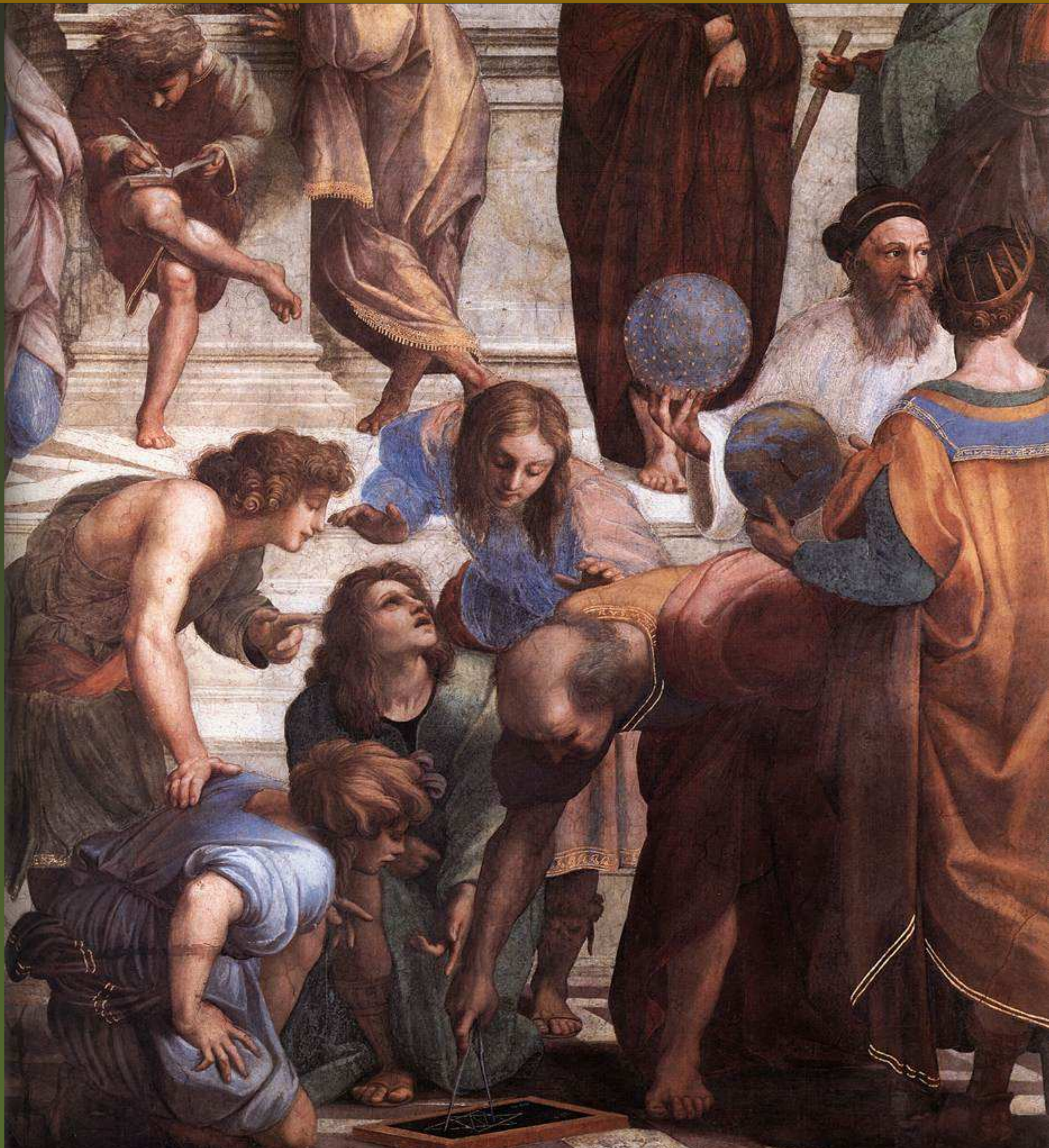
# Escuela de Atenas. **Raffaello** 1510

# Escuela de Atenas




1. Platón 2. Aristóteles 3. Sócrates
7. Zenón 11. Pitágoras 13. Heráclito
15. Euclides
17. Ptolomeo 18. Autoretrato de Raphael

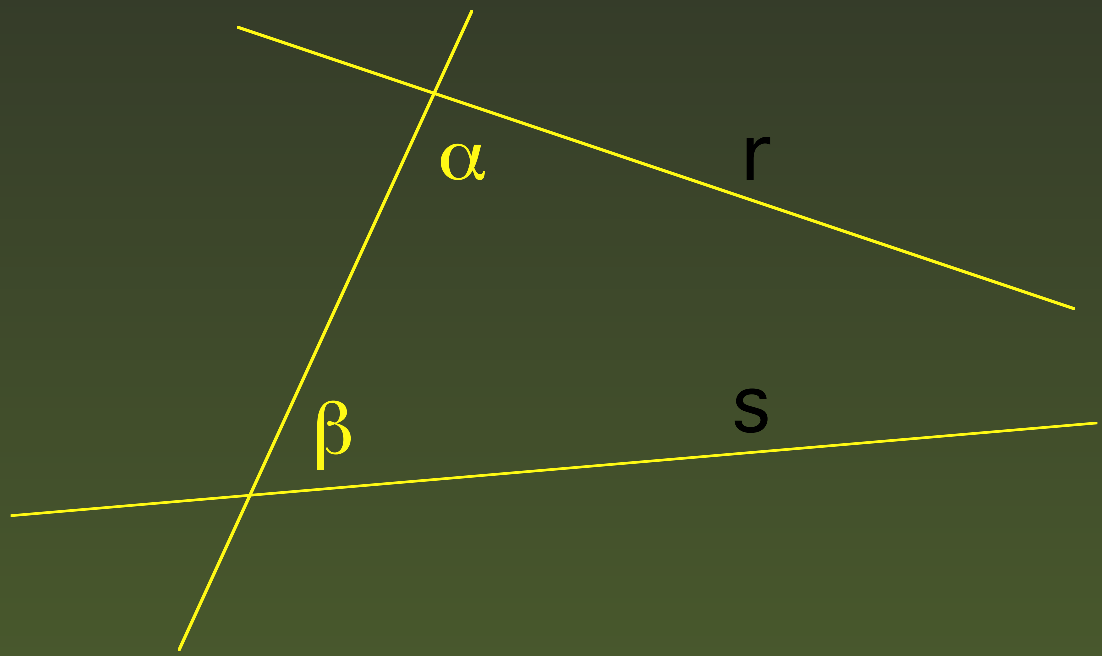
# Euclides con un compás



# Quinto Postulado

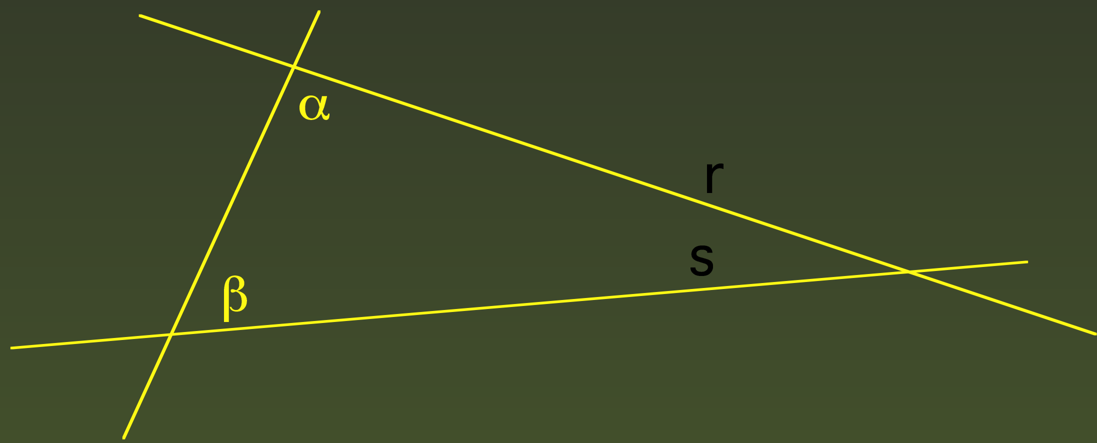
5. Si una línea recta es cortada por dos líneas rectas de manera que los ángulos interiores del mismo lado sumen menos de dos rectos, y si estas dos líneas rectas se prolongan indefinidamente, entonces se cortan en el lado dónde están estos ángulos que suman menos de dos rectos.

# Quinto Postulado




Si $\alpha + \beta < \pi$, $r$ y $s$ se cortan.

# Quinto Postulado

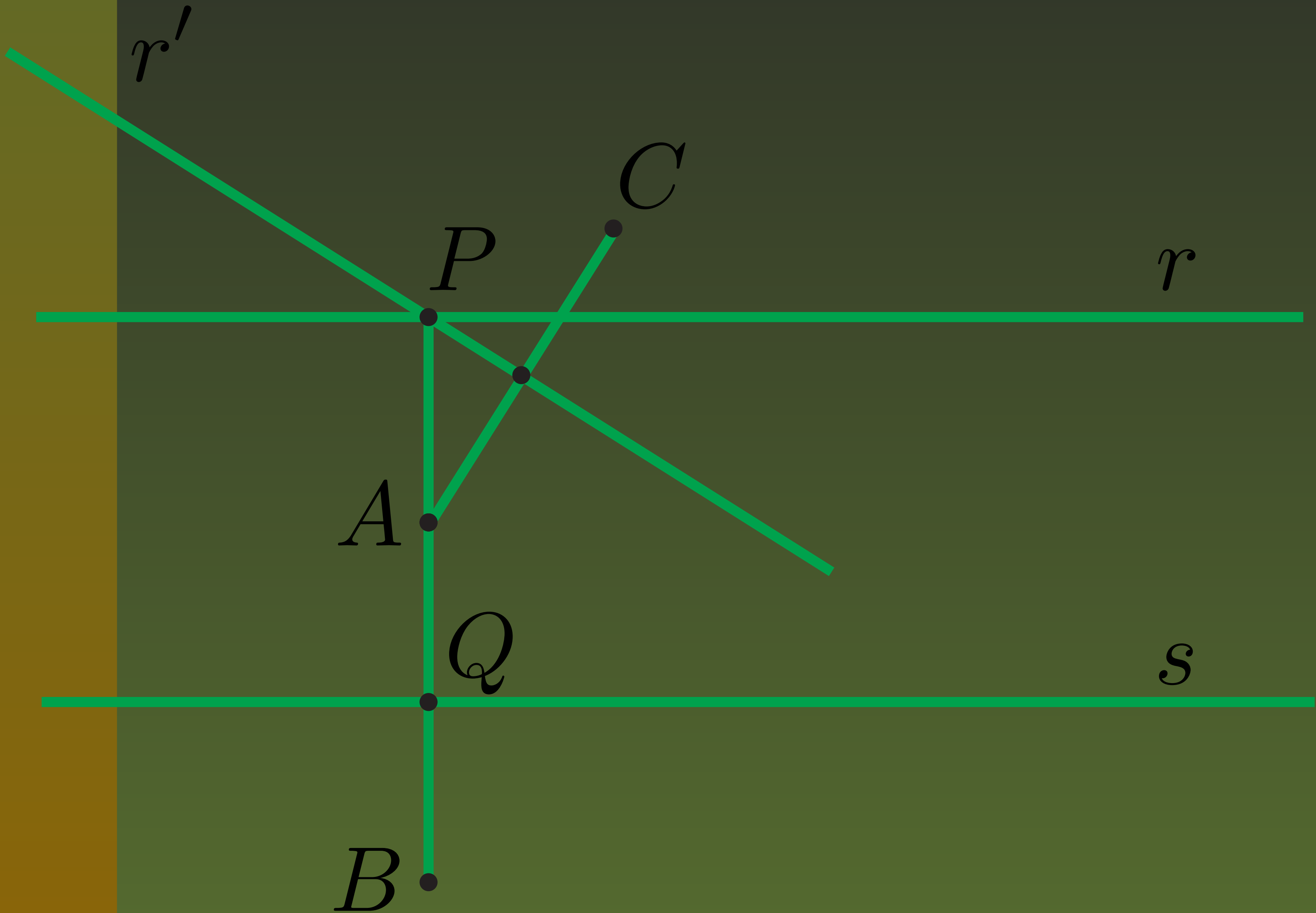



Ya se han cortado.

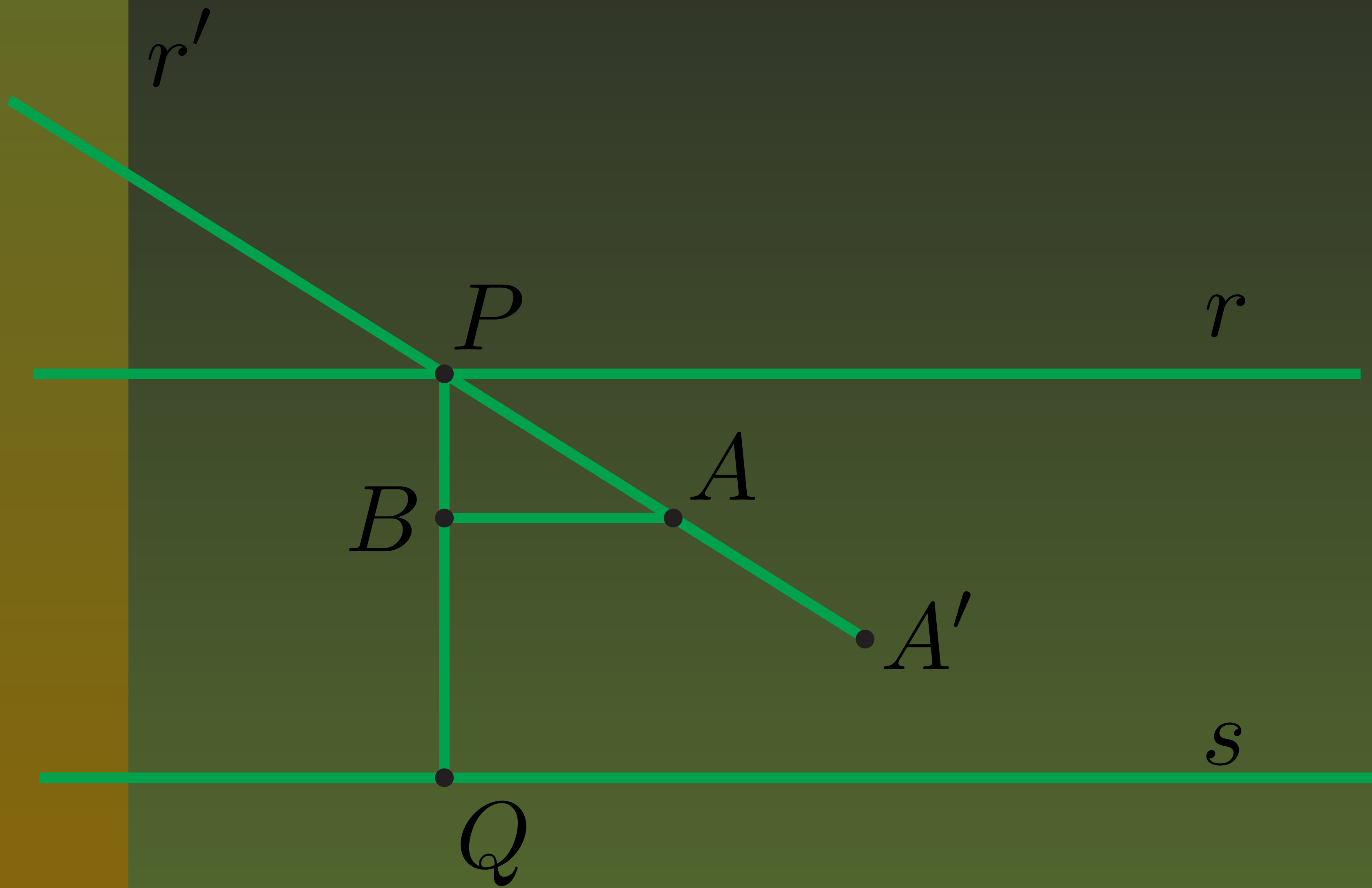
# Enunciados equivalentes

1. Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela.
2. Tres puntos no alineados determinan una circunferencia.
3. Existen triángulos semejantes.
4. Hay triángulos de área tan grande como queramos.
5. Los ángulos de un triángulo suman lo mismo que dos ángulos rectos.
6. Las equidistantes son rectas.

# Bolyai

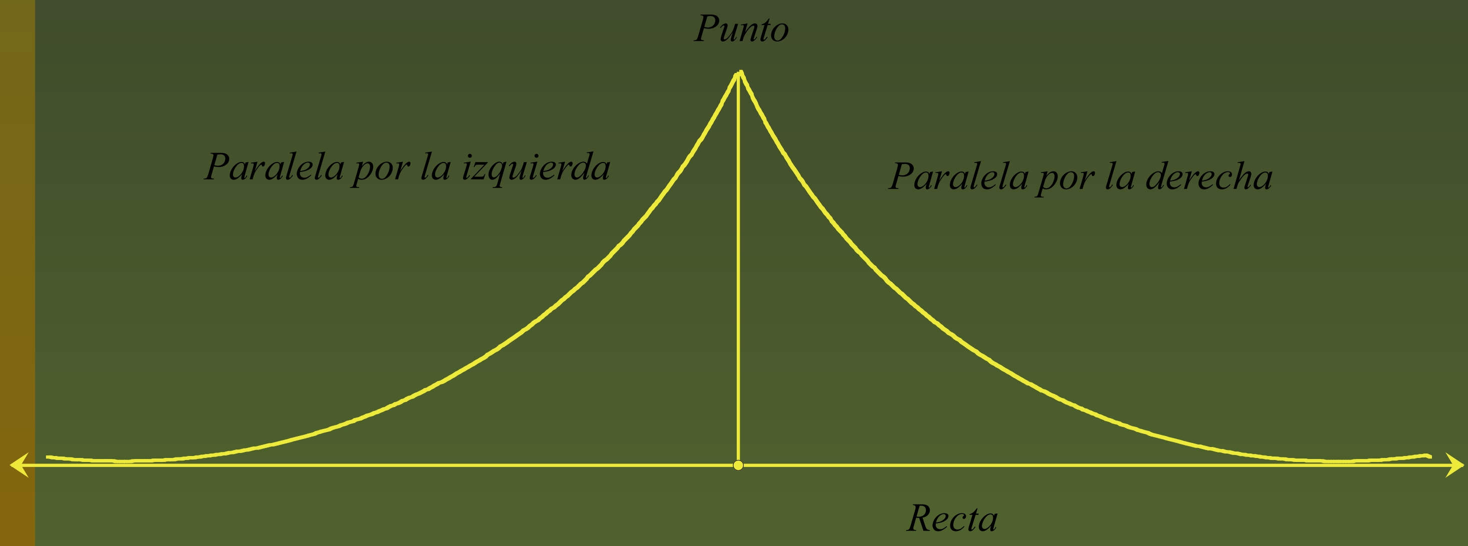


# Wallis



# Negación del quinto postulado

- *Dada una recta y un punto exterior, pasan por este punto más de una recta que no cortan la recta dada.*



# Primer geómetra no euclidiano

# Aristóteles 384 – 322 aC.

# **Aristóteles** 384 – 322 **aC.**

Si es imposible que los ángulos de un triángulo sumen dos rectos, entonces el lado del cuadrado es conmensurable con la diagonal.

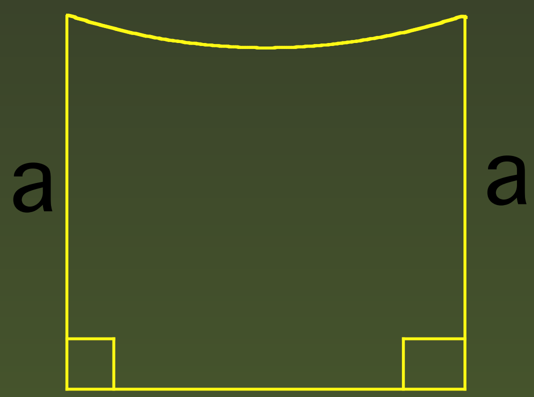
# Geometría Absoluta

# Geometría Absoluta

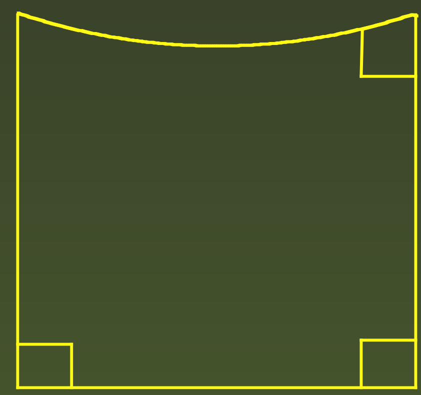
- G. Saccheri (1667-1733): *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia.*

- J. H. Lambert (1728 – 1777): *Theorie der Parallellinien.*

# Geometría Absoluta




Saccheri



Lambert

# Geometría Absoluta

- Saccheri rechaza la *hostil hipótesis del ángulo agudo* porqué obtiene resultados *que repugnan la naturaleza de la línea recta*.

# Geometría Absoluta

- Saccheri rechaza la *hostil hipótesis del ángulo agudo* porqué obtiene resultados *que repugnan la naturaleza de la línea recta*.

- Lambert ve posible una geometría sin el quinto postulado: *Me inclino a pensar que la hipótesis del ángulo agudo es cierta en alguna esfera de radio imaginario*.

# Geometría Absoluta

- Saccheri rechaza la *hostil hipótesis del ángulo agudo* porqué obtiene resultados *que repugnan la naturaleza de la línea recta*.

- Lambert ve posible una geometría sin el quinto postulado: *Me inclino a pensar que la hipótesis del ángulo agudo es cierta en alguna esfera de radio imaginario*.

- Taurinus (1794-1874) desarrolla esta idea llegando al ángulo de paralelismo.

# La analogía de Lambert

# Analogía

| | |
|---|---|
| $\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}$ | $\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cdot\cosh\frac{c}{R}$ |
| A $= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$ | A$= R^2(\pi-(\alpha+\beta+\gamma))$ |
| L$= 2\pi R\sin\frac{r}{R}$ | L$= 2\pi R\sinh\frac{r}{R}$ |

# Analogía

| | |
|---|---|
| $\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}$ | $\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cdot\cosh\frac{c}{R}$ |
| A $= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$ | A$= R^2(\pi-(\alpha+\beta+\gamma))$ |
| L$= 2\pi R\sin\frac{r}{R}$ | L$= 2\pi R\sinh\frac{r}{R}$ |

$$\boxed{\cos ix = \cosh x, \qquad \sin ix = i\sinh x.}$$

# Trigonometría de la esfera

$$\left\{\begin{aligned} \sin\frac{a}{R}\sin\beta &= \sin\frac{b}{R}\sin\alpha \\ \cos\frac{a}{R} &= \cos\frac{c}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{c}{R}\sin\frac{b}{R}\cos\alpha \\ \cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{R} \end{aligned}\right.$$

# Trigonometría esfera imaginaria

$$
\begin{aligned}
\sinh\frac{a}{R}\sin\beta &= \sinh\frac{b}{R}\sin\alpha \\
\cosh\frac{a}{R} &= -\sinh\frac{c}{R}\sinh\frac{b}{R}\cos\alpha+\cosh\frac{c}{R}\cosh\frac{b}{R} \\
\cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cosh\frac{a}{R}
\end{aligned}
$$

# Trigonometría esfera imaginaria

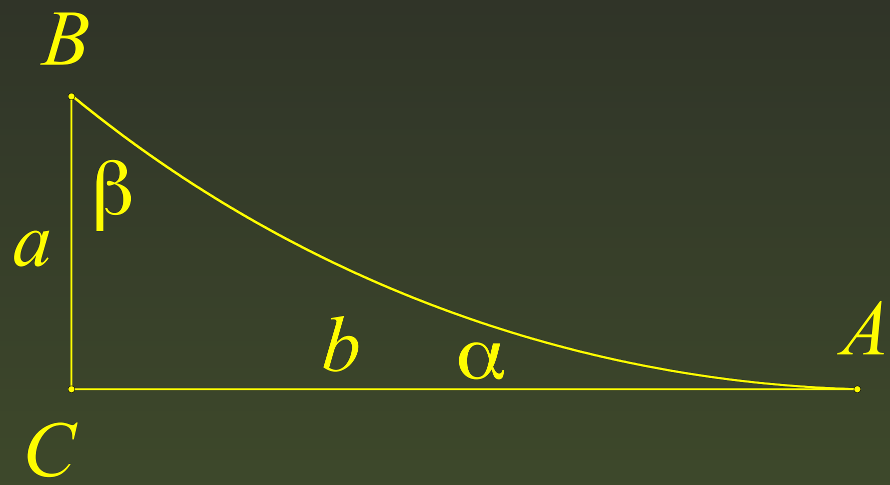
$$
\begin{aligned}
\sinh\frac{a}{R}\sin\beta &= \sinh\frac{b}{R}\sin\alpha \\
\cosh\frac{a}{R} &= -\sinh\frac{c}{R}\sinh\frac{b}{R}\cos\alpha+\cosh\frac{c}{R}\cosh\frac{b}{R} \\
\cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cosh\frac{a}{R}
\end{aligned}
$$

# Trigonometría esfera imaginaria

$$\begin{aligned}\sinh\frac{a}{R}\sin\beta &= \sinh\frac{b}{R}\sin\alpha\\ \cosh\frac{a}{R} &= -\sinh\frac{c}{R}\sinh\frac{b}{R}\cos\alpha+\cosh\frac{c}{R}\cosh\frac{b}{R}\\ \cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cosh\frac{a}{R}\end{aligned}$$

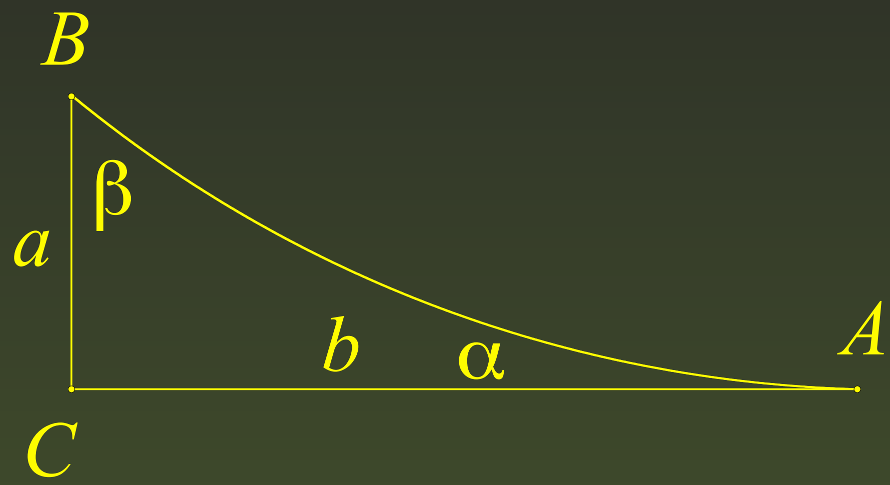
No hay triángulos semejantes.

# Angulo de paralelismo




$$\cos\alpha = \sin\beta \cosh\frac{a}{R}$$

# Angulo de paralelismo



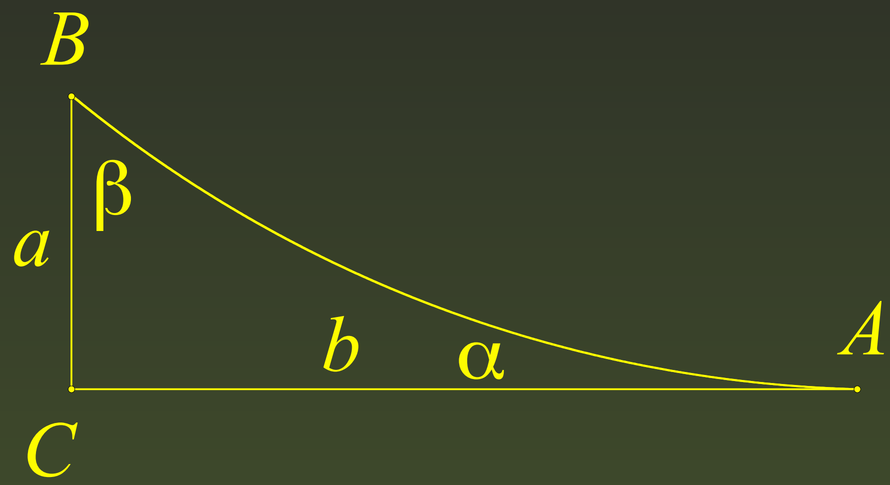

$$\cos\alpha = \sin\beta \cosh\tfrac{a}{R}$$

Si $A \to \infty$, $\alpha \to 0$,

$$1 = \sin\Pi(a)\cosh\frac{a}{R}$$

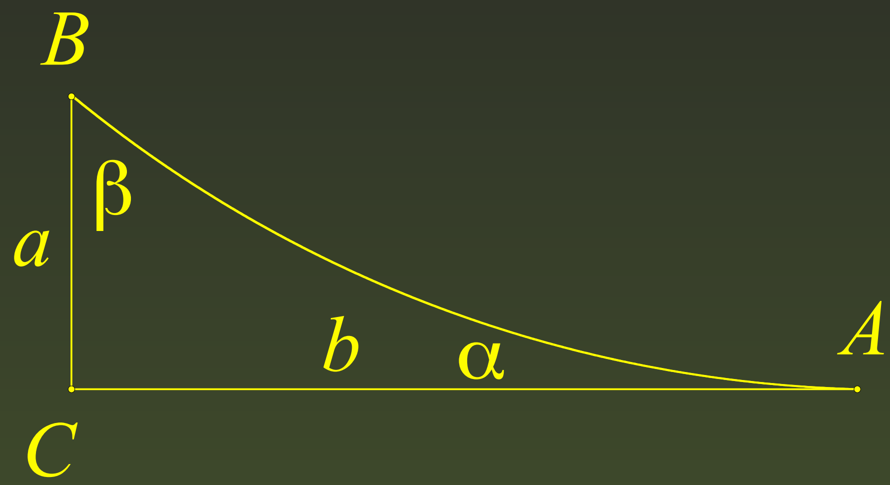
- $\Pi(a) = 2\arctan e^{-a/R}$

# Las rectas tienen longitud infinita




$$\cos\beta = \sin\alpha \cosh\frac{b}{R}$$

# Las rectas tienen longitud infinita



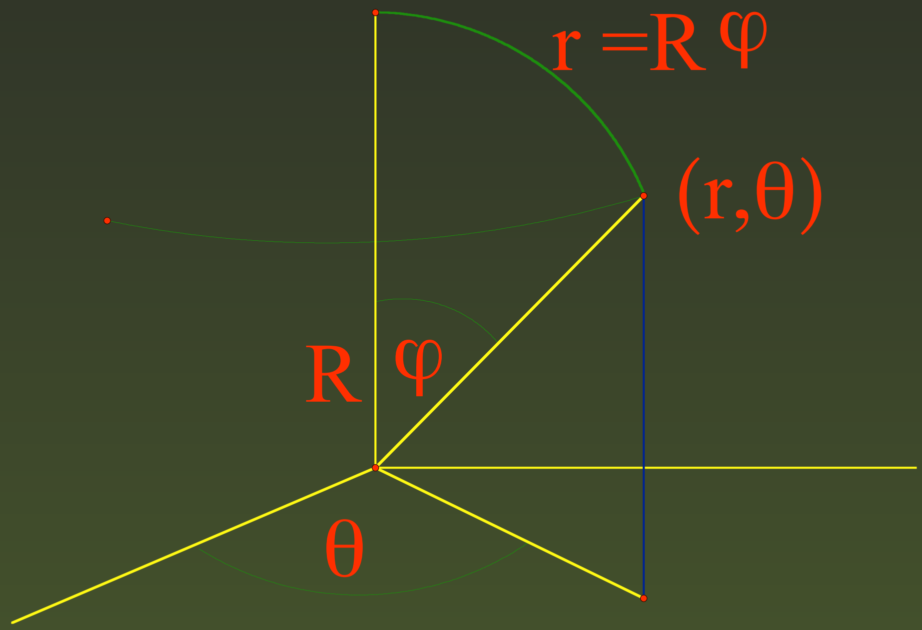

$$\cos\beta = \sin\alpha \cosh\frac{b}{R}$$

Si $\alpha \longrightarrow 0$, $\beta \longrightarrow$ ángulo paralelismo $< \pi/2$

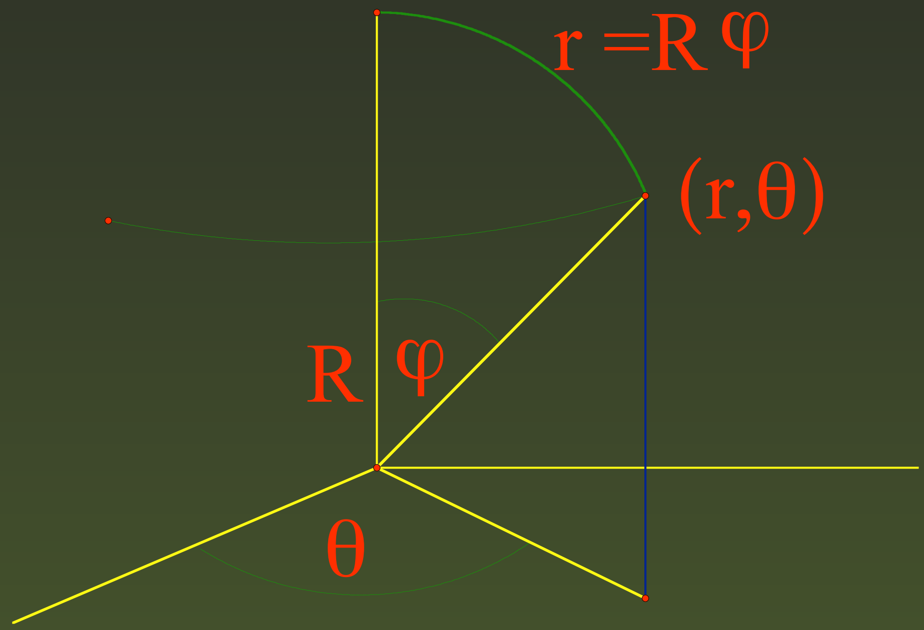
$$\Longrightarrow \quad b \longrightarrow \infty$$

# Analogía diferenciable

# Elemento de longitud de la esfera



# Elemento de longitud de la esfera




$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right) d\theta^2$$

# Objetivo

- Encontrar una superficie con

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})\, d\theta^2$$

# Objetivo

- Encontrar una superficie con

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})\, d\theta^2$$

- Encontrar una superficie con curvatura

$$K = \frac{1}{(Ri)^2} = -\frac{1}{R^2}$$

# Conjetura

- Gauss podría haber extendido la *analogía* de Lambert a la Geometría Diferencial, con la idea de encontrar una superficie que representara la esfera imaginaria. En particular, de curvatura constante negativa.

# Conjetura

- Gauss podría haber extendido la *analogía* de Lambert a la Geometría Diferencial, con la idea de encontrar una superficie que representara la esfera imaginaria. En particular, de curvatura constante negativa.
- Podría ser este el camino diferente tomado por Gauss para probar el V postulado, y al cual se refiere en su carta a Schumaker? [(1846) hablando sobre el trabajo de Lobatchevski]:

  > [...] *aber die Entwickelung ist auf anderm Wege gemacht*

# Conjetura

- Gauss podría haber extendido la *analogía* de Lambert a la Geometría Diferencial, con la idea de encontrar una superficie que representara la esfera imaginaria. En particular, de curvatura constante negativa.
- Podría ser este el camino diferente tomado por Gauss para probar el V postulado, y al cual se refiere en su carta a Schumaker? [(1846) hablando sobre el trabajo de Lobatchevski]:

  > [...] *aber die Entwickelung ist auf anderm Wege gemacht*

- Fue el Disquisitiones escrito [parcialmente] con esta idea?

# C. F. Gauss

# 1796

- 29 de marzo de 1796. Diecisiete lados.
- Carta a Gerling 1819.

# 1796

- 29 de marzo de 1796. Diecisiete lados.
- Carta a Gerling 1819.

*Das Geschichtliche jener Entdeckung ist bisher nirgends von mir öffentl erwähnt; ich kann es aber sehr genau angeben. Der Tag war der 29 März 1796, und der Zufall hatte gar keinen Antheil daran. ;*

La historia de este descubrimiento no se ha mencinado hasta ahora; la puedo explicar muy exactamente. Fue el dia 29 de marzo de 1796, sin la más mínima participación de la casualidad, ya que fue fruto de esforzadas meditaciones;

# 1796

- 29 de marzo de 1796. Diecisiete lados.
- Carta a Gerling 1819.

*Schon früher war alles was auf die Zertheilung der Wurzeln der Gleichung*

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$$

*en zwei Gruppen [...]*

Todo està en dividir las raíces de la ecuación...

# 1796

- 29 de marzo de 1796. Diecisiete lados.
- Carta a Gerling 1819.

*[...] glückte es mir bei einem Ferenaufenthalt en Braunschweig, am Morgen des gedachten Tages (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war) diesen Zusammenhang auf das klarste anzuschauen, so dass ich die specielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle machen konnte.*

Durante unas vacaciones en B. una mañana (antes de levantarme de la cama) tuve la suerte de ver claramente todas las correlaciones, de manera que apliqué al polígono de 17 lados la correspondiente confirmación numérica.

# Braunschweig

# El Diario

- Al día siguiente, 30 de marzo de 1796, empezó el Diario, un mes antes de cumplir 19 años.

  Las entradas [1],[3],[55],[65],[66],[116], hacen referencia a polígonos. Nace la Teoría de Galois.

# El Diario

- Al día siguiente, 30 de marzo de 1796, empezó el Diario, un mes antes de cumplir 19 años.

Las entradas [1],[3],[55],[65],[66],[116], hacen referencia a polígonos. Nace la Teoría de Galois.

[1] *Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc.*

# El Diario

- Al día siguiente, 30 de marzo de 1796, empezó el Diario, un mes antes de cumplir 19 años.

  Las entradas [1],[3],[55],[65],[66],[116], hacen referencia a polígonos. Nace la Teoría de Galois.

  [1] *Los principios de los que depende la división del círculo, y la divisibilidad geométrica del mismo en diecisiete partes, etc.*

# Göttingen

# Gauss y la geometría no euclidiana

# 1792

- Carta a Schumaker (09-28-1846)

  *Ein gewisser Schweikart nannte eine solche Geometrie Astralgeometrie, Lobatchevski imaginäire Geometrie. Sie wissen, dass ich schon seit* $54$ *Jahren (seit* $1792$*) dieselbe Überzeugung habe.*

.. He tenido la misma opinión durante $54$ años (desde $1792$)

# 1792

- Carta a Schumaker (09-28-1846)

  *Ein gewisser Schweikart nannte eine solche Geometrie Astralgeometrie, Lobatchevski imaginäire Geometrie. Sie wissen, dass ich schon seit $54$ Jahren (seit $1792$) dieselbe Überzeugung habe.*

  .. He tenido la misma opinión durante $54$ años (desde $1792$)

  Tenía $15$ años!

# 1794

- Carta a Gerling (10-10-1846)

*Der Satz, den Ihnen Hr. Schweikart erwähnt hat, dass en jeder Geometrie die Summe aller äussern Polygonwinkel von* $360°$ *um eine Grösse verschieden ist, [....] welche dem Flächeninhalt proportional ist, ist der erste gleichsam an der Schwelle liegende Satz der Theorie, den ich schon im Jahr* $1794$ *als nothwending erkannte.*

El teorema que Mr. S. le menciona a usted, que en cada Geometría la suma de los ángulos externos de un polígono difiere de $360°$ en una cantidad... es el primer teorema en el umbral de esta teoría, de lo que ya me di cuenta en el año $1794$.

# El Diario

- 28 de julio de 1797.

[72] *Plani possibilitatem demonstravi.*

# El Diario

- Setiembre 1799.

[99] *In principiis Geometriae egregios progressus fecimus.*

# Parallelentheorie

- Notas encontradas entre los papeles de Gauss de 1831. Cartas a amigos y colaboradores.

- No obstante, todos los resultados sobre *Geometría astral* que aparecen en estas cartas se pueden deducir directamente de la *analogía de Lambert*.

- Gauss consulta el trabajo de Lambert en la biblioteca de Göttingen el 24 de octubre de 1795 y el 2 de enero de 1797.

# Algunas cartas

# Carta a **Farkas Bolyai** 1799

- *Wenn man beweisen könnte, dass ein geradliniges Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre als eine jede gegeben Fläche, so bin ich im Stande die ganze Geometrie völlig strenge zu beweisen. Die meisten würden nun whol jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht;*

Si se pudiera probar que existe un triángulo de área tan grande como se quiera, entonces yo estaría en condiciones de probar rigurosamente toda la Geometría. Mucha gente tomaría esto como un axioma, pero yo no. Es posible que el área no llegue nunca a un cierto valor límite.

# **Carta a Gerling** 1816

- *Es wäre sogar wünschenswerth, dass die Geometrie Euklids nicht wahr wäre, weil wir dann ein allgemeines Mass a priori hätten, z. B. könnte man als Raumeinheit die Seite desjenigen gleichseitigen Dreiecks annehmen, dessen Winkel* $= 59°59'59''.99999$.

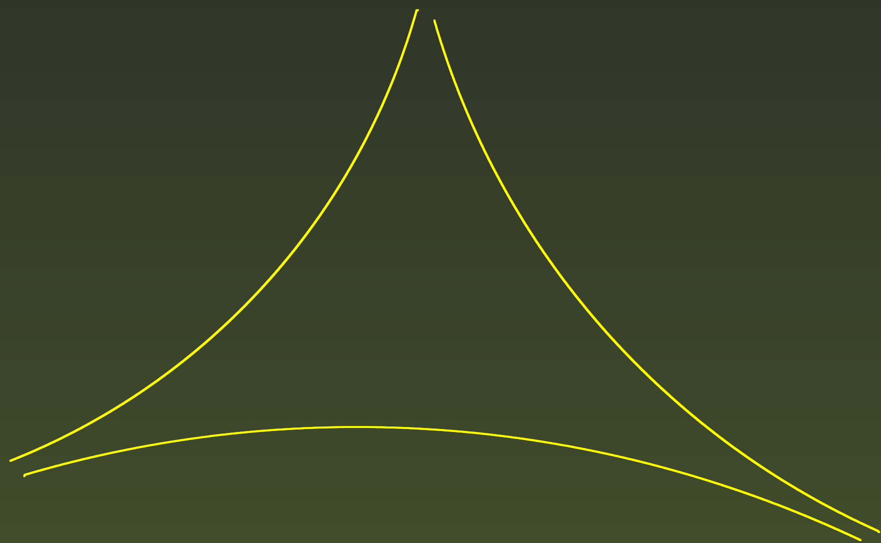
Sería incluso deseable que la GE no fuera cierta, *porque entonces tendríamos una unidad de medida a priori*. Por ejemplo, el lado de un triángulo equilátero...

# Carta a Gerling 1819

- *Der Defect der Winkelsumme im ebenen Dreieck gegen* $180^\circ$ *ist z. B. nicht bloss desto grösser, je grösser der Flächeninhalt ist, sondern ihm genau proportional, so dass der Flächeninhalt eine Grenze hat, die er nie erreichen kann, und welche Grenze selbst dem Inhalt der zwischen drei sich asymptotisch berührenden geraden Linien enthalten Fläche gleich ist, die Formel für diese Grenze ist*

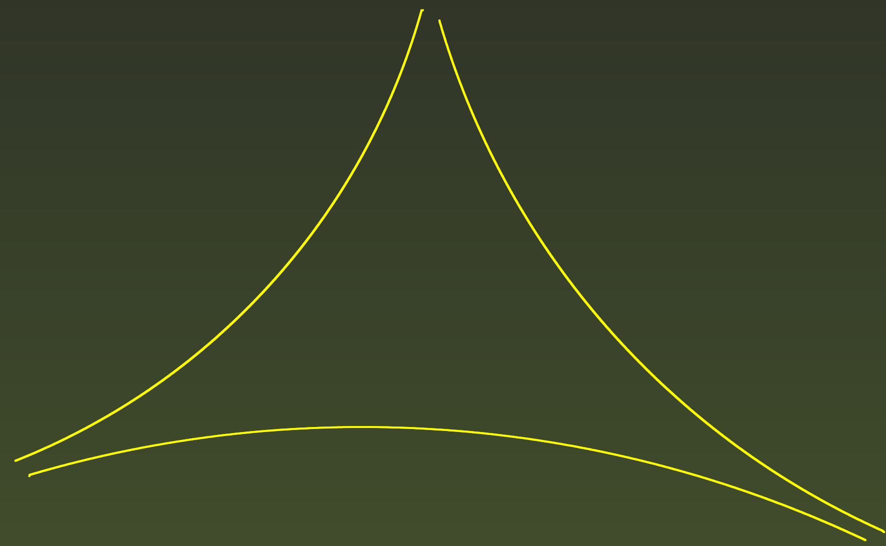
  El defecto no es sólo más grande cuando el área se hace más grande, sino que es exactamente proporcional a ella, de tal manera que el área tiene una cota que no se puede alcanzar, y esta cota es igual al área encerrada por 3 líneas asintóticas. La fórmula para esta cota es

# Misma carta



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \mathrm{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

# Misma carta



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \mathrm{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

$$\Pi(C) = \frac{\pi}{4}$$

# Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas

## 7 de Octubre de 1827

# Carta a **Schumaker** (21-11-1825)

- *Ich habe seit einiger Zeit angefangen, einen Theil der allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen wieder vorzunehmen, die die Grundlage meines projectirten Werks über Höhere Geodäsie werden sollen.*

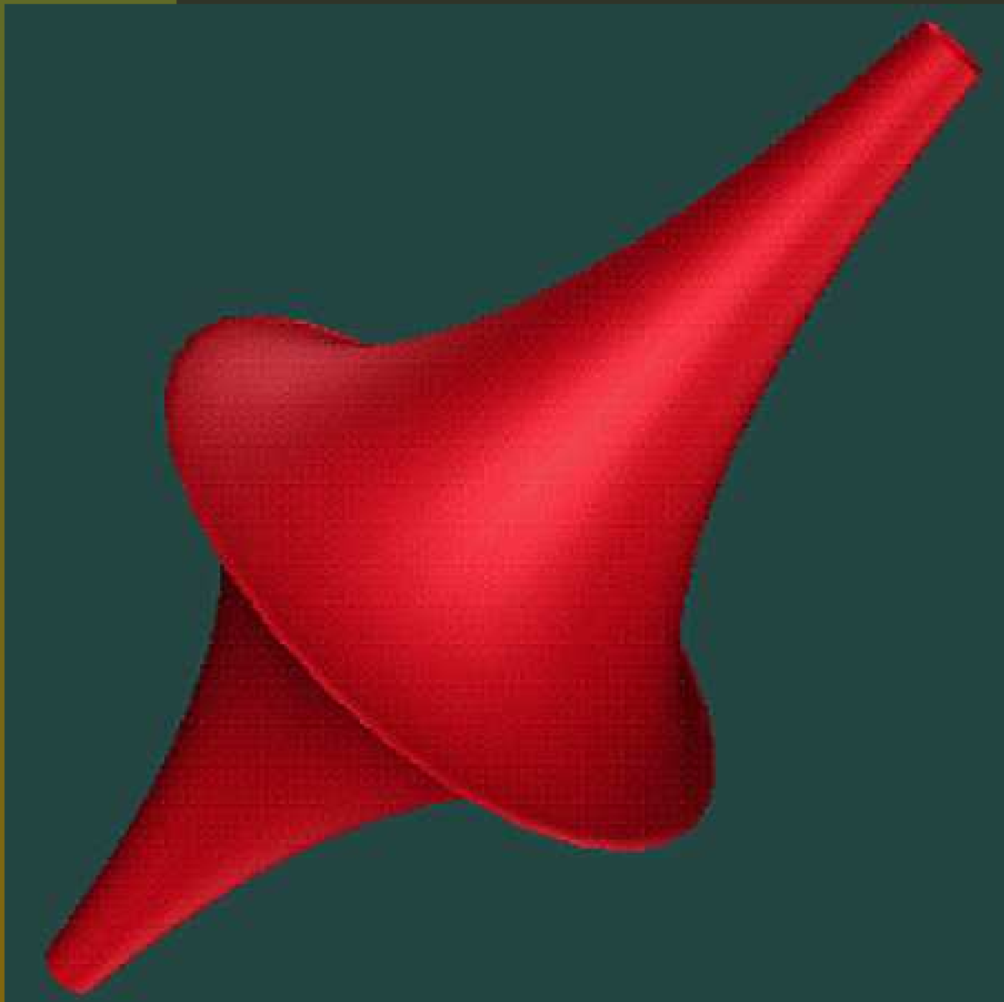
Recientemente he retomado parte de mis investigaciones generales sobre superficies curvas, que habrán de formar parte de mi proyectado ensayo sobre geodesia avanzada.

# Carta a Schumaker (21-11-1825)

- *Ich finde leider, dass ich dabei sehr weit werde ausholen müssen, da auch das Bekannte en einer andern, den neuen Untersuchungen anpassenden Form entwickelt werden muss.*

Desafortunadamente debo ir muy atras en la exposición, porque incluso lo que es conocido se debe desarrollar de diferente manera, adaptada a las nuevas investigaciones.

# Pseudoesfera. F. Minding (1840)



# Seguimos con las cartas sobre GnE

# Carta a **Schumaker** 1831

- *Von meinen eigenen Meditationen, die zum Theil schon gegen 40 Jahr alt sind, wovon ich aber nie etwas aufgeschrieben habe, und daher manches 3 oder 4 mal von neuem auszusinnen genöthigt gewesen bin, habe ich vor einigen Wochen doch einiges aufzuschreiben angefangen. Ich wünschte doch, dass es nicht mit mir unterginge.*

Hace algunas semanas que he empezado a escribir algunos resultados de mis meditaciones sobre este asunto, que provienen de 40 años atrás. Nunca las había redactado, y ello me ha obligado a empezar mi trabajo de nuevo tres o cuatro veces. No quisiera que esto muriese conmigo.

# Carta a Schumaker 1831

- En esta carta da también la longitud de una circunferencia de radio $r$:

  $$L = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

  y comenta que para que las medidas coincidan con la experiencia, $k$ debería ser infinitamente grande.

# Carta a **Schumaker** 1831

- En esta carta da también la longitud de una circunferencia de radio $r$:

$$L = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

y comenta que para que las medidas coincidan con la experiencia, $k$ debería ser infinitamente grande.

- Gauss interrumpe la escritura en 1832, cando conoce el trabajo de János Bolyai.

# Carta a Gerling 1832

- *Noch bemerke ich, dass ich dieser Tage eine Schrift aus Ungarn über die Nicht-Euklidische Geometrie erhalten habe, worin ich alle meine eigenen Ideen und Resultate wiederfinde, mit grosser Eleganz entwicklet,*

Te comento también que he recibido estos días un pequeño trabajo desde Hungría, sobre Geometrías no euclidianas, que contiene todas mis ideas y resultados desarrollados muy elegantemente.

# Carta a Gerling 1832

- *Der Verfasser ist ein sehr junger ósterreichischer Officier, Sohn eines Jugendfreundes von mir, mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten hatte, wiewohl damals meine Ideen noch viel weiter von der Ausbildung und Reife entfernt waren [...] Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Grösse...*

  El autor es un joven oficial austríaco, hijo de un amigo de mi juventud, que conocí en 1978, y con quien había hablado del tema, pero por aquel entonces mis ideas no habían llegado a la madurez y formación actual. Tengo a este joven geómetra v. Bolyai como un genio de primera magnitud...

# Carta a Farkas Bolyai 1832

- *..sie loben hiesse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theile schon seit 30-35 Jahren angestellten Meditationen überein*

# Carta a **Farkas Bolyai** 1832

- *...no puedo hacer otra cosa: si lo alabase, me alabaría a mi mismo, ya que el total contenido del trabajo, el camino que sigue tu hijo y los resultados que obtiene coinciden casi completamente con mis reflexiones de hace 30-35 años.*

# Carta a **Farkas Bolyai** 1832

- *...und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.*

  Y es una gran alegría para mí que sea justamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de manera tan remarcable.

# Carta a **Farkas Bolyai** 1832

- *...und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.*

  Y es una gran alegría para mí que sea justamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de manera tan remarcable.

- Cuánto hubiera podido cambiar la historia si Gauss hubiese hecho pública su buena opinión del trabajo de János Bolyai!

# Los Bolyai

# Carta de Farkas a Gauss, 1816

- Farkas pide a Gauss que acepte a su hijo en su casa.

- *No tienes una hija que pueda resultar (recíprocamente) peligrosa en esta época...? Estás sano y no eres pobre? Estás satisfecho y no cascarrabias? Y, principalmente, es tu esposa excepcional entre todas las mujeres? No es más variable que una veleta? Es imprevisible como el cambio de un barómetro?...*

# Göttingen

# Farkas a János. Abril 1820

*Por el amor de Dios! Deja las paralelas tranquilas, abjura de ellas como de una charla indecente, te quitaran (como a mi) todo tu tiempo, salud, tranquilidad y felicidad de tu vida.*

# Carta de Janos a Farkas, 1823

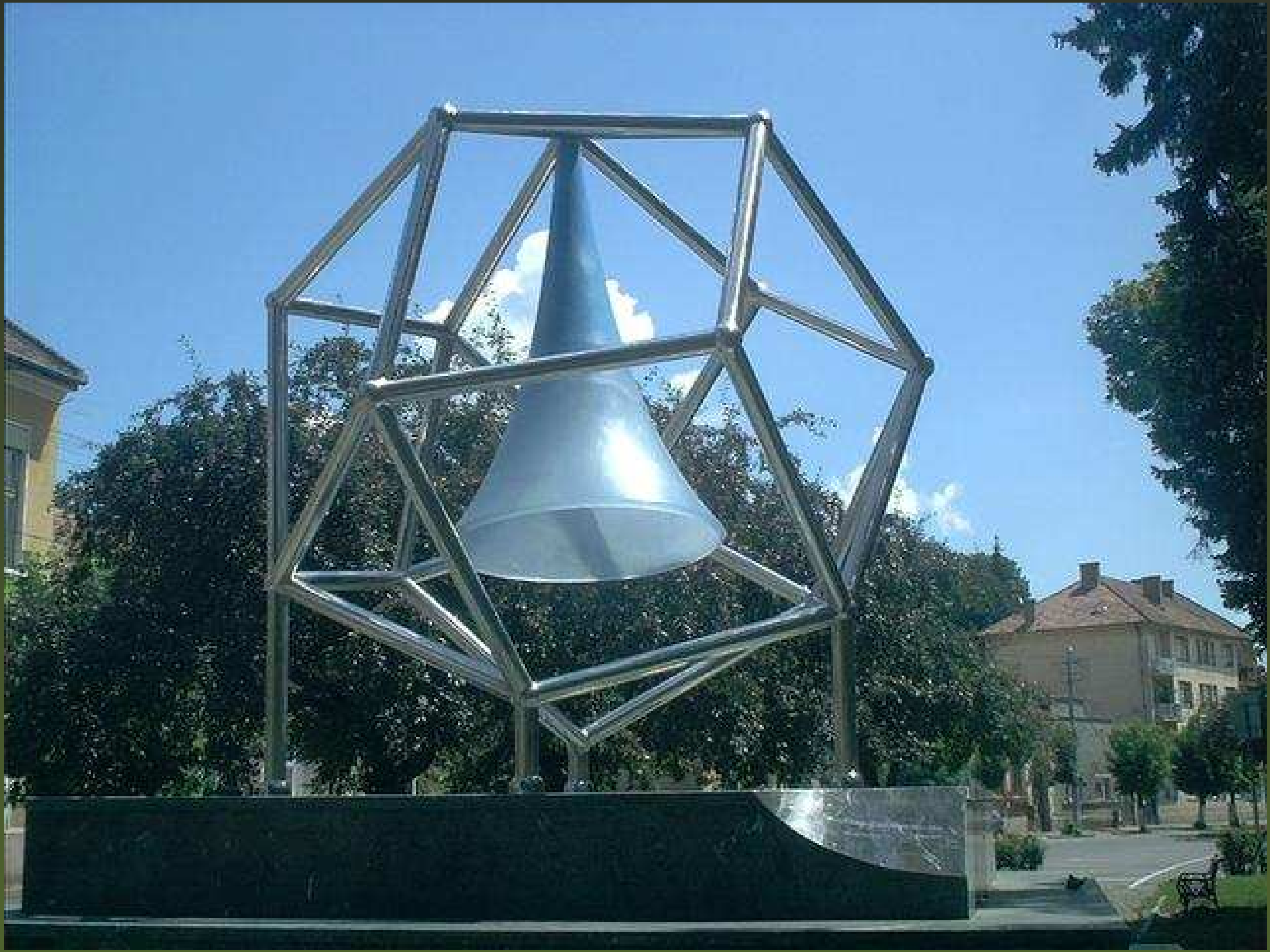
- *Estoy determinado a publicar un trabajo sobre las paralelas, tan pronto lo haya arreglado y preparado y tenga oportunidad para ello [...].*

# Carta de Janos a Farkas, 1823

- *Estoy determinado a publicar un trabajo sobre las paralelas, tan pronto lo haya arreglado y preparado y tenga oportunidad para ello [...].*

- *He descubierto cosas tan soberbias que yo mismo estoy atónito, y significaría una vergüenza eterna dejarlo perder para siempre; si usted, apreciado padre, las ve, las reconocerá; ahora no puedo decir más: de la nada he creado un mundo nuevo y diferente.*

# Un nuevo mundo creado de la nada



Marosvásárhely

# Farkas y János Bolyai

Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Introducendi. 1832

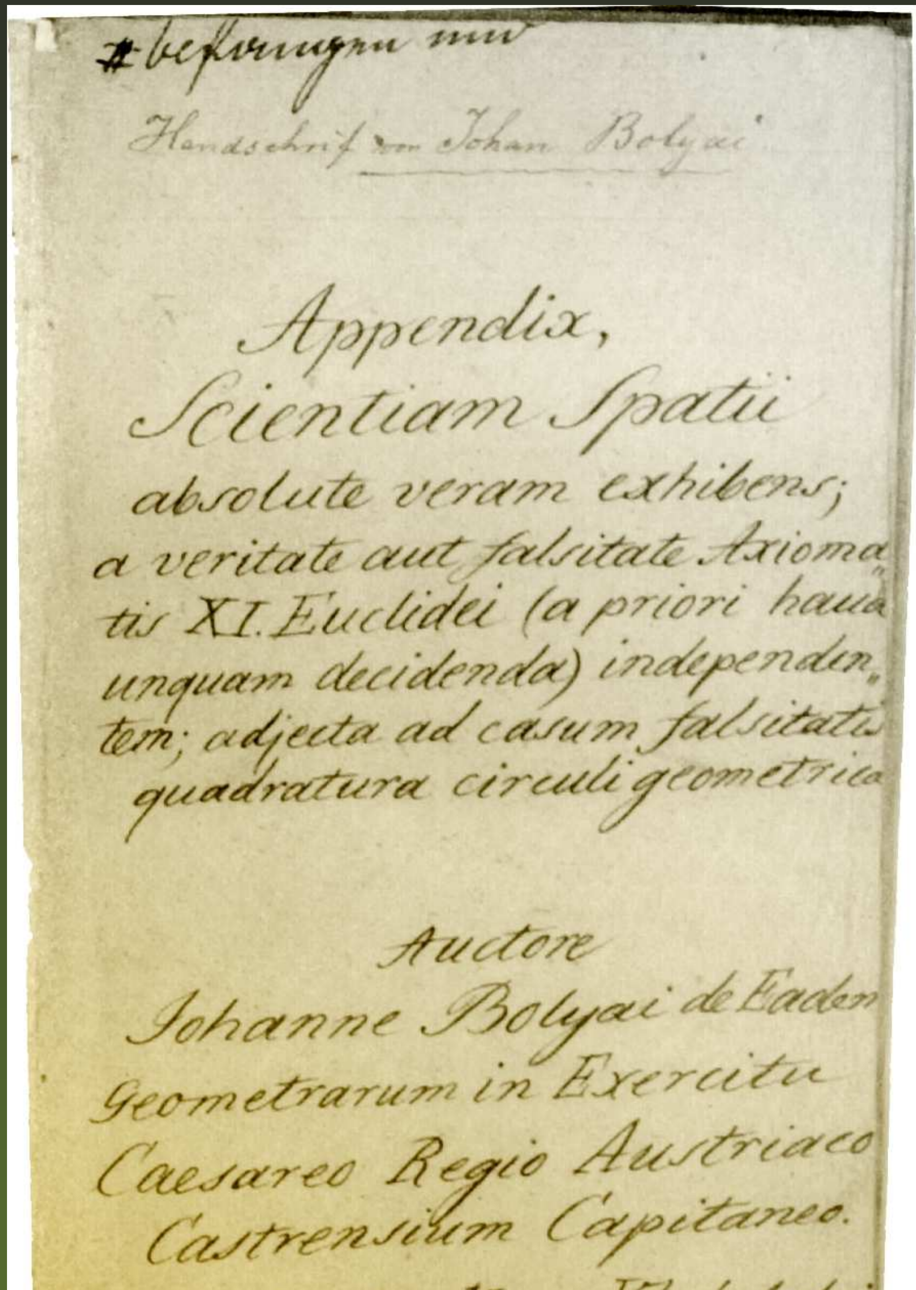
Marosvásárhely

# Lobatchevski y Bolyai

| Lobatchevski | Bolyai |
|---|---|
| 1826 verbal | 1823 verbal |
| 1829 El Mensajero de Kazan | 1829 Impresión del Tentamen |
| 1837 *Géométrie Imaginaire* | 1832 Leído por Gauss |
| 1840 *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parellellinien.* Leído por Gauss | Edición del Tentamen |

# El Apéndice del Tentamen

# Tentamen



Handschrift von Johan Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma-
tis XI. Euclidei (a priori haud
unquam decidenda) independen-
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica.

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

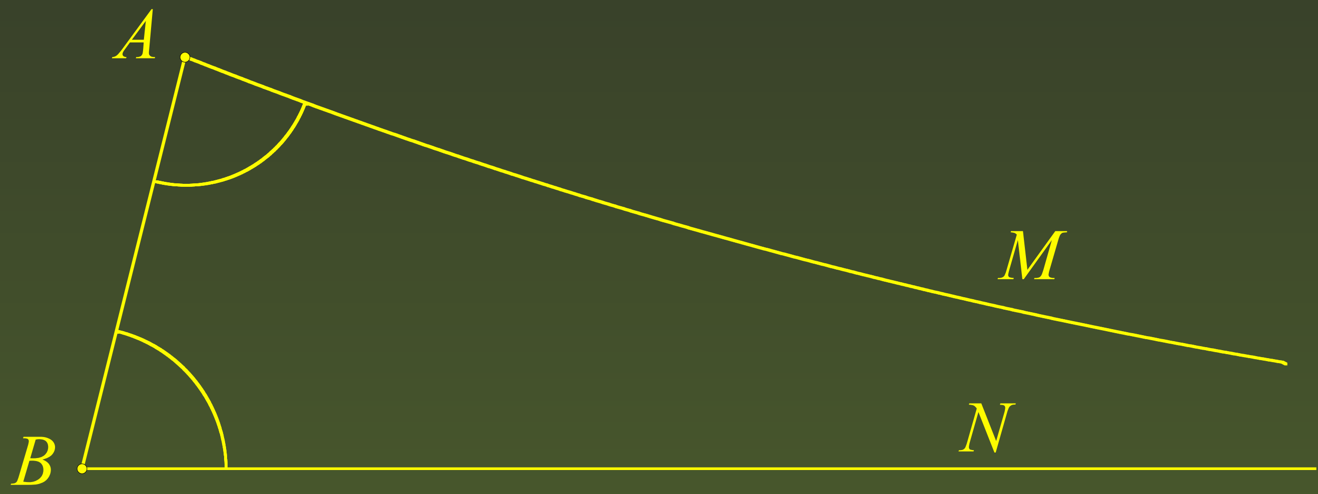
# Parallellarum Theoria 1820

# El Apéndice del Tentamen

- §1 Introduce el paralelismo.
- §11 Introduce horosfera y horociclo.
- §21 *La geometría de la horoesfera es euclidiana*.
- §24 Aparecen exponenciales.
- §25 Trigonometria absoluta.
- §32 Introduce el elemento de longitud.
- §43 Cuadratura del círculo.

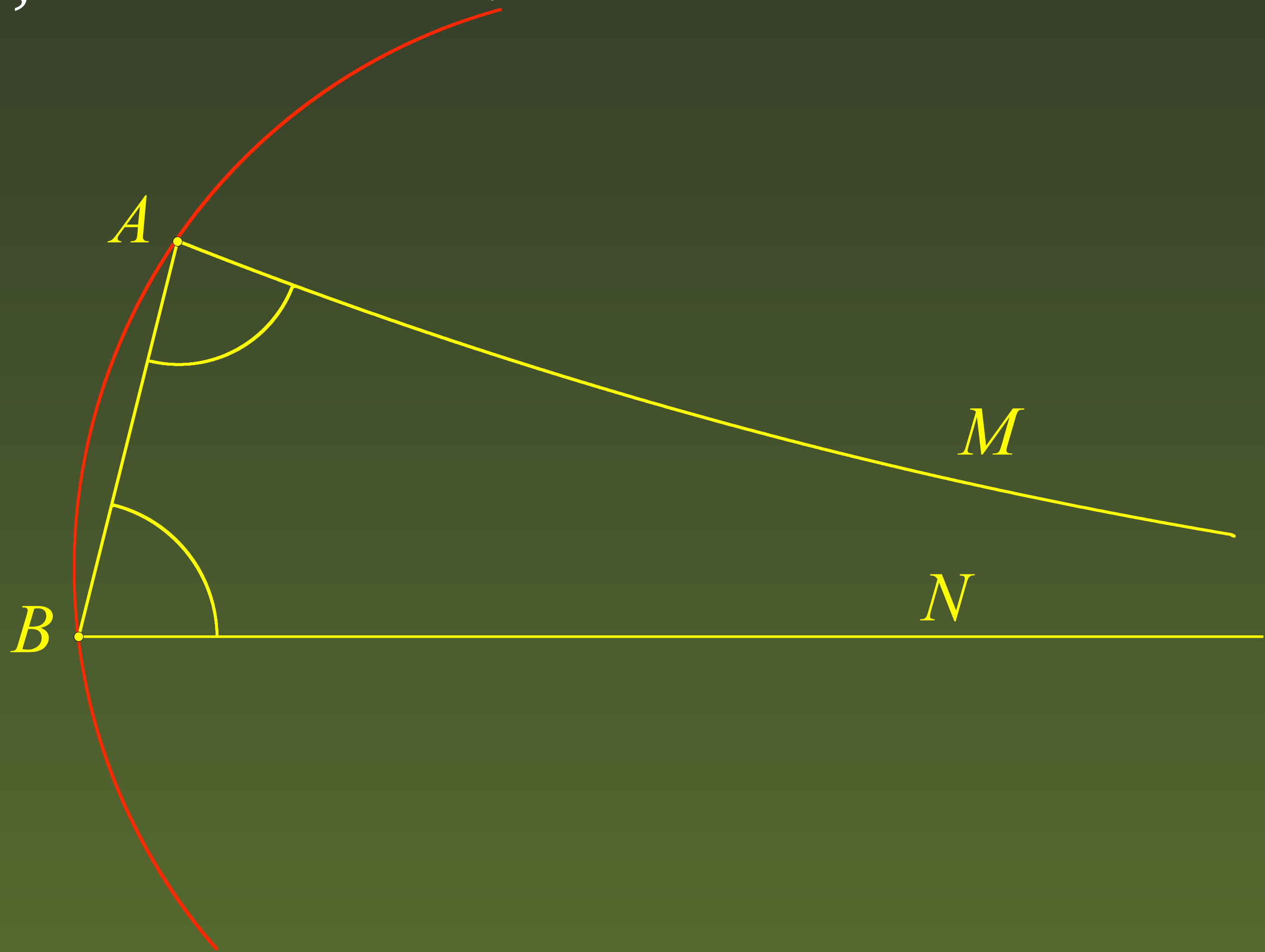
# §11. Horoesfera

*Consideremos el conjunto formado por el punto* $A$ *y todos los puntos* $B$ *tales que si* $BN \| AM$ *entonces* $BN \doteq AM$*; llamemosla* $F$.

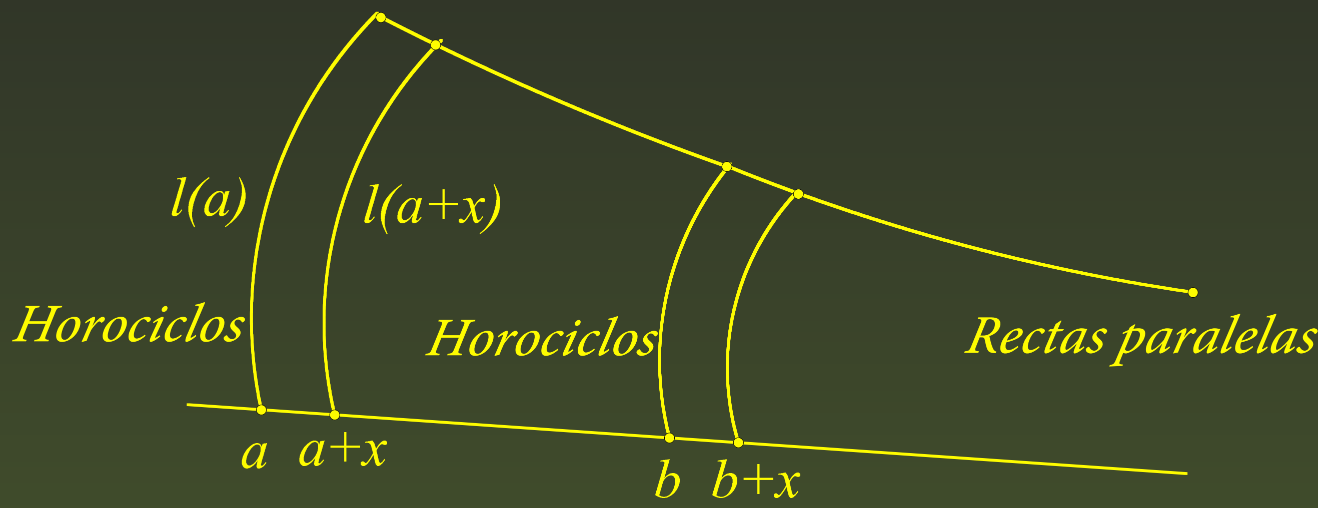


# §11. Horoesfera

*Consideremos el conjunto formado por el punto* $A$ *y todos los puntos* $B$ *tales que si* $BN \| AM$ *entonces* $BN \simeq AM$*; llamemosla* $F$.



# §24. Exponenciales

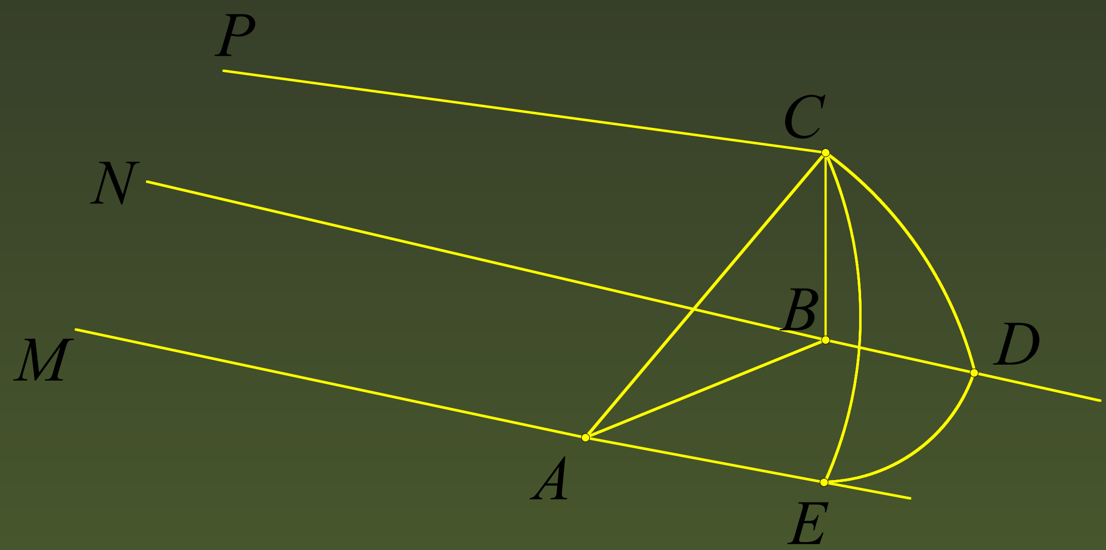



$$\varphi(x) = \frac{l(a+x)}{l(a)}$$

$$\varphi(x+y) = \varphi(y) \cdot \varphi(x)$$

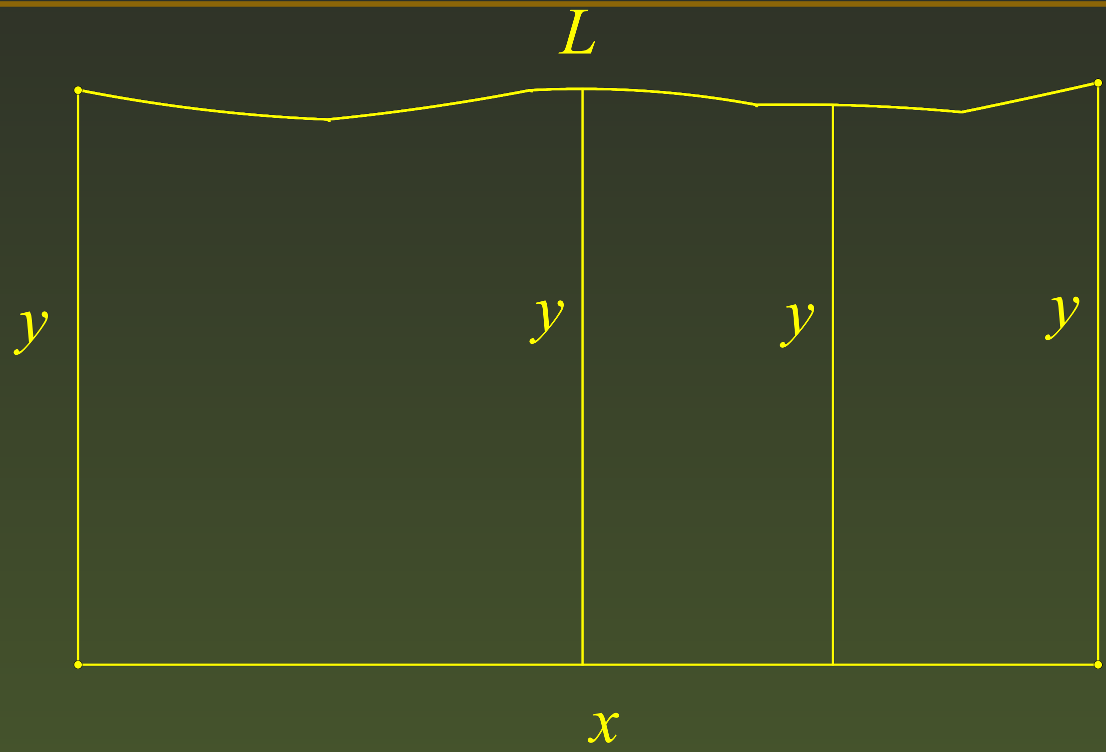
# §25. Teorema del seno

*En cualquier triángulo rectilíneo, los círculos con radio igual a sus lados son como los senos de los ángulos opuestos.*




$$\frac{1}{\sin A} = \frac{EC}{DC} = \frac{\odot EC}{\odot DC} = \frac{\odot AC}{\odot BC}$$

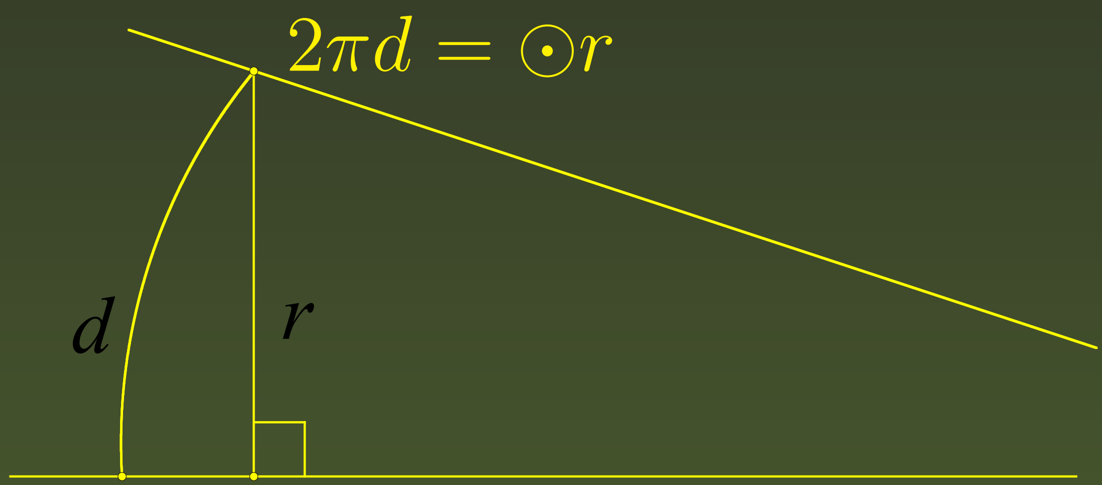
# §27. Equidistantes




$$L = \frac{x}{\sin \Pi(y)} = x \cosh(\frac{y}{R})$$

# §30. Longitud circunferencia

$$\odot r = 2\pi R \tan z, \qquad z = \frac{\pi}{2} - \Pi(r)$$



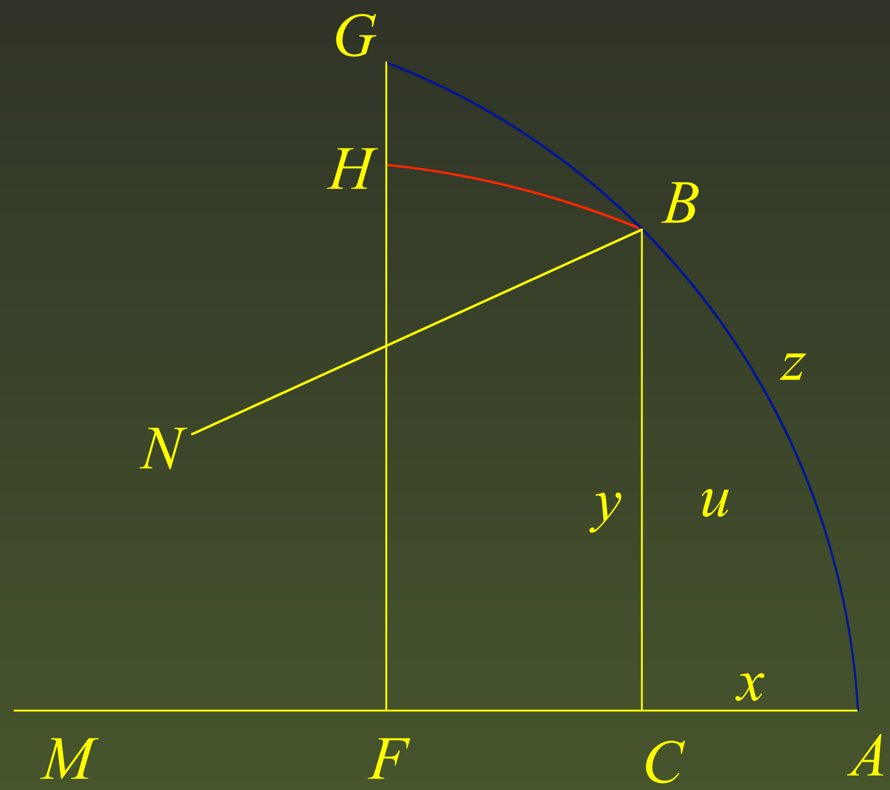

$$\odot r = 2\pi R \sinh \frac{r}{R}$$

# §32. Métrica

gatur): innotescet exinde etiam limes ipsius $\frac{}{bh}$, adeoque tang *hba*; eritque (cum *hbc* manifesto nec $>$ nec $<$ adeoque $= R$ sit), *tangens* in *b* ipsius *bg* per *y* determinata.

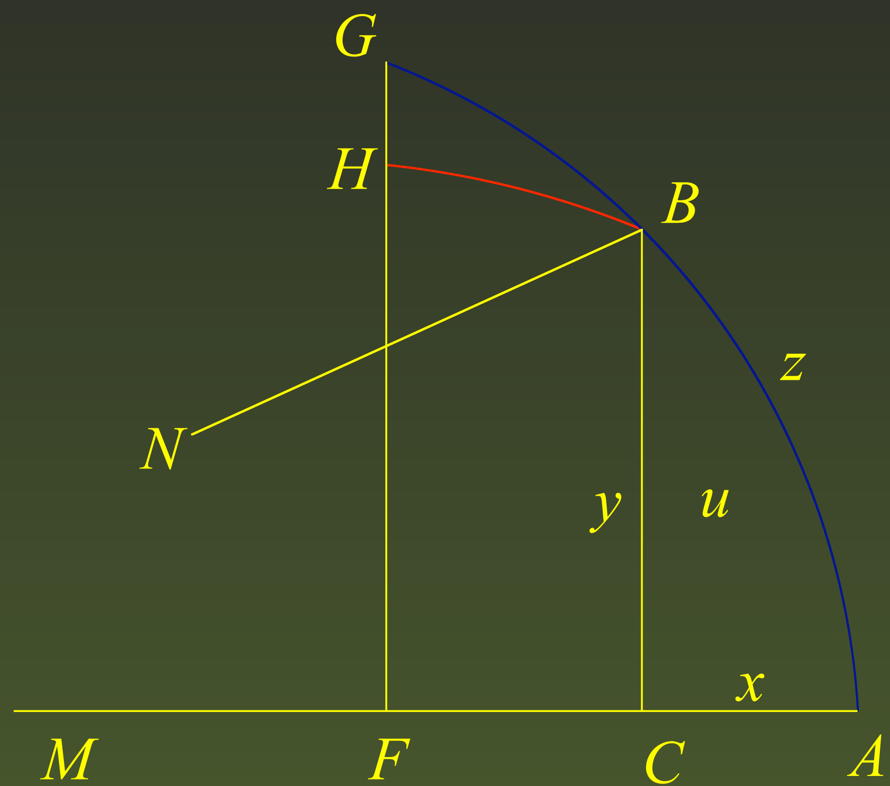
II. Demonstrari potest, esse $\frac{dz^2}{dy^2+bh^2} \sim 1$; Hinc *limes* ipsius $\frac{dz}{dx}$, et inde *z* integratione (per *x* expressum) reperitur. Et potest lineae cuiusvis *in concreto datae* aequatio in *S* inveniri, e. g. ipsius

# §32. Métrica



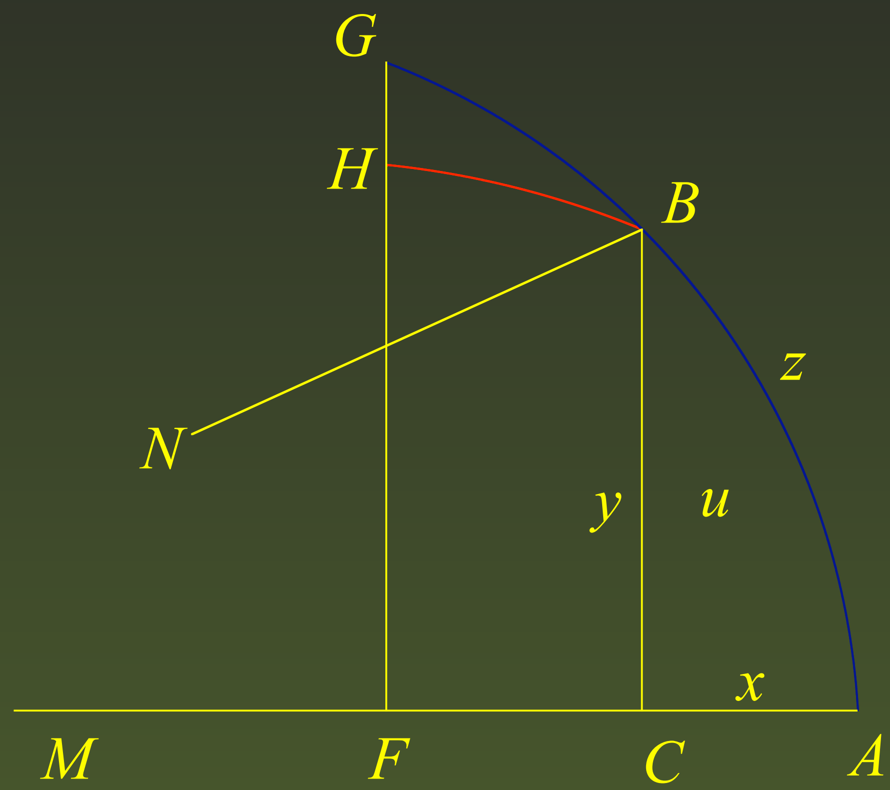

$$\frac{dz^2}{dy^2 + \overline{BH}^2} \doteq 1$$

# §32. Métrica



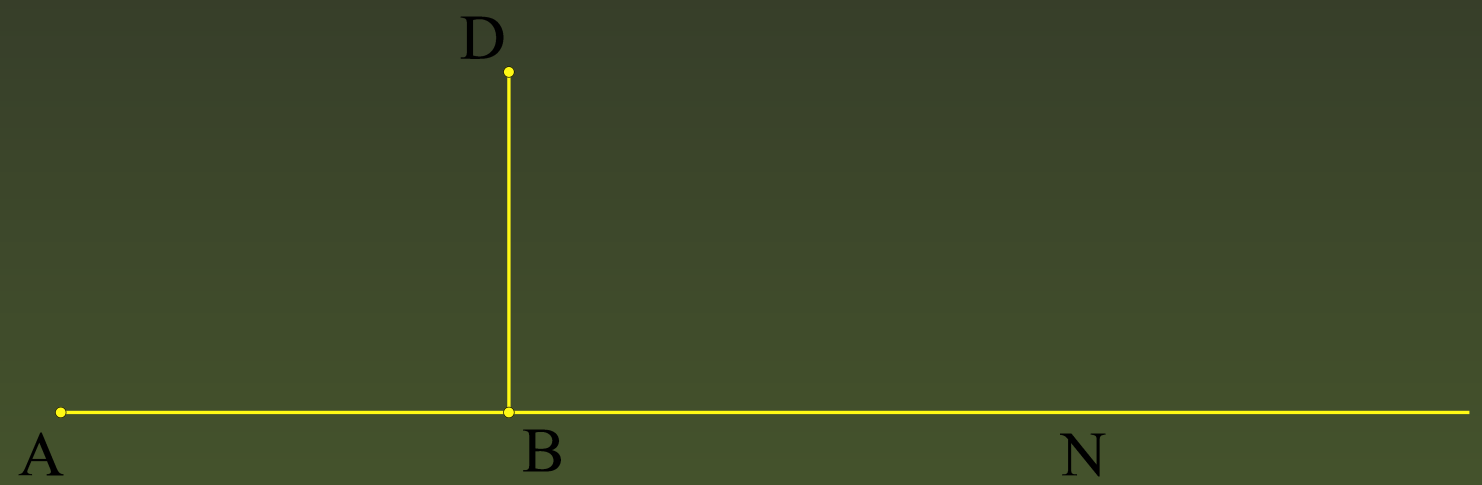

$$\frac{dz^2}{dy^2 + \cosh^2(\frac{y}{R})dx^2} \doteq 1$$

# §32. Métrica

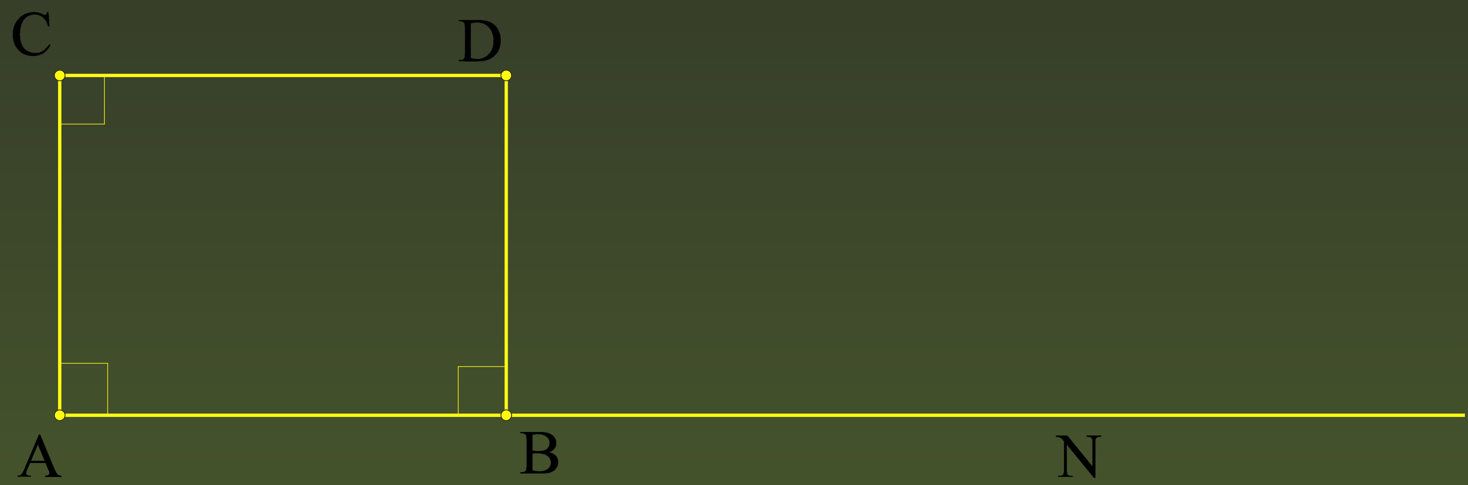



$$ds^2 = dy^2 + \cosh^2(\frac{y}{R})dx^2$$

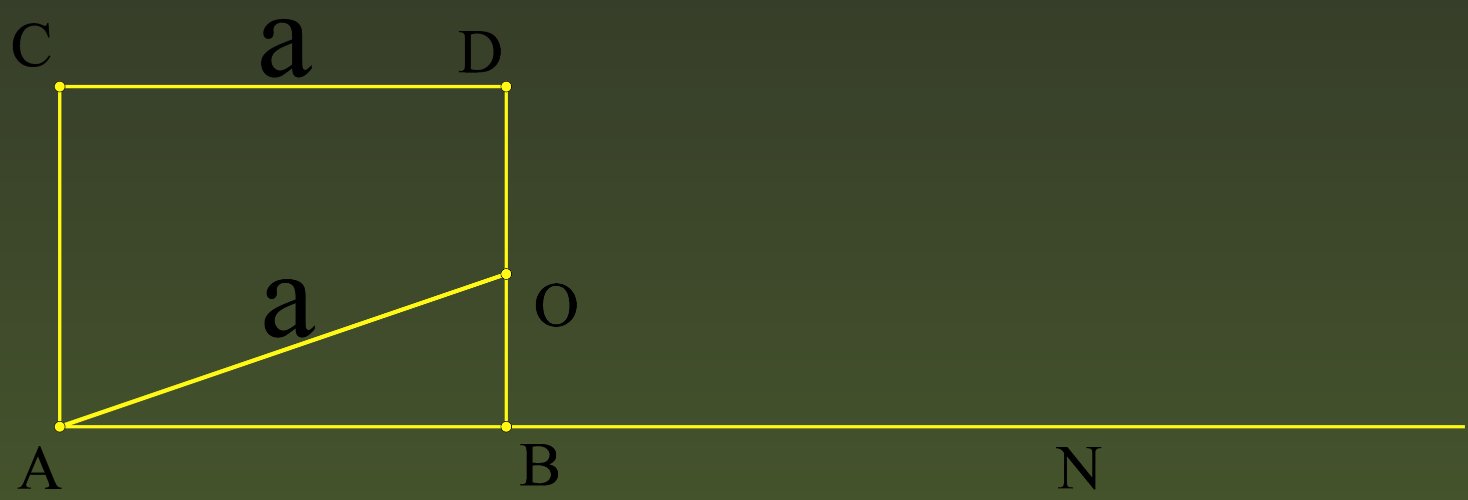
# §34. Angulo de paralelismo



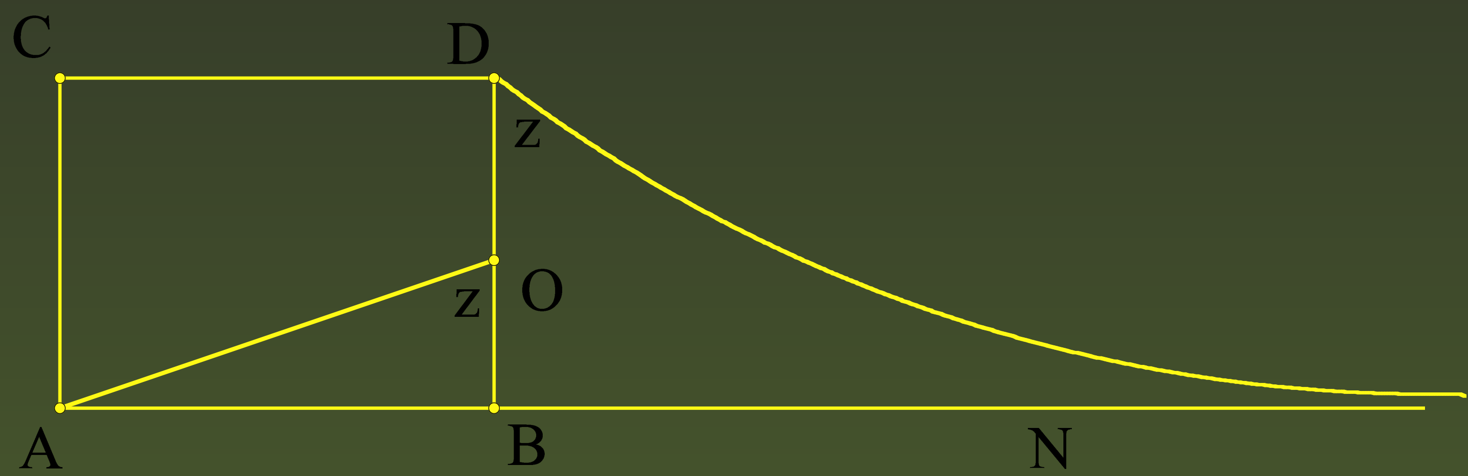
# §34. Angulo de paralelismo



# §34. Angulo de paralelismo



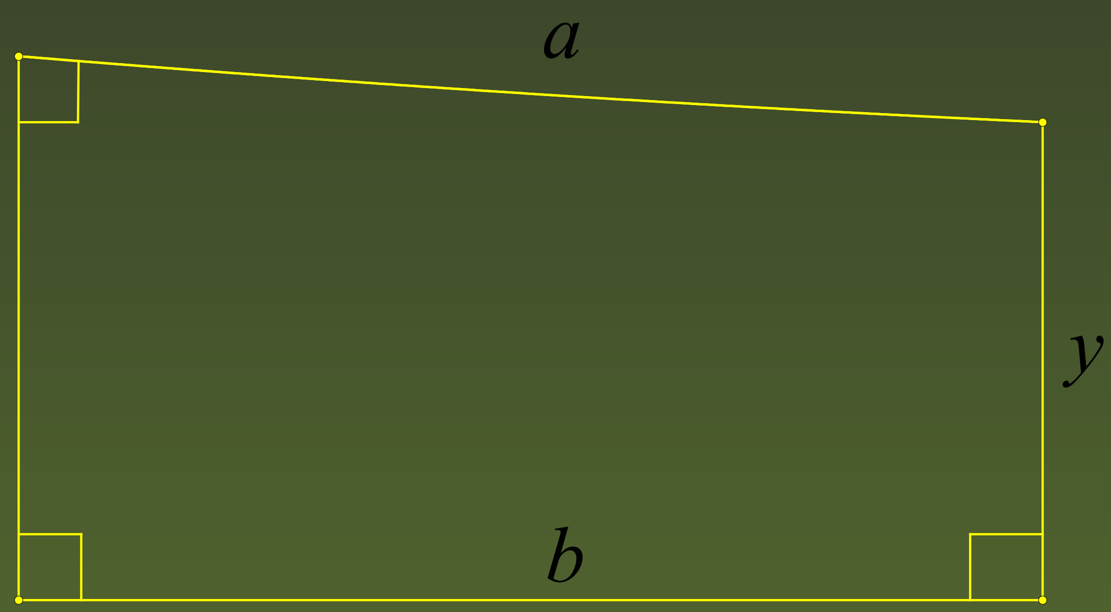
# §34. Angulo de paralelismo



# Justificación

Trigonometría de un “Lambert”

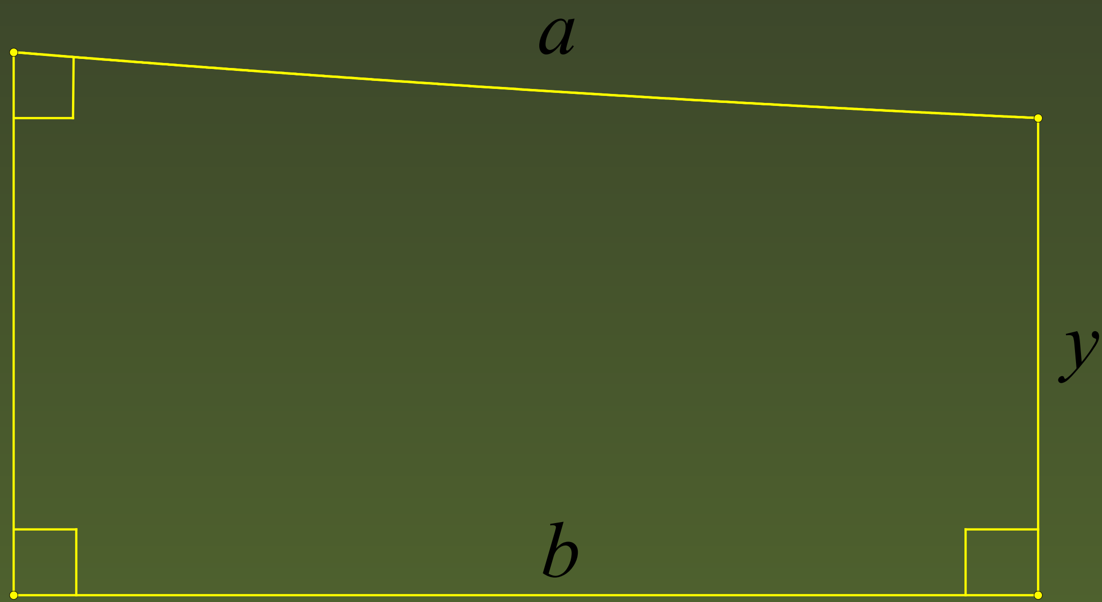
$$\cosh \frac{y}{R} = \frac{\sinh \frac{a}{R}}{\sinh \frac{b}{R}}$$



# Justificación

Trigonometría de un “Lambert”

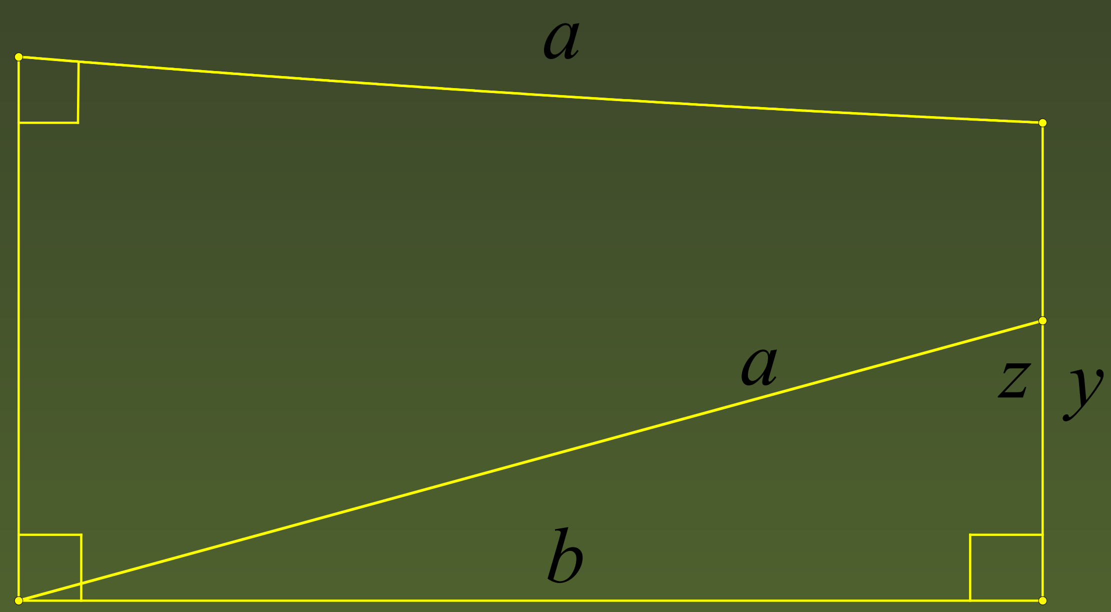
$$\cosh\frac{y}{R} = \frac{\sinh\frac{a}{R}}{\sinh\frac{b}{R}} = \frac{1}{\sin\Pi(y)}$$



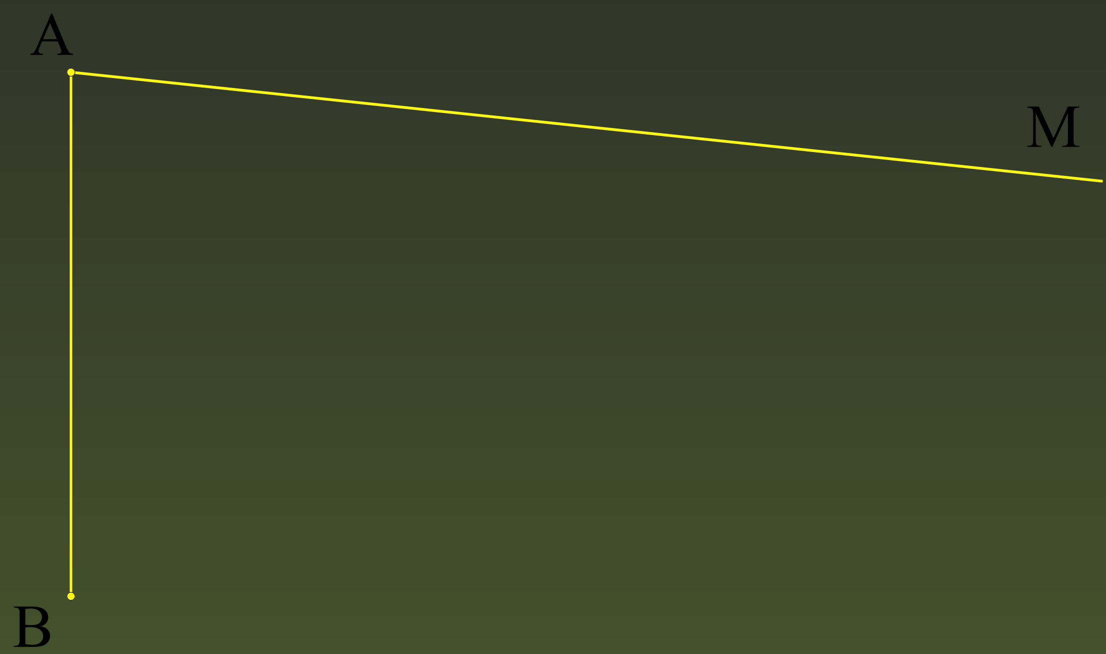
# Justificación

Trigonometría de un "Lambert"

$$\cosh\frac{y}{R} = \frac{\sinh\frac{a}{R}}{\sinh\frac{b}{R}} = \frac{1}{\sin\Pi(y)} = \frac{1}{\sin z}$$

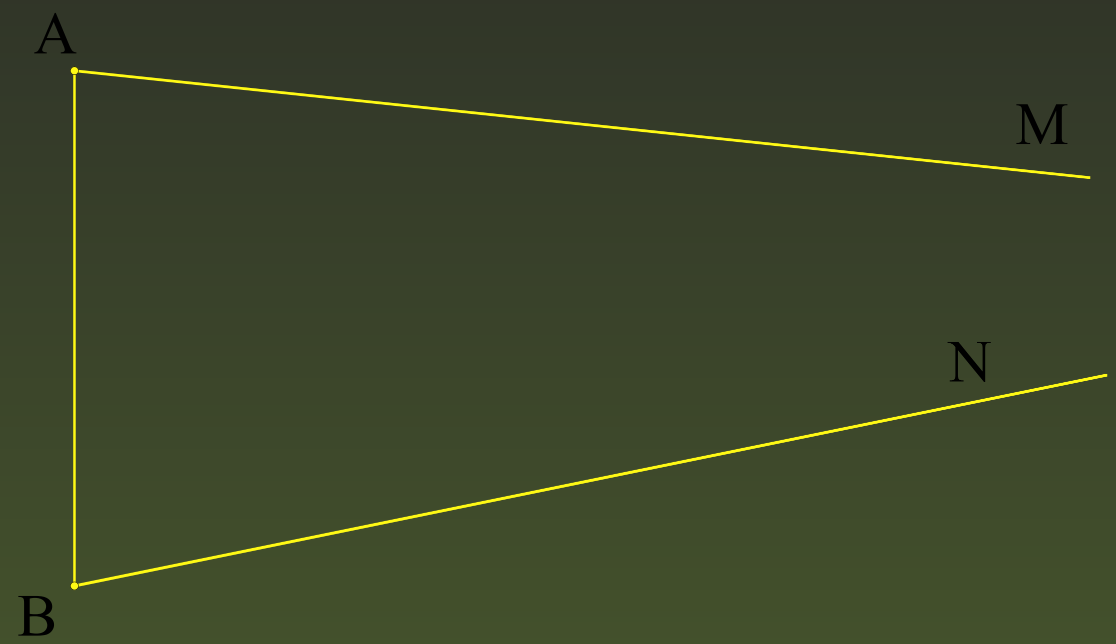


# §35. Segmento de paralelismo



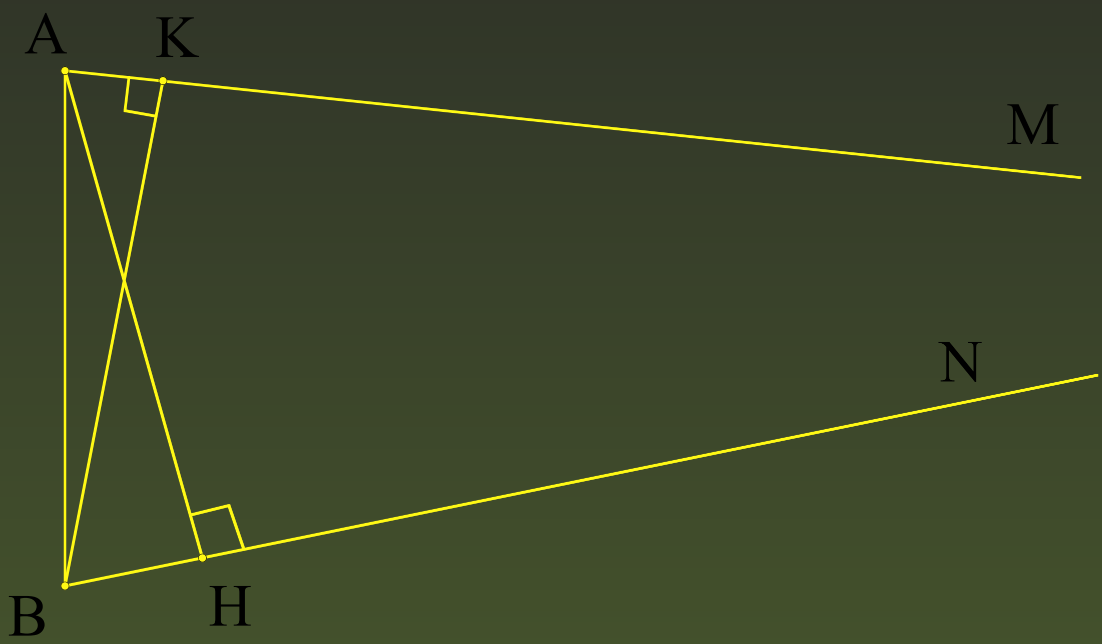

- Dado $\alpha = BAM$, buscamos $x$ con $\Pi(x) = \alpha$.

# §35. Segmento de paralelismo



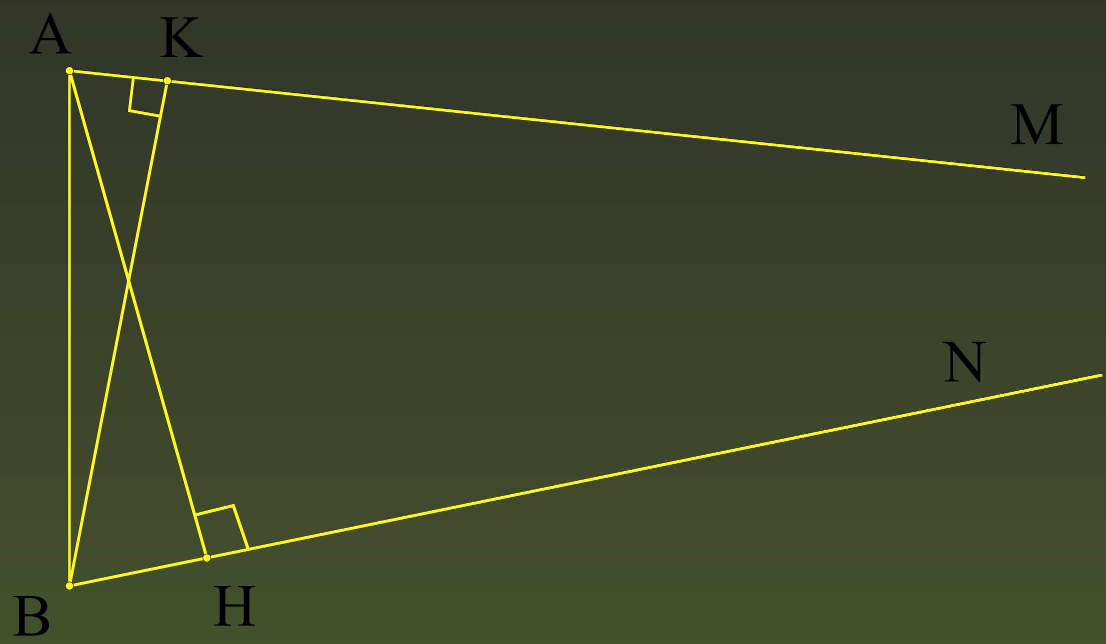

- Trazamos la paralela.

# §35. Segmento de paralelismo



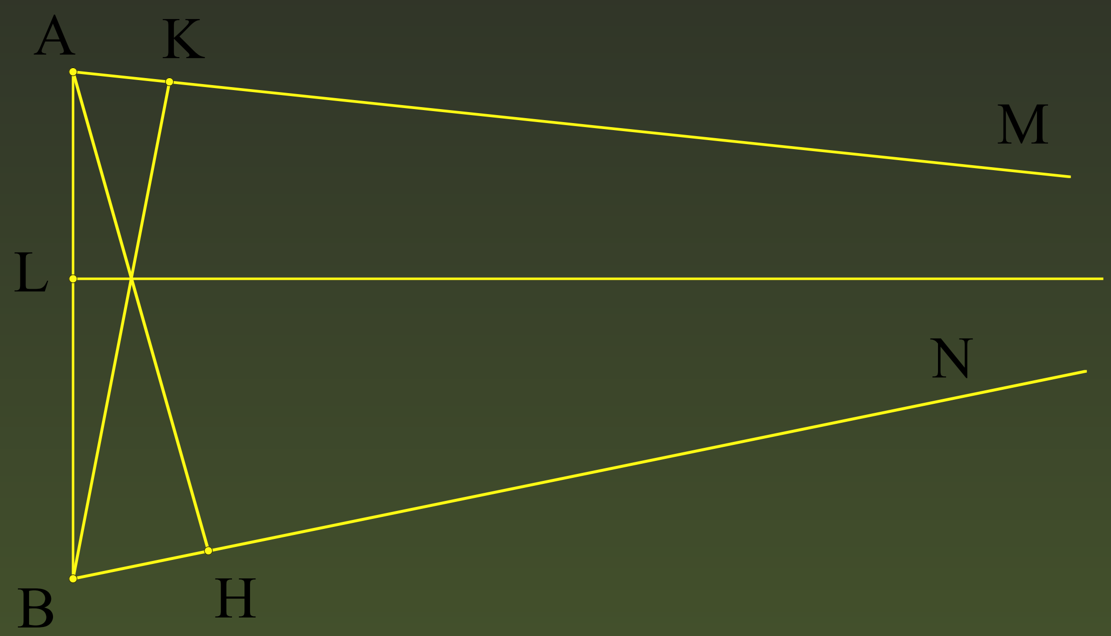

- Trazamos las perpendiculares.

# §35. Segmento de paralelismo




- Trazamos las perpendiculares.
- Ortocentro.

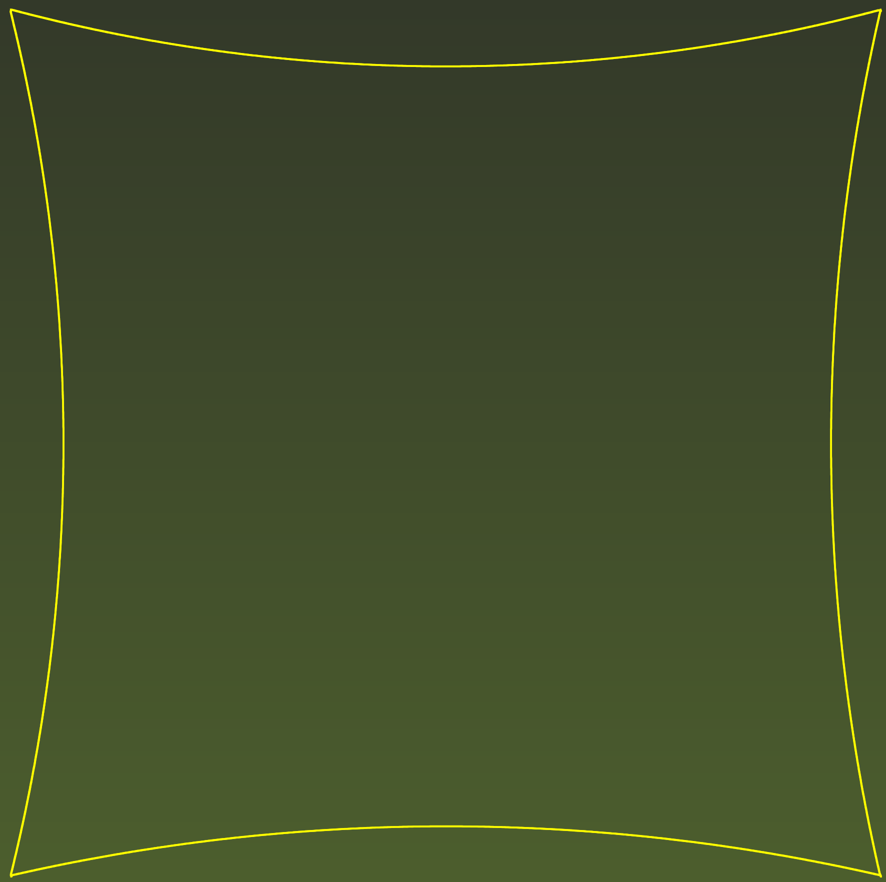
# §35. Segmento de paralelismo




- Hemos construido un segmento $AL$ tal que

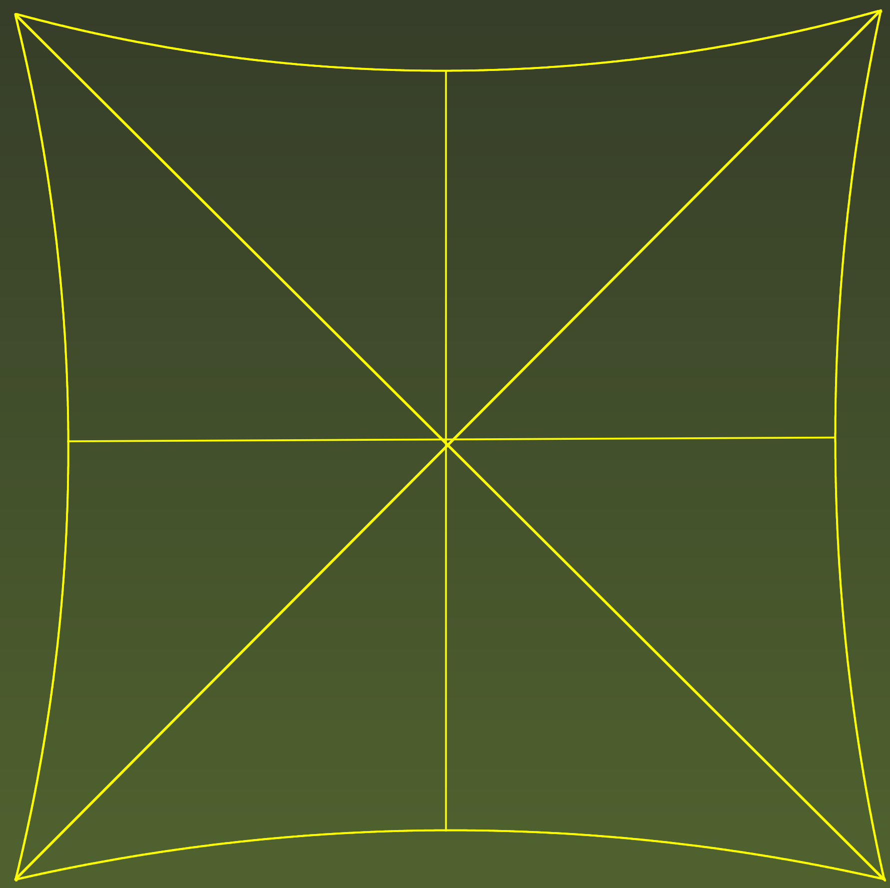
$$\Pi(AL) = \alpha$$

# §43. Cuadrado de área $\pi R^2$

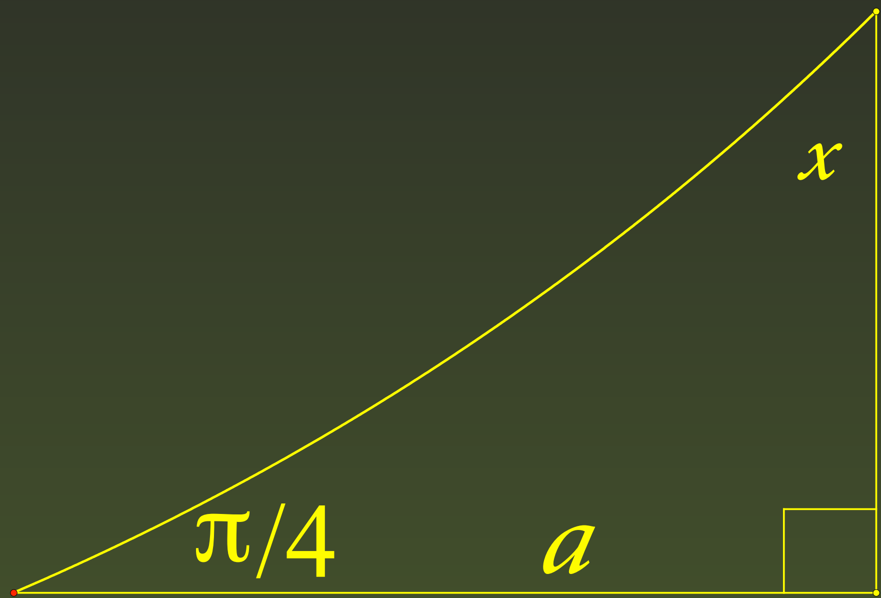


# §43. Cuadrado de área $\pi R^2$

Queremos construir un "cuadrado" de área $\pi R^2$.

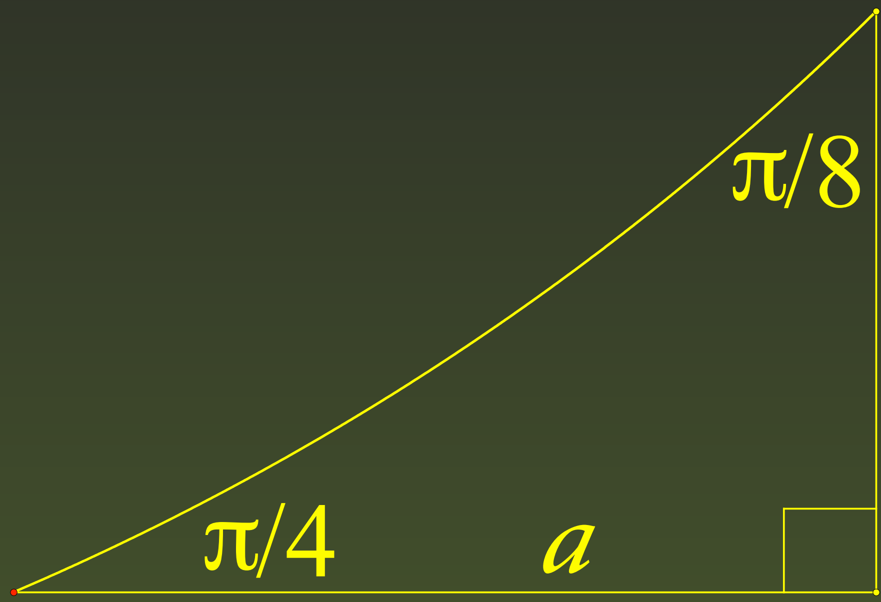


# §43. Triángulo de área $\pi R^2/8$




- Area $= R^2(\pi - (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + x)) = R^2\pi/8.$

# §43. Triángulo de área $\pi R^2/8$




- Area $= R^2(\pi - (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8})) = R^2\pi/8.$

# §43. Triángulo de área $\pi R^2/8$

$$\cosh\frac{a}{R} = \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

# §43. Triángulo de área $\pi R^2/8$

$$\cosh\frac{a}{R} = \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} \qquad 1 = \sin\Pi(x)\cosh(\frac{x}{R})$$

# §43. Triángulo de área $\pi R^2/8$

$$\cosh\frac{a}{R} = \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} \qquad 1 = \sin\Pi(x)\cosh(\frac{x}{R})$$

$$= \frac{\cosh\frac{c}{R}}{\cosh\frac{b}{R}}; \qquad \Pi(b) = 3\pi/8,\ \Pi(c) = \pi/4$$

# §43. Triángulo de área $\pi R^2/8$

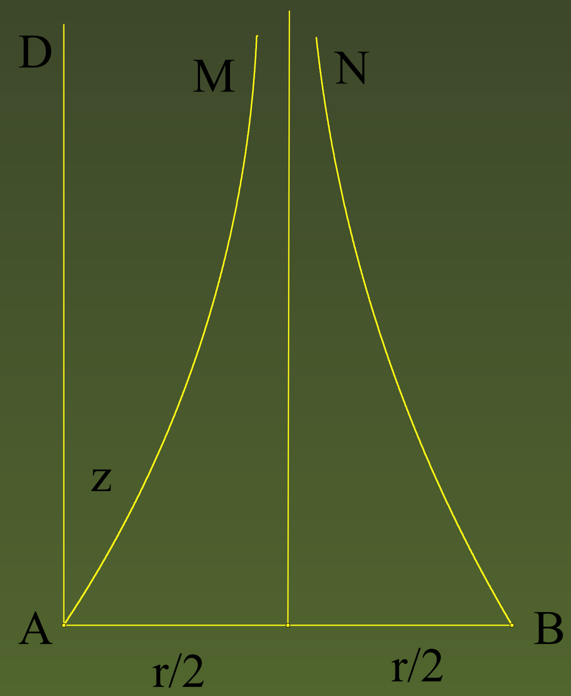
$$\cosh\frac{a}{R} = \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} \qquad 1 = \sin\Pi(x)\cosh(\frac{x}{R})$$

$$= \frac{\cosh\frac{c}{R}}{\cosh\frac{b}{R}}; \qquad \Pi(b) = 3\pi/8,\ \Pi(c) = \pi/4$$

- $a$ es el cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa $c$ y el otro cateto $b$, y por lo tanto construible.

# §43. Círculo de área $\pi R^2$

- Area círculo $= \pi(2R\sinh\frac{r}{2R})^2 = \pi(2R\tan z)^2.$
- $z$ es el complementario del ángulo de paralelismo de $r/2$.



# §43. Círculo de área $\pi R^2$

- Basta construir $z$ con $\tan z = \frac{1}{2}$ y $r$ a partir de $\Pi(r/2) = \pi/2 - z$.

- Esto acaba la cuadratura del círculo hiperbólico, con la advertencia de que no todo círculo hiperbólico se puede cuadrar! Cuales se pueden?

# Ein Genie erster Grösse

Felicidades Antonio!!