Geometria projectiva

Agustí Reventós i Tarrida

13 de setembre de 2006

A la meva mare
Margarida Tarrida i Calvo

a la memòria del meu pare
Ramon Reventós i Valls.

i, òbviament, a la
Berta Gabarnet i Llobet

Índex

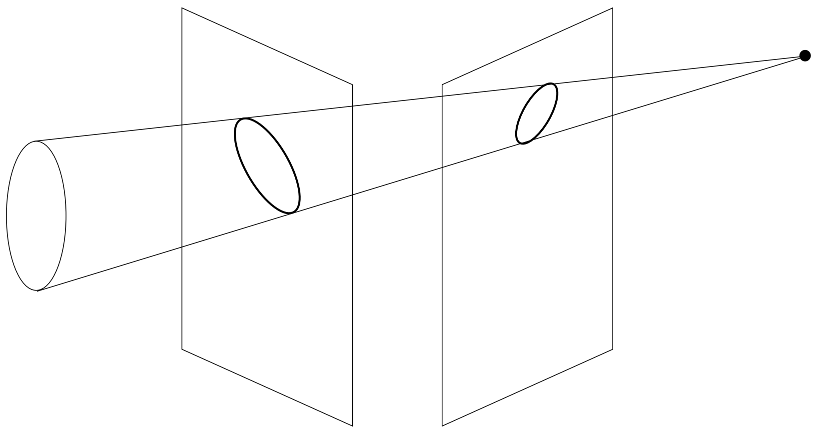
1. Introducció

La geometria projectiva té els seus orígens històrics en els treballs dels pintors del Renaixement (segle XV) que volien resoldre el problema de representar el vertader món tridimensional sobre teles bidimensionals. Estaven convençuts, potser per la influència dels grecs, que hi havia lleis matemàtiques que, un cop conegudes, els permetrien de resoldre el problema amb tota generalitat. Afortunadament aquests pintors eren també arquitectes i matemàtics i la seva formació els va permetre arribar a grans resultats.

Van suposar primerament que el pintor observava una escena tridimensional amb un sol ull i que cada punt de l'escena llençava un raig de llum dirigit a l'ull. D'aquesta manera tenien una mena de con, amb vèrtex a l'ull, i si imaginaven llavors la tela com si fos un vidre transparent interposat entre l'escena i l'ull, apareixia en aquest vidre bidimensional el que el pintor havia de pintar a la tela.

Les teles no són, però, transparents, i a més el pintor sabia què havia de pintar però no com pintar-ho.

Del con se'n diu *projecció* i del tall d'aquest con amb la tela se'n diu *secció*.

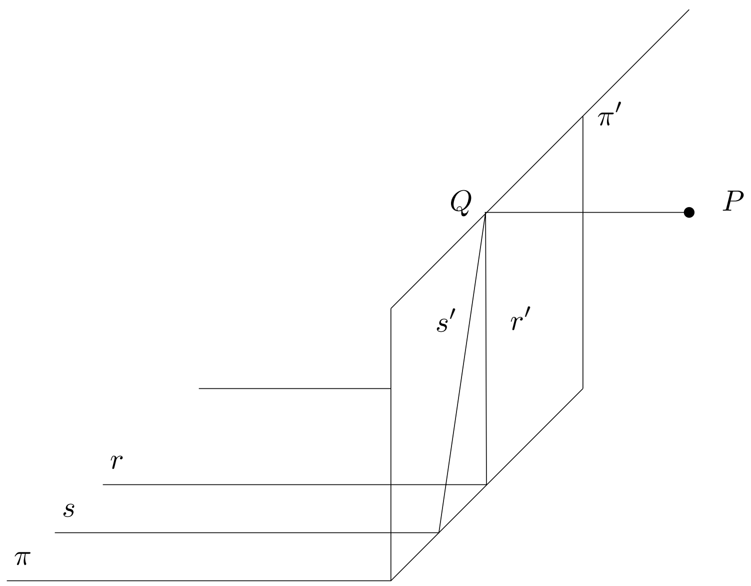


Si en lloc d'interposar un d'aquests vidres n'interposem dos no paral·lels, obtindrem representacions bidimensionals (seccions) diferents de la mateixa escena tridimensional. És natural, doncs, preguntar-se quines propietats comunes tenen aquestes dues seccions. Es diu també que una d'elles s'ha obtingut de l'altra per projecció o perspectiva des de l'ull.

També podem deixar fixa l'escena tridimensional i moure la posició de l'ull. S'obtindran, com abans, diferents seccions, però com que totes provenen de la mateixa escena, també és d'esperar que tindran propietats comunes.

Si busquem propietats comunes a dues seccions de la mateixa projecció, ens adonem de seguida que ni la longitud, ni l'àrea, ni els angles, ni el paral·lelisme es conserva. Tenim doncs un panorama descoratjador.

Vegem què passa amb les rectes paral·leles.



Imaginem que volem representar en el pla π' de la figura dues rectes paral·leles del pla π tal com les veiem des del punt P. El "con" format pels punts de r i P és en aquest cas un pla, i el "con" format pels punts de s i P és un altre pla. Aquests dos plans es tallen en una recta que passa per P i talla π' en Q. Així, les rectes paral·leles r i s de π es veuen com dues rectes r', s' de π' concurrents a Q. De fet, totes les rectes de π paral·leles a r es veuen des de P com rectes de π' que passen per Q.

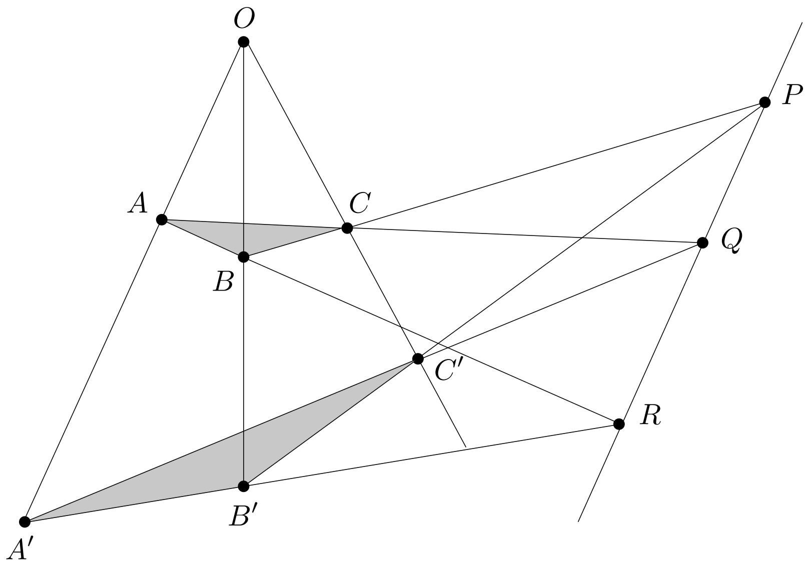
Qualsevol altra família de rectes paral·leles de π, no paral·leles a π', es transforma en una família de rectes de π' concurrents a punts de la recta de π' que passa per Q i és paral·lela a π. Es diu que aquesta recta és la recta de l'infinit i així podem dir que les rectes paral·leles quan les dibuixes es tallen a l'infinit.

No obstant això, hem vist que les línies rectes en una secció continuen essent línies rectes en qualsevol altra secció. En particular els triangles es transformen en triangles. Però resulta que dos d'aquests triangles estan fortament relacionats, com va demostrar el matemàtic francès Gérard Desargues (1593-1662), en el que es pot considerar com primer teorema de geometria projectiva. L'observació de Desargues és la següent:

Suposem que l'ull en el punt O observa un triangle ABC. El conjunt de rectes per O i els punts dels costats del triangle formen, com hem dit abans, una projecció. Si fem una secció d'aquesta projecció, obtindrem un segon triangle $A'B'C'$ amb OAA' alineats, OBB' alineats i OCC' alineats.

El teorema de Desargues afirma llavors que els costats corresponents dels triangles es tallen en punts alineats. És a dir $P = BC \cdot B'C'$, $Q = AC \cdot A'C'$ i $R = AB \cdot A'B'$ estan alineats. Això dóna una restricció a l'hora de dibuixar la projecció des de O d'un triangle que està en un pla π sobre un pla π'.

La demostració del teorema és trivial ja que els plans π del triangle ABC i π' del triangle $A'B'C'$ es tallen en una recta. Ara bé, $R = AB \cdot A'B'$ pertany a π perquè AB pertany a π, i pertany a π' perquè $A'B'$ pertany a π'. Per tant R, i igualment P i Q, pertanyen a $\pi \cdot \pi'$, que és una recta.



Què passa, però, si AB i $A'B'$ són paral·leles? Llavors R no existeix. Però resulta que en aquest cas BC, $B'C'$ i AC, $A'C'$ són també paral·leles de manera que si ho dibuixéssim tot, com hem fet abans, en un altre pla veuríem com aquestes parelles de rectes es tallen a la recta de l'infinit i els seus punts d'intersecció estan, per tant, alineats.

Així doncs, el teorema és cert tant si les rectes són paral·leles com si no ho són. En geometria projectiva tindrem l'avantatge que no caldrà mai fer aquesta distinció ja que dues rectes en geometria projectiva sempre es tallen, és a dir, que no hi ha rectes paral·leles.

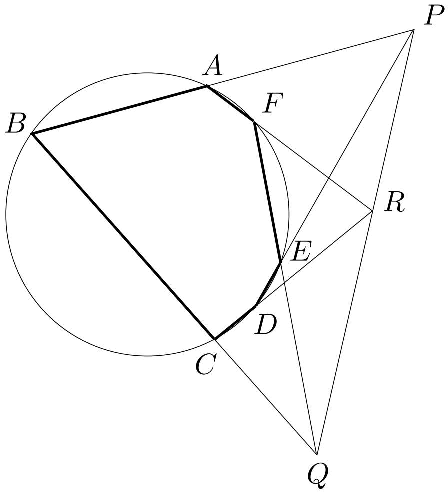
La configuració de Desargues, és a dir el dibuix format pels dos triangles en perspectiva des de O, està format per 10 rectes i 10 punts, i curiosament cada punt es pot considerar vèrtex de dos triangles en perspectiva; per exemple, des de B veiem OAC i $B'RP$ en perspectiva i quan prolonguem els costats corresponents, obtenim $OA \cdot B'R = A'$, $AC \cdot RP = Q$ i $OC \cdot B'P = C'$, que efectivament estan alineats.

El fet que hi hagi igual nombre de punts que de rectes tampoc és una casualitat i quedarà explicat quan parlem del principi de dualitat.

Lamentablement el treball de Desargues no va ser reconegut pels seus col·legues, excepte René Descartes (1596-1650), i tots els exemplars del seu llibre (1639) es van perdre. L'any 1648, Abraham Bosse, alumne i amic de Desargues, va publicar *El mètode universal de Desargues per a la pràctica de la perspectiva* i en un apèndix va reproduir el teorema de Desargues. Però també es va perdre aquest apèndix i no es va redescobrir fins el 1804.

Contemporani de Desargues és Blaise Pascal (1623-1662), matemàtic i filòsof francès que als disset anys va demostrar el següent teorema, conegut avui per teorema de Pascal:

Donats 6 *punts* A, B, C, D, E, F *sobre un cercle, els punts que s'obtenen en prolongar costats oposats* $P = AB \cdot DE$, $Q = BC \cdot EF$, $R = CD \cdot FA$ *estan alineats.*



Si ara observem aquest dibuix, conegut per *hexagrama* místic de Pascal, des d'un punt situat fora del pla del paper obtindrem una projecció, i qualsevol secció d'aquesta projecció constarà de sis punts sobre una cònica (secció d'un con circular per un pla) i els punts P', Q', R' que obtindrem en prolongar costats oposats estan a la vegada en el pla de la secció i en el pla OPQ, és a dir estaran també alineats. Això fa que el teorema de Pascal sigui certament un teorema de geometria projectiva, ja que descriu una propietat comuna a totes les seccions d'una mateixa projecció.

Aquests treballs publicats el 1650 van restar també desconeguts fins a principi del segle *XIX*. De fet el treball de Pascal es va perdre i el coneixem per una carta de G.W. Leibniz (1646-1716) al cunyat de Pascal, F. Périer.

L'impuls definitiu a la geometria projectiva el van donar diversos matemàtics, entre ells Michel Chasles (1793-1880), tant pels seus treballs com perquè va trobar en una llibreria una còpia manuscrita del llibre de Desargues feta per un deixeble seu, Phillipe de la Hire (1640-1718).

Al mateix temps Jean Victor Poncelet (1788-1867), oficial de l'exèrcit de Napoleó, va caure presoner a Rússia i allà va refer el que havia après de G. Monge (1746-1818), i L.N.M.Carnot (1653-1823) i va obtenir nous resultats, com la invariància de la raó doble per projeccions que explicarem més endavant.

També cal esmentar Jacob Steiner (1796-1863), en aquest mateix període, pel seu tractament projectiu de les còniques.

Tot això va anar configurant la geometria projectiva com una branca independent de la matemàtica. Però en alguns punts depenia encara de la geometria euclidiana o afí, com per exemple en definir raó doble com quocient de raons simples i aquestes com quocient de distàncies, ja que, com hem dit, la distància no és un concepte projectiu. També la paraula *cercle* del teorema de Pascal depèn de la distància.

K.G.C. von Staudt (1798-1867) va ser el primer a definir *raó doble* a partir de conceptes projectius i després Felix Klein (1849-1925) va poder definir *distància* i *angles* a partir de la raó doble, de manera que es podia pensar la geometria projectiva com anterior a la euclidiana, que passava a ser-ne un cas particular.

De fet també la geometria hiperbòlica desenvolupada per Nicolai Lobatxevski (1795-1856) i Janos Bolai (1802-1860), i la geometria el·líptica de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) es podien interpretar com casos particulars de la geometria projectiva. Per això Arthur Cayley (1821-1895) va dir: "La geometria projectiva és tota la geometria."

Tot això que he comentat fins ara està fortament inspirat en l'extraordinari article, de lectura obligatòria, *Geometria proyectiva*, de Morris Klein (vegeu [8]).

Si recordem que una *acció* d'un grup G sobre un conjunt X no és més que una aplicació $G \times X \longrightarrow X$ tal que

a) $1 \cdot x = x$, (on 1 és l'element neutre del grup).

b) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x, \quad g, h \in G,\ x \in X.$

i que una *geometria* és, segons el programa d'Erlangen de Felix Klein (1878), l'estudi de les propietats de les figures de X invariants per l'acció de G, (és a dir, que una propietat de la figura $F \subset X$ és objecte d'estudi de la geometria si és una propietat comuna a totes les figures $g \cdot F,\ \forall g \in G$), llavors el que està dient Cayley és que el grup de la geometria projectiva és un grup gran que admet com subgrups, que donaran lloc a subgeometries, els grups corresponents a les geometries euclidiana, hiperbòlica i el·líptica. Des d'aquest punt de vista *la geometria projectiva és l'estudi de les propietats de les figures invariants pel grup de les projectivitats*, és a dir invariants pel procés de projecció i secció.

El capítol 3 d'aquests apunts està dedicat a interpretar la geometria afí com una subgeometria de la geometria projectiva.

1.1 Punt de vista axiomàtic

Així com la geometria euclidiana plana es pot considerar com la sèrie de resultats que s'obtenen a partir dels cinc postulats d'Euclides per deduccions lògiques, també la geometria projectiva admet aquest punt de vista.

Els postulats d'Euclides estan pensats per fer geometria del regle i el compàs, mentre que els postulats de la geometria projectiva fan referència a la geometria que es fa només amb el regle.

Tan sols hem de suposar que tenim dos conjunts. Els elements del primer conjunt s'anomenaran *punts* i els del segon *rectes*. Suposarem també que entre punts i rectes hi ha una relació (subconjunt del producte cartesià) i que aquesta relació compleix:

Axioma 1.1.1 *Donats dos punts diferents hi ha una i només una recta relacionada amb els dos (i.e. dos punts determinen una única recta).*

Axioma 1.1.2 *Existeixen almenys tres punts tals que un no està relacionat amb la recta determinada pels altres dos (i.e. existeixen almenys tres punts no alineats).*

Axioma 1.1.3 *Cada recta està relacionada amb almenys tres punts (i.e. cada recta té almenys tres punts).*

Axioma 1.1.4 *Donades dues rectes diferents existeix un punt relacionat amb les dues (i.e. dues rectes sempre es tallen).*

Aquest axioma 1.1.4 és el característic de la geometria projectiva i prové, com hem comentat a la introducció, del fet que a la pràctica no es veuen mai línies paral·leles, com es comprova amb els dibuixos allà fets o observant per exemple les vies de tren.

A partir d'aquests axiomes podríem desenvolupar la geometria projectiva plana, però serà un camí que no seguirem en aquests apunts. Per a un desenvolupament axiomàtic de la geometria projectiva, vegeu per exemple [2].

Quan es desenvolupa una teoria a partir d'uns axiomes apareixen diversos problemes lògics, entre els quals hi ha el de la consistència. És a dir, com saber si aquests axiomes ens portaran en algun moment a demostrar resultats contradictoris. Aquest problema es resol exhibint un *model*, és a dir un objecte matemàtic que existeix de manera independent dels axiomes però que els verifica. Així, el sistema axiomàtic és almenys tan consistent com el model considerat.

Això és, essencialment, el que farem en aquests apunts. Inventarem un model algebraic en què es verificaran els axiomes de la projectiva i estudiarem en profunditat el model sense preocupar-nos, però, d'aquest plantejament axiomàtic, que he volgut explicar aquí perquè és el rerefons geomètric al posterior desenvolupament algebraic.

Si es pren el punt de vista axiomatic hi ha demostracions, com l'anterior del teorema de Desargues, que no funcionen. Això és així pel fet que la demostració implicava raonaments a l'espai, mentre que els anteriors axiomes ens parlen només del pla. Ens podem preguntar si aquest teorema es dedueix realment d'aquests axiomes. La resposta és *no*, i hi ha exemples de geometries no desarguesianes [6].

1.2 Ampliació de l'espai afí

Ja hem comentat que cada família de rectes paral·leles es veuen en una secció com rectes que es tallen en un punt, diferent segons la família que considerem. Per construir un món on dues rectes sempre es tallin, el que podem fer, inspirats en el comentari anterior, és afegir a cada recta euclidiana un nou punt, que podem pensar que és a l'infinit (concepte sense precisar). Però com que rectes paral·leles s'han de tallar en aquest mateix punt, podem pensar que aquest punt és el que tenen en comú totes aquestes rectes paral·leles, és a dir la seva direcció.

Així doncs, podem pensar que les rectes projectives estan formades per les rectes afins completades amb un punt, que és justament la seva direcció. Però això és una mica lleig perquè llavors tenim punts "normals" i punts que són direccions. Per arreglar-ho prendrem una solució realment impactant: tots els punts seran direccions. El pla projectiu que introduirem més endavant no és sinó el conjunt de les direccions de l'espai. Per tant, les seves "rectes" estaran formades de punts tals que tots i cada un d'ells és una direcció. Recíprocament, quan vulguem passar de la geometria projectiva a l'afí, traurem una recta (la recta de l'infinit) i veurem que les altres rectes la tallen en punts que representen justament les direccions de les rectes afins corresponents. Per entendre millor això, vegeu la secció §3.2.

Però s'ha d'entendre bé que en la geometria projectiva no hi ha res que sigui l'infinit. Cap recta privilegiada. Això és un dels grans avantatges de la geometria projectiva, que permet tractar de manera "finita" problemes que en la geometria afí es tracten a l'infinit.

Intuïtivament hem de pensar que aquest nou punt que afegim a les rectes afins a l'infinit, s'hi arriba tant per la "dreta" com per l'"esquerra", de manera que les rectes projectives són com circumferències.

El conjunt de tots aquests nous punts que s'afegeixen a cada recta formen una nova recta anomenada recta de l'infinit.

Espero que aquestes idees imprecises es vagin aclarint al llarg d'aquests apunts.

Agraïments

Finalment vull comentar que aquestes notes han estat possibles gràcies a l'ambient de treball matemàtic que sempre ha existit al Departament de Matemàtiques de la UAB. Poder parlar de problemes matemàtics amb els companys és fonamental per poder-ne millorar la seva comprensió i fer més planera la seva posterior explicació.

Molt especialment vull agrair la col·laboració de l'Enric Nart, que m'ha ajudat en el tema de quàdriques. De fet la classificació *projectiva* de les quàdriques que presentem en el capítol 6 és una continuació del tema de classificació de formes quadràtiques del seu llibre profusament citat aquí. En particular l'actual versió de la demostració 8.3.6 és original seva.

Amb l'Eduardo Gallego i en David Marín he discutit molts dels dubtes que anaven sorgint i sobretot la llista de problemes que adjunto al final dels capítols. Aquesta llista és la que en David Marín ha anat explicant aquests darrers anys, però també hi han contribuït altres professors, molt especialment en Vladimir Gisin, quan va estar com a professor invitat al nostre departament, i en Gregori Guasp, que va escriure en TeX la taula de classificació de còniques i quàdriques que durant anys han rebut els nostres estudiants. També hi han contribuït en Marcel Nicolau, en Miquel Llabrés, la Débora Gil, en Gil Solanes i la Mònica Manjarin. La primera versió d'aquestes notes es va fer sobre els apunts de classe d'Irene Planas.

També vaig compartir aquesta assignatura amb Dolors Herbera i Manuel Castellet, i la Geometria lineal amb Ferran Cedó; les discussions amb tots ells sobre diversos temes van ser molt útils i han contribuït a fer possible aquestes notes.

Agraeixo també molt especialment a Joan Torregrossa, Lluís Alsedà, Albert Ruiz i novament a Eduardo Gallego l'ajut que m'han donat amb el TeX, i a Rosa Rodríguez, que ha fet tots els dibuixos.

Gràcies, doncs, a tots.

2. Espai projectiu

En aquest capítol introduirem un objecte algebraic, l'espai projectiu, que construirem a partir d'un espai vectorial, i que complirà els axiomes de la geometria projectiva, és a dir que ens servirà de model.

Així com dintre dels espais vectorials tenim els subespais vectorials, dintre dels projectius tenim les varietats lineals projectives que fan el paper de rectes, plans, i en general hiperplans de la geometria projectiva. Veurem que aquests objectes es poden descriure per equacions lineals.

Comptarem el nombre de punts i rectes dels espais projectius sobre cossos finits.

Estudiarem també el grup de les projectivitats, que té un paper anàleg al del grup dels moviments en la geometria euclidiana clàssica. Veurem l'important resultat que, en el pla projectiu, donats quatre punts per un costat i quatre punts per un altre existeix una única projectivitat (és a dir, en cert sentit un únic moviment) que porta els quatre primers punts sobre els quatre segons.

2.1 Introducció

Al llarg d'aquestes notes k denotarà sempre un cos commutatiu.

Es diu que dos vectors u, v d'un k-espai vectorial E, diferents de 0, són proporcionals si existeix $\lambda \in k$ tal que $u = \lambda v$. Es diu també que u i v tenen la mateixa direcció.

Definició 2.1.1 *L'espai projectiu associat a un espai vectorial E, que denotarem per $P(E)$, és el conjunt de "direccions" de E.*

Més concretament,

$$P(E) = (E \backslash \{0\}) / \sim$$

on "$\sim$" és la relació

$$u \sim v \iff \exists\, \lambda \in k; \quad u = \lambda v,$$

és a dir, $P(E)$ és el conjunt quocient corresponent a aquesta relació d'equivalència.

Definició 2.1.2 *Definim la dimensió d'un espai projectiu com* $\dim P(E) = \dim E - 1$.

Els espais projectius de dimensió 1 i 2 es diuen respectivament *rectes* i *plans projectius.*

Tot i que $P(E)$ és un conjunt i no pas un espai vectorial, té una certa estructura que prové de l'aplicació canònica

$$p : E\backslash\{0\} \longrightarrow P(E).$$

L'estudi de les propietats que $P(E)$ hereta de E a través de p és, de fet, l'objectiu central de la geometria projectiva. Per alleugerir la notació escriurem

$$p : E \longrightarrow P(E)$$

en lloc de $p : E\backslash\{0\} \longrightarrow P(E)$.

Al llarg de tots aquests apunts p serà aquesta aplicació.

Exemple 2.1.3 *Estudiem el cas en què $k = \mathbb{R}$ i $E = \mathbb{R}^2$ com $\mathbb{R}$-espai vectorial.*

Llavors $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ mòdul la relació d'equivalència $(u_1, u_2) = \lambda(v_1, v_2)$ correspon al conjunt de rectes per l'origen. En aquest cas $\dim P(E) = 1$.

Aquest conjunt està en correspondència bijectiva amb S^1 amb els punts antipodals identificats, ja que la recta $\langle u\rangle$ talla S^1 en els punts $\pm\frac{u}{\|u\|}$.

Quan a S^1 identifiquem els punts antipodals i posem en el quocient la topologia quocient, obtenim el que en topologia s'anomena espai projectiu $\mathbb{R}P^1$, que és homeomorf a S^1, de manera que l'anterior comentari diu que $P(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}P^1$ (aquest "=" vol dir bijecció).

Tot val igual si canviem $\mathbb{R}^2$ per $\mathbb{R}^{n+1}$, en el sentit que l'espai projectiu associat a aquest espai vectorial, que no és més que l'espai de direccions de $\mathbb{R}^{n+1}$, es pot identificar amb l'esfera S^n amb els punts antipodals identificats. Aquest espai quocient amb la topologia quocient s'anomena en topologia espai projectiu $\mathbb{R}P^n$, de manera que tindrem $P(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}P^n$ amb l'única observació que a diferència del cas $n = 1$, $\mathbb{R}P^n$ no és homeomorf a S^n, $n \neq 1$.

Per analogia amb el cas real, per a cossos arbitraris, quan es considera k^{n+1} de manera natural com k-espai vectorial i es considera el projectivitzat, s'utilitza la notació $P(k^{n+1}) = kP^n$. També s'utilitza la notació $P(k^{n+1}) = P_n(k)$.

Exemple 2.1.4 *Estudiem el cas en què $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i $E = k^2$ com k-espai vectorial.*

Llavors $E\backslash\{0,0\} = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ i cada classe d'equivalència consta d'un únic element, de manera que

$$P(E) = E\backslash\{0,0\}/\sim = \{[(1,0)],[(0,1)],[(1,1)]\}$$

és una recta de tres punts. Òbviament, $\dim P(E) = 1$.

2.2 Varietats lineals projectives

Definició 2.2.1 *Direm que un subconjunt $L \subset P(E)$ és una varietat lineal projectiva si $L = p(V)$, on V és un subespai vectorial de E.*

Proposició 2.2.2 *La intersecció de varietats lineals projectives és una varietat lineal projectiva*

Demostració. Sigui $p : E \longrightarrow P(E)$ i sigui $L = p(V)$, $L' = p(V')$ on V i V' són subespais vectorials de E.

Llavors $L \cap L' = p(V \cap V')$.

En efecte, si $x \in L \cap L'$, $x = p(v) = p(v')$ amb $v \in V$, $v' \in V'$, per tant $v' = \lambda v$, que implica $v \in V \cap V'$, i per tant $x \in p(V \cap V')$. La inclusió contrària és evident.

Anàlogament es demostra, per a una família arbitrària de varietats lineals projectives $L_\alpha = p(V_\alpha)$, on α varia en un cert conjunt d'índexs, que $\bigcap p(V_\alpha) = p(\bigcap V_\alpha)$, i per tant la intersecció de varietats lineals projectives és una varietat lineal projectiva. ∎

Definició 2.2.3 *Sigui A un subconjunt de $P(E)$. La varietat lineal projectiva generada per A és la varietat lineal projectiva més petita que conté A. La denotarem $v(A)$.*

Concretament $v(A) = \bigcap\limits_\alpha L_\alpha$, on, per a tot α, L_α és una varietat lineal projectiva tal que $A \subset L_\alpha$.

Proposició 2.2.4 *Sigui A un subconjunt de $P(E)$. Llavors la varietat lineal projectiva generada per A és la projecció del subespai vectorial generat per $p^{-1}(A)$, és a dir $v(A) = p(\langle p^{-1}(A)\rangle)$.*

Demostració. Tenim $v(A) = \bigcap\limits_\alpha L_\alpha = \bigcap\limits_\alpha p(V_\alpha) = p(\bigcap V_\alpha)$ amb $A \subset p(V_\alpha)$ i V_α subespais vectorials de E, per a tot α.

Com que $A \subset p(V_\alpha)$ si i només si $p^{-1}(A) \subset V_\alpha$, tenim $\langle p^{-1}(A)\rangle = \bigcap V_\alpha$ de manera que

$$v(A) = \bigcap p(V_\alpha) = p\left(\bigcap V_\alpha\right) = p(\langle p^{-1}(A)\rangle). \quad ∎$$

Proposició 2.2.5 *Siguin L, L' varietats lineals projectives de $P(E)$. Llavors*

$$\dim L + \dim L' = \dim(L \cap L') + \dim v(L \cup L').$$

Demostració. Si $L = p(V)$ i $L' = p(V')$, llavors $L \cap L' = p(V \cap V')$ i $v(L \cup L') = p(\langle p^{-1}(L \cup L')\rangle)$.

Ara bé $\langle p^{-1}(L \cup L')\rangle = V + V'$.

En efecte: Vegem la inclusió "$\subset$". Tot element de $\langle p^{-1}(L \cup L')\rangle$ es pot escriure com $x = \sum \lambda_\alpha u_\alpha$, $\lambda_\alpha \in k$ i $u_\alpha \in p^{-1}(L \cup L')$.

Per tant $p(u_\alpha) \in L \cup L'$, que implica $u_\alpha \in V$ o $u_\alpha \in V'$, i així x és suma d'elements de V i d'elements de V'.

Vegem ara la inclusió "$\supset$": Si $v + v' \in V + V'$, llavors $v \in p^{-1}(L)$ i $v' \in p^{-1}(L')$, i per tant $v + v'$ és suma de vectors de $p^{-1}(L \cup L')$, i.e. $v + v' \in \langle p^{-1}(L \cup L')\rangle$.

Utilitzem ara la fórmula de Grassmann, H.G. (1809-1877) per a espais vectorials i tenim

$$\dim V + \dim V' = \dim(V \cap V') + \dim(V + V'),$$

d'on

$$\dim L + 1 + \dim L' + 1 = \dim(L \cap L') + 1 + \dim v(L \cup L') + 1,$$

com volíem. ∎

Corol·lari 2.2.6 *Si* $\dim L + \dim L' \geq \dim P(E)$*, llavors* $L \cap L' \neq \emptyset$*.*

Demostració. Tindríem $\dim(L \cap L') + \dim v(L \cup L') \geq \dim P(E)$, d'on es dedueix $\dim(L \cap L') \geq 0$, i per tant $V \cap V' \neq \{0\}$. ∎

Com que les varietats lineals projectives són també espai projectius, les varietats lineals projectives de dimensió 1 són les rectes projectives.

En particular el corol·lari ens diu que *dues rectes projectives en el pla projectiu sempre es tallen.* O que una recta i un hiperplà projectiu en qualsevol espai projectiu sempre es tallen.

Així, els punts i rectes d'un pla projectiu compleixen els axiomes de la geometria projectiva explicats a 10.3, i per tant el pla projectiu és un model d'aquells axiomes.

Observi's que si $V \cap V' = \{0\}$, no té sentit escriure $L \cap L' = p(V \cap V')$, de manera que en aquest cas la fórmula de Grassmann dóna lloc a

$$\dim L + \dim L' = \dim v(L \cup L') - 1.$$

Per poder englobar aquest cas a la fórmula anterior es fa el conveni de dir que si $V \cap V' = \{0\}$, llavors $\dim(L \cap L') = -1$.

Exemple 2.2.7 *Estudiem les varietats lineals projectives de* $P(E)$ *amb* $E = k^3$*,* $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*.*

Aquest espai projectiu té 7 punts

$$P(E) = \{[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1], [1,1,0], [1,0,1], [0,1,1], [1,1,1]\}.$$

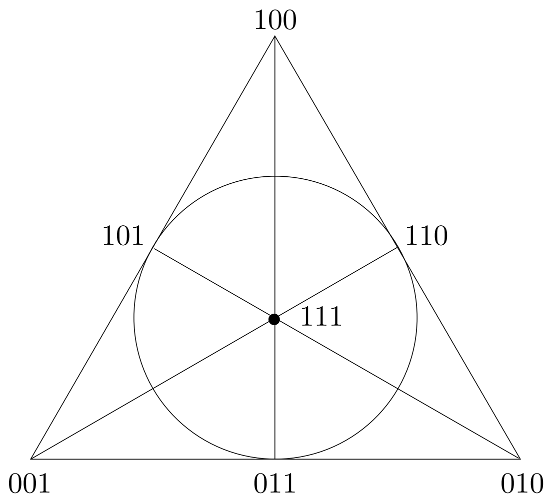
Per estudiar les rectes projectives (varietats lineals projectives de dimensió 1) hem d'estudiar els subespais vectorials de dimensió 2 de E.

El següent esquema mostra que n'hi ha exactament 7.

100	100	100	010	010	001	110
010	001	011	001	101	110	101
110	101	111	011	111	111	011

En principi cada dos vectors linealment independents generen un subespai vectorial de dimensió 2 (per tant $\binom{7}{2} = 21$ possibilitats) però n'hi ha sempre tres parells que generen el mateix (per exemple $\langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle = \langle(1,0,0),(1,1,0)\rangle = \langle(0,1,0),(1,1,0)\rangle$), de manera que $21/3 = 7$, com hem vist abans.

Podem tractar d'imaginar-nos aquestes set rectes en l'esquema següent (la circumferència és una recta!).



2.3 Coordenades homogènies

Sigui E un k-espai vectorial de dimensió $n+1$. Per poder parlar de les coordenades d'un vector v de E necessitem fixar una base $e_0, \ldots, e_n$ sobre E. Llavors tot vector s'escriu de manera única de la forma $v = \sum \lambda^i e_i$ i diem que $(\lambda^0, \ldots, \lambda^n) \in k^{n+1}$ són les coordenades de v en aquesta base. Podem pensar, doncs, l'operació de "prendre coordenades" com una aplicació

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & E & \longrightarrow & k^{n+1} \\ & v & \longmapsto & (\lambda^0, \ldots, \lambda^n), \end{array}$$

amb $v = \sum \lambda^i e^i$.

Anàlogament, prendre coordenades en un espai projectiu $P(E)$ consisteix a fixar una base $e_0, \ldots, e_n$ de E i a definir

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & P(E) & \longrightarrow & P_n(k) \\ & p(v) & \longmapsto & [\lambda^0, \ldots, \lambda^n], \end{array}$$

on $v = \sum \lambda^i e_i$.

Es diu que el punt del projectiu $p(v)$ té coordenades *homogènies* $[\lambda^0, \ldots, \lambda^n]$. Seria més correcta la notació $[(\lambda^0, \ldots, \lambda^n)]$ per denotar la classe de $(\lambda^0, \ldots, \lambda^n)$ a $k^{n+1}/\sim$, però per alleugerir la notació prescindirem del parèntesi.

Observem primerament que φ està ben definida.

En efecte, si $p(u) = p(v)$ llavors $v = \mu u$, $\mu \in k$. Si $u = \sum \lambda^i e_i$, $v = \sum \nu^i e_i$, llavors $\lambda^i = \mu \nu^i$, i per tant $[\lambda^0, \ldots, \lambda^n] = [\nu^0, \ldots, \nu^n]$, com volíem.

Es diu que φ és un sistema de coordenades projectiu.

Proposició 2.3.1 *Donats $(n+2)$ punts de $P(E)$, $P_0, \ldots, P_{n+1}$ tals que $n+1$ qualssevol d'ells són projectivament independents, existeix un únic sistema de coordenades projectiu φ tal que $\varphi(P_0) = [1, 0, \ldots, 0], \ldots, \varphi(P_n) = [0, \ldots, 0, 1], \varphi(P_{n+1}) = [1, \ldots, 1]$.*

Demostració. Precisem primerament què vol dir que els punts $P_i = p(e_i)$ són projectivament independents vol dir que els vectors e_i són linealment independents.

En particular $e_0, \ldots, e_n$ són una base de E, i per tant $e_{n+1} = \lambda^0 e_0 + \cdots + \lambda^n e_n$ amb totes les $\lambda^i \neq 0$ per l'hipòtesi d'independència de qualsevol $(n+1)$-pla de vectors.

Prenem com a nova base $\tilde{e}_i = \lambda^i e_i$, $i = 0, \ldots, n$, de manera que llavors $e_{n+1} = \tilde{e}_0 + \cdots + \tilde{e}_n$ i el sistema de coordenades projectiu associat a aquesta base

$$\varphi : P(E) \longrightarrow P_n(k)$$

compleix que

$$\begin{aligned} \varphi(P_0) &= \varphi(p(e_0)) = \varphi(p(\lambda^0 e_0)) = [1, 0, \ldots, 0], \\ \varphi(P_i) &= \varphi(p(\tilde{e}_i)) = [0, \ldots, 1, \ldots, 0], \\ \varphi(P_{n+1}) &= \varphi(p(\tilde{e}_0 + \cdots + \tilde{e}_n)) = [1, \ldots, 1], \end{aligned}$$

com volíem.

La unicitat vol dir que la base $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ està determinada llevat d'un escalar. Vegem-ho.

Suposem $u_0, \ldots, u_n$ una base tal que el sistema de coordenades associat ψ compleix $\psi(P_0) = [1, \ldots, 0], \ldots, \psi(P_n) = [0, \ldots, 1]$ i $\psi(P_{n+1}) = [1, \ldots, 1]$.

Això vol dir $P_0 = p(u_0), \ldots, P_n = p(u_n)$, que implica $u_i = \lambda^i \tilde{e}_i$.

Però $P_{n+1} = p(u_0 + \cdots + u_n) = p(\lambda^0 \tilde{e}_0 + \cdots + \lambda^n \tilde{e}_n) = p(\tilde{e}_0 + \cdots + \tilde{e}_n)$ d'on $\lambda^0 \tilde{e}_0 + \cdots + \lambda^n \tilde{e}_n = \mu(\tilde{e}_0 + \cdots + \tilde{e}_n)$, que implica $\lambda^i = \mu$, és a dir $u_i = \mu \tilde{e}_i$, $i = 0, \ldots, n$ (amb μ independent de i!). ∎

En aquest cas es diu que $P_0, \cdots, P_{n+1}$ és un *sistema de referència projectiu.* El punt P_{n+1} es diu *punt unitat.* Utilitzarem la notació $P_0, \cdots, P_n; P_{n+1}$.

Observem que sobre la recta projectiva, tres punts diferents determinen el sistema de coordenades projectiu; és a dir, fixem una base e_0, e_1 a l'espai vectorial associat de manera que $P_0 = p(e_0)$, $P_1 = p(e_1)$ i $P_2 = p(e_1 + e_2)$ i aquesta base és única llevat d'un escalar.

En el pla projectiu necessitem quatre punts de manera que cap d'ells no pertanyi al triangle format pels altres tres.

Proposició 2.3.2 *Les varietats lineals projectives, en coordenades homogènies, tenen equacions lineals.*

Demostració. Comencem pel cas dels hiperplans. Sigui com sempre E un k-espai vectorial de dimensió $n+1$ i sigui V un subespai vectorial de dimensió n.

Si fixem una base $e_0, \ldots, e_n$ de E, els elements de V són vectors $v = x^0 e_0 + \cdots + x^n e_n$ caracteritzats per ser ortogonals al vector director del pla $(b_0, \ldots, b_n)$. És a dir

$$V = \{v \in E;\, v = x^0 e_0 + \cdots + x^n e_n \text{ i } x^0 b_0 + \cdots + x^n b_n = 0\}.$$

Direm simplement que H té equació

$$x^0 b_0 + \cdots + x^n b_n = 0.$$

Llavors $p(H) = \{p(v);\, v \in H\}$ està format per punts que tenen coordenades homogènies $[x^0, \ldots, x^n]$ amb la condició $x^0 b_0 + \cdots + x^n b_n = 0$. Com que

$$[x^0, \ldots, x^n] = [y^0, \ldots, y^n] \Longleftrightarrow y^i = \lambda x^i,$$

tenim $y^0b_0 + \cdots + y^nb_n = \lambda(x^0b_0 + \cdots + x^nb_n)$, i la condició $x^0b_0 + \cdots + x^nb_n = 0$ és independent del representant de la classe $[x^0, \ldots, x^n]$ elegit. És a dir, que l'anterior frase "els punts de coordenades homogènies $[x^0, \ldots, x^n]$ que compleixen $x^0b_0 + \cdots + x^nb_n = 0$" té perfecte sentit i escriurem $p(H) = \{[x^0, \ldots, x^n];\, x^0b_0 + \cdots + x^nb_n = 0\}$.

Com que una varietat lineal projectiva arbitrària es pot pensar com a intersecció d'hiperplans, es pot descriure com un sistema d'equacions lineals en les seves coordenades homogènies. ∎

La mateixa idea ens diu que té sentit parlar de subconjunts de $P(E)$ definits com zeros de polinomis homogenis de grau arbitrari.

Per exemple $A = \{[x, y, z];\, x^2 + y^2 - 3yz = 0\}$ és un subconjunt ben definit de $\mathbb{R}P^2$. En canvi

$$B = \{[x, y, z];\, x^3 + y = 0\}$$

no té cap sentit i no es pot interpretar de cap manera.

Exercici 2.3.3 *A $\mathbb{R}P^2$, expresseu el punt $Q = p(-1, 4, 2)$ en el sistema de coordenades projectiu determinat per*

$$P_0 = p(0, 1, 1), \quad P_1 = p(1, 1, 0), \quad P_2 = p(1, 1, 1), \quad P_3 = p(0, 2, 1).$$

Solució. Prenem P_3 com a punt unitat. Tenim

$$(0, 2, 1) = \lambda(0, 1, 1) + \mu(1, 1, 0) + \nu(1, 1, 1),$$

d'on $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\nu = -1$. Per tant la base és, llevat d'un únic escalar, $\tilde{e}_0 = (0, 2, 2)$, $\tilde{e}_1 = (1, 1, 0)$, $\tilde{e}_2 = (-1, -1, -1)$; llavors

$$(-1, 4, 2) = \alpha(0, 2, 2) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(-1, -1, -1),$$

d'on $\alpha = 5/2$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$; per tant, en el sistema de coordenades projectiu $\varphi : P(E) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ associat a $\tilde{e}_0$, $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ el punt Q té coordenades

$$\varphi(Q) = [5/2, 2, 3] = [5, 4, 6]. \quad ∎$$

Per abús de notació s'escriu també $Q = [5, 4, 6]$, $P_0 = [0, 1, 1]$, etc.

2.4 Cardinalitat sobre cossos finits

Sigui k un cos finit de q elements i sigui E un k-espai vectorial de dimensió $n + 1$. Com que E és isomorf a k^{n+1}, E té q^{n+1} elements.

Recordem que per ser k finit, és commutatiu i $q = p^m$ amb p primer (vegeu l'apèndix 11.1 o [15]).

Cada classe de la relació d'equivalència $u \sim v \iff u = \lambda v$, té $q - 1$ elements, ja que està formada pel vector v i tots els seus múltiples no nuls

$$[v] = \{\lambda v; \lambda \in k,\, \lambda \neq 0\}.$$

Així

$$\#P(E) = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1,$$

ja que la relació d'equivalència està definida a $E\backslash\{0\}$, que té $q^{n+1}-1$ elements.

En particular una recta projectiva té $q+1$ punts, i un pla projectiu, q^2+q+1 punts.

Comptem ara el nombre de bases de E.

Prenem un vector no nul e_0 ($q^{n+1}-1$ possibilitats) com a primer element de la base. A continuació prenem un segon vector, linealment independent amb el primer, és a dir diferent de λe_0, $\lambda \in k$ ($q^{n+1}-q$ possibilitats). A continuació un tercer vector linealment independent amb e_0 i e_1, és a dir diferent de $\lambda e_0 + \mu e_1$, $\lambda, \mu \in k$, $(q^{n+1}-q^2)$, i així successivament.

Per tant E té $(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)\dots(q^{n+1}-q^n)$ bases.

Ja hem vist que dues bases proporcionals donen lloc al mateix sistema de coordenades projectiu; per tant, dividint el nombre anterior per $q-1$ (elements no nuls del cos) tindrem el nombre de sistemes de coordenades projectius:

$$(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)\dots(q^{n+1}-q^{n-1})q^n.$$

El nombre de varietats lineals de $P(E)$ de dimensió d és el nombre de subespais vectorials de dimensió $d+1$ de E.

Ara bé, el nombre de subespais vectorials de dimensió $d+1$ és el nombre de "bases" de dimensió $d+1$ dividit pel nombre de bases que donen lloc al mateix subespai vectorial.

Però acabem de comptar el nombre de bases d'un espai vectorial; per tant ja sabem que el nombre de bases d'un subespai vectorial de dimensió $d+1$ és

$$(q^{d+1}-1)\dots(q^{d+1}-q^d).$$

Així el nombre de varietats lineals projectives de dimensió d és

$$\frac{(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)\dots(q^{n+1}-q^d)}{(q^{d+1}-1)(q^{d+1}-q)\dots(q^{d+1}-q^d)},$$

on, per calcular el numerador, hem utilitzat el mateix raonament que per comptar el nombre de bases de E però limitat a sistemes de $d+1$ vectors linealment independents.

2.5 Grup projectiu

Siguin E i F espais vectorials sobre k i sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal i injectiva.

Aquesta f indueix una aplicació $\tilde{f} : P(E) \longrightarrow P(F)$ donada per

$$\tilde{f}(p(v)) = p(f(v)).$$

Observem que, com que f és injectiva, $f(v) \neq 0$ i té sentit escriure $p(f(v))$. Observem també que està ben definida ja que, si $p(v) = p(w)$, llavors $w = \lambda v$ i $p(f(w)) = pf(\lambda v) = p(\lambda \cdot f(v)) = p(f(v))$ ja que f és lineal.

Les aplicacions $\tilde{f} : P(E) \longrightarrow P(F)$ induïdes per aplicacions lineals $f : E \longrightarrow F$ a nivell d'espais vectorials, es diuen *projectivitats* o aplicacions projectives. Com que són injectives, si $\dim E = \dim F$, són també bijectives i llavors es diuen transformacions projectives o homografies.

Proposició 2.5.1 *Siguin $f, g : E \longrightarrow F$ aplicacions lineals injectives. Llavors $\tilde{f} = \tilde{g} \iff \exists\, \lambda \in k$ tal que $f = \lambda g$.*

Demostració.
($\Leftarrow$) Obvi.
($\Rightarrow$) Per a tot $v \in E$ tenim $p(f(v)) = p(g(v))$, és a dir $f(v) = \lambda(v) \cdot g(v)$, on $\lambda(v) \in k$.

El problema està a veure que $\lambda(v)$ no depèn de v. Com que $f(\mu v) = \mu f(v) = \lambda(\mu v) \cdot g(\mu v) = \lambda(\mu v) \cdot \mu g(v)$, tenim $\lambda(v) = \lambda(\mu v)$, $\forall\, \mu \in k$, $\forall\, v \in E$. Per tant, si $\dim E = 1$, ja hem acabat perquè $\lambda(v)$ és constant.

Si $\dim E \geq 2$, podem prendre u, v linealment independents i tenim

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(u) + f(v) = \lambda(u)g(u) + \lambda(v)g(v) \\ &= \lambda(u+v)g(u+v) = \lambda(u+v)(g(u) + g(v)) \end{aligned}$$

i, com que g és injectiva, $\lambda(u) = \lambda(v) = \lambda(u+v)$. Com que u, v són arbitraris, $\lambda =$ constant, com volíem. ∎

D'aquesta proposició se'n dedueix un resultat pròpiament d'espais vectorials.

Corol·lari 2.5.2 *Sigui $f : E \longrightarrow E$ una aplicació lineal injectiva tal que transforma cada vector en un múltiple d'ell mateix. Llavors f és una homotècia.*

Demostració. $\tilde{f}(p(v)) = p(f(v)) = p(\lambda(v)v) = p(\lambda(v) \cdot \mathrm{id}(v)) = \widetilde{\mathrm{id}}(p(v))$. Aplicant ara la proposició, com $\tilde{f} = \widetilde{\mathrm{id}}$, tenim $f = \lambda \cdot \mathrm{id}$. ∎

Denotarem $PGL(E)$ el grup de transformacions projectives de $P(E)$. Que formen grup és evident pel fet que $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \widetilde{f \circ g}$. L'anterior proposició ens diu que

$$PGL(E) \simeq GL(E)/\sim \quad \text{on} \quad A \sim B \iff B = \lambda A, \quad A, B \in GL(E)$$

("$\simeq$" vol dir isomorfisme de grups).

Teorema 2.5.3 *Siguin E i F k-espais vectorials de dimensió $n+1$ i siguin $\{P_0, \ldots, P_{n+1}\}$, $\{Q_0, \ldots, Q_{n+1}\}$ referències projectives de $P(E)$ i $P(F)$ respectivament.*

Existeix una única transformació projectiva $\tilde{f} : P(E) \longrightarrow P(F)$ tal que $\tilde{f}(P_i) = Q_i$, $i = 0, \ldots, n+1$.

Demostració. Sabem que existeixen bases $e_0, \ldots, e_n$ de E i $u_0, \ldots, u_n$ de F tals que $P_i = p(e_i)$, $i = 0, \ldots, n$, $P_{n+1} = p(e_0 + \cdots + e_n)$ i $Q_i = p(u_i)$, $i = 0, \ldots, n$, $Q_{n+1} = p(u_0 + \cdots + u_n)$. Definim l'aplicació lineal $f : E \longrightarrow F$ per $f(e_i) = u_i$. Llavors $\tilde{f}(P_i) = \tilde{f}(p(e_i)) = p(f(e_i)) = Q_i$, $i = 0, \ldots, n$ i $\tilde{f}(P_{n+1}) = \tilde{f}(p(e_0 + \cdots + e_n)) = p(u_0 + \cdots + u_n) = Q_{n+1}$.

Tan sols falta veure la unicitat.

Suposem que existeix una projectivitat $\tilde{g}$ tal que $\tilde{g}(P_i) = Q_i$, $i = 0, \ldots, n+1$. Tindrem en particular $\tilde{f}(P_i) = \tilde{g}(P_i)$, $i = 0, \ldots, n$, que implica $f(e_i) = \lambda_i g(e_i)$. Però també $\tilde{f}(P_{n+1}) = \tilde{g}(P_{n+1})$, així que $f(e_1 + \cdots + e_n) = \rho \cdot g(e_1 + \cdots + e_n)$, $\rho \in k$, $\rho \neq 0$. D'on $\lambda_1 g(e_1) + \cdots + \lambda_n g(e_n) = \rho(g(e_1) + \cdots + g(e_n))$, i com que els $g(e_i)$ són base, tenim $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \rho$, i per tant $f = \rho g$ i $\tilde{f} = \tilde{g}$ com volíem. ∎

Equació d'una projectivitat en coordenades.

Si, en una certa base, f té per matriu associada a^i_j, és a dir $f(e_k) = a^i_k e_i$ on índexs repetits, un a dalt i l'altre a baix, vol dir suma des de 0 fins a n, llavors

$$f(v) = f(x^k e_k) = x^k a^i_k e_i,$$

que vol dir que el punt $P = p(v) \in P(E)$ de coordenades homogènies $[x^0, \ldots, x^n]$ va a parar per $\tilde{f}$ a $p(x^k a^i_k e_i)$, és a dir a un punt de coordenades homogènies $[y^0, \ldots, y^n]$ amb $\rho y^i = x^k a^i_k$, $\rho \in k$, $\rho \neq 0$; equivalentment

$$\rho \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0_0 & a^0_1 & \ldots \\ & & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Exercici 2.5.4 *Donats els punts $A = [0,0,1]$, $B = [0,1,0]$, $C = [1,0,0]$, $D = [1,1,1]$, trobeu la projectivitat $\tilde{f}$ tal que $\tilde{f}(A) = B$, $\tilde{f}(B) = C$, $\tilde{f}(C) = D$ i $\tilde{f}(D) = A$. Trobeu els punts fixos quan $k = \mathbb{R}$ i quan $k = \mathbb{C}$.*

Solució. Considero A, B, C, D com la primera referència projectiva, amb D com a punt unitat. Això vol dir que agafem la base $e_0 = (0,0,1)$, $e_1 = (0,1,0)$, $e_2 = (1,0,0)$ en la que $A = p(e_0)$, $B = p(e_1)$, $C = p(e_2)$ i $D = p(e_1 + e_2 + e_3)$.

Considero ara B, C, D, A com la segona referència projectiva amb A com punt unitat. Això vol dir que agafem la base $u_0 = \lambda(0,1,0)$, $u_1 = \mu(1,0,0)$, $u_2 = \nu(1,1,1)$ amb la condició $A = p(0,0,1) = p(u_0 + u_1 + u_2)$.

És a dir $\rho(0,0,1) = \lambda(0,1,0) + \mu(1,0,0) + \nu(1,1,1)$, d'on es dedueix $\lambda = \mu = -\nu$, és a dir que podem agafar com a base de la segona referència projectiva $u_0 = (0,1,0)$, $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (-1,-1,-1)$.

La projectivitat buscada és, doncs, la projectivització de l'aplicació lineal f definida per $f(e_i) = u_i$.

Respecte a la base canònica $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ tenim, doncs,

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= f(e_2) = u_2 = (-1,-1,-1) \\ f(0,1,0) &= f(e_1) = u_1 = (1,0,0) \\ f(0,0,1) &= f(e_0) = u_0 = (0,1,0), \end{aligned}$$

és a dir,

$$f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Busquem ara els punts fixos.

Observem que $P = p(v)$ és fix per a $\tilde{f}$ si $\tilde{f}(P) = p(f(v)) = P = p(v)$. Per tant P és fix per a $\tilde{f}$ si i només si $f(v) = \lambda v$, és a dir que *$P = p(v)$ és un punt fix de f si i només si v és vector propi de f.* El polinomi característic és $(x^2 + 1)(x + 1)$; per tant, si $k = \mathbb{R}$, tenim únicament el vector propi $u = (1,0,1)$ corresponent al valor propi $x = -1$. Per tant el punt $p(1,0,1)$ és l'únic punt fix de $\tilde{f}$ sobre $\mathbb{R}$.

Sobre $\mathbb{C}$ tenim encara els vectors propis $(-i, -i+1, 1)$ i $(i, i+1, 1)$ corresponents als valors propis i i $-i$. Per tant $p(-i, -i+1, 1)$ i $p(i, i+1, 1)$ són també punts fixos de $\tilde{f}$ sobre $\mathbb{C}$. ∎

Exercici 2.5.5 *Classifiqueu les projectivitats de $\mathbb{R}P^2$.*

Solució. Sigui A la matriu associada a la projectivitat en una certa base. Està determinada llevat d'un escalar. Els valors propis de A són els zeros del polinomi característic $p_A(x) = \det(A - x \cdot id) = 0$. Tenim per tant les possibilitats següents:

1. $p_A(x) = (x-a)^3$

2. $p_A(x) = (x-a)(x-b)^2$

3. $p_A(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$

4. $p_A(x) = (x-a)((x-\alpha)^2 + \beta^2)$

A l'hora de calcular els vectors propis tenim les possibilitats següents:

1a. Tres vectors propis independents (un valor propi).

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix} \qquad \text{Identitat.}$$

1b. Dos vectors propis independents (un valor propi).

$$\begin{pmatrix} a & & \\ 1 & a & \\ & & a \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{1 punt fix } A. \\ \text{1 recta fixa } r,\ A \in r. \\ \text{Tota recta per } A \text{ és invariant.} \end{array}$$

1c. Un vector propi (un valor propi).

$$\begin{pmatrix} a & & \\ 1 & a & \\ & 1 & a \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{1 punt fix } A. \\ \text{1 recta invariant } r,\ A \in r. \end{array}$$

2a. Tres vectors propis independents (dos valors propis).

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & b \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{Un punt fix } A. \\ \text{Una recta fixa } r,\ A \notin r. \\ \text{Tota recta per } A \text{ és invariant.} \end{array}$$

2b. Dos vectors propis independents (dos valors propis).

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & 1 & b \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{Dos punts fixos } A, B. \\ \text{Dues rectes invariants } r, s. \\ A, B \in r, B \in s. \end{array}$$

3. Tres vectors propis independents (3 valors propis).

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{Tres punts fixos.} \\ \text{Tres rectes invariants} \\ \text{determinades pels punts fixos.} \end{array}$$

4. Un vector propi.

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & \alpha & \beta \\ & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Un punt fix A.
Una recta invariant r, $A \notin r$.

Per a més detalls vegeu el problema 2.6.23. ∎

2.6 Exercicis

2.6.1 Considereu en $\mathbb{R}^3$ els plans $\Pi_1 : \{z = 0\}$ i $\Pi_2 : \{y = 0\}$, i el punt $P = (0, 1, 1)$. Per a cada punt Q de Π_1 considerem la recta PQ i definim $Q' = \varphi(Q)$ com la intersecció d'aquesta recta amb Π_2, és a dir, projectem Π_1 sobre Π_2 des de P.

a) Per quins punts Q està definit Q'?

b) Descriviu $\varphi(\Pi_1)$.

c) Demostreu que φ transforma rectes en rectes.

d) Trobeu la imatge del feix de rectes paral·leles a l'eix y del pla Π_1 per φ.

e) Podeu descriure la imatge per φ de qualsevol feix de rectes paral·leles de Π_1? Quina relació hi ha entre aquesta descripció i el que s'obté a l'apartat b)?

2.6.2

a) Comproveu que la projecció usual

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}P^1$$

restringida a S^1 no és bijectiva.

b) Considereu la circumferència $\mathbb{S}$ de centre $(0, 1/2)$ i radi $1/2$. Comproveu que la restricció de la projecció anterior a aquesta circumferència dóna una bijecció entre $\mathbb{S} \setminus \{(0,0)\}$ i els punts *finits* de $\mathbb{R}P^1$. Això permet estendre l'aplicació anterior, i definir una bijecció entre $\mathbb{S}$ i $\mathbb{R}P^1$, enviant $(0,0)$ a l'infinit.

c) Sabríeu descriure analíticament aquesta identificació?

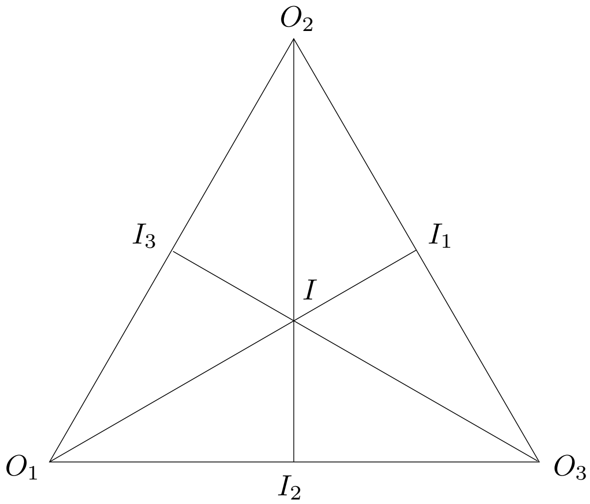
d) Sabríeu fer una identificació semblant entre una esfera i $\mathbb{C}P^1$?

2.6.3 Calculeu:

a) L'equació de la recta que passa pels punts $[1, 0, 1]$ i $[0, 1, 1]$.

b) El punt d'intersecció de les rectes $\langle 0, 1, 0\rangle$ i $\langle 1, -1, 0\rangle$, on $\langle a, b, c\rangle$ denota la recta d'equació $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$.

2.6.4 Siguin $O_1 = [1, 0, 0]$, $O_2 = [0, 1, 0]$, $O_3 = [0, 0, 1]$, $I = [1, 1, 1]$ i els punts I_k de la figura següent:



Definim $B_1 = I_2I_3 \cap O_2O_3$, $B_2 = I_1I_3 \cap O_1O_3$ y $B_3 = I_1I_2 \cap O_1O_2$. Demostreu que els punts B_k estan alineats.

2.6.5 Descriviu els punts i les rectes de kP^1 i de kP^2 amb

a) $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

b) $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

2.6.6 Sigui P el pla projectiu sobre un cos finit k. Sigui A la matriu d'incidència "punt-recta" de P, és a dir, $A(i, j) = 1$ si la recta j conté el punt i i $A(i, j) = 0$ en el cas contrari. Calculeu $A^t \cdot A$.

2.6.7 Siguin L una varietat lineal projectiva de dimensió r a l'espai projectiu de dimensió n, P^n, i sigui H un hiperplà. Demostreu que o bé $L \subset H$, o bé $\dim(L \cap H) = r - 1$.

2.6.8 Siguin $L_1, ..., L_r$ varietats lineals projectives d'un espai projectiu de dimensió n. Demostreu que

$$\dim(L_1 \cap \cdots \cap L_r) \geq \sum_{i=1}^{r} \dim(L_i) - (r-1)n.$$

2.6.9 Estudieu la posició relativa de dues varietats lineals projectives de dimensió 2 (plans projectius) en un espai projectiu de dimensió $n > 2$.

2.6.10 Siguin $P = \mathbb{C}P^n$ i $P' = \mathbb{R}P^n$. Sigui $i : P' \longrightarrow P$ la inclusió canònica:

$$[x_1, \ldots, x_{n+1}]_{\mathbb{R}} \mapsto [x_1, \ldots, x_{n+1}]_{\mathbb{C}}.$$

Sigui L una $\mathbb{C}$-varietat lineal projectiva de P, de dimensió r, i sigui $L'' = L \cap i(P')$. Comproveu que

a) Hi ha una única varietat lineal projectiva de P', L', tal que $i(L') = L''$.

b) Si $r' = \dim L'$ és la dimensió de L', llavors r' pot ser qualsevol nombre enter no negatiu entre $2r - n$ i r.

c) $r = r'$ si i només si $[x_1, \ldots, x_{n+1}] \in L$ implica $[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1}] \in L$ (denota el conjugat de x$_i$).

2.6.11 Trobeu les equacions que ens donen les coordenades d'un punt arbitrari de la recta projectiva real respecte al sistema de referència

$$P_0 = [0, 1], P_1 = [1, 2]; P_2 = [2, -1].$$

Trobeu les coordenades del punt $A = [2, 3]$ respecte al sistema de referència donat.

2.6.12 Trobeu les coordenades del punt de $\mathbb{R}P^1$, $A = [-2, 1]$, respecte del sistema de referència projectiu

$$P_0 = [-1, 1], P_1 = [4, 1]; P_2 = [1, 1]$$

2.6.13 Donats punts P_0, P_1, P_2 d'un sistema de referència projectiu R de $\mathbb{R}P^1$, construïu gràficament els punts A, B, C que tenen coordenades

$$A = [1, -1], \quad B = [2, -1], \quad C = [3, 2]$$

en la referència R.

2.6.14 Trobeu les equacions que ens donen les coordenades d'un punt arbitrari del pla projectiu $\mathbb{R}P^2$ respecte als següents sistemes de referència:

a) $[1,1,1],[0,0,1],[-1,2,1];[0,3,1]$.

b) $[0,2,3],[2,1,0],[0,1,4];[5,0,12]$.

2.6.15 Doneu les coordenades dels punts $P=[0,-2,1]$, $Q=[1,-1,-1]$ de $\mathbb{R}P^2$ en els sistemes de referència:

a) Del problema anterior;

b) $[0,1,-2],[2,1,-2],[0,0,-1];[1,2,3]$.

2.6.16 Siguin R_1 i R_2 els sistemes de referència de $\mathbb{R}P^2$ donats per:

$$[-1,-2,-1],[2,2,2],[0,0,3];[2,3,3]$$

$$[-6,-10,-5],[-1,-3,1],[3,4,7];[-4,-9,3]$$

Trobeu els punts que tenen les mateixes coordenades en els dos sistemes de referència.

2.6.17 Situem-nos a $\mathbb{R}P^2$.

a) Doneu l'equació de la recta que passa per dos punts donats $A=[1,4,3]$, $B=[2,1,3]$.

b) Trobeu el punt d'intersecció de les rectes

$$2x_1+x_2+x_3=0, \quad 3x_1+3x_2+2x_3=0.$$

c) Trobeu el punt d'intersecció de les rectes

$$x_1+4x_2+3x_3=0, \quad 2x_1+x_2+3x_3=0.$$

Compareu el resultat amb l'apartat a).

2.6.18 Donats els punts $A=[5,1,0]$, $B=[1,0,0]$, $C=[2,3,1]$, i $D=[1,-1,2]$ de $\mathbb{R}P^2$, trobeu el punt $M=AB\cap CD$.

2.6.19 Doneu l'equació de la recta de $\mathbb{R}P^2$ que uneix el punt $A=[2,-1,3]$ amb la intersecció de les rectes $l=<2,-1,1>$, $m=<1,1,-1>$.

2.6.20 Trobeu la imatge de la recta l respecte a la projectivitat del pla projectiu real donada per la matriu P:

a)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad l = \langle 2, 0, -1 \rangle$$

b)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad l = \langle 2, 0, 1 \rangle$$

2.6.21 Trobeu les rectes invariants en el cas real i complex de la projectivitat estudiada a l'exercici 2.5.4.

2.6.22 Trobeu els punts fixos i les rectes invariants de les projectivitats del pla projectiu real donades per les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.6.23 Estudieu en detall la classificació de les projectivitats del pla projectiu real donada a 2.5.5. Identifiqueu els punts i rectes fixos, etc.

2.6.24 Trobeu tots els elements invariants (punts fixos i rectes invariants) de les projectivitats següents i classifiqueu-les utilitzant el problema anterior:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.6.25 Anomenarem *homologia* tota projectivitat f del pla projectiu, diferent de la identitat, que tingui una recta de punts fixos e.

a) Proveu que només es poden donar dos casos:

i) f té un punt fix O fora de e i en aquest cas el feix de rectes per O es fix. Llavors diem que f és una *homologia general.*

ii) f té un feix de rectes invariants per un punt O de e, i en aquest cas direm que f és una *homologia especial.*

En ambdós casos, e s'anomena *l'eix* de l'homologia i O el seu *centre.*

b) Determineu una referència en la qual la matriu de f estigui en forma de Jordan, C. (1838-1922). Classifiqueu-les.

2.6.26 Estudieu la composició de dues homologies generals amb el mateix centre i eixos diferents.

2.6.27 Estudieu la projectivitat del pla que s'obté en compondre dues homologies generals tals que el centre de cada una d'elles està sobre l'eix de l'altra.

2.6.28 Siguin f una projectivitat, A un punt fix de f i r una recta invariant per f que no conté A. Demostreu que les homologies de centre A i eix r commuten amb f.

2.6.29 Estudieu les projectivitats f del pla projectiu real que compleixen $f^4 = Id$.

2.6.30 Siguin A, B dos punts diferents del pla projectiu real i a, b dues rectes diferents que no els contenen. A cada punt P li associem un punt P' tal que

$$AP \cap BP' \in a \text{ i } AP' \cap BP \in b.$$

a) Demostreu que la correspondència $P' = \sigma(P)$ defineix una projectivitat del pla. Expresseu-la respecte a algun sistema de referència.

b) Estudieu la restricció de σ a la recta AB i classifiqueu-la.

c) Determineu el punts fixos de σ en el pla.

2.6.31

a) Suposem que la matriu d'una projectivitat h de $\mathbb{R}P^2$ té un valor propi doble i és diagonalitzable. Proveu que h té un punt fix A i una recta de punts fixos r. Com es pot caracteritzar la imatge M' d'un punt M qualsevol?

b) Estudieu la projectivitat del pla donada per

$$x' = y + z, \quad y' = x + z, \quad z' = x + y.$$

3. Geometria afí

L'objectiu d'aquest capítol és interpretar la geometria afí com una subgeometria de la geometria projectiva. Primerament donarem la definició clàssica d'espai afí per passar tot seguit a reinterpretar-la des del punt de vista projectiu. Concretament, com a conjunt, un espai afí és un espai projectiu menys un hiperplà. Aquest hiperplà que traiem, que pot ser qualsevol, es diu hiperplà de l'infinit. Interpretarem les afinitats d'aquest espai afí com projectivitats que deixen invariant l'hiperplà de l'infinit. També les translacions admeten una interpretació en llenguatge de projectivitats. D'aquesta manera l'estudi de la geometria afí es redueix a un cas particular de l'estudi de la geometria projectiva.

3.1 Breu recordatori

En aquest capítol k denotarà un cos.

Definició 3.1.1 *Sigui E un k-espai vectorial. Un espai afí sobre E és un conjunt $\mathbb{A}$ juntament amb una aplicació*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} \times E & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ P \ , \ v & \longmapsto & P+v \end{array}$$

tal que

1) $P+\vec{0}=P, \quad \forall P \in \mathbb{A}, \vec{0} \in E,$

2) $P+(v+w)=(P+v)+w, \quad \forall P \in \mathbb{A}, \forall v,w \in E,$

3) donats $P,Q \in \mathbb{A}$ existeix un únic $v \in E$ tal que $P+v=Q$.

Observació 1. Aquest únic vector determinat pels punts P i Q es denota per $\overrightarrow{PQ}$. Tenim doncs la relació fonamental

$$P+\overrightarrow{PQ}=Q.$$

Observació 2. Observeu que si $P \in \mathbb{A}$ i $v \in E$, la notació $P+v$ vol dir simplement la imatge del parell (P,v) per l'anterior aplicació $\mathbb{A} \times E \longrightarrow \mathbb{A}$.

Per tant, els quatre signes "+" que apareixen a la condició 2 tenen significats diferents: tres representen l'aplicació anterior i un la suma ordinària de vectors a l'espai vectorial E.

Observació 3. Sigui G un grup. Quan tenim una aplicació

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} \times G & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ P \ , \ v & \longmapsto & P + v \end{array}$$

tal que

1) $P + e = P, \quad \forall P \in \mathbb{A}$, e l'element neutre de G,

2) $P + (v + w) = (P + v) + w, \quad \forall P \in \mathbb{A}, \forall v, w \in G$,

diem que tenim *una acció* de G sobre $\mathbb{A}$. Si a més es compleix que

3) per a qualsevol parell de punts $P, Q \in \mathbb{A}$ existeix un únic $v \in G$ tal que $P + v = Q$,

diem que tenim *una acció simplement transitiva* de G sobre $\mathbb{A}$.

Per tant, també podem definir espai afí així:

Definició 3.1.2 *Un espai afí és una acció simplement transitiva del grup additiu d'un k-espai vectorial E sobre un conjunt $\mathbb{A}$.*

Observació 4. Observem que $\forall\, P \in \mathbb{A}$, tenim una bijecció

$$\begin{array}{rccc} \varphi_P : & \mathbb{A} & \longrightarrow & E \\ & Q & \longmapsto & \overrightarrow{PQ}, \end{array}$$

que està ben definida per ser l'acció simplement transitiva. La injectivitat i l'exhaustivitat són immediates.

Exemple 1. L'exemple estàndard és agafar $\mathbb{A} = E$, és a dir que els "punts" del nostre espai afí són els elements de l'espai vectorial. L'acció és

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} \times E & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ P \ , \ v & \longmapsto & P + v, \end{array}$$

on, ara sí, la suma és la suma ordinària de vectors.

Exemple 2. Prenem $\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ i com espai vectorial prenem $E = \mathbb{R}^2$. Com acció de l'espai vectorial sobre el conjunt prenem

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A} & \times & E & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ (x, y) & , & (u_1, u_2) & \longmapsto & (x + u_1, e^{u_2}\, y). \end{array}$$

Observem que, per a tot $u_2 \in \mathbb{R}$, $e^{u_2}\, y > 0$, i per tant $(x + u_1, e^{u_2}\, y) \in \mathbb{A}$.

Exemple 3. Prenem $\mathbb{A} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 + \cdots + x_n = 1\}$ i com espai vectorial prenem $E = \{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n; u_1 + \cdots + u_n = 0\}$. Com acció de l'espai vectorial sobre el conjunt prenem la suma

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A} & \times & E & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ (x_1, \ldots, x_n) & , & (u_1, \ldots, u_n) & \longmapsto & (x_1 + u_1, \ldots, x_n + u_n). \end{array}$$

Observem que $(x_1 + u_1, \ldots, x_n + u_n) \in \mathbb{A}$.

Definició 3.1.3 (Varietat lineal) *Un subconjunt $\mathbb{B}$ d'un espai afí $\mathbb{A}$ és un subespai afí de $\mathbb{A}$, d'espai vectorial associat un subespai vectorial F de E, si*

0) Per tot $P \in \mathbb{B}$ i per tot $v \in F$ es compleix que $P + v \in \mathbb{B}$

A més, l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B} \times F & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ P \ , \ v & \longmapsto & P + v \end{array}$$

compleix

1) $P + \vec{0} = P, \quad \forall P \in \mathbb{B}, \vec{0} \in F$,

2) $P + (v + w) = (P + v) + w, \quad \forall P \in \mathbb{B}, \forall v, w \in F$,

3) donats $P, Q \in \mathbb{B}$ existeix un únic $v \in F$ tal que $P + v = Q$.

Observacions.

1. La propietat 0) ens diu que l'acció de l'espai vectorial E sobre $\mathbb{A}$ restringeix a una acció del subespai vectorial F sobre B.

2. Les propietats 1) i 2) no cal imposar-les, ja que són conseqüència immediata de la condició 0). La condició 3) s'ha d'imposar. Així $(\mathbb{B}, F)$ és un espai afí. Observem que $\dim \mathbb{B} = \dim F$.

3. Dels subespais afins se'n diuen també *varietats lineals* o *subvarietats lineals*. Si tenen dimensió 1 es parla de *rectes afins* (o simplement rectes); si tenen dimensió 2 es parla de *plans afins* (o simplement plans); si tenen dimensió igual a $\dim \mathbb{A} - 1$ es parla d'*hiperplans afins* (o simplement hiperplans).

Per a cada punt $P \in \mathbb{A}$ i cada subespai vectorial F de E, denotem per

$$P + [F] = \{Q \in \mathbb{A};\ Q = P + v, \text{ amb } v \in F\}.$$

Proposició 3.1.4 *Si $\mathbb{B}$ és un subespai afí de $\mathbb{A}$, amb espai vectorial associat F, i $P \in \mathbb{B}$, llavors*

$$\mathbb{B} = P + [F].$$

La varietat lineal *suma* de dues varietats lineals L_1 i L_2 és la varietat lineal més petita que les conté. Es denota per $L_1 + L_2$.

Teorema 3.1.5 (Fórmules de Grassmann) *Siguin $L_1 = P + [F]$ i $L_2 = Q + [G]$ varietats lineals d'un espai afí $\mathbb{A}$.*

Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, llavors

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, llavors

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(F \cap G) + 1.$$

Equacions de les varietats lineals Una *referència afí* és el conjunt $\mathcal{R} = \{P; (e_1, \dots, e_n)\}$, on $P \in \mathbb{A}$ i $(e_1, \dots, e_n)$ és una base de E. Es diu que el punt P és l'*origen* d'aquesta referència.

Des del moment en què fixem una referència, els punts $Q \in \mathbb{A}$ passen a tenir coordenades, anomenades afins, que es defineixen de la manera següent: considerem el vector $\overrightarrow{PQ}$, determinat per l'origen P de la referència i pel punt Q. Llavors, si

$$\overrightarrow{PQ} = q_1 e_1 + \cdots + q_n e_n, \quad q_i \in k,$$

diem que q té *coordenades afins* $(q_1, \dots, q_n)$.

Proposició 3.1.6 *Sigui $L = Q + [F]$ una varietat lineal de dimensió r d'un espai afí $\mathbb{A}$. Sigui $\mathcal{R} = \{P; (e_1, \dots, e_n)\}$ una referència afí. Llavors, les coordenades dels punts de L respecte de $\mathcal{R}$ són solució d'un sistema lineal $AX = B$ de $n - r$ equacions, n incògnites, i rang $n - r$. A més, les components de qualsevol vector de F respecte de $(e_1, \dots, e_n)$ són solució del sistema homogeni associat $AX = 0$.*

Concretament, si $F = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, i $Q = (q_1, \dots, q_n)$ el sistema és

$$\begin{vmatrix} v_{11} & \dots & v_{1r} & x_1 - q_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{r1} & \dots & v_{rr} & x_r - q_r \\ v_{j1} & \dots & v_{jr} & x_j - q_j \end{vmatrix} = 0, \quad j = r+1, \dots, n \tag{3.1}$$

(suposant que el primer menor $r \times r$ és diferent de zero).

Definició 3.1.7 (Raó simple) *Siguin $A, B, C \in \mathbb{A}$ tres punts diferents alineats. La* raó simple *d'aquests tres punts és l'únic escalar $\lambda = (A, B, C) \in k$ tal que*

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}.$$

Teorema 3.1.8 (Teorema de Menelao) *Suposem que una recta talla els costats d'un triangle $\triangle ABC$ en els punts P, Q, R respectivament. Llavors*

$$(P, A, B) \cdot (Q, B, C) \cdot (R, C, A) = 1$$

Teorema 3.1.9 (Teorema de Ceva) *Sigui $\triangle ABC$ un triangle. La condició necessària i suficient per que tres rectes, una per cada vèrtex d'un triangle $\triangle ABC$, diferents dels costats, siguin concurrents en un punt, és que es compleixi*

$$(P, A, B) \cdot (Q, B, C) \cdot (R, C, A) = -1,$$

on P, Q, R denoten respectivament les interseccions de les rectes per A, B, C amb els costats AB, BC, AC del triangle.

Definició d'afinitat

Siguin $(\mathbb{A}_1, E_1)$ i $(\mathbb{A}_2, E_2)$ dos espais afins, amb E_1 i E_2 espais vectorials sobre el mateix cos k.

Fixem un punt $P \in \mathbb{A}_1$. Llavors tota aplicació $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ indueix una aplicació

$$\tilde{f}_P : E_1 \longrightarrow E_2$$

definida per la fórmula

$$\tilde{f}_P(v) = \overrightarrow{f(P)f(Q)},$$

on $Q \in \mathbb{A}_1$ és l'únic punt tal que $\overrightarrow{PQ} = v$.

En general, però, aquesta aplicació $\tilde{f}_p$ entre els espais vectorials no és lineal. Direm que $\tilde{f}_P$ és l'aplicació induïda per l'aplicació f i el punt P.

Definició 3.1.10 *Direm que una aplicació $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ entre dos espais afins és una* afinitat *si l'aplicació $\tilde{f}_P : E_1 \longrightarrow E_2$, induïda per f i per un punt $P \in \mathbb{A}_1$ en els espais vectorials corresponents, és lineal.*

En aquest cas $\tilde{f}_P$ no depèn del punt, és a dir $\tilde{f}_P = \check{f}_Q$, $\forall\, P, Q \in \mathbb{A}_1$.

Proposició 3.1.11 *Una aplicació entre dos espais afins $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ és una afinitat si i només si existeix una aplicació lineal $\tilde{f} : E_1 \longrightarrow E_2$ entre els espais vectorials corresponents, tal que*

$$f(P + v) = f(P) + \tilde{f}(v), \qquad \forall P \in \mathbb{A}_1, \forall v \in E_1.$$

Tindrem doncs el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_1 \times E_1 & \longrightarrow & \mathbb{A}_1 \\ {\scriptstyle f\times\tilde{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{A}_2 \times E_2 & \longrightarrow & \mathbb{A}_2 \end{array}$$

i, de fet, podem definir afinitat com un parell $(f, \tilde{f})$, $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$, $\tilde{f} : E_1 \longrightarrow E_2$ lineal, que fa commutatiu el diagrama anterior.

Proposició 3.1.12 *Siguin $P_1, \ldots, P_r$, punts independents d'un espai afí $\mathbb{A}_1$. Siguin $Q_1, \ldots, Q_r$, punts d'un espai afí $\mathbb{A}_2$. Llavors existeix una afinitat $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ tal que $f(P_i) = Q_i$, per a $i = 1, \ldots, r$. Si $r = \dim \mathbb{A}_1 + 1$, llavors aquesta afinitat és única.*

També es pot veure que la composició d'afinitats és una afinitat i que la inversa d'una afinitat bijectiva és també una afinitat.

El conjunt de totes les afinitats bijectives de $\mathbb{A}$, amb la composició d'aplicacions, és un grup, anomenat *grup afí* o *grup de les afinitats*, i denotat $\mathbb{G}A$.

L'acció natural del grup de les afinitats $\mathbb{G}A$ d'un espai afí $\mathbb{A}$, sobre el propi espai $\mathbb{A}$, està donada per

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}A \times \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ f \quad , \; P & \longmapsto & f(P) \end{array}$$

Proposició 3.1.13 *Les afinitats injectives porten rectes a rectes i conserven la raó simple.*

El teorema fonamental de la geometria afí, que veurem més endavant (teorema 11.2.2), estudia (essencialment) el recíproc d'aquesta proposició.

Equacions de les afinitats

Siguin $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow A_2$ una afinitat, $\mathcal{R}_1 = \{P_1; (e_1, \dots, e_n)\}$ una referència a $\mathbb{A}_1$ i $\mathcal{R}_2 = \{P_2; (v_1, \dots, v_m)\}$ una referència a $\mathbb{A}_2$.

La relació entre les coordenades $(x_1, \dots, x_n)$ d'un punt $X \in \mathbb{A}_1$, i les coordenades $(y_1, \dots, y_m)$ del punt $f(X) \in \mathbb{A}_2$ està donada per

$$y_j = a_j + \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji}, \quad j = 1, \dots, m. \tag{3.2}$$

on les a_j i les a_{ji} estan donades per

$$\overrightarrow{P_2 f(P_1)} = \sum_{j=1}^{m} a_j v_j, \quad f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j.$$

L'equació (3.2) l'escriurem simplement com

$$\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

amb

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; A = (a_{ij}), \; a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Exemples d'afinitats

Definició 3.1.14 *Una* translació *és una afinitat $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ tal que $\tilde{f} = id$.*

Es pot veure que una afinitat f és una translació si i només si existeix $u \in E$, tal que

$$f(Q) = Q + u, \quad \forall Q \in \mathbb{A}.$$

Equació de les translacions. En unes certes coordenades tota translació es pot escriure com

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 1 \\ x'_i = x_i \quad i = 2, \dots, n \end{cases}$$

Definició 3.1.15 *Una* homotècia *de raó λ és una afinitat $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ tal que $\tilde{f} = \lambda\, id$, $\lambda \neq 0, 1$.*

Es pot veure que les homotècies tenen un únic punt fix.

Equació de les homotècies. En unes certes coordenades tota homotècia es pot escriure com

$$x'_i = \lambda x_i \quad i = 1, \dots, n$$

Definició 3.1.16 *Una* simetria *és una afinitat $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ tal que $f^2 = id$.*

Equació de les simetries. En unes certes coordenades tota simetria es pot escriure com

$$\begin{cases} x'_i = x_i \quad i = 1, \dots, r \\ x'_j = -x_j \quad j = r+1, \dots, n \end{cases}$$

Definició 3.1.17 *Una* projecció *és una afinitat* $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ *tal que* $f^2 = f$.

Equació de les projeccions. En unes certes coordenades tota projecció es pot escriure com

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x'_i & = & x_i & i = 1, \dots, r \\ x'_j & = & 0 & j = r+1, \dots, n \end{array} \right.$$

3.2 Espai afí des del punt de vista projectiu

Ja hem comentat que l'espai vectorial E té estructura natural d'espai afí. Les subvarietats afins de E són subconjunts de E de la forma

$$L = z_0 + V$$

on z_0 és un punt fixat i V és un subespai vectorial de E.

Observem que L té també estructura natural d'espai afí associat a l'espai vectorial V, simplement definint l'acció $L \times V \longrightarrow L$ per

$$(z_0 + v) + w = z_0 + (v + w),$$

on la suma de l'acció és la suma a E.

Situem-nos ara a l'espai projectiu $P(E)$ i traiem un hiperplà. És a dir, considerem $P(E) \backslash H$ on $H = p(V)$ amb $\dim V + 1 = \dim E$.

Fixem una descomposició de E de la forma $E = V \oplus \langle z_0 \rangle$, on z_0 és un vector no nul de E que no pertany a V.

La construcció següent dependrà d'aquest z_0, però llevat d'isomorfismes afins podrem considerar que és única (vegeu l'exercici 3.2.2). Per això moltes vegades es parla de l'espai afí $P(E) \backslash H$ en lloc de parlar, com seria més precís, de l'espai afí $(P(E) \backslash H, z_0)$.

Observem ara que tot punt $A \in p(E) \backslash H$ es pot escriure de manera única de la forma $A = p(a + z_0)$ amb $a \in V$.

En efecte, sigui $A = p(v)$ amb $v \in E = V \oplus \langle z_0 \rangle$. Descomponent v en aquesta suma directa tenim $v = v_1 + \lambda z_0$ amb $v_1 \in V$. Com que $A \notin H$, $\lambda \neq 0$, i podem dividir per λ per obtenir $\frac{1}{\lambda} v = \frac{1}{\lambda} v_1 + z_0$, que és l'únic vector proporcional a v amb coeficient 1 a z_0.

Això permet establir una bijecció entre $P(E) \backslash H$ i $L = z_0 + V$; així:

$$\begin{array}{rrcl} \Phi : & P(E) \backslash H & \longrightarrow & L \\ & p(a + z_0) & \longrightarrow & z_0 + a. \end{array}$$

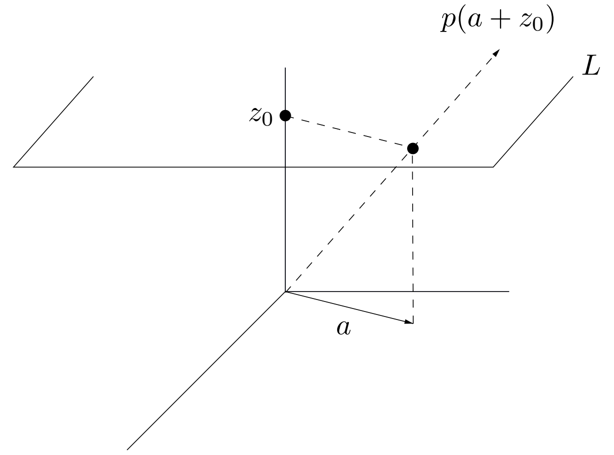
Ara podem copiar l'estructura afí de L a $P(E) \backslash H$ (així la bijecció anterior serà un isomorfisme afí). Concretament l'acció és

$$\begin{array}{rcl} P(E) \backslash H \times V & \longrightarrow & P(E) \backslash H \\ p(a + z_0), v & \longmapsto & p(a + v + z_0). \end{array}$$

Com que l'acció es denota normalment pel signe "+" (en geometria afí "sumem" punts i vectors) escriurem,

$$\boxed{p(a + z_0) + v = p(a + v + z_0)}$$

En particular, si $A = p(a + z_0)$ i $B = p(b + z_0)$, llavors $\overrightarrow{AB} = b - a$, ja que per definició $\overrightarrow{AB}$ és l'únic vector tal que $A + \overrightarrow{AB} = B$.



Definició 3.2.1 *Sigui $P(E)$ un espai projectiu i $H = p(V)$ un hiperplà. Prenem $z_0 \in E$ tal que $E = V \oplus \langle z_0 \rangle$. L'espai afí determinat per H i z_0 és l'espai afí $(\mathbb{A}, V)$ donat per l'acció de l'espai vectorial V sobre el conjunt $\mathbb{A} = P(E) \backslash H$, definida per $p(a + z_0) + v = p(a + v + z_0)$.*

Ja hem comentat que normalment es parla de l'espai afí $\mathbb{A} = P(E)\backslash H$, ometent la referència al vector z_0, necessari, però per a definir l'acció. Es diu que H és l'*hiperplà de l'infinit*.

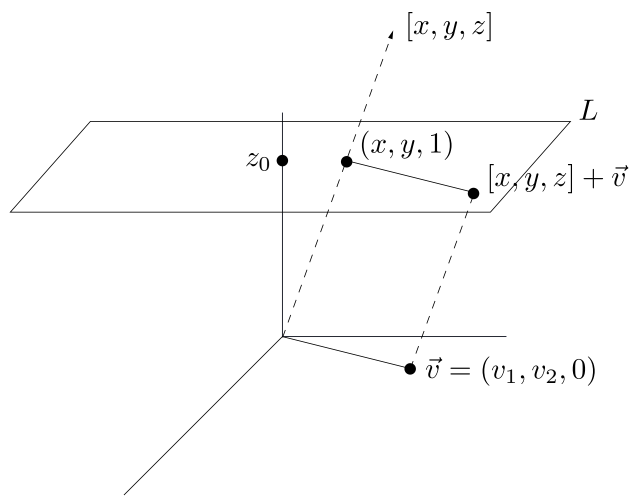
L'acció en coordenades.

Observem que aquesta aplicació en coordenades homogènies respecte a una base adaptada (base de V completada amb z_0) està donada per

$$[a^0, \dots, a^{n-1}, 1] + (v^0, \dots, v^{n-1}, 0) = [a^0 + v^0, \dots, a^{n-1} + v^{n-1}, 1]$$

o equivalentment

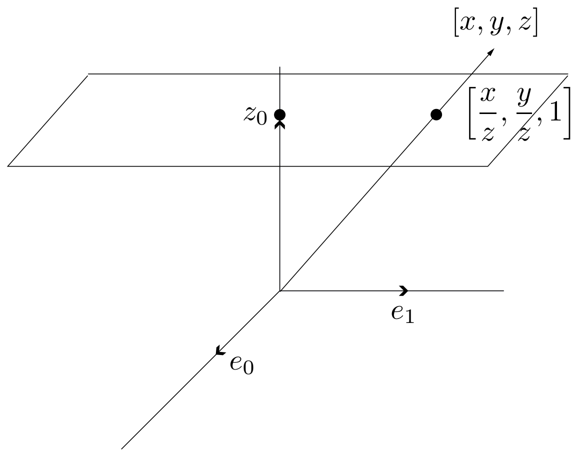
$$\begin{aligned}
[x^0, \dots, x^n] + (v^0, \dots, v^{n-1}, 0) &= \left[\frac{x^0}{x^n} + v^0, \dots, \frac{x^{n-1}}{x^n} + v^{n-1}, 1\right] \\
&= [x^0 + v^0 x^n, \dots, x^{n-1} + v^{n-1} x^n, x^n].
\end{aligned}$$



Coordenades afins i coordenades projectives.

Un punt de $P(E)\backslash H$ de coordenades homogènies $[x^0, \ldots, x^n]$ respecte a una base adaptada $(e_0, \ldots, e_{n-1}, z_0)$ té coordenades afins $\left(\frac{x^0}{x^n}, \ldots, \frac{x^{n-1}}{x^n}\right)$ respecte a la referència afí $\{p(z_0); e_0, \ldots, e_{n-1}\}$.

En efecte, $P = p(x^0, \ldots, x^n) = p\left(\frac{x^0}{x^n}e_0 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{x^n}e_{n-1} + z_0\right)$ implica $\overrightarrow{Pp(z_0)} = \frac{x^0}{x^n}e_0 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{x^n}e_{n-1}$, com volíem.



Exercici 3.2.2 *Sigui $H = p(V)$ un hiperplà de $P(E)$. Siguin z_0 i z_1 tals que $E = V \oplus z_0 = V \oplus z_1$. Demostreu que l'aplicació identitat de $P(E)\backslash H$ és una afinitat entre els espais afins $(P(E)\backslash H, z_0)$ i $(P(E)\backslash H, z_1)$*

Solució. Sabem que $z_0 = v_0 + az_1$ per a un cert $v_0 \in V$. Llavors tot punt X es pot escriure com $X = p(x_0 + z_0) = p(x_0 + v_0 + az_1)$, de manera que si $Y = p(y_0 + z_0) = p(y_0 + v_0 + az_1)$, el vector XY en el primer espai afí és $y_0 - x_0$ i en el segon $\frac{1}{a}(y_0 - x_0)$; per tant l'aplicació identitat id : $P(E)\backslash H \longrightarrow P(E)\backslash H$ indueix l'aplicació $\tilde{\mathrm{id}} : V \longrightarrow V$, donada per

$$\tilde{\mathrm{id}}(\overrightarrow{XY}) = \frac{1}{a}\overrightarrow{XY}$$

i, com que és lineal, id és una afinitat. ∎

3.3 Varietats afins

Les varietats lineals afins seran per definició la intersecció amb $P(E)\backslash H$ de les varietats lineals projectives de $P(E)$. Corresponen a les antiimatges per Φ de les subvarietats afins de L.

Recordem que les subvarietats afins de l'espai afí $L = z_0 + V$ estan formades per un punt de L més un subespai vectorial de V. Com que els punts de L són de la forma $z_0 + v_0$, amb $v_0 \in V$, tota subvarietat afí M de L s'escriu com

$$M = z_0 + v_0 + F,$$

essent F un subespai vectorial de V (anomenat *direcció* de M).

Ara és fàcil veure que

$$\Phi^{-1}(M) = p(W) \cap P(E) \backslash H, \quad \text{amb} \quad W = \langle z_0 + v_0, F \rangle.$$

És a dir, la subvarietat afí M de L, vista en el projectiu (i.e. $\Phi^{-1}(M)$) és igual a la intersecció d'una varietat lineal projectiva $p(W)$ amb la part afí $P(E)\backslash H$.

Observem que $p(W \cap V) = p(W) \cap p(V)$ i que

$$p(W) \cap P(E) \backslash H = p(W) \backslash p(W \cap V).$$

Recíprocament, si partim d'una varietat lineal projectiva $p(W)$, no continguda a l'infinit ($W \not\subset V$), podrem trobar $v_0 \in V$ i F subespai vectorial de V tals que $W = \langle z_0 + v_0, F \rangle$, i per tant tindrem

$$p(W) \cap P(E) \backslash H = \Phi^{-1}(M),$$

on $M = z_0 + v_0 + F$. És a dir, tota varietat lineal projectiva, no continguda a l'infinit, dóna lloc a una varietat afí.

A més, com que $W \cap V = F$, podem dir que *la direcció (F) de la subvarietat afí M, és la intersecció amb l'infinit (V) de l'espai vectorial director de la varietat lineal projectiva de la qual prové (W).*

Identificant M amb $\Phi^{-1}(M)$ tenim

> *La direcció de la subvarietat afí $p(W)\backslash p(W \cap V)$ a l'espai afí $P(E)\backslash P(V)$ és $V \cap W$.*

Resumim aquests comentaris en la definició següent.

Definició 3.3.1 *Sigui $P(E)$ un espai projectiu i H un hiperplà. Un subconjunt L de l'espai afí $\mathbb{A} = P(E)\backslash H$ és una subvarietat afí si existeix una varietat lineal projectiva $p(W)$ de $P(E)$ tal que $L = p(W) \cap \mathbb{A}$.*

Observem que la direcció de la varietat afí determinada per la varietat lineal projectiva $p(W)$ és $W \cap V$.

Proposició 3.3.2 *Sigui $P(E)$ un espai projectiu i $H = p(V)$ un hiperplà. Sigui $L = p(W) \cap \mathbb{A}$ una subvarietat afí de l'espai afí $\mathbb{A} = P(E)\backslash H$. Llavors existeix $u_0 \in V$ ($u_0 = 0$ si $z_0 \in W$) tal que*

$$L = p(z_0 + v_0 + (W \cap V))$$

Per exemple, si $r = p(W)$ és una recta projectiva (i.e. W és un subespai vectorial de dimensió 2 de E) llavors $r' = p(W)\backslash p(W \cap V)$ és una recta afí, de direcció $W \cap V$. Suposarem $W \not\subset V$ per tal de que r' no sigui el conjunt buit. En particular, $\dim(V \cap W) = 1$.

Observem que aquesta direcció coincideix amb $\langle \overrightarrow{AB} \rangle$, amb $A, B \in r'$. En efecte, si $A = p(a + z_0)$, $B = p(b + z_0)$ llavors sabem que $\overrightarrow{AB} = b - a$. Però és clar que $b - a \in V \cap W$, i per tant ha de ser $\langle b - a \rangle = V \cap W$. Per tant, la frase

> *la direcció de la recta afí $p(W)\backslash p(W \cap V)$ a l'espai afí $P(E)\backslash P(V)$ és $V \cap W$,*

és equivalent a

la direcció de la recta afí $p(W)\backslash p(W \cap V)$ a l'espai afí $P(E)\backslash P(V)$ és el seu punt de l'infinit,

ja que $p(b-a)$ és el punt en que $p(W)$ talla l'infinit (els punts del projectiu són direccions!).

Observem que $\Phi(r') = z_0 + b + \lambda(b-a)$, i és doncs una recta en el sentit afí clàssic.

En particular, segons quin hiperplà agafem com a hiperplà de l'∞, podem tenir que dues rectes projectives donades siguin, un cop pensades com a rectes afins, paral·leles o no. Tot depèn de si el punt de tall com a rectes projectives pertany o no a l'hiperplà de l'∞. Per exemple, si ens situem a $\mathbb{R}P^2$ i agafem les rectes projectives $r = \{[x,y,z];\ ax+by+cz=0\}$ i $s = \{[x,y,z];\ a'x+b'y+c'z=0\}$ i com a hiperplà de l'∞, $Ax+By+z=0$, llavors, en calcular $r \cap s$, obtenim $r \cap s = \{[x(z), y(z), z]\}$ amb

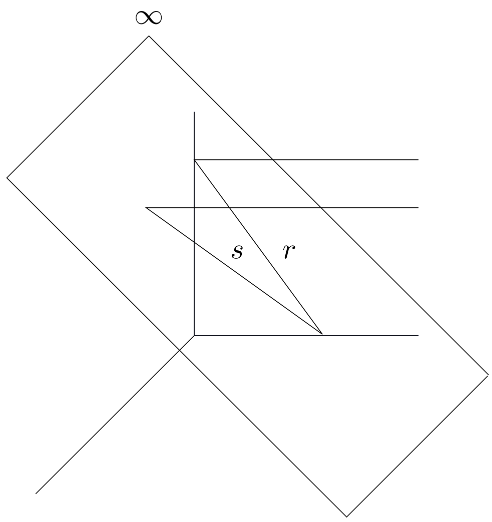
$$x(z) = \frac{\begin{vmatrix} -cz & b \\ -c'z & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \quad y(z) = \frac{\begin{vmatrix} a & -cz \\ a' & -c'z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \quad z = z,$$

i aquest punt pertany a l'hiperplà de l'∞ si i només si

$$A\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix} + B\begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0.$$

Aquesta és doncs la condició de paral·lelisme.

Observem que si $A = B = 0$, retrobem la condició de paral·lelisme habitual entre les rectes $ax+by+c=0$ i $a'x+b'y+c'=0$. Aquestes rectes s'obtenen tallant r i s amb $z=1$, i és que quan l'hiperplà de l'infinit és el $z=0$, l'espai afí "és" el $z=1$.



r, s no paral·leles si l'infinit és $Ax+By+z=0$
r, s paral·leles si l'infinit és $z=0$

Exemple 3.3.3 *Estudiem Φ en el cas particular $E=\mathbb{R}^3$, $z_0=(0,0,1)$ i $V=\{Ax+By+z=0\}$.*

Aquí es barregen les coordenades canòniques i les coordenades adaptades. V és un pla arbitrari per l'origen amb coeficient de z diferent de zero, per tal de poder assegurar $\mathbb{R}^3=V\oplus\langle z_0\rangle$. Llavors

$$\begin{array}{rrcl}\Phi: & \mathbb{R}P^3\backslash p(V) & \longrightarrow & z_0+V=L\\ & p(a+z_0) & \longmapsto & z_0+a\end{array}$$

es pot pensar geomètricament com l'aplicació que associa a la recta per l'origen de direcció $a+z_0$, la intersecció d'aquesta recta amb L. Així, si prenem un punt de $\mathbb{R}^3\backslash p(V)$ de coordenades homogènies $[x,y,z]$ respecte a la base canònica de $\mathbb{R}^3$, la recta per l'origen que determina és $\lambda(x,y,z)$; que si la tallem amb $L=\{(x,y,z);\ Ax+By+z=1\}$, tenim $\lambda=\frac{1}{Ax+By+z}$. Per tant, Φ en coordenades canòniques de $\mathbb{R}^3$ és l'aplicació

$$\begin{array}{rrcl}\Phi: & \mathbb{R}^3\backslash p(V) & \longrightarrow & L\\ & [x,y,z] & \longrightarrow & \left(\dfrac{x}{Ax+By+z},\dfrac{y}{Ax+By+z},\dfrac{z}{Ax+By+z}\right)\end{array}$$

i $\Phi^{-1}(x,y,z)=[x,y,z]$.

Si $A=B=0$, la base canònica és automàticament adaptada i tenim simplement

$$\Phi[x,y,z]=\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right).$$

3.4 Homogeneïtzació

De fet, tot espai afí (L,V) es pot pensar com obtingut a partir d'un espai projectiu al qual hem tret un hiperplà de l'infinit. Aquest procés, que ara explicarem, es diu *homogeneïtzació*.

Sigui E un k-espai vectorial de dimensió una més que V. Per exemple podem pensar $E=V\times k$. Fixem $a\in L$ i $e_0,\dots,e_{n-1}$ base de V i $z_0=(\vec{0},1)$, de manera que $e_0,\dots,e_{n-1},z_0$ és base de E.

Definim

$$\varphi: L\longrightarrow P(E)\backslash H \qquad (H=p(V))$$

per a

$$\varphi(x^0,\dots,x^{n-1})=[x^0,\dots,x^{n-1},1],$$

és a dir, que el punt de coordenades afins $(x^0,\dots,x^{n-1})$ respecte a la referència afí $\{a;e_0,\dots,e_{n-1}\}$ va a parar al punt que té coordenades homogènies $[x^0,\dots,x^{n-1},1]$ respecte a la base $\{e_0,\dots,e_{n-1},z_0\}$. En particular

$$\varphi(a)=[0,\dots,0,1]=p(z_0).$$

Observem que φ depèn de les referències escollides, i és que no hi ha una manera canònica d'incloure un espai afí en un projectiu.

Observem que, pels comentaris anteriors, $[x^0,\dots,x^{n-1},1]$ és el punt de l'espai afí $P(E)\backslash H$ de coordenades afins $(x^0,\dots,x^{n-1})$ respecte a la referència afí $\{p(z_0);\ e_0,\dots,e_{n-1}\}$, de manera que podem pensar que φ envia el punt de l'espai afí L, de coordenades $(x^0,\dots,x^{n-1})$ respecte d'una referència $\{a;\ e_0,\dots,e_{n-1}\}$, al punt amb les mateixes coordenades respecte a la referència $\{p(z_0);\ e_0,\dots,e_{n-1}\}$. En particular és una *afinitat* que indueix la identitat als espais vectorials.

Exemple 3.4.1 *Estudiem φ en el cas particular de l'espai afí $\mathbb{R}^2$ ($L = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^2$).*

Ampliem a $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ i fixem la referència afí $\{(0,0);\ e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$ sobre $\mathbb{R}^2$ i ampliem e_1, e_2 a una base de E, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $z_0 = (0,0,1)$. Llavors

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}P^2 \backslash \{z=0\} \\ & (x,y) & \longmapsto & [x,y,1]. \end{array}$$

En particular si r és la recta afí de $\mathbb{R}^2$ donada per $ax + by + c = 0$, llavors $\varphi(r) = \{[x,y,1];\ ax+by+c=0\}$.

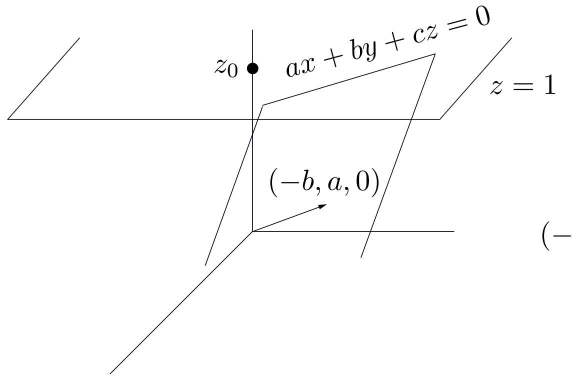
Observem

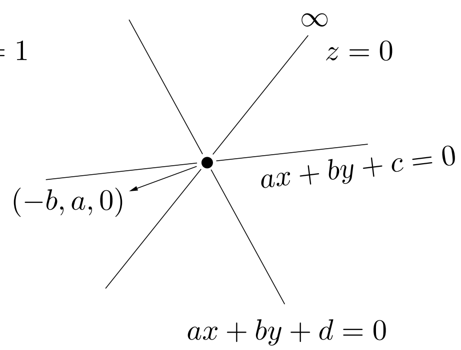
$$\begin{aligned} \varphi(r) \subset \{[x,y,z] \in \mathbb{R}P^2;\ ax+by+cz=0\} \\ = \left\{ \left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right] \in \mathbb{R}P^2;\ a\frac{x}{z} + b\frac{y}{z} + c = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Així la recta projectiva $ax+by+cz=0$ té un punt més que $\varphi(r)$, concretament el punt $[-b,a,0]$ que no pertany a $\varphi(r)$ perquè té la tercera coordenada zero. Es diu que la recta projectiva $ax+by+cz=0$ s'ha obtingut de la recta afí $ax+by+c=0$ pel procés d'homogeneïtzació.

Observem que les rectes paral·leles $r: ax+by+c=0$ i $s: ax+by+d=0$ es tallen a l'∞, és a dir, un cop homogeneïtzades es transformen en rectes projectives que es tallen en el punt $[-b,a,0]$, que pertany a l'hiperplà de l'∞.

Però $(-b,a)$ és la direcció de la recta afí $ax+by+c=0$, de manera que, com ja havíem dit abans, la direcció d'una recta afí és la direcció determinada pel punt del projectiu que s'obté en tallar la recta donada (homogeneïtzada) amb la recta de l'∞. Coincideix amb la definició de recta com $A + \vec{v}$.





Així es veu que el pla projectiu és el pla afí "ampliat" amb les direccions, és a dir, ampliat amb un punt per cada família de rectes paral·leles. I el conjunt d'aquests punts forma una nova recta, la recta de l'infinit, com dèiem a la introducció.

Exemple 3.4.2 *Tot i que no sembla pràctic, se'ns podria ocórrer incloure un pla afí dins un pla projectiu de manera no canònica.*

Per exemple, considerem l'espai afí (L, V) amb $L = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^2$ i considerem $W: Ax + By + z = 0$ pla de $\mathbb{R}^3$. Podem fer

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & L & \longrightarrow & \mathbb{R}P^2 \backslash p(W) \\ & (x,y) & \longmapsto & [x,y,1-Ax-By] \end{array}$$

que correspon a injectar L en el pla $Ax + By + z = 1$. Tot respecte a les bases canòniques.

Els punts de la recta $ax + by + c = 0$ van a parar a punts de coordenades homogènies

$$\begin{aligned}\rho x^0 &= x\\ \rho x^1 &= y\\ \rho x^2 &= 1 - Ax - By\end{aligned}$$

per tant $\rho x^2 = 1 - A\rho x^0 - B\rho x^1$ i així $\rho = \frac{1}{x^2 + Ax^0 + Bx^1}$ i la condició $ax+by+c = 0$ es transforma en $a\rho x^0 + b\rho x^1 + c = 0$ o equivalentment

$$ax^0 + bx^1 + c(Ax^0 + Bx^1 + x^2) = 0,$$

recta projectiva que té un punt més que $\varphi(r)$, concretament el $(-b, a, Ab - Ba)$, i que és la obtinguda de r per aquest procés d'homogeneïtzació generalitzat. Generalitzat en el sentit que si $A = B = 0$, estem en el cas de l'exemple anterior.

3.5 Afinitats

Donada una projectivitat $\tilde{f} : P(E) \longrightarrow P(E)$ no tenim manera de saber de quina $f : E \longrightarrow E$ lineal procedeix, però sabem que dues d'aquestes f difereixen en un escalar.

Si fixem d'una vegada per totes un subespai vectorial V de E, amb $\dim E = \dim V + 1$ i un vector $z_0 \in E$ amb $z_0 \notin V$, i fixem la nostra atenció en les projectivitats $\tilde{f}$ tals que $\tilde{f}(p(V)) = p(V)$, la descomposició $E = V \oplus \langle z_0 \rangle$ permet elegir un representant "canònic" de $\tilde{f}$, concretament el representant tal que $f(z_0) = h_f + z_0$, amb $h_f \in V$, és a dir tal que $f(z_0)$ descompost a la suma directa $E = V \oplus \langle z_0 \rangle$ té coeficient 1 en z_0.

Que això es pot fer és clar, ja que si $f(z_0) = h_f + az_0$ canviem f per $a^{-1}f$. Observem que a és diferent de zero per ser $f(V) = V$ i f bijectiva.

Això ens serà útil per veure quines projectivitats es poden interpretar com a afinitats i per què. Donem una definició projectiva d'afinitat.

Definició 3.5.1 *Una afinitat és una projectivitat que deixa invariant (no necessàriament punt per punt) l'hiperplà de l'∞.*

Per entendre bé aquesta definició observem el següent. Sigui

$$F : P(E) \longrightarrow P(E)$$

projectivitat i sigui $H = p(V)$ l'hiperplà de l'∞. Suposem $F(H) = H$. Com que F és bijectiva, F indueix una aplicació entre espais afins (que tornem a anomenar F)

$$F : P(E)\backslash H \longrightarrow P(E)\backslash H.$$

Recordem que per donar estructura afí a $P(E)\backslash H$ hem hagut de fixar prèviament un $z_0 \in E$ tal que $E = V \oplus \langle z_0 \rangle$, i l'operació afí està donada per $p(a + z_0) + v = p(a + v + z_0)$.

Per comprovar que F és afinitat hem de veure que l'aplicació que indueix a nivell d'espais vectorials és lineal. Concretament, fixem $p_0 = p(z_0)$ un punt de

$P(E)\backslash H$. Llavors F indueix $\tilde{F} : V \longrightarrow V$ per $\tilde{F}(v) = \overrightarrow{F(p_0)F(q)}$, on q és l'únic punt tal que $\overrightarrow{p_0q} = v$, és a dir $q = p(v + z_0)$.

Però, per definició de projectivitat, F és induïda per una aplicació lineal $f : E \longrightarrow E$. Com que tenim la descomposició $E = V \oplus \langle z_0\rangle$, podem agafar f com l'únic representant de F tal que $f(z_0) = a + z_0$, amb $a \in V$, és a dir l'únic tal que $f(z_0)$ té coeficient 1 a z_0.

Llavors tenim $F(p_0) = F(p(z_0)) = p(f(z_0)) = p(a+z_0)$ i $F(q) = Fp(v+z_0) = p(f(v + z_0)) = p(f(v) + a + z_0)$. Per tant $\overrightarrow{F(p_0)F(q)} = f(v)$, és a dir $\tilde{F} = f$, i per tant F és afinitat (amb aplicació lineal associada justament el representant canònic de F!).

Coordenades.

Fixem una base adaptada $(e_0, \dots, e_{n-1}, z_0)$.

Com que $F(H) = H$, tenim que $f(V) = V$, i com que $f(z_0) = a + z_0$, tenim

$$f \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} & a^0 \\ \mathrm{M} & \vdots \\ & a^{n-1} \\ \hline 0\dots 0 & 1 \end{array}\right),$$

on $a = a^0 e_0 + \cdots + a^{n-1}e_{n-1}$.

Aquesta és doncs la matriu associada, mòdul un escalar, a F.

Fixem ara la referència afí $\{p(z_0); e_0, \dots, e_{n-1}\}$ a l'espai afí $P(E)\backslash H$. Escrivim l'equació de l'afinitat $F : P(E)\backslash H \longrightarrow P(E)\backslash H$ respecte a aquesta referència. Com que l'aplicació lineal associada és justament f i com $F(p(z_0))$ té coordenades $(a^0, \dots, a^{n-1})$ ja que $\overrightarrow{p(z_0)F(p(z_0))} = \overrightarrow{p(z_0)p(a + z_0)} = a$, tenim que, en la notació clàssica,

$$F \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} & a^0 \\ \mathrm{M} & \vdots \\ & a^{n-1} \\ \hline 0\dots 0 & 1 \end{array}\right),$$

que és la mateixa matriu de f.

3.6 Translacions

El teorema següent dóna una interpretació projectiva de les translacions afins. Recordem que aquestes s'identifiquen amb els vectors de l'espai vectorial subjacent.

Teorema 3.6.1 *Sigui $H = p(V)$ un hiperplà de $P(E)$.*

Sigui $\mathcal{C} = \{\tilde{f} : P(E) \longrightarrow P(E)$ transformacions projectives tals que $\tilde{f}(x) = x$, $\forall\, x \in H$ i $\tilde{f}(x) \neq x$, $\forall\, x \notin H\} \cup \{\mathrm{id}\}$.

Llavors $\mathcal{C}$ és isomorf al grup additiu de V i l'actuació natural de $\mathcal{C}$ sobre $P(E)\backslash H$ coincideix, via l'isomorfisme anterior, amb l'acció de V sobre $P(E)\backslash H$ que dóna l'estructura afí.

Demostració. Fixem $z_0 \in E$ tal que $E = V \oplus \langle z_0\rangle$.

Degut al corol·lari 2.5.2, la condició $\tilde{f} = \mathrm{id}$ sobre H implica que $\tilde{f}$ té un representant f, que és una homotècia de raó a, és a dir $f(v) = av\ \forall\, v \in V$ amb

$a \in k$ independent de v. Com que $f(z_0) \in E$, el podem escriure de manera única de la forma $f(z_0) = u + bz_0$, $u \in V$.

Però a més $a = b$. En efecte, si $a \neq b$, podríem considerar $w = \frac{u}{b-a} + z_0$ i tindríem $f(w) = \frac{1}{b-a}au + (u + bz_0) = bw$, i aquest valor propi w donaria lloc a un punt fix de $\tilde{f}$ fora de H.

Així doncs tenim, canviant f per $\frac{1}{a}f$, que $\tilde{f} \in \mathcal{C}$ si i només si $\tilde{f}$ és la projectivització d'una aplicació lineal $f : E \longrightarrow E$ tal que $f(v) = v$, $\forall\, v \in V$ i $f(z_0) = h_f + z_0$, on h_f és un vector de V unívocament determinat.

És a dir
$$f \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & h_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'isomorfisme de què parla el teorema és
$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{C} & \longrightarrow & V \\ & \tilde{f} & \longmapsto & h_f. \end{array}$$

Que ψ és morfisme de grups és clar ja que $h_{f\circ g} = h_f + h_g$,

És clarament injectiu, ja que si $h_f = 0$, $f = \mathrm{id}$, i també clarament exhaustiu.

Mirem ara com és l'acció.

Tenim el diagrama següent
$$\begin{array}{ccc} P\backslash H \times \mathcal{C} & \longrightarrow & P\backslash H \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\big\downarrow{\scriptstyle \psi} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ P\backslash H \times V & \longrightarrow & P\backslash H, \end{array}$$

on la primera fletxa horitzontal és l'acció natural $(A, \tilde{f}) \longmapsto \tilde{f}(A)$, i la segona és l'acció afí, i hem de veure que commuta. Però
$$\tilde{f}(p(a + z_0)) = p(f(a + z_0)) = p(a + h_f + z_0) = p(a + z_0) + h_f,$$

com volíem. Aquesta igualtat ens diu també que $\tilde{f}$ és una translació de vector h_f. ∎

3.7 Exercicis

3.7.1 Sigui P el pla afí ampliat amb la recta de l'infinit. Comproveu que són certes les afirmacions següents.

a) Si X_1, X_2 són dos punts diferents de P, existeix una única recta l a P tal que $X_1, X_2 \in l$.

b) Si l_1, l_2 són dues rectes diferents de P, existeix un únic punt X de P tal que $X \in l_1, l_2$.

c) P conté almenys tres punts no alineats.

d) Cada recta de P conté almenys tres punts.

3.7.2 Volem donar de manera explícita la identificació entre el pla afí $\mathbb{R}^2$ i l'espai afí $\mathbb{A} = \mathbb{R}P^2 \setminus r$, on r és una recta d'equació $Ax + By + z = 0$.

Sigui V el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ donat per l'equació $Ax + By + z = 0$, $e_0 = (1, 0, -A)$ $e_1 = (0, 1, -B)$ una base de V i $\varphi : \mathbb{R}^2 \to V$ l'isomorfisme d'espais vectorials que porta la base canònica de $\mathbb{R}^2$ sobre la base e_0, e_1. Fixem $Z_0 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ i designem per L el pla paral·lel a V que passa per aquest punt.

a) Comproveu que L és un pla afí amb espai vectorial associat V i doneu un isomorfisme afí entre $\mathbb{R}^2$ i L.

b) Sabem també que $\mathbb{A}$ és un pla afí amb espai vectorial associat V. Doneu al més explícitament possible un isomorfisme afí entre $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{A}$ utilitzant la identificació obtinguda en l'apartat anterior.

c) Quina serà l'expressió de l'isomorfisme invers al de l'apartat anterior?

d) Les rectes del pla afí $\mathbb{A}$ són les restriccions de les rectes de $\mathbb{R}P^2$. Sigui s la restricció a $\mathbb{A}$ de la recta projectiva d'equació $ax + by + cz = 0$ i v un vector de $V \subset \mathbb{R}^3$ que en determini la direcció. Calculeu les coordenades homogènies de $p(v) \in \mathbb{R}P^2$ i comproveu que aquest punt és de r. Quin és el resultat quan $V : \{z = 0\}$?

e) Donada una altra recta s' de $\mathbb{A}$, amb equació $a'x + b'y + c'z = 0$, quina és la condició sobre els coeficients a, b, c, a', b', c' que caracteritza el fet que s i s' siguin paral·leles?

f) Si en $\mathbb{R}P^2$ considerem el sistema de referència

$$R = \{[1, 0, -A], [0, 1, -B], [0, 0, 1]; [1, 1, 1 - A - B]\},$$

quina és l'equació de r?; com s'escriu en aquest sistema de referència l'isomorfisme que hem donat entre $\mathbb{A}$ i $\mathbb{R}^2$?

g) Com canvien les fórmules obtingudes en els apartats anteriors si es pren un punt Z_0 diferent? Què passa quan l'equació de r és de la forma $Ax+By = 0$?

3.7.3 En aquest problema denotem per f cadascuna de les projectivitats del pla projectiu del problema 2.6.24 i per r qualsevol recta invariant per f. Preneu r com a recta de l'infinit i demostreu que f restringida a $\mathbb{R}P^2 \setminus r$ és una afinitat.

3.7.4 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'afinitat donada per $f(x, y) = (x - y + 1, y + 2)$ y $r \subset \mathbb{R}P^2$ la recta projectiva $ax + by + z = 0$. Recordem la inclusió $\varphi : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}P^2$ donada per $\varphi(x, y) = [x, y, 1 - ax - by]$. Demostreu que f es pot estendre a una projectivitat $\tilde{f} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ que té r com a recta invariant. Quina és la matriu de $\tilde{f}$ en la referència estàndard de $\mathbb{R}P^2$? Particularitzeu al cas $r : \{z = 0\}$.

3.7.5 Sigui $ABCD$ un quadrilàter de P^2. Siguin $E = AD \cap BC$, $F = AB \cap CD$, $G = AC \cap BD$, $H = EG \cap CD$, $I = FG \cap AD$. Demostreu que EF, AC i HI són concurrents. Interpreteu la situació en una carta afí agafant EF com a recta de l'infinit.

3.7.6 Considerem en el pla projectiu real la recta de l'infinit $x = 0$. De les afinitats següents digueu quines són translacions i quines homotècies. Doneu la direcció de les translacions.

a) $f[x, y, z] = [x, 2x + y, x + z]$;

b) $f[x, y, z] = [3x, y, 2x + z]$;

c) $f[x, y, z] = [x, 2y, 2z]$;

d) $f[x, y, z] = [2x, x + 3y, 4x + 3z]$.

3.7.7 Siguin

$$M = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ i } \ M' = \begin{pmatrix} A' & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dues afinitats. Demostreu que són equivalents:

1) M i M' són afinment equivalents. És a dir, existeix

$$P = \begin{pmatrix} B & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tal que $P^{-1}MP = M'$.

2) A és linealment equivalent a A' i M és linealment equivalent a M'. És a dir, existeixen matrius invertibles C i Q tals que $C^{-1}AC = A'$ i $Q^{-1}MQ = M'$.

3) A és linealment equivalent a A' i $\rho(M) = \rho(M')$. Aquest $\rho(M)$ es defineix com el número natural tal que

$$\ker(M - Id)^{\rho(M)-1} \subset V \ \text{ i } \ \ker(M - Id)^{\rho(M)} \not\subset V,$$

sent V l'hiperplà de l'infinit.

Indicació: S'ha de conèixer la classificació en formes canòniques de Jordan. En cas contrari, es pot resoldre per a afinitats del pla.

3.7.8 Digueu per a quines de les següents projectivitats del pla real es pot trobar una recta de l'infinit respecte de la qual siguin afinitats. Doneu la recta i determineu el tipus d'afinitats que s'obtenen.

a) $f[x, y, z] = [2x + y, y, z]$;

b) $f[x, y, z] = [-x + 4y, -2x + 5y, -2x - 8y - 2z]$;

c) $f[x,y,z] = [x+3y-3z, 3x+y+3z, 4z]$;

d) $f[x,y,z] = [-x+y-5z, 3x+y+3z, 2x+2y-6z]$.

3.7.9 Demostreu que la composició de dues homologies generals amb el mateix eix és una homologia general amb el mateix eix.

Deduïu que en el pla afí la composició de dues homotècies és o bé una homotècia, o bé una translació; en el primer cas els tres centres estan alineats; en el segon cas el vector de la translació és paral·lel a la recta que uneix els centres de les homotècies.

3.7.10 Demostreu que la composició de dues homologies especials amb eix e, és una homologia especial amb el mateix eix.

Deduïu que en un pla afí, la composició de dues translacions és una translació.

3.7.11 Considereu la projectivitat del pla projectiu real

$$f[x,y,z] = [4x-4z, -x+2y+2z, x].$$

a) Classifiqueu-la.

b) Trobeu una recta que es pugui agafar com a recta de l'infinit i classifiqueu l'afinitat corresponent.

c) Doneu una equació de l'afinitat anterior respecte a un sistema de referència afí.

3.7.12 Sigui f una projectivitat del pla projectiu real definida per

$$f[x,y,z] = [(a-3)x-2y+z, (a-1)y, -2x-2y+az] \qquad a \neq 1,2.$$

a) Classifiqueu-la.

b) Trobeu els punts fixos i les rectes invariants de f.

c) Comproveu que si existeix un punt A tal que $A \neq f(A)$ i $f(f(A)) = A$, llavors $f^2 = id$.

d) En el cas $f^2 = id$ doneu una recta que es pugui agafar com a recta de l'infinit i classifiqueu l'afinitat corresponent.

3.7.13 Donades dues rectes paral·leles en el pla afí real, doneu una construcció d'una tercera recta paral·lela a elles.

3.7.14 Siguin r, s, t tres rectes no concurrents del pla projectiu real. Sigui h una projectivitat del pla tal que t és invariant i la restricció de h a $\mathbb{R}P^2 \setminus t$ és una simetria axial d'eix r i direcció s.

a) Doneu una construcció de la imatge $h(X)$ d'un punt arbitrari X.

b) Classifiqueu la restricció de h al pla afí $\mathbb{R}P^2 \setminus r$.

c) Doneu la matriu de h en la referència canònica de $\mathbb{R}P^2$ si les equacions de r, s, t són

$$r : x = 0, \quad s : 2x - 3z = 0, \quad t : x + z = 0.$$

3.7.15 Sigui $f : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ la projectivitat donada per

$$[x', y', z'] = [x, y + 2z, z].$$

Trobeu punts fixos i rectes invariants.

Estudieu l'afinitat que s'obté en restringir f a l'espai afí

$$\mathbb{R}P^2 \setminus \{\text{recta invariant}\}$$

per a cada una de les rectes invariants.

4. Primers resultats de geometria projectiva

En aquest capítol presentem els teoremes clàssics de Desargues, que ja hem comentat a la introducció, i de Pappus. Tots dos fan referència al fet que certs punts que s'obtenen com a intersecció de rectes estan alineats. Expliquem també el teorema fonamental de la geometria projectiva, que ens permet d'alguna manera passar de la geometria a l'àlgebra lineal, ja que ens diu que les aplicacions que porten rectes a rectes són projectivitats, és a dir provenen d'aplicacions lineals i poden ser estudiades, doncs, amb els procediments clàssics de l'àlgebra lineal.

Introduïm també l'important concepte de dualitat, que ens permet economitzar moltes energies, ja que un cop demostrat un cert resultat o teorema tenim demostrat automàticament el seu dual, que és un altre teorema, és a dir que en geometria projectiva tan sols hem de demostrar la meitat dels teoremes!

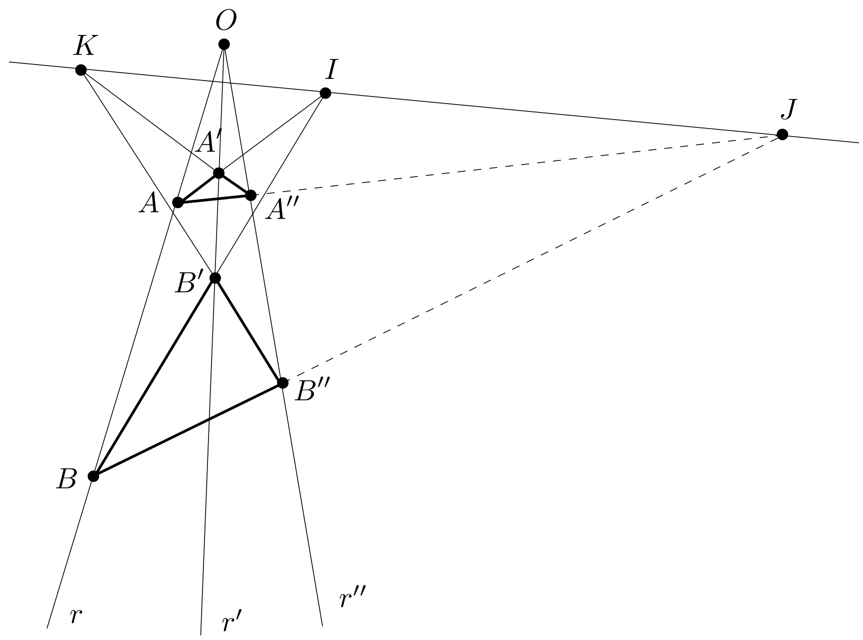
En el pla, aquest principi de dualitat diu que si un cert enunciat és cert, llavors l'enunciat que s'obté canviant punt per recta, recta per punt, intersecció per unió i unió per intersecció, continua essent cert.

Situem-nos a partir d'ara en un espai projectiu arbitrari $P(E)$ sobre un cos k.

4.1 Teorema de Desargues

Teorema 4.1.1 (Teorema de Desargues) *Siguin r, r', r'' rectes concurrents en un punt O d'un espai projectiu $P(E)$. Siguin $A, B \in r$, $A', B' \in r'$, $A'', B'' \in r''$ diferents entre si i diferents de O. Llavors els punts $I = AA' \cap BB'$, $J = AA'' \cap BB''$, $K = A'A'' \cap B'B''$ estan alineats.*

Demostració.



Podem suposar que els punts A, A', A'' no estan alineats i que els punts B, B', B'' tampoc ho estan (en cas contrari l'enunciat és evident).

Observem que les rectes AA' i BB' pertanyen al pla determinat per r i r' i per tant es tallen. Anàlogament es veu l'existència de J i K.

Per ser $I = AA' \cap BB'$, aquest punt pertany a la recta AA' (continguda en el pla P_1 determinat pels punts A, A', A''), i pertany també a la recta BB' (continguda en el pla P_2 determinat pels punts B, B', B''). Tenim doncs $I \in P_1 \cap P_2$, i anàlogament $J, K \in P_1 \cap P_2$. A més, aquests tres punts són diferents, de manera que els plans P_1 i P_2 o bé es tallen en una recta (i el teorema de Desargues queda demostrat) o són coincidents. La posició relativa de dos plans s'estudia a l'exercici l'exercici 2.6.9.

El cas $P_1 = P_2$ es pot reduir a l'anterior "aixecant" una mica la recta r' (mantenint O fix) d'aquest pla. Obtindríem així dos triangles A, A'_b, A'' i B, B'_b, B'' als quals podem aplicar el teorema de Desargues per obtenir punts alineats I_b, J_b, K_b. En projectar aquesta segona configuració sobre la primera, de manera que el punt O sigui fix, el punt A'_b vagi al punt A' i el punt B'_b vagi al punt B', la recta I_b, J_b, K_b es projecta sobre una recta que és justament la recta I, J, K buscada. Deixem els detalls com exercici.

Segona demostració del teorema de Desargues. La part final de la demostració que acabem de donar implica treballar en un pla projectiu que estigui contingut en un espai projectiu de dimensió més gran (per poder "aixecar" la recta).

Per evitar aquest petit inconvenient (des del punt de vista axiomàtic és un punt central, ja que el teorema de Desargues mesura la possibilitat d' encabir un pla projectiu en un espai projectiu de dimensió més gran, vegeu, per exemple, [2]), donarem una demostració sense sortir del pla, usant però coordenades.

Amb la mateixa notació que anteriorment, prenem (A, A', A'', O) com a referència projectiva. Així $A = [1, 0, 0]$, $A' = [0, 1, 0]$, $A'' = [0, 0, 1]$, $O = [1, 1, 1]$. És clar que $B = [1 + b, 1, 1]$, per a un cert $b \in k$, per estar alineat amb O i

A. Anàlogament $B' = [1, 1 + b', 1]$ i $B'' = [1, 1, 1 + b'']$, per a certs $b', b'' \in k$. Observem que les rectes $AA', A'A''$ i AA'' estan donades per

$$\begin{aligned} AA' &= \{[x, y, z]; z = 0\}, \\ A'A'' &= \{[x, y, z]; x = 0\}, \\ AA'' &= \{[x, y, z]; y = 0\}. \end{aligned}$$

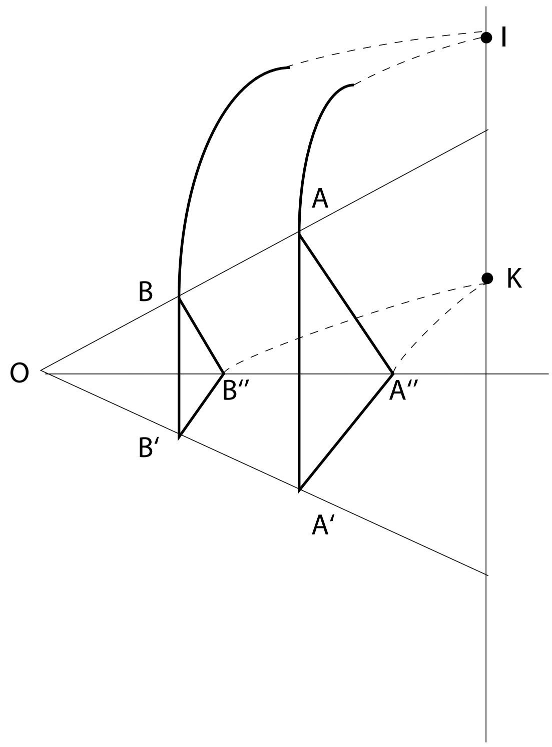
Així, $I = AA' \cap BB' = [b, -b', 0]$; $J = AA'' \cap BB'' = [b, 0, -b'']$; $K = A'A'' \cap B'B'' = [0, b', -b'']$. Com que

$$\begin{vmatrix} b & -b' & 0 \\ b & 0 & -b'' \\ 0 & b' & -b'' \end{vmatrix} = 0,$$

els punts I, J, K estan alineats.

Tercera demostració. Fem encara una tercera demostració, gairebè igual a l'anterior, però passant per la geometria afí.

Prenem la recta I, K com a recta de l'∞.



Si O no pertany a la recta de l'infinit IK, en el pla afí corresponent, tenim

$$\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OA'} = \mu\overrightarrow{OB'}$$
$$\overrightarrow{OA''} = \nu\overrightarrow{OB''},$$

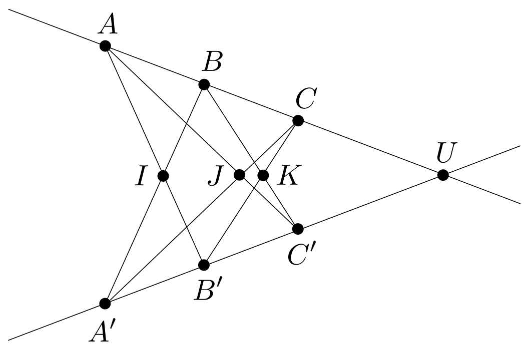
però les rectes AA' i BB' són paral·leles, per tallar-se a l'∞. Així els seus vectors directors $\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB}$ són proporcionals, és a dir, $\mu\overrightarrow{OB'} - \lambda\overrightarrow{OB} = \rho(\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB})$, que implica $\mu = \lambda$. Anàlogament $\lambda = \mu = \nu$, que implica que els vectors $\overrightarrow{OA''} - \overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB''} - \overrightarrow{OB}$ són proporcionals, i per tant la recta AA'' és paral·lela a la recta BB''. Així les rectes AA'', BB'' es tallen a l'infinit, i per tant els punts I, J, K estan alineats.

Si O pertany a la recta de l'infinit IK, les tres rectes són també paral·leles, de manera que tenim $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ i $\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{B'B''}$, i per tant $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'B''} = \overrightarrow{BB''}$, és a dir, les rectes AA'' i BB'' són paral·leles, i per tant, el seu punt d'intersecció J és situat a l'infinit, de manera que I, J, K estan alineats. ∎

4.2 Teorema de Pappus

Teorema 4.2.1 (teorema de Pappus (400 a.C)) *Siguin A, B, C punts d'una recta r i A', B', C' punts d'una altra recta r' en un pla projectiu $P(E)$. Llavors $I = AB' \cdot BA'$, $J = AC' \cdot A'C$, $K = BC' \cdot B'C$ estan alineats.*

Demostració.



Prenem $\{C, C', I; U\}$ com a referència projectiva, és a dir $C = [1, 0, 0]$, $C' = [0, 1, 0]$, $I = [0, 0, 1]$ i $U = [1, 1, 1]$.

Com que A, C, U estan alineats, $A = [a_1, a_2, a_3]$ amb

$$(a_1, a_2, a_3) = \lambda(1, 0, 0) + \mu(1, 1, 1),$$

d'on $a_2 = a_3 = \mu$, $a_1 = \lambda + \mu$, és a dir $A = [a, 1, 1]$ per a una certa $a \in k$.

Com que A', C', U estan alineats, $A' = [a'_1, a'_2, a'_3]$ amb

$$(a'_1, a'_2, a'_3) = \lambda(0, 1, 0) + \mu(1, 1, 1),$$

d'on $a'_1 = a'_3 = \mu$, és a dir $A' = [1, a', 1]$, per a una certa $a' \in k$.

Anàlogament $B = [b, 1, 1]$ i $B' = [1, b', 1]$.

L'equació de la recta $AC' : p(\langle(a, 1, 1), (0, 1, 0)\rangle)$ està donada per la projecció dels vectors de la forma $\lambda(a, 1, 1) + \mu(0, 1, 0) = (\lambda a, \lambda + \mu, \lambda)$, és a dir AC' és la recta formada pels punts de coordenades homogènies $[x, y, z]$ amb $x = za$. Si k és commutatiu, com assumim sempre en aquests apunts, és el mateix posar $z = xa$ que $z = ax$. Però si k no fos commutatiu, hauríem d'escriure forçosament $x = za$. Continuem la demostració sense utilitzar la commutativitat de k (únic moment en aquests apunts que fem aquesta hipòtesi). En particular no podem utilitzar determinants.

Anàlogament $A'C$ està donada per $y = za'$, BC' per $x = zb$ i $B'C$ per $y = zb'$.

Així

$$\begin{aligned} J = AC' \cdot A'C = [az, a'z, z] = [a, a', 1] \\ K = BC' \cdot B'C = [bz, b'z, z] = [b, b', 1], \end{aligned}$$

I, J, K alineats si i només si existeixen $\lambda, \mu \in K$ tals que

$$(0, 0, 1) = \lambda(a, a', 1) + \mu(b, b', 1).$$

És a dir,

$$\begin{aligned} \lambda a + \mu b &= 0 \\ \lambda a' + \mu b' &= 0 \\ \lambda + \mu &= 1. \end{aligned}$$

Aïllant λ a la primera equació obtenim $\lambda = -\mu b a^{-1}$, que substituint a la segona dóna $-\mu b a^{-1} a' + \mu b' = 0$, és a dir

$$ba^{-1} = b'a'^{-1}.$$

Per altra banda, A, I, B' alineats implica $b' = a^{-1}$ i A', I, B alineats implica $b^{-1} = a'$.

Així I, J, K alineats $\Longleftrightarrow ba^{-1} = b'a'^{-1} \Longleftrightarrow bb' = b'b$, i com que b és qualsevol, resulta que I, J, K estan alineats si i només si el cos k és commutatiu. ∎

4.3 Teorema fonamental de la geometria projectiva

El teorema següent, anomenat fonamental perquè ens relaciona propietats geomètriques amb propietats algebraiques, serà cert sobre tot cos k, malgrat que en la seva demostració utilitzarem el teorema fonamental de la geometria afí, que és cert sobre tot cos excepte quan $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Al final de la demostració explicarem aquest fet.

Teorema 4.3.1 (teorema fonamental) *Sigui $F : P(E) \longrightarrow P(E)$ una colineació bijectiva, amb $\dim P(E) \geq 2$, és a dir una aplicació bijectiva que porta rectes a rectes. Llavors F és una semiprojectivitat.*

Demostració. Abans de començar remarquem que quan diem que F porta rectes a rectes volem dir que F porta rectes a rectes bijectivament, vegeu l'exercici 4.6.10.

Hem de demostrar que existeix una aplicació semilineal $f : E \longrightarrow E$ tal que $\tilde{f} = F$.

Semilineal vol dir que conserva la suma i que $f(\lambda v) = \sigma(\lambda)f(v)$ on σ és un automorfisme del cos (que no depèn de λ ni de v). Prenem $P_0, \ldots, P_{n+1}$ referència projectiva ($\dim E = n+1$) i $L_j = v(\{P_0, \ldots, P_j\})$ la varietat lineal projectiva generada per aquests punts, i $L'_j = v(\{F(P_0), \ldots, F(P_j)\})$ la varietat lineal projectiva generada per les imatges d'aquests punts.

Acceptem de moment que $F(L_j) = L'_j$.

Sigui $H = p(V)$ un hiperplà. Com que H es pot pensar com una varietat lineal projectiva generada per uns quants punts, podem aplicar l'observació anterior, encara no demostrada, de que $F(L_j) = L'_j$, per concloure que $H' = F(H)$ és un hiperplà.

Llavors F indueix una aplicació entre espais afins $F : P(E)\backslash H \longrightarrow P(E)\backslash H'$ (la qual continuem denotant per F) i que, com que porta rectes a rectes, i rectes paral·leles a rectes paral·leles és, pel *teorema fonamental de la geometria afí*, una semiafinitat (vegeu el comentari al final d'aquesta demostració, pàgina 61, i el teorema fonamental de la geometria afí, teorema 11.2.2, a la pàgina 214).

Existeix doncs $\tilde{F} : V \longrightarrow V'$ semilineal tal que $F(a + \vec{v}) = F(a) + \tilde{F}(\vec{v})$, per a tot $a + \vec{v} \in P\backslash H$. Aquest V' està donat per ser $p(V') = H'$.

Posem com sempre $E = V \oplus \langle z_0 \rangle = V' \oplus \langle z'_0 \rangle$, on aquest z'_0 l'agafem una vegada per totes entre els que compleixen $Fp(z_0) = p(z'_0)$.

Estenem $\tilde{F}$ a tot E per

$$\begin{aligned} \tilde{F} : V \oplus \langle z_0 \rangle &\longrightarrow V' \oplus \langle z'_0 \rangle \\ (v, \lambda z_0) &\longmapsto (\tilde{F}(v), \sigma(\lambda) z'_0) \end{aligned}$$

(en continuem dient $\tilde{F}$ ja que sobre V és efectivament $\tilde{F}$ i $\tilde{F}(z_0) = z'_0$).

$\tilde{F}$ *és semilineal.*

En efecte,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\mu(v, \lambda z_0)) &= \tilde{F}(\mu v, \mu\lambda z_0) = (\tilde{F}(\mu v), \sigma(\mu\lambda) z'_0) \\ &= (\sigma(\mu)\tilde{F}(v), \sigma(\mu)\sigma(\lambda) z'_0) = \sigma(\mu)\tilde{F}(v, \lambda z_0). \end{aligned}$$

$\tilde{F}$ *indueix* F.

En efecte, sigui $x = p(v) = p(x_0 + z_0)$, on $x_0 + z_0$ és l'únic representant de v amb coeficient 1 a z_0 ($x_0 \in V$). Tenim

$$\tilde{\tilde{F}}(x) = \tilde{\tilde{F}}p(x_0 + z_0) = p(\tilde{F}(x_0 + z_0) = p(\tilde{F}(x_0) + z'_0),$$

on $z'_0 = \tilde{F}(z_0)$. Però

$$p(\tilde{F}(x_0) + z'_0) = p(z'_0 + \tilde{F}(x_0)) = p(z'_0) + \tilde{F}(x_0),$$

on aquest últim signe + és l'operació a l'espai afí $P\backslash H'$, que recordem que estava donada per $p(a + z'_0) + v = p(a + v + z'_0)$, $\forall a, v \in V$. Així

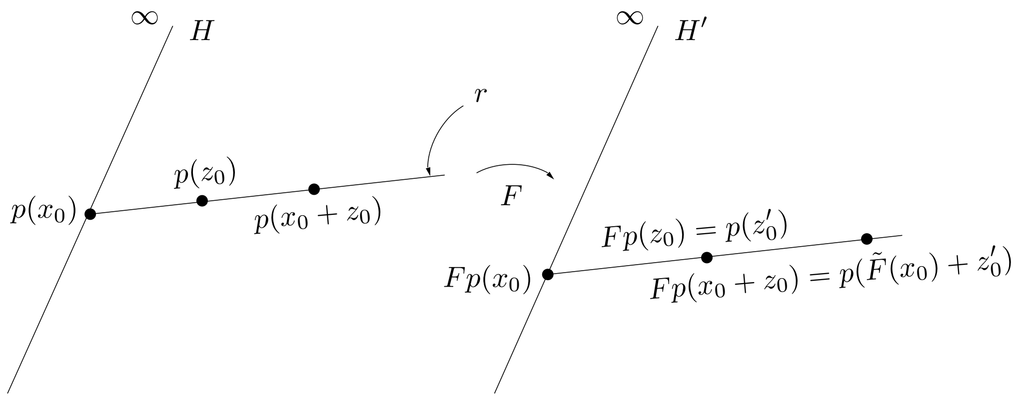
$$\tilde{\tilde{F}}(x) = Fp(z_0) + \tilde{F}(x_0) = F(p(z_0) + x_0) = F(p(z_0 + x_0)) = F(x),$$

és a dir

$$\tilde{\tilde{F}} = F$$

sobre punts amb component $\neq 0$ en z_0.

Observem que si $x = x_0 + 0 \cdot z_0 = x_0 \in V$, no puc aplicar el càlcul anterior.



En aquest cas, sigui r la recta $p(z_0), p(x_0)$.

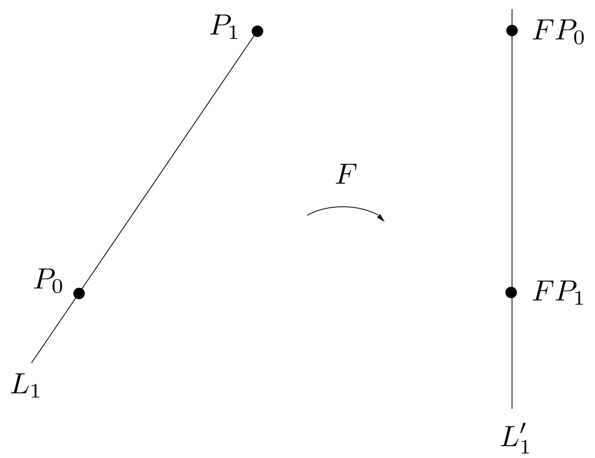
El vector director de la recta afí $F(r)$ és $\tilde{F}(x_0)$ ja que passa per $p(z'_0)$ i per $p(\tilde{F}(x_0)+z'_0)$. Per altra banda, com que el vector director d'aquesta recta és també la direcció donada per la intersecció amb la recta de l'∞, tenim $p\tilde{F}(x_0) = Fp(x_0)$ és a dir $\tilde{\tilde{F}}p(x_0) = Fp(x_0)$ i per tant $F = \tilde{\tilde{F}}$.

Això acaba la demostració, excepte que encara ens falta demostrar que $F(L_j) = L'_j$.

Demostració que $F(L_j) = L'_j$.

Per a $j = 0$ és trivial, ja que $F(L_0) = F(v\{P_0\}) = F(P_0) = v\{F(P_0)\} = L'_0$.

Per a $j = 1$ és exactament la hipòtesis que tenim sobre F (que porta bijectivament rectes a rectes), ja que $F(v\{P_0, P_1\}) = F(\text{recta}\, P_0P_1) =$ *la recta* que passa per FP_0 i FP_1, que és la recta L'_1. Vegeu el problema 4.6.10 per comprovar que no hi ha diferència entre exigir que l'aplicació bijectiva F porti rectes a rectes (cada recta s'aplica bijectivament sobre una altra recta) o exigir que F porti punts alineats a punts alineats (la imatge d'una recta podria, en principi, no ser igual a tota la recta).

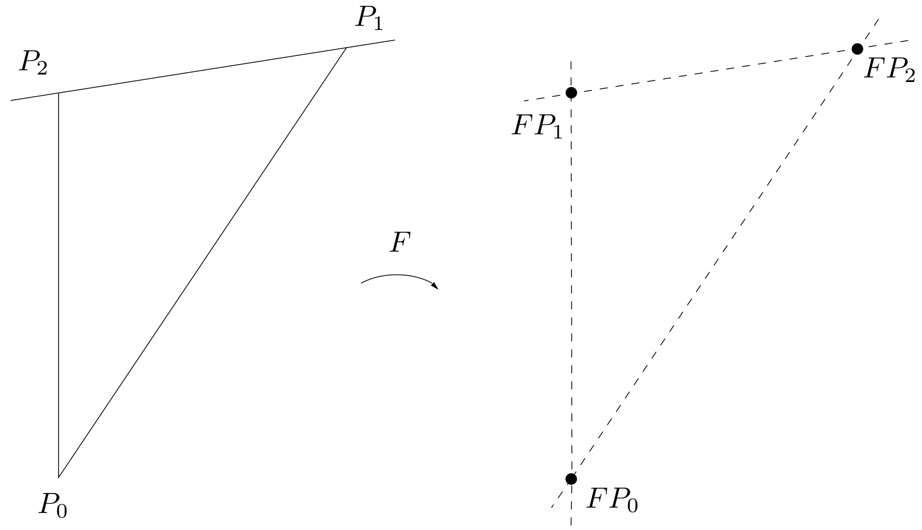


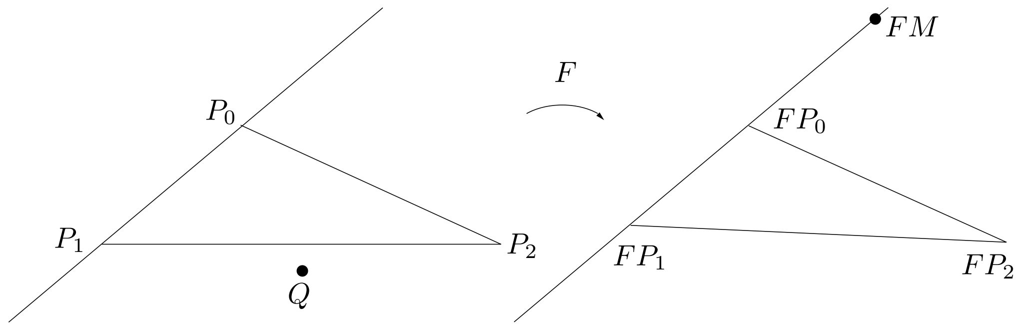
Per $j = 2$ tenim

Podem pensar FP_0 alineat amb FP_1, FP_2? No, perquè la recta P_1P_2 passa a la recta FP_1, FP_2 i $P_0 \notin P_1P_2$ i F bijectiva.

Si som en el pla, hem acabat perquè tant L_2 com L'_2 són tot el pla.

Suposo que som fora del pla.



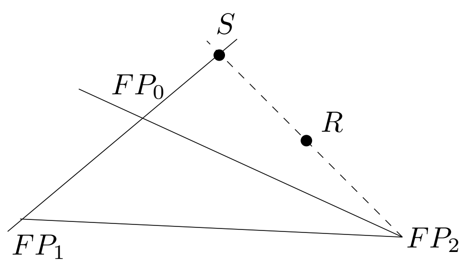


Sigui $Q \in L_2$. Podem afirmar que $F(Q)$ pertany al pla generat per $F(P_0)$, $F(P_1)$, $F(P_2)$?

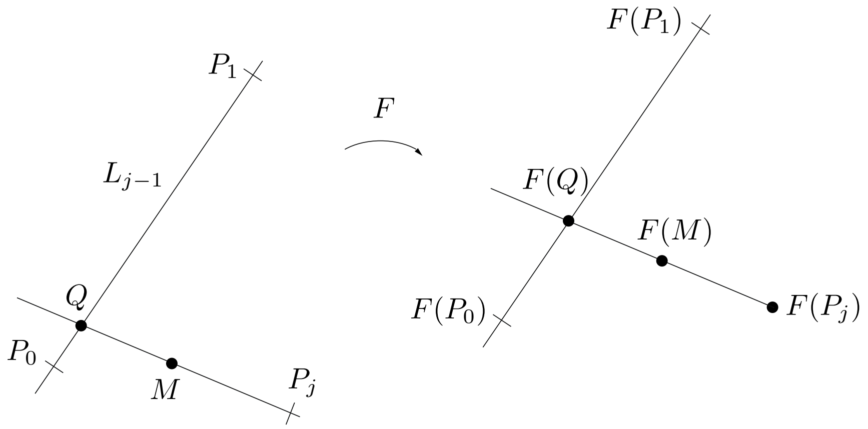
Considero $M = P_2Q \cdot P_0P_1$. Llavors $F(M)$ pertany a la recta $F(P_0)$, $F(P_1)$. Per tant la recta P_2Q passa per F a la recta $F(P_2), FM$ i per tant està inclosa a $v(FP_0, FP_1, FP_2) = L'_2$ és a dir $F(Q) \in L'_2$.

Així $F(L_2) \subset L'_2$.

Recíprocament, si tenim $R \in v(F(P_0), F(P_1), F(P_2)) = L'_2$, hem de veure que hi ha un element del pla P_0, P_1, P_2 que hi va a parar (únic per ser F bijectiva). És la mateixa construcció. Sigui $S = F(P_0)F(P_1) \cdot RF(P_2)$. Hi ha un punt sobre la recta P_0P_1 que va a S. Diguem-ne Q. La recta QP_2 va bijectivament sobre la recta $S, F(P_2)$, i per tant un dels seus punts va a R. Així $F(L_2) = L'_2$.



Podem generalitzar ara l'argument a un j arbitrari per recurrència.



Prenem M a $L_j = v(L_{j-1}, P_j)$. La recta MP_j talla L_{j-1} en un punt Q, ja que $\dim L_j = \dim L_{j-1} + 1$ i recta i hiperplà sempre es tallen. Per tant $F(M)$, $F(P_j)$ i $F(Q)$ estan alineats i en particular $F(M) \in v(F(P_j), F(Q)) \subset L'_j$ ja que estem suposant per recurrència que $F(L_{j-1}) = L'_{j-1}$. Així $F(L_j) \subset L'_j$.

El mateix argument demostra que la inclusió contrària és també certa. En efecte, si $R \in L'_j$, llavors la recta $RF(P_j)$ talla L'_{j-1} en Q', que podem escriure com $Q' = F(Q)$ ja que estem suposant $F(L_{j-1}) = L'_{j-1}$. Però la recta QP_j va, per F, a $Q'F(P_j)$, i per tant algun element va a R. ∎

La hipòtesi, en el teorema fonamental de la geometria afí (teorema 11.2.2, pàgina 214), que k no sigui $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, s'utilitza per demostrar que si l'aplicació porta rectes a rectes llavors ja porta rectes paral·leles a rectes paral·leles. Però en el nostre cas, aquest fet es compleix per procedir l'aplicació entre els espais afins $F : P(E)\backslash H \longrightarrow P(E)\backslash H'$ d'una colineació entre els espais projectius $F : P(E) \longrightarrow P(E)$ que porta l'infinit H del primer espai afí a l'infinit H' del segon (i, per tant, respecta el paral·lelisme). De manera que hem pogut aplicar el teorema fonamental de la geometria afí tot i no haver posat cap hipòtesi sobre el cos en el teorema fonamental de la geometria projectiva. El fet diferencial és que les rectes afins sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tenen dos punts i les projectives tres.

Recordem, per altra banda, que $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ i els $\mathbb{Z}_p$ no tenen automorfismes, i per tant tota col·lineació entre espais projectius sobre aquests cossos és directament projectivitat. Vegeu l'exercici 4.6.15.

Hem aprofitat el teorema fonamental de la geometria afí perquè és un resultat que habitualment l'estudiant coneix, però podríem demostrar directament el teorema fonamental de la geometria projectiva i derivar-ne el teorema fonamental de la geometria afí.

4.4 Principi de dualitat

Sigui E un k-espai vectorial. A tot subespai vectorial H de dimensió r de E li correspon un subsespai vectorial H' de E^*, de dimensió $\dim E - r$, anomenat *incident* de H, i definit per

$$H' = \{\omega \in E^*;\, \omega(v) = 0 \quad \forall\, v \in H\}.$$

Si $e_0, \ldots, e_{r-1}$ és base de H, llavors la podem ampliar a una base $e_0, \ldots, e_{r-1}$ $e_r, \ldots, e_n$ de E, i dualitzant obtenim $H' = \langle e'_r, \ldots, e'_n \rangle$, on e'_i està definit per $e'_i(e_j) = \delta_{ij}$.

En efecte, que aquests elements són de H' és obvi, i si un element $\omega \in H'$, tenim $\omega = \sum \lambda^i e'_i$ però $\omega(e_j) = 0$, $\forall\, j = 0, \dots, r-1$ ja que $e_j \in H$. Com que $\omega(e_j) = \left(\sum \lambda^i e'_i\right)(e_j) = \lambda^j$, tenim $\omega = \sum_{i=r}^{n} \lambda^i e'_i$, com volíem.

Recordem que E^{**} és isomorf a E interpretant cada vector $v \in E$ com l'aplicació $v : E^* \longrightarrow k$ donada per $v(\omega) = \omega(v)$.

Així si $H = \langle \omega \rangle$, subespai vectorial de dimensió 1 de E^* generat per ω, llavors H' és un subespai vectorial de E de dimensió $\dim E - 1$.

Fixem-nos que en aquest cas $H' = \{v \in E;\ \omega(v) = 0\} = \ker \omega$. Això permet definir una aplicació entre $P(E^*)$ i el conjunt $\mathcal{H}$ d'hiperplans de $P(E)$ per

$$\begin{array}{rrcl} \phi : & P(E^*) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & p(\omega) & \longmapsto & p(\ker \omega) \end{array}$$

que està ben definida, ja que si $p(\omega) = p(\omega')$, llavors $\omega' = \lambda\omega$ i per tant $\ker \omega = \ker \omega'$.

A més és injectiva. En efecte, suposem $p(\ker \omega) = p(\ker \omega')$, que vol dir $\ker \omega = \ker \omega'$, i descomponem $E = \ker \omega \oplus \langle z \rangle$, $z \notin \ker \omega$, fixat. Llavors $\forall\, v \in E$, $v = a + \lambda z$ amb $a \in \ker \omega = \ker \omega'$ i $\omega(v) = \lambda\omega(z)$ i $\omega'(v) = \lambda\omega'(z)$, de manera que

$$\omega'(v) = \omega(v) \cdot \frac{\omega'(z)}{\omega(z)},$$

és a dir $\omega' = \lambda\omega$ i $p(\omega) = p(\omega')$.

També és exhaustiva. En efecte, donat un hiperplà H podem prendre una base d'aquest hiperplà $e_0, \dots, e_{n-1}$ i ampliar-la a una base $e_0, \dots, e_{n-1}, e_n$ de E. Sigui $e'_0, \dots, e'_n$ la base dual. Llavors l'hiperplà és $\ker e'_n$, és a dir $\phi(p(e'_n)) = H$.

També es pot veure l'exhaustivitat així:

Donat l'hiperplà $H : a_0 x^0 + \cdots + a_n x^n = 0$ respecte a una base $e_0, \dots, e_n$, prenem $\omega = \sum a_i e'_i$ ($e'_0, \dots, e'_n$ base dual). Llavors

$$\begin{aligned} \ker \omega &= \left\{ v = \sum x^i e_i;\ \left(\sum a_i e'_i\right)\left(\sum x^j e_j\right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x^1, \dots, x^n);\ \sum a_i x^i = 0 \right\} = H. \end{aligned}$$

Així doncs, ϕ en coordenades és l'aplicació que al punt $[a_0, \dots, a_n]$ li fa correspondre l'hiperplà $a_0 x^0 + \cdots + a_n x^n = 0$. Pensarem doncs a partir d'ara que els punts de $P(E^*)$ són hiperplans de $P(E)$. Per això les varietats lineals projectives de $P(E^*)$ es diuen *sistemes d'hiperplans*.

Teorema 4.4.1 *Sigui S' una varietat lineal projectiva de $P(E^*)$. Existeix S varietat lineal projectiva de $P(E)$ tal que els punts de S' són els hiperplans que contenen S. Es compleix que* $\dim S = \dim P(E) - \dim S' - 1$.

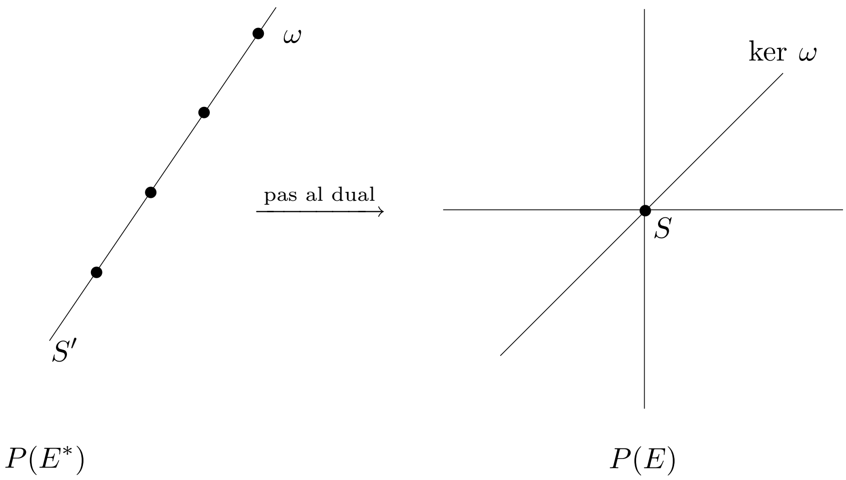
Demostració. Sigui $S' = p(\tilde{T})$ on $\tilde{T}$ és un subespai vectorial de E^*. Sigui $T = \tilde{T}'$, és a dir l'incident de $\tilde{T}$. Definim $S = p(T)$. És una varietat lineal projectiva de $P(E)$ de dimensió $\dim S = \dim T - 1 = \dim E - \dim \tilde{T} - 1 = \dim P(E) - \dim S' - 1$. A més

$$\begin{aligned} T \subset \ker \omega &\iff \omega(v) = 0 \quad \forall\, v \in T = \tilde{T}' \\ &\iff \omega \in (\tilde{T}')' \iff \omega \in \tilde{T}, \end{aligned}$$

és a dir que els punts $p(\omega) \in S'$ corresponen a través de la bijecció ϕ a hiperplans $p(\ker \omega)$ que contenen S. ∎

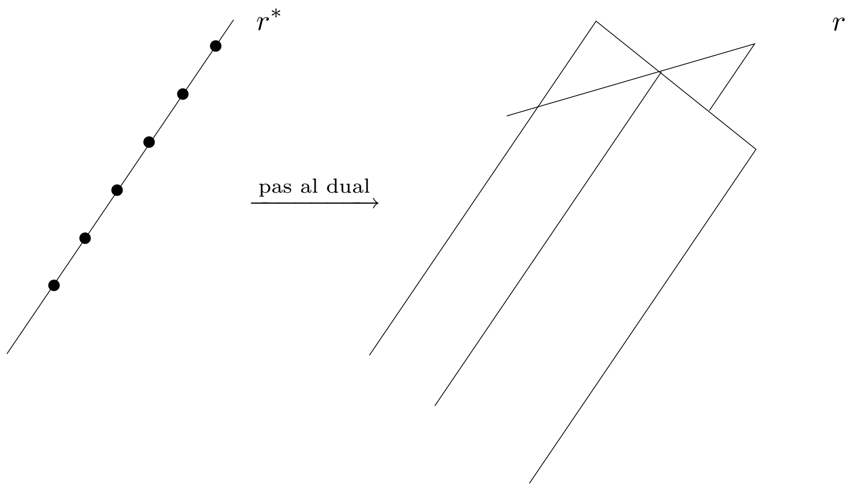
Exemple 4.4.2 *Estudieu el cas* $\dim P(E) = 2$, *i* $\dim S' = 1$.

Llavors $\dim S = 0$. Això vol dir que donada una recta r de $P(E^*)$ existeix un punt S de $P(E)$ tal que els punts de r són el feix de rectes de $P(E)$ que passen pel punt S.



Exemple 4.4.3 *Estudieu el cas* $\dim P(E) = 3$, *i* $\dim S' = 1$.

Llavors $\dim S = 1$. Això vol dir que donada una recta r^* de $P(E^*)$ existeix una recta r de $P(E)$ tal que els punts de r^* són el feix de plans determinat per r.



Exercici 4.4.4 *Demostreu que si una recta d'un pla projectiu té n punts, el pla té $n^2 - n + 1$ punts.*

Solució. En efecte, situem-nos a $P(E^*)$ i considerem una recta amb n punts. Correspon a n rectes que passen per un punt a $P(E)$.

Però com que $E \cong E^*$, si una recta de $P(E^*)$ té n punts, llavors les rectes de $P(E)$ tenen també n punts.

Així tenim un punt pel qual passen n rectes amb n punts cadascuna d'elles ($n-1$ diferents del punt d'intersecció); per tant $\#P(E) = (n-1)n + 1 = n^2 - n + 1$. ∎

Teorema 4.4.5 (Principi de dualitat) *Si un teorema que fa referència a subvarietats lineals projectives d'un espai projectiu $P(E)$ de dimensió n, $L_1, \ldots, L_r$, de dimensions $d_1, \ldots, d_r$, i a relacions d'inclusió entre elles, és cert, llavors també és cert el teorema que s'obté canviant aquestes subvarietats per subvarietats de dimensions respectives $n-1-d_r$ i les relacions d'inclusió per les relacions d'estar contingut.*

Demostració. El dual del teorema donat, que s'obté canviant cada subvarietat L_i per la subvarietat incident L_i', és cert a $P(E^*)$, que és isomorf a $P(E)$. Observem que $L_i \subset L_j$ si i només si $L_j' \subset L_i'$. ∎

Per exemple, la frase: *Donats dos punts A i B del pla projectiu, existeix una única recta c tal que $A \subset c$ i $B \subset c$*, es dualitza posant la frase: *Donades dues rectes a i b del pla projectiu, existeix un únic punt C tal que $C \subset a$ i $C \subset b$*, ja que en aquest cas $n = 2$, $d_1 = d_2 = 0$, i per tant $d_1' = d_2' = 2 - 1 - 0 = 1$, és a dir, els objectes de dimensió zero donen lloc a objectes de dimensió u en el dual. Hem de canviar punts per rectes i $\subset$ per $\supset$.

Anàlogament, la frase: *La figura formada per tres punts no alineats i les tres rectes que determinen* es dualitza a la frase:*La figura formada per tres rectes no concurrents i els tres punts que determinen.* Més explícitament, *la figura formada pels punts no alineats A, B, C i les rectes a, b, c amb $a \supset B, C$; $b \supset C, A$; $b \supset A, B$*, es dualitza a *la figura formada per les rectes a, b, c no concurrents i els punts A, B, C amb $A \subset b, c$; $B \subset c, a$; $B \subset a, b$*, de manera que la figura inicial i a seva dual són iguals. Es diu que el triangle és una figura autodual.

Observem també que l'expressió $A \subset b, c$ vol dir que el punt A és igual a la intersecció de les rectes b, c, és a dir, $A = b \cap c$. Això motiva denominar la recta a determinada pels punts B, C ($a \supset B, C$) per $a = B \cup C$, de manera que a la pràctica, per dualitzar els teoremes sobre el pla projectiu tan sols hem d'escriure amb aquest conveni i canviar punts per rectes, rectes per punts, unions per interseccions i interseccions per unions.

4.5 Dualitat i projectivitats

Sigui E un espai vectorial i $P(E)$ el seu projectivitzat. Recordem que tenim una bijecció Φ entre $\mathcal{H} = \{\text{hiperplans projectius de } P(E)\}$ i $P(E^*)$, el projectivitzat de l'espai dual E^*, donada per

$$\begin{array}{rcl} P(E^*) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{H} \\ {[\omega]} & \longrightarrow & p(\ker \omega). \end{array}$$

Si $\tilde{f} : P(E) \longrightarrow P(E)$ és una projectivitat definida per l'aplicació lineal bijectiva $f : E \longrightarrow E$ llavors $\tilde{f}$ indueix una aplicació $\tilde{f}_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, ja que si $H \subset P(E)$ és un hiperplà, aleshores $\tilde{f}_{\mathcal{H}}(H) = \tilde{f}(H)$ és també un hiperplà de $P(E)$. Tenim el diagrama següent

$$\begin{tikzcd} E^* \arrow[r, "(f^*)^{-1}"] \arrow[d, "p"'] & E^* \arrow[d, "p"] \\ P(E^*) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"'] & P(E^*) \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathcal{H} \arrow[r, "\tilde{f}_{\mathcal{H}}"] & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

Demostrem que l'aplicació induïda entre els $P(E^*)$ és una projectivitat amb aplicació lineal associada $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$, on $f^* : E^* \longrightarrow E^*$ és l'aplicació dual de f que està donada per $f^*\omega = \omega \circ f$ per $\omega \in E^*$.

En efecte, sigui $H = p(\ker \omega) \in \mathcal{H}$, $\omega \in E^*$, $\tilde{f}(H) = p(f(\ker \omega))$. Hem de veure que $f(\ker \omega) = \ker (f^{-1})^*\omega$. Posant $g = f^{-1}$ això es tradueix en $g^{-1}(\ker \omega) = \ker g^*\omega$. Però

$$\begin{aligned} \ker g^*\omega &= \ker(\omega \circ g) = \\ &= \{v \in E \mid \omega(g(v)) = 0\} = \\ &= \{v \in E \mid g(v) \in \ker \omega\} = \\ &= g^{-1}(\ker \omega). \end{aligned}$$

Tenim així una manera senzilla de calcular hiperplans (rectes, si som en el pla) invariants. En efecte,

$$\begin{aligned} &A = p(v) \in P(E) \text{ és un punt fix de } \tilde{f} \iff v \text{ és un vector propi de } f. \\ &H = p(\ker \omega) \subset P(E) \text{ és un hiperplà invariant de } \tilde{f} \iff \\ &\quad \iff H \in \mathcal{H} \text{ és un punt fix de } \tilde{f}_{\mathcal{H}} \iff \omega \text{ és un vector propi de } (f^*)^{-1} \\ &\quad \iff \omega \text{ és un vector propi de } f^*. \end{aligned}$$

Ara bé, és ben sabut que si M és la matriu de f en una base $e_0, \dots, e_n$ aleshores la matriu de f^* en la base dual $e_0^*, \dots, e_n^*$ és la seva transposta, M^t.

Per tant, així com per trobar els punts fixos de $\tilde{f}$ hem de trobar els vectors propis de M, *per trobar els hiperplans invariants per $\tilde{f}$ hem de calcular els vectors propis de M^t.*

Finalment fem la observació següent (escric en el pla per simplificar la notació). Si tenim dos punts fixos diferents $p_i = p(v_i)$, $i = 1, 2$ amb el mateix valor propi associat als vectors v_i, aleshores $\langle v_1, v_2 \rangle \subset E$ és un subespai de vectors propis i per tant $p(\langle v_1, v_2 \rangle) \subset P(E)$ és una recta de punts fixos.

De la mateixa manera si $r_i = p(\ker \omega_i)$, $i = 1, 2$ són dues rectes invariants diferents de manera que el valor propi associat de f^* és el mateix, aleshores $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \subset E^*$ és un subespai de formes pròpies i per tant, per a tot $\omega \in \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ tenim una recta invariant $p(\ker \omega)$ que passa pel punt $P = p(\ker \omega_1 \cap \ker \omega_2)$, i recíprocament, tota recta r que passi per P és de la forma $r = p(\ker \omega)$ amb $\omega \in \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$, i per tant és invariant. Així, el feix de rectes per P està constituït per rectes invariants.

4.6 Exercicis

4.6.1 Doneu un exemple d'una aplicació bijectiva entre espais afins que porti rectes a rectes i no sigui semiafinitat.

4.6.2 Siguin ABC un triangle, E un punt de AB, F un punt de AC. La recta paral·lela a BF que passa per E talla AC en G; la recta paral·lela a CE que passa per F talla AB en H. Proveu que GH és paral·lela a BC.

4.6.3

a) Traceu, utilitzant únicament un regle, la recta que uneix un punt d'un full de paper amb el punt d'intersecció de dues rectes del full que es tallen fora d'aquest.

b) Donades dues rectes paral·leles i un punt fora d'aquestes, traceu, usant només un regle, la recta que passa per aquest punt i és paral·lela a les rectes donades.

4.6.4

a) Les rectes p, p' (que es tallen en el punt A) i les rectes q, q' (que es tallen en el punt B) formen un quadrilàter. Una recta a que passa per A talla q i q' en Q i Q' respectivament, una recta b que passa per B talla p i p' en P i P' respectivament. Trobeu el lloc geomètric dels punts $PQ \cap P'Q'$.

b) Els costats d'un triangle variable passen per tres punts fixos que estan col·locats sobre una mateixa recta. Dos dels vèrtexs estan col·locats sobre dues rectes fixes. Demostreu que el lloc geomètric determinat pel tercer vèrtex és una recta concurrent amb les anteriors.

4.6.5 Una recta d talla els costats AB, BC, CA d'un triangle ABC en A', B', C' respectivament. Sigui $L = AB' \cap BC', M = BC' \cap CA'$ i $N = CA' \cap AB'$.

Demostreu que les rectes AM, BN, i CL són concurrents.

4.6.6 Demostreu que si X i Y són punts sobre les rectes PR i QS del quadrilàter $PQRS$ respectivament, llavors $T = QX \cdot PY$, $U = SX \cdot RY$, i $B = PS \cdot QR$ estan alineats.

4.6.7 Enuncieu els duals dels teoremes de Desargues i de Pappus.

4.6.8 Donada una recta r i dos punts A, B fora d'aquella, trobeu la intersecció de r amb la recta A, B sense dibuixar en cap moment la recta A, B. Enuncieu i resoleu el problema dual.

4.6.9 Demostreu el següent cas especial del teorema de Pappus: si A, B, C són punts diferents sobre una recta r i A', B', C' són punts diferents sobre una altra recta s, i si les rectes AA', BB', CC' són concurrents, llavors els punts $P = BC' \cdot B'C, Q = AC' \cdot A'C, R = AB' \cdot A'B$ estan sobre una recta concurrent amb r i s.

4.6.10 Sigui $F : P(E) \longrightarrow P(E)$ una aplicació bijectiva d'un espai projectiu $P(E)$. Suposem que F porta punts alineats a punts alineats. Demostreu que llavors F porta cada recta bijectivament sobre una altra recta. (En principi, F podria ser bijectiva sobre $P(E)$ però no bijectiva en restringir-la a una recta). Una tal F es diu colineació. Les inverses de les colineacions són colineacions.

Indicació: Demostreu que les colineacions apliquen bijectivament varietats lineals de codimensió 1 en varietats lineals de codimensió 1. Procediu llavors a demostrar, per recurrència sobre la codimensió, que les colineacions apliquen bijectivament varietats lineals de codimensió r en varietats lineals de codimensió r per a $r = 1, \dots, n-1$.

4.6.11 Donats punts diferents $A, B, C, D; A', B', C'$ sobre una recta r construïu la imatge de D per la projectivitat que porta A, B, C respectivament a A', B', C'. Enunciеu i demostreu el dual.

4.6.12 Classifiqueu les projectivitats del pla projectiu real donades per les matrius següents, segons els seus punts fixos i rectes invariants (useu la forma de Jordan d'una matriu).

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.6.13 Demostreu que tota projectivitat d'un pla projectiu (real o complex) té com a mínim un punt fix i una recta invariant.

4.6.14 Demostreu que si tres triangles són homòlegs dos a dos respecte a un mateix centre, els tres eixos d'homologia són concurrents. Enuncieu i demostreu el resultat dual.

4.6.15 Demostreu que els cossos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}_p$ no tenen automorfismes.

5. Raó doble

Aquest capítol està essencialment dedicat a propietats de la recta projectiva. Introduïm el concepte de raó doble de quatre punts i veiem que és invariant per projectivitats. Ja hem comentat a la introducció que la raó simple no era invariant per perspectives, però en canvi el quocient de dues raons simples, la raó doble, sí que ho era. Donarem la definició clàssica i la reinterpretarem en termes purament projectius, perquè es vegi que es pot definir sense emprar la distància.

La dualitat ens permetrà parlar de raó doble de quatre rectes concurrents, i veurem que coincideix amb la raó doble dels quatre punts que determina sobre aquelles qualsevol recta que les talli.

Veurem que estudiar perspectivitats o projectivitats entre rectes és el mateix, ja que tota projectivitat és composició de com a molt tres perspectivitats.

Estudiarem finalment en detall les projectivitats de la recta projectiva tot classificant-les segons els seus punts fixos.

5.1 Definicions

Recordem breument el concepte de raó simple en espais afins . Siguin A, B, C tres punts alineats d'un espai afí. Com que els vectors $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ són proporcionals, existeix un únic element λ del cos k tal que

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{BC}.$$

D'aquest λ se'n diu raó simple de ABC, i es denota per (A, B, C).

És un concepte afí en el sentit que és invariant per afinitats. En efecte, si f és una afinitat amb aplicació lineal associada $\tilde{f}$, tenim

$$\tilde{f}(\overrightarrow{AC}) = \lambda \tilde{f}(\overrightarrow{BC}) \text{ i per tant } \overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda \cdot \overrightarrow{f(B)f(C)},$$

és a dir

$$(A, B, C) = (f(A), f(B), f(C)).$$

Suposem que el nostre espai afí és de la forma $P(E) \backslash H$ amb $E = V \oplus \langle z_0 \rangle$, $H = p(V)$.

Llavors $A = p(a) = p(a_0 + z_0)$ on $a_0 + z_0$ és l'únic múltiple de $a \in E$ amb coeficient 1 a z_0.

Anàlogament

$$B = p(b) = p(b_0 + z_0), \quad b \in E$$
$$C = p(c) = p(c_0 + z_0), \quad c \in E.$$

L'expressió $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{BC}$ es converteix ara en

$$c_0 - a_0 = \lambda(c_0 - b_0) = (A, B, C)(c_0 - b_0),$$

que té sentit, ja que estan alineats.

Observi's que l'ordre és molt important, ja que utilitzant $c_0 - b_0 = c_0 - a_0 + a_0 - b_0$ obtenim fàcilment

$$c_0 - a_0 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}(b_0 - a_0),$$

És a dir

$$(A, B, C) = \lambda \Leftrightarrow (C, B, A) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Prenem ara A, B, C com a referència projectiva sobre la recta que determinen. És a dir, elegim representants de A i B tals que la seva suma sigui un representant de C. Prenem concretament

$$\begin{aligned} a &= \alpha(a_0 + z) \\ b &= \beta(b_0 + z) \end{aligned}$$

tals que $a + b = c$.

És a dir

$$\begin{cases} \alpha a_0 + \beta b_0 = c_0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

Substituint el valor $\alpha = 1 - \beta$ a la primera equació obtenim $\beta(b_0 - a_0) = c_0 - a_0$; per tant $\beta = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$ i $\alpha = \frac{1}{1-\lambda}$. En particular $(A, B, C) = \lambda = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Sigui ara Q el punt d'intersecció de la recta AB amb l'hiperplà de l'∞ $H = p(V)$.

Per ser a la recta AB, $Q = p(\delta a + b)$ i per ser a l'∞, el vector $\delta a + b \in V$, és a dir, la seva component en z_0 és zero, i tenim

$$\delta\alpha + \beta = 0,$$

d'on

$$\delta = -\frac{\beta}{\alpha} = \lambda.$$

Resumint, doncs, podem donar la següent definició de raó simple.

Definició (raó simple) 5.1.1 *Donats tres punts alineats A, B, C de $P(E)$, fixem determinacions a, b, c de A, B, C respectivament tals que $a + b = c$. El punt Q on la recta AB talla l'∞ té un únic representant de la forma $\lambda a + b$. Llavors la raó simple de A, B, C és $(A, B, C) = \lambda$.*

Es pot prendre com a definició de raó simple per mètodes projectius, però observi's que no és un concepte projectiu ja que depèn de la recta de l'∞.

Notem finalment que la construcció anterior no depèn del representant c de C elegit, ja que si en lloc de prendre c prenem εc, llavors en resoldre el sistema obtenim $\alpha = \frac{\varepsilon}{1-\lambda}$ i $\beta = \frac{\lambda\varepsilon}{\lambda - 1}$, de manera que novament $(A, B, C) = -\beta/\alpha$.

Recordem a continuació que en geometria afí es defineix la raó doble de quatre punts alineats A, B, C, D com

$$(A,B,C,D) = \frac{(A,B,C)}{(A,B,D)}.$$

Si pensem que aquest espai afí és de la forma $P(E)\backslash H$ amb $E = V \oplus \langle z_0 \rangle$ i $H = p(V)$, és a dir que és l'espai projectiu menys l'hiperplà de l'infinit, podem calcular aquestes raons simples en el projectiu pel mètode anterior.

Prenem determinacions de A, B i C de manera que $A = p(a)$, $B = p(b)$, $C = p(c)$ i $a + b = c$.

Si Q és el punt on la recta determinada per aquests punts talla l'infinit, tenim $Q = p(\lambda a + b)$ i $(A,B,C) = \lambda$. Com que D està alineat amb A i B, tenim $D = p(\mu a + b)$, de manera que μa i b són determinacions de A i B respectivament tals que $\mu a + b$ representa D. Com que $Q = p\left(\frac{\lambda}{\mu}\mu a + b\right)$, $(A,B,D) = \frac{\lambda}{\mu}$. Així $(A,B,C,D) = \frac{\lambda}{\lambda\mu^{-1}} = \mu$.

Però μ no depèn de l'hiperplà de l'infinit, de manera que tenim la definició següent.

Definició (raó doble) 5.1.2 *Donats quatre punts alineats A, B, C, D elegim determinacions a, b, c de A, B i C respectivament de manera que $a+b=c$. Llavors existeix un únic $\mu \in k$ tal que $D = p(\mu a + b)$. Direm que μ és la raó doble d'aquests quatre punts i escriurem $(A,B,C,D) = \mu$.*

En particular tenim una definició alternativa de raó simple:

Proposició 5.1.3 *Siguin A, B, C tres punts alineats de $P(E)\backslash H$ i sigui Q la intersecció d'aquesta recta amb l'hiperplà de l'infinit H. Llavors $(A,B,C) = (A,B,C,Q)$.*

Demostració. Si posem $D = Q$ a la definició anterior, obtenim la definició de raó simple 5.1.1. ∎

Proposició 5.1.4 *Siguin A, B, C tres punts alineats de $P(E)\backslash H$ i sigui Q la intersecció d'aquesta recta amb l'hiperplà de l'infinit H. Llavors B és el punt mitjà del segment AC si i només si $(A,C,B,Q) = -1$.*

Demostració. Tan sols observar que $(A,C,B) = -1$ vol dir que, llevat d'orientació, els segments AB i BC són iguals. Observi's que hem escrit (A,C,B) i no (A,B,C). ∎

Proposició 5.1.5 *La raó doble és un concepte projectiu.*

Demostració. Hem de veure que la raó doble és invariant per projectivitats.

Si A, B, C, D són quatre punts alineats i prenem determinacions a, b i c de A, B, C respectivament tals que $a + b = c$, tenim $D = p(\mu a + b)$ i $(A,B,C,D) = \mu$.

Sigui $\tilde{f} : P(E) \longrightarrow P(E)$ una projectivitat, i sigui $f : E \longrightarrow E$ una aplicació lineal de la qual prové.

Llavors $f(a) + f(b) = f(c)$ i $f(\mu a + b) = \mu f(a) + f(b)$ i com que $\tilde{f}(A) = \tilde{f}p(a) = p(f(a))$, $\tilde{f}(B) = p(f(b))$, $\tilde{f}(C) = p(f(c))$ i $\tilde{f}(D) = p(f(\mu a + b))$ resulta que $f(a)$, $f(b)$ i $f(c)$ són determinacions de $\tilde{f}(A)$, $\tilde{f}(B)$, $\tilde{f}(C)$ respectivament amb $f(a)+f(b)=f(c)$ i $\tilde{f}(D)=p(\mu f(a)+f(b))$, és a dir $(\tilde{f}(A),\tilde{f}(B),\tilde{f}(C),\tilde{f}(D))=\mu$. ∎

El mateix càlcul demostra que si $\tilde{f}$ fos una semiprojectivitat, llavors $(\tilde{f}(A),\tilde{f}(B),\tilde{f}(C),\tilde{f}(D))=\sigma(A,B,C,D)$, on σ és l'automorfisme de k associat a $\tilde{f}$.

Proposició 5.1.6 *Una aplicació bijectiva entre espais projectius de dimensió ≥ 2 i que porti rectes a rectes, és una projectivitat si i només si conserva la raó doble.*

Demostració. Com que (A,B,C,D) és qualsevol element del cos, σ és la identitat. ∎

Proposició 5.1.7 *Donats A, B, C, D i A', B', C', D' punts de $P(E)$, amb $\dim P(E)=1$, existeix una projectivitat que porta una quaterna sobre l'altra si i només si $(A,B,C,D)=(A',B',C',D')$. Suposem les dues quaternes formades per punts diferents.*

Demostració.

Sigui $\tilde{f}$ la projectivitat que porta A, B, C a A', B', C' respectivament, que existeix i és única pel teorema 2.5.3. Llavors $(A,B,C,D)=(A',B',C',f(D))=(A',B',C',D)$, és a dir $D'=f(D)$. ∎

Proposició 5.1.8 *Una aplicació de $P(E)$ a $P(E)$, amb $\dim P(E)=1$, és una projectivitat si i només si conserva la raó doble.*

Demostració. Siguin $A, B, C \in P(E)$ i posem $A'=f(A)$, $B'=f(B)$, $C'=f(C)$, on f és l'aplicació que conserva la raó doble.

Sigui g una projectivitat tal que $g(A')=A$, $g(B')=B$, $g(C')=C$, que existeix pel teorema 2.5.3.

Llavors $g\circ f$ és una aplicació bijectiva, que conserva la raó doble i que té tres punts fixos. Per tant $g\circ f=\mathrm{id}$, ja que $(A,B,C,D)=(A,B,C,g\circ f(D))$, $\forall\, D\in P(E)$, i així $f=g^{-1}$ i en particular és projectivitat. ∎

5.2 Raó doble de quatre rectes

Si $\dim P(E)=2$, l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} P(E^*) & \longrightarrow & \mathcal{H} = \text{hiperplans de } P(E) \\ p(\omega) & \longmapsto & p(\ker\omega) \end{array}$$

ens dóna una bijecció entre punts de $P(E^*)$ i rectes de $P(E)$.

Sigui a, b, c, d rectes concurrents de $P(E)$. Siguin A, B, C, D els punts corresponents en el dual ($A=p(\omega)$ amb $a=p(\ker\omega)$, etc.), que estan alineats.

Definició 5.2.1 *La raó doble (a,b,c,d) de quatre rectes concurrents del pla és la raó doble (A,B,C,D) dels quatre punts que aquestes rectes determinen en el dual.*

Teorema 5.2.2 *Siguin A', B', C', D' els quatre punts que una recta arbitrària determina en tallar respectivament les quatre rectes concurrents a, b, c, d.*

Llavors $(a, b, c, d) = (A', B', C', D')$.

Demostració. Sigui O el punt d'intersecció de les quatre rectes i posem $O = p(e_0)$, $A' = p(e_1)$, $B' = p(e_2)$, $C' = p(e_1 + e_2)$, $D' = p(\lambda e_1 + e_2)$, de manera que $\lambda = (A', B', C', D')$.

D'aquesta manera la recta a és la recta OA' i per tant és la projecció del pla generat per e_0, e_1, que és justament $\ker e'_2$, on e'_0, e'_1, e'_2 és la base dual de e_0, e_1, e_2.

Això vol dir que $A = p(e'_2)$. Anàlogament $B = p(e'_1)$.

La recta c és la generada per e_0 i $e_1 + e_2$, que és justament $\ker(e'_1 - e'_2)$, és a dir $C = p(e'_1 - e'_2)$. Anàlogament $D = p(e'_1 - \lambda e'_2)$.

Així

$$(A, B, C, D) = (p(-e'_2), p(e'_1), p(e'_1 - e'_2), p(-\lambda e'_2 + e'_1)) = \lambda$$

com volíem. ∎

Observem que en particular aquesta raó doble no depèn de la recta escollida per tallar les rectes concurrents.

Definició 5.2.3 *Una perspectivitat entre rectes coplanàries r i r' des d'un punt O del pla és l'aplicació que assigna a cada punt X de r el punt X' de r' definit per $X' = r' \cdot OX$.*

Per tant, l'anterior teorema diu que la raó doble és invariant per perspectivitats.

És interessant recordar que en geometria afí clàssica, el resultat anterior aplicat a rectes afins del pla afí real, s'enuncia i es demostra de la manera següent.

Teorema 5.2.4 *Siguin A, B, C, D els quatre punts que una recta arbitrària determina en tallar respectivament les quatre rectes concurrents a, b, c, d. Llavors*

$$(A, B, C, D) = \pm \frac{\sin ac}{\sin ad} : \frac{\sin bc}{\sin bd},$$

on $\sin ac$ és el sinus de l'angle format per les rectes a, c, i anàlogament per a les altres expressions dels sinus.

Demostració. Si O és el punt on es tallen les rectes, aplicant el teorema del sinus als triangles $\triangle OAC$ i $\triangle OBC$, tenim

$$\frac{AC}{\sin ac} = \frac{OA}{\sin OCB}$$
$$\frac{BC}{\sin bc} = \frac{OB}{\sin OCB},$$

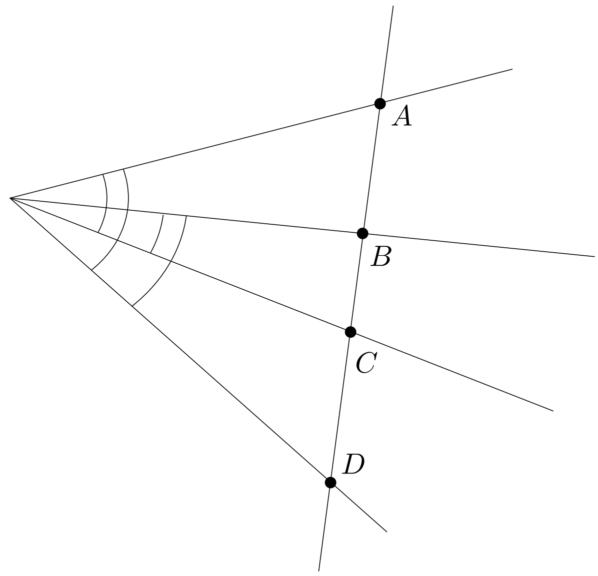
i aplicant-lo als triangles $\triangle OAD$ i $\triangle OBD$ tenim

$$\frac{AD}{\sin ad} = \frac{OA}{\sin ODB}$$
$$\frac{BD}{\sin bd} = \frac{OB}{\sin ODB}.$$

Per tant

$$(A,B,C,D) = \frac{(A,B,C)}{(A,B,D)} = \pm\frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}} = \pm\frac{\sin ac}{\sin ad} : \frac{\sin bc}{\sin bd},$$

com volíem. El signe és negatiu si i només si el parell a, b *separa* el parell c, d. ∎



5.3 Quaterna harmònica. Teorema de Fano

Definició 5.3.1 *Sigui $P(E)$ la recta projectiva. Direm que quatre punts A, B, C, D de $P(E)$ formen quaterna harmònica quan*

$$(A,B,C,D) = -1.$$

Construció del quart harmònic.

Donats A, B, C tres punts alineats d'un espai projectiu $P(E)$, de dimensió estrictament més gran que 1, es tracta de construir un quart punt D alineat amb els anteriors i tal que $(A,B,C,D) = -1$. Per això elegim P no alineat amb A, B, C, i elegim Q un punt arbitrari sobre la recta PB. Siguin $R = PA \cdot CQ$, $S = RB \cdot AQ$. Llavors $D = AB \cdot PS$ és el quart harmònic buscat.

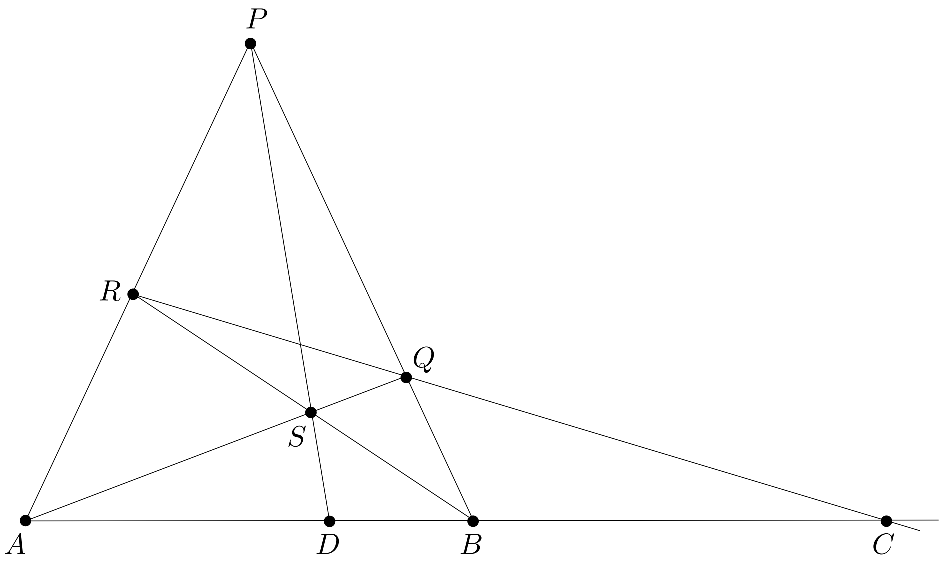
Justificació

La justificació és la següent: Si denotem $H = RQ \cdot PD$, tenim

$$(A,B,C,D) = (P,S,H,D),$$

per ser la raó doble invariant per la perspectivitat des de R. També

$$(P,S,H,D) = (B,A,C,D),$$



per ser la raó doble invariant per la perspectivitat des de Q. Però

$$\rho = (A, B, C, D) = (B, A, C, D) = \frac{1}{\rho};$$

per tant $\rho^2 = 1$. Però sobre qualsevol cos això implica $\rho = \pm 1$.

Si $\rho = 1$ ha de ser $D = C$ i llavors P, S, C estarien alineats, cosa que és certa únicament quan $\operatorname{caract} k = 2$, com es veurà a continuació en el teorema de Fano, G. (1871-1951). Però en aquest cas $\rho = 1 = -1$, com volíem, encara que no parlarem en aquest cas de *quart* harmònic ja que D i C coincideixen.

Si $\operatorname{caract} k \neq 2$ ha de ser $\rho = -1$ i D és el quart harmònic buscat.

De la configuració anterior se'n diu quadrangle complet, ja que està format pel quadrilàter A, B, R, Q i les seves diagonals.

Coincideix amb el dibuix esquemàtic del pla projectiu de set punts explicat a 2.2.7. Allà, però, els punts R, Q, D estaven alineats. Es pot veure que això és equivalent al fet que els tres punts diagonals P, S, C estiguin alineats, d'acord amb el fet de que $\mathbb{Z}_2$ té característica 2. De fet tenim:

Teorema 5.3.2 (teorema de Fano) *Els punts diagonals d'un quadrangle complet estan alineats si i només si* $\operatorname{caract} k = 2$.

Demostració. Considerem el quadrangle complet de la figura determinat pels quatre punts A, B, R, Q i els tres parells de rectes que s'obtenen unint-los de dos en dos. Els punts d'intersecció de cada parell de rectes són els punts diagonals.

En la referència projectiva $A = [0, 0, 1]$, $B = [1, 0, 0]$, $S = [0, 1, 0]$, $P = [1, 1, 1]$, tenim $C = [1, 0, -1]$. Ara és clar que P, S, C estan alineats si i només si $\operatorname{caract} k = 2$. ∎

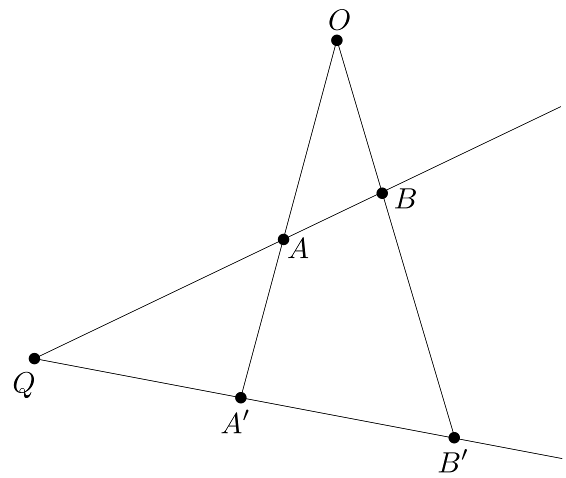
5.4 Teorema de Poncelet

Teorema 5.4.1 (teorema de Poncelet) *Tota projectivitat entre rectes d'un espai projectiu és igual a la composició de, com a molt, tres perspectivitats.*

Demostració. Suposarem primerament que tenim una projectivitat entre dues rectes coplanàries que es tallen en un punt Q.

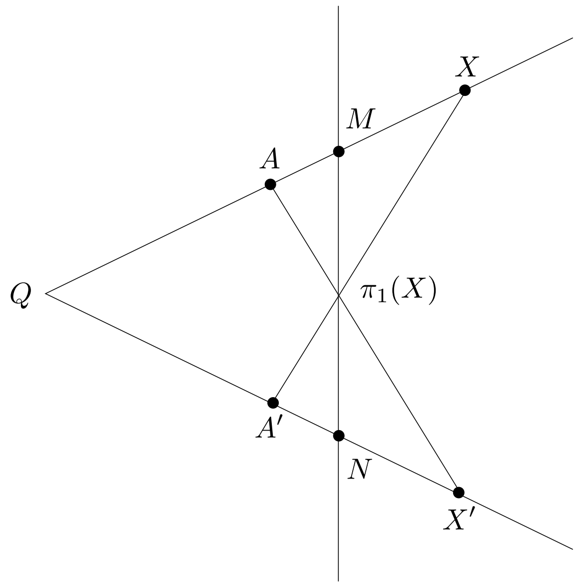
Cas I. Q és fix.

Prenem $A, B \in r$ i les seves imatges $A', B' \in r'$ per la projectivitat. Sigui $O = AA' \cdot BB'$. La projectivitat donada i la perspectivitat de r a r' des de O coincideixen sobre la terna Q, A, B i per tant coincideixen (qualsevol punt X de r ha d'anar a parar tant per l'una com per l'altra aplicació a l'únic punt X' de r' tal que $(Q, A, B, X) = (Q, A', B', X')$).



Cas II. Q no és fix.

Prenem $M = h^{-1}(Q)$, $N = h(Q)$, on $h : r \longrightarrow r'$ és la projectivitat donada. Direm que la recta MN és *l'eix d'homografia.* Prenem $A \in r$, $A \neq Q$, $A \neq M$ i $A' = h(A)$. Sigui $\pi_1 : r \longrightarrow MN$ la perspectivitat des de A' i sigui $\pi_2 : MN \longrightarrow r'$ la perspectivitat des de A.



Llavors $h = \pi_2 \circ \pi_1$, ja que

$$\begin{aligned} \pi_2 \circ \pi_1(Q) = \pi_2(N) = N &= h(Q), \\ \pi_2 \circ \pi_1(A) = A' &= h(A), \\ \pi_2 \circ \pi_1(M) = Q &= h(M), \end{aligned}$$

i dues projectivitats que coincideixen sobre tres punts són iguals.

Per tant, en el primer cas h és una perspectivitat i en el segon cas és composició de dues perspectivitats.

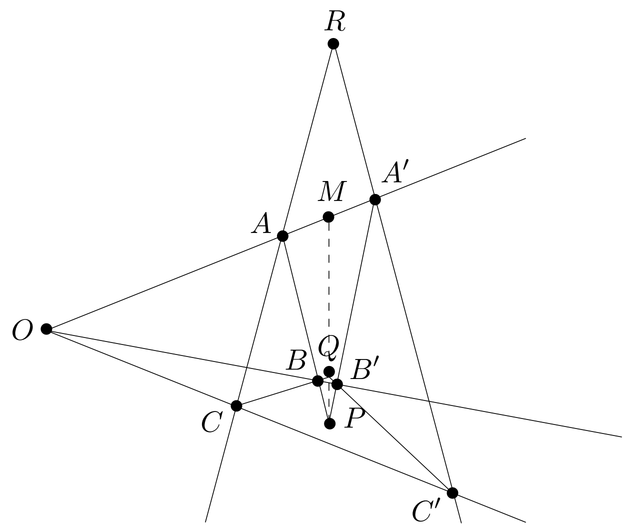
Si les rectes r i r' coincideixen, prenem una recta auxiliar r'' i una perspectivitat auxiliar $f : r'' \longrightarrow r$. Llavors $h \circ f$ és composició de com a molt dues perspectivitats i per tant, component amb h^{-1}, f és composició de, com a molt, tres perspectivitats.

Si r i r' no són coplanàries, projectem una d'elles sobre un pla que contingui l'altra de manera que la projecció no coincideixi amb l'anterior. Aquesta perspectivitat més les dues que com a molt ens calen en el pla considerat dóna el resultat. ∎

Aquest resultat permet donar una nova demostració del teorema de Desargues.

Corol·lari 5.4.2 *Teorema de Desargues.*

Demostració. Siguin A, B, C i A', B', C' dos triangles en perspectiva des de O. Volem veure que els punts $P = AB \cdot A'B'$, $Q = BC \cdot B'C'$, $R = AC \cdot A'C'$ estan alineats. Denotem per a, b, c les rectes OA, OB i OC respectivament.

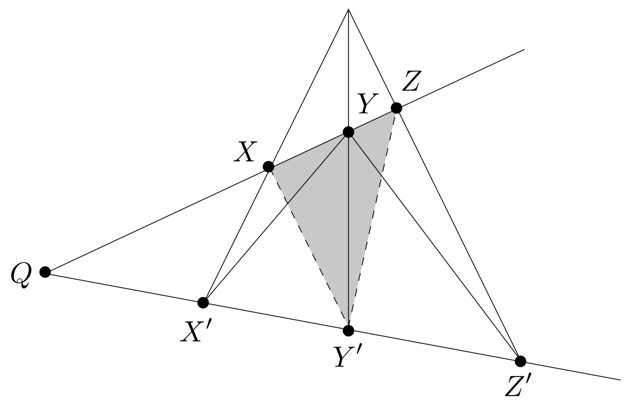


Sigui $\pi_1 : a \longrightarrow b$ la perspectiva des de P i sigui $\pi_2 : b \longrightarrow c$ la perspectiva des de Q.

Llavors $\pi_2 \circ \pi_1 : a \longrightarrow c$ és, tal com hem vist en el *Cas I* de 5.4.1, una perspectivitat des de R, ja que $\pi_2 \circ \pi_1(A) = C$ i $\pi_2 \circ \pi_1(A') = C'$. Si $M = PQ \cdot a$, la recta $\pi_2 \circ \pi_1(M), M$ és la recta PQ i per tant PQ passa per R, com volíem. ∎

Teorema 5.4.3 *Sigui $h : r \longrightarrow r'$ una projectivitat tal que $Q = r \cdot r'$ és fix. Llavors els punts d'intersecció de les rectes XY' i $X'Y$, en variar X, Y en r, estan alineats i aquesta recta passa per Q. ($X' = h(X), Y' = h(Y)$).*

Demostració. Prenem un tercer punt $Z \in r$ i la seva imatge $Z' \in r'$.



Com que estem en el *Cas I* del teorema 5.4.1, podem aplicar Desargues als triangles $\triangle XY'Z$ i $\triangle X'YZ'$ i ja tenim directament $Q, XY' \cdot X'Y, YZ' \cdot Y'Z$ alineats.

Si pensem ara que X, Y estan fixats i fem variar Z, queda clar que el punt $YZ' \cdot Y'Z$ va variant, però sempre sobre la mateixa recta $Q, XY' \cdot X'Y$. ∎

Teorema 5.4.4 *Sigui $h : r \longrightarrow r'$ una projectivitat tal que $Q = r \cdot r'$ no és fix. Llavors els punts d'intersecció de les rectes XY' i $X'Y$, en variar X, Y en r, estan alineats sobre la recta MN amb $M = h^{-1}(Q)$ i $N = h(Q)$ (l'*eix *d'homografia).*

Demostració. Estem en la situació del *Cas II* del teorema 5.4.1. Amb la mateixa notació que allà, tenim $h = \pi_2 \circ \pi_1$ i, per definició, $\pi_1(X) \in MN$ per a tot $X \in r$. Però també $\pi_1(X)$ està alineat amb $A'X$ i amb AX'. Per tant $AX' \cdot A'X \in MN$ per tot $X \in r$. ∎

Aquest resultat permet donar una nova demostració del teorema de Pappus.

Corol·lari 5.4.5 *Teorema de Pappus.*

Demostració. Sabem, pel teorema 2.5.3, que donats $A, B, C \in r$ i $A', B', C' \in r'$ existeix sempre una projectivitat que porta la primera terna sobre la segona. L'eix d'homografia és la recta $AB' \cdot A'B$, $AC' \cdot A'C$, la qual cosa demostra directament el teorema de Pappus. ∎

5.5 Recta projectiva

Sigui $(P_0, P_1; P_2)$ una referència projectiva a la recta projectiva $P(E)$. Recordem que això vol dir que hem fixat una base e_0, e_1 de E tal que $P_0 = p(e_0)$, $P_1 = p(e_1)$, $P_2 = p(e_0+e_1)$. Dir llavors que $X \in P(E)$ té coordenades homogènies $[x, y]$ vol dir que $X = p(xe_0 + ye_1)$.

Si $y \neq 0$ podem escriure

$$X = p\left(\frac{x}{y}e_0 + e_1\right),$$

de manera que la raó doble

$$(P_0, P_1, P_2, X) = \frac{x}{y}.$$

Diem que $\dfrac{x}{y}$ és la coordenada projectiva de X. Concretament

Definició 5.5.1 *Direm que un punt $X \in P(E)$ té coordenada projectiva t respecte a la referència projectiva $(P_0, P_1; P_2)$ si $X = p(te_0 + e_1)$. Direm que $P_0 = p(e_0)$ té coordenada projectiva ∞.*

Per tant la coordenada projectiva d'un punt *és la raó doble del punt respecte a la referència considerada.*

Equació de les projectivitats en coordenades projectives

Sigui $\tilde{f} : P(E) \longrightarrow P(E)$ la projectivitat induïda per l'aplicació lineal $f : E \longrightarrow E$, que té per matriu en l'anterior base e_0, e_1,

$$f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc \neq 0.$$

El punt de coordenades homogènies $[x, y]$ va a parar per $\tilde{f}$ al punt de coordenades homogènies $[x', y']$ amb

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy. \end{aligned}$$

Conseqüentment el punt de coordenada projectiva $t = \dfrac{x}{y}$ va a parar al punt de coordenada projectiva

$$t' = \frac{x'}{y'} = \frac{ax + by}{cx + dy} = \frac{at + b}{ct + d}.$$

Com que

$$\tilde{f}(P_0) = p(f(e_0)) = p(ae_0 + ce_1) = p\left(\frac{a}{c}e_0 + e_1\right),$$

el punt P_0 va a parar al punt de coordenada projectiva $\dfrac{a}{c}$. Això correspon formalment a posar $t = \infty$ a l'expressió de t', d'acord amb el conveni de dir que P_0 té coordenada projectiva ∞.

Observem també que el punt de coordenades homogènies $\left[-\frac{d}{c}, 1\right]$ va a parar al punt $\left[a\left(-\frac{d}{c}\right) + b, 0\right]$, que és justament el punt P_0. Això correspon formalment a posar $t' = \dfrac{\left[a(-\frac{d}{c}) + b\right]}{0} = \infty$, que és la coordenada projectiva de P_0.

Resumint doncs tenim que $\tilde{f}$ en coordenades és

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f} : P(E) & \longrightarrow & P(E) \\ t & \longmapsto & t' = \frac{at+b}{ct+d} \\ \infty & \longmapsto & t' = \frac{a}{c} \\ -\frac{d}{c} & \longmapsto & t' = \infty, \end{array}$$

que, amb els convenis de càlcul amb l'infinit, escriurem tan sols com

$$t' = \frac{at+b}{ct+d}.$$

En particular, l'equació dels punts fixos ($t' = t$) es redueix a l'equació de segon grau

$$ct^2 + (d-a)t - b = 0,$$

que permet classificar les projectivitats en hiperbòliques, parabòliques o el·líptiques segons que aquesta equació tingui dues arrels, una o cap (cosa que dependrà del cos k que estiguem considerant).

Proposició 5.5.2 *Siguin A, B, C, D quatre punts diferents de la recta projectiva $P(E)$, amb coordenades projectives, respecte a una base donada, a, b, c, d respectivament. Llavors*

$$(A,B,C,D) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}.$$

Demostració. Sigui $(P_0, P_1; P_2)$ la referència projectiva considerada. Recordem que les coordenades projectives d'aquests tres punts són respectivament ∞, 0, 1. Sabem que existeix una projectivitat $h : P(E) \longrightarrow P(E)$ tal que

$$h(A) = P_0, \quad h(B) = P_1, \quad h(C) = P_2.$$

Si h en coordenades és

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \tag{5.1}$$

les anteriors igualtats es llegeixen ara com

$$\infty = \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta}, \quad 0 = \frac{\alpha b + \beta}{\gamma b + \delta}, \quad 1 = \frac{\alpha c + \beta}{\gamma c + \delta}.$$

D'aquí deduïm

$$\gamma = -\frac{\delta}{a}, \quad \alpha = -\frac{\beta}{b}, \quad \frac{c-a}{c-b} = \frac{\beta a}{\delta b},$$

que substituint a 5.1 ens dóna

$$t' = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{t-b}{t-a}.$$

Tenim doncs

$$(A,B,C,D) = (h(A), h(B), h(C), h(D)) = (P_0, P_1, P_2, h(D)),$$

però aquesta raó doble és la coordenada projectiva de $h(D)$; per tant

$$(A, B, C, D) = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-b}{d-a} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b},$$

com volíem. ∎

En particular, la condició perquè punts de coordenades projectives a, b, c, d formin quaterna harmònica es tradueix en

$$d = \frac{(a+b)c - 2ab}{2c - (a+b)}.$$

Observem, per altra banda, que si els punts A, B, C, D tenen coordenades homogènies $[x_i, y_i]$, $i = 1, \ldots, 4$ respectivament, llavors

$$a = \frac{x_1}{y_1}, \quad b = \frac{x_2}{y_2}, \quad c = \frac{x_3}{y_3}, \quad d = \frac{x_4}{y_4},$$

i per tant, substituint a l'anterior l'expressió, tenim

$$(A, B, C, D) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ y_2 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix}}.$$

Exercici 5.5.3 *Justifiqueu que quan treballem en coordenades projectives*

$$\frac{\infty}{\infty} = 1.$$

Solució. Suposem que fixada la referència $(P_0, P_1; P_2)$ volem calcular la raó doble (A, B, C, P_0) on A, B, C són punts de coordenades projectives a, b, c respectivament.

Si apliquéssim la fórmula anterior obtindríem

$$(A, B, C, P_0) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{\infty - a}{\infty - b}.$$

Per evitar el problema amb l'∞ calcularem directament aquesta raó doble i obtindrem

$$(A, B, C, P_0) = \frac{c-a}{c-b},$$

que és també el resultat que s'obté posant

$$\frac{\infty - a}{\infty - b} = 1$$

a l'anterior expressió. Això justificarà la norma de càlcul.

Per calcular la raó doble posem

$$A = p(ae_0 + e_1), \quad B = p(be_0 + e_1), \quad C = p(ce_0 + e_1).$$

Busquem α, β tals que

$$\alpha(ae_0 + e_1) + \beta(be_0 + e_1) = ce_0 + e_1.$$

Resolem i trobem

$$\alpha = \frac{b-c}{b-a}, \quad \beta = \frac{c-a}{b-a}.$$

Llavors

$$P_0 = p(e_0) = p(\tau\alpha(ae_0 + e_1) + \beta(be_0 + e_1)),$$

on τ és la raó buscada. Com $\tau\alpha + \beta = 0$ tenim

$$\tau = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{c-a}{c-b}$$

com volíem. ∎

De fet es compleixen les següents regles formals de càlcul

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad b \cdot \infty = \infty, \quad \infty \cdot \infty = \infty,$$

mentre que $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ són expressions que queden indeterminades.

Per acabar explicitarem les $4! = 24$ raons dobles de quatre punts, ja que és útil tenir-les a mà:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\rho & = & (A,B,C,D) & = & (B,A,D,C) & = & (C,D,A,B) & = & (D,C,B,A) \\
\frac{1}{\rho} & = & (A,B,D,C) & = & (B,A,C,D) & = & (D,C,A,B) & = & (C,D,B,A) \\
1-\rho & = & (A,C,B,D) & = & (C,A,D,B) & = & (B,D,A,C) & = & (D,B,C,A) \\
\frac{\rho-1}{\rho} & = & (A,D,B,C) & = & (D,A,C,B) & = & (B,C,A,D) & = & (C,B,D,A) \\
\frac{1}{1-\rho} & = & (A,C,D,B) & = & (C,A,B,D) & = & (D,B,A,C) & = & (B,D,C,A) \\
\frac{\rho}{\rho-1} & = & (A,D,C,B) & = & (D,A,B,C) & = & (C,B,A,D) & = & (B,C,D,A).
\end{array}$$

5.6 Involucions

De manera general, una involució és una aplicació que en aplicar-la dos cops dóna la identitat. A nosaltres només ens interessa ara la recta projectiva, i tenim doncs:

Definició 5.6.1 *Una involució és una projectivitat $f : P(E) \longrightarrow P(E)$ de la recta projectiva, $f \neq \mathrm{Id}$, tal que $f \circ f = \mathrm{Id}$.*

Observem que si en un sistema de coordenades projectives la involució f està donada per

$$t' = \frac{at+b}{ct+d},$$

llavors $a = -d$ ja que $\infty \longmapsto \frac{a}{c}$ i $\frac{a}{c} \longmapsto \infty$; per tant $\frac{a}{c}$ i $-\frac{d}{c}$ van a parar a ∞, i, com que f és bijectiva, $a = -d$.

Si a l'equació

$$t' = \frac{at+b}{ct-a}$$

intercanviem t per t', obtenim

$$t = \frac{at'+b}{ct'-a},$$

que és precisament el valor que s'obté si aïllem t a la primera equació. És a dir, que en les equacions de les involucions podem intercanviar els papers de t i t' sense que l'equació canviï.

Teorema 5.6.2 *Són equivalents*

1. *f és involució.*

2. *f prové d'una aplicació lineal de traça zero.*

3. *Existeix un punt P de la recta projectiva tal que $P \neq f(P)$ i $f^2(P) = P$.*

Demostració.

$1 \Rightarrow 2$. És clar, ja que la traça és $a + d$.

$2 \Rightarrow 1$. Ja que si $a = -d$, l'equació és

$$ctt' + d(t + t') - b = 0$$

i es veu directament que t i t' es poden intercanviar, és a dir $t = f(t')$ i $t' = f(t)$ amb la mateixa f; per tant $t = f^2(t)$ i f és involució.

$1 \Rightarrow 3$. Obvi.

$3 \Rightarrow 1$. Prenem P com a ∞ i $f(P)$ com a 0 i qualsevol altre com a punt unitat. Mirem l'expressió de f en aquesta base.

$$\begin{aligned} f(0) = f^2(P) = P = \infty; &\quad \text{per tant } d = 0; \\ f(\infty) = f(P) = 0; &\quad \text{per tant } a = 0; \end{aligned}$$

i l'equació de f és

$$t' = \frac{b}{ct},$$

és a dir $tt' = \frac{b}{c}$, relació simètrica respecte a t, t' i per tant involució. ∎

Corol·lari 5.6.3 *Tota involució queda determinada pel seu valor sobre dos punts no fixos i no corresponents.*

Demostració. Siguin P, Q punts diferents tals que $P \neq f(P)$, $Q \neq f(Q)$ i $f(P) \neq Q$. Llavors f porta la terna $P, f(P), Q$ sobre $f(P), P, f(Q)$ i per tant queda determinada. ∎

Teorema 5.6.4 *Sigui $\tilde{f}$ una projectivitat de la recta projectiva amb dos punts fixos P, Q. Llavors*

$$(P, Q, X, \tilde{f}(X)) = \frac{\lambda}{\mu}$$

on λ, μ són els valors propis de l'aplicació lineal f que ha induït $\tilde{f}$.

En particular aquesta raó doble és constant (no depèn de X) i aquesta constant és -1 si i només si $\tilde{f}$ és involució.

Demostració. Prenem $P = p(e_0)$, $Q = p(e_1)$, $X = p(e_0 + e_1)$ i calculem $\tilde{f}(X)$.

$$\tilde{f}(X) = \tilde{f}(p(e_0 + e_1)) = p(f(e_0 + e_1)) = p(\lambda e_0 + \mu e_1)$$

ja que dir que P i Q són fixos equival a dir que e_0 i e_1 són vectors propis. Així,

$$\tilde{f}(X) = p\left(\frac{\lambda}{\mu}e_0 + e_1\right) \text{ i } (P, Q, X, \tilde{f}(X)) = \frac{\lambda}{\mu},$$

com volíem.

Finalment, com que la traça de f és $\lambda+\mu$, $\tilde{f}$ és involució si i només si $\lambda = -\mu$. ∎

Observem que una projectivitat amb dos punts fixos P_0, P_1 té equació, en qualsevol referència $P_0, P_1; P_2$,

$$t' = kt$$

ja que P_0 i P_1 tenen coordenades respectives ∞ i 0, que en imposar que són fixos a l'equació general

$$t' = \frac{at + b}{ct + d}$$

ens dóna $c = b = 0$.

Si a més és involució, tenim $t' = -t$.

Si només té un punt fix P_0, en qualsevol referència $P_0, P_1; P_2$, l'equació és $t' = at + b$ ja que ara tan sols podem afirmar que $c = 0$.

Les projectivitats de la recta, i en particular les involucions, es diuen hiperbòliques, parabòliques o el·líptiques segons si tenen dos punts fixos, un o cap.

5.7 Exercicis

5.7.1 Si la raó doble $(A, B, C, D) = k$, calculeu $(B, A, C, D), (A, C, B, D)$.

5.7.2 Teoremes de Menelao i Ceva.

a) *(Teorema de Ceva, G. (1647-1736)).* Sigui $\triangle O_1O_2O_3$ un triangle, A_1 un punt sobre el costat O_2O_3, A_2 un punt sobre el costat O_1O_3 i A_3 un sobre O_1O_2. Considerem un punt I qualsevol que no estigui en cap dels costats i designem per I_1 la intersecció de la recta IO_1 amb el costat O_2O_3; de forma anàloga introduïm I_2, I_3.

Demostreu que les rectes O_iA_i són concurrents si i només si es compleix

$$(O_2, O_3, I_1, A_1)(O_3, O_1, I_2, A_2)(O_1, O_2, I_3, A_3) = 1$$

b) *(Teorema de Menelao (100 d.c.)).* Amb les dades de a) proveu que una condició necessària i suficient perquè els punts A_i estiguin alineats és que:

$$(O_2, O_3, I_1, A_1)(O_3, O_1, I_2, A_2)(O_1, O_2, I_3, A_3) = -1$$

c) Deduïu, d'aquests dos teoremes, els teoremes de Ceva i Menelao afins clàssics. En el primer cas convé pensar I com el baricentre, i en el segon que la recta $A_1A_2A_3$ és la recta de l'infinit.

c) Doneu els enunciats duals de a) i b).

5.7.3 Siguin r i r' dues rectes diferents de $\mathbb{R}P^2$.

a) Demostreu que una projectivitat σ entre r i r' és una perspectivitat si i només si el punt d'intersecció O entre les dues rectes té per imatge ell mateix.

b) Siguin A_1, A_2 i A_3 punts diferents de r, designem per B_1, B_2 i B_3 les seves imatges per una perspectivitat σ. Demostreu que $P = (A_1B_2) \cap (A_2B_1)$, $Q = (A_2B_3) \cap (A_3B_2)$ i O estan alineats. (Desargues).

c) Demostreu que existeix una recta e que passa per O i compleix que, per a cada parell de punts U, V de r tenim $(U\sigma(V)) \cap (V\sigma(U)) \in e$. (Utilitzeu el resultat anterior.)

5.7.4 Considereu una projectivitat f, no perspectivitat, entre dues rectes r i r'. Sigui $O = r \cap r'$ i e la recta $f^{-1}(O)f(O)$.

a) Demostreu que per a tot parell de punts A, B de r tenim, com abans, $(Af(B)) \cap Bf(A) \in e$. (Treballeu amb la raó doble $(O, f^{-1}(O), A, B)$.)

b) A partir de tres punts de r i de les seves imatges en r' construïu l'eix d'homografia e de la projectivitat f.

c) Doneu una construcció geomètrica (gràfica) que permeti calcular la imatge d'un punt qualsevol de r coneixent les imatges de tres punts donats.

5.7.5 Construïu gràficament la imatge d'un punt i d'una recta per una homologia general si coneixeu

a) Un parell de punts homòlegs diferents, és a dir, un punt no fix i la seva imatge.

b) Un parell de rectes homòlogues diferents.

5.7.6 Construïu gràficament la imatge d'un punt i d'una recta per una homologia especial si coneixeu

a) Un parell de punts homòlegs.

b) Un parell de rectes homòlogues.

5.7.7 Sigui h una homologia d'eix e i centre O.

a) Si $h^2 = id$, doneu una construcció de la imatge d'un punt arbitrari X.

b) Si l'eix té equació $x = 0$ i el centre té coordenades $[1, 0, 0]$, doneu la matriu de h (en el cas involutiu).

5.7.8 Demostreu que si la composició de dues homologies generals del mateix centre i raons respectives α i β és una homologia especial, llavors $\alpha \cdot \beta = 1$

5.7.9

a) Sigui $ABCD$ un quadrilàter en el pla projectiu. Siguin P, Q, R, S punts situats a AB, BC, CD, DA respectivament de manera que PQ i SR es tallen en AC. Demostreu que PS i QR es tallen en BD.

b) Doneu l'enunciat dual.

5.7.10

a) Siguin $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ i $\triangle A''B''C''$ tres triangles amb un centre de perspectiva comú. Demostreu que els eixos de perspectiva dels parells de triangles són concurrents.

b) Doneu l'enunciat dual.

(Es diu que dos triangles estan en perspectiva des d'un eix e, si els tres parells de costats corresponents es tallen a e).

5.7.11 Donats els punts A, B, C, D, trobeu (A, B, C, D), (B, C, D, A), (D, B, C, A) en els casos següents:

a) $A = [1, 1]$, $B = [i, 1]$, $C = [-i, i]$, $D = [1 - i, 1 + i]$ en $\mathbb{C}P^1$;

b) $A = [1, 0, 1]$, $B = [1, 2, 1]$, $C = [1, 3, 1]$, $D = [1, -1, 1]$ en $\mathbb{R}P^2$;

c) $A = [1, 2, 4]$, $B = [5, 0, 4]$, $C = [3, 1, 4]$, $D = [2, -1, 0]$ en $\mathbb{R}P^2$.

5.7.12 Donades les rectes a, b, c, d, trobeu (a, b, c, d), (a, d, b, c), (d, c, b, a) en els casos següents:

a) $a : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, $b : -x_2 + x_3 = 0$, $c : x_1 - x_3 = 0$, $d : x_1 - x_2 = 0$;

b) $a : x_2 = 0$, $b : x_1 - x_2 = 0$, $c : 3x_1 - x_2 = 0$, $d : 5x_1 - x_2 = 0$.

5.7.13 Donats els punts A, B, C, (respectivament les rectes a, b, c) trobeu el punt (respectivament la recta) que compleixi la condició donada:

a) $A = [1, -1, 2]$, $B = [-2, 0, 1]$, $C = [-1, -1, 3]$, $(A, B, C, D) = -1$;

b) $a = \langle 2, 1, 1\rangle$, $b = \langle 0, 1, 3\rangle$, $c = \langle 1, 0, -1\rangle$, $(a, b, c, d) = 1/3$.

5.7.14 Siguin A, B, C els vèrtexs d'un triangle del pla projectiu, P un punt que no és sobre cap costat i r una recta que no passa per cap vèrtex ni per P. Si $A_1 = r \cap AP$, $B_1 = r \cap BP$, $C_1 = r \cap CP$, i $A_2 = r \cap BC$, $B_2 = r \cap AC$ i $C_2 = r \cap AB$, proveu que

$$(A_1, A_2, B_1, C_1) = (A_1, A_2, C_2, B_2).$$

5.7.15

a) Sigui $\triangle ABC$ un triangle del pla projectiu i D un punt que no pertany a cap dels costats del triangle. Demostreu que les rectes a', b', c', que projecten D des dels vèrtexs, formen amb una recta r per D una raó doble (a', b', c', r) que coincideix amb la raó doble (A', B', C', D), on A', B', C' són les interseccions de r amb els costats del triangle.

b) Donades tres rectes a, b i c no concurrents i D un punt qualsevol que no està sobre elles, construïu una recta per D que talli les anteriors en punts A', B', C' tals que la raó doble (A', B', C', D) pren un valor prefixat.

5.7.16

a) Donats punts A, B, C alineats, usant únicament un regle trobeu el punt conjugat harmònic a C respecte a A i B.

b) En el pla afí donades dues rectes paral·leles l, l' i un segment AB sobre l, usant únicament un regle, trobeu el punt mitjà de AB.

c) En el pla afí donades dues rectes paral·leles l, l' i un segment AB sobre l, usant únicament un regle, trobeu el punt C tal que B és el punt mitjà de AC.

5.7.17

a) En el pla afí, donats un trapezi $ABCD$ amb $AB \| CD$ i $P = CB \cap AD$, $Q = AC \cap BD$, $X = AB \cap PQ$, $Y = CD \cap PQ$, $R = AY \cap BD$, $S = PR \cap CD$, $T = PR \cap AB$, proveu que $AB = 3AT$.

b) En el pla afí, donats un trapezi $ABCD$ amb $AB \| CD$ i $P = CB \cap AD$, $X \in AB$, tal que $AB = nAX$, $Y = CD \cap PX$, $R = AY \cap BD$, $T = PR \cap AB$, $S = PR \cap CD$, proveu que $AB = (n+1)AT$.

c) En el pla afí, donades dues rectes paral·leles l, l' i un segment AB sobre l, usant únicament un regle, dividiu AB entre 3,4,5,...

5.7.18 Sigui $\triangle ABC$ un triangle del pla projectiu i sigui P un punt que no pertany al triangle. Considerem les projeccions de P des de cada vèrtex sobre el costat oposat i, per a cada projecció, el quart harmònic respecte als vèrtexs d'aquell costat. Demostreu que els tres punts així obtinguts estan alineats (sobre l'anomenada *polar harmònica de* P).

5.7.19

a) Donades tres rectes concurrents a, b, c, trobeu la recta d conjugada harmònica a c respecte a a, b.

b) En el pla euclidià, siguin a, b dues rectes que es tallen en un punt S i sigui c la bisectriu de l'angle format per a i b. Proveu que una recta d concurrent a S és conjugada harmònica de c respecte a, b si i només si d i c són perpendiculars.

c) En el pla euclidià donades tres rectes concurrents a, b, c, tals que a i c són perpendiculars, usant només un regle, dobleu l'angle format per a i b.

5.7.20

a) Si h és una homologia de centre O i eix e ($O \notin e$), demostreu que hi ha una constant k tal que per a qualsevol $P \in \mathbb{R}P^2 \setminus \{e\}$, si $O' = OP \cap e$ i $P' = h(P)$, llavors

$$(O, O', P, P') = \frac{1}{k}$$

(es diu que k és la raó de l'homologia h).

b) Estudieu la restricció de f a $\mathbb{R}P^2 \setminus e$ i $\mathbb{R}P^2 \setminus r$, on r és una recta invariant del feix de rectes per O.

c) Demostreu que la projectivitat

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= x + y + 3z \\ z' &= -x - 2z \end{aligned}$$

és una homologia. Determineu-ne el centre, l'eix i la raó.

5.7.21 Suposem donada una projectivitat entre les rectes a i a' per tres parells de punts corresponents A i A', B i B', C i C'. Usant únicament un regle trobeu la imatge D' d'un punt D.

5.7.22 Sigui f la projectivitat de la recta l sobre la recta l' determinada per tres parells de punts corresponents: $A = [1, -1, 2] \to A' = [2, -1, -1]$, $B = [0, 1, 2] \to B' = [0, 1, 0]$, $C = [1, 0, 4] \to C' = [2, 1, -1]$.

a) Proveu que el punt $D = [2, -1, 6]$ està alineat amb els punts A, B, C i trobeu la imatge de D.

b) Proveu que el punt $U' = [4, -1, -2]$ està alineat amb els punts A', B', C' i trobeu la imatge recíproca de U'.

5.7.23 Donades dues rectes diferents, r, s, del pla projectiu complex, una projectivitat $f : r \to s$ i un punt P que no pertany a cap de les rectes, demostreu que existeix almenys una recta per P que talla r i s en punts corresponents per f.

5.7.24

a) Dues rectes l i l' es tallen en el punt P. Siguin A, B, C tres punts de l, i Q, R, S tres punts de l' tals que $(P, Q, R, S) = (P, A, B, C)$. Demostreu que QA, RB, SC són concurrents.

b) Donades dues rectes l i l', i un punt O fora d'elles, siguin A, B dos punts alineats amb O. Una recta m que passa per O talla d en P i d' en Q. Trobeu el lloc geomètric dels punts $AP \cap BQ$ amb m variable.

c) Discutiu la situació dual de b).

d) Suposem donades dues rectes p i q que es tallen en un punt O, i suposem també donat un punt A fora d'aquestes. Siguin l, l' dues rectes del feix A^* simètriques respecte a OA, $P = p \cap l$, $Q = q \cap l'$. Demostreu que PQ passa per un punt fix (l, l' variables).

5.7.25

a) Donada la projectivitat de la recta projectiva real $2xx' - x + 3x' - 1 = 0$, trobeu els punts homòlegs (punts imatge) de 3, 0, -1, 2, classifiqueu-la i determineu-ne el comportament a l'infinit.

b) Classifiqueu la família de projectivitats reals:

$$xx' + (2 + \lambda)x + x' - 4 = 0.$$

c) Classifiqueu les projectivitats:

$$xx' + 1 = 0; \quad xx' - 4x + 2x' - 3 = 0; \quad xx' - x - x' - 3 = 0$$

segons si es consideren reals o complexes.

5.7.26 Les involucions següents estan definides per dos parelles de punts homòlegs. Classifiqueu-les sense emprar equacions:

a) $A = [1, 1] \leftrightarrow A' = [5, -3]$, $B = [1, 0] \leftrightarrow B' = [2, -1]$;

b) $A = [1, 0] \leftrightarrow A' = [1, -1]$, $B = [0, 1] \leftrightarrow B' = [2, 1]$;

c) $A = [1, 1] \leftrightarrow A' = [0, 1]$, $B = [1, -1] \leftrightarrow B' = [2, 3]$;

d) $A = [1, 2] \leftrightarrow A' = [3, -1]$, $B = [1, -1] \leftrightarrow B' = [0, 1]$.

5.7.27 Demostreu que tot element de $PGL(1, k)$ es pot escriure com composició d'involucions.

Indicació: Proveu que tota matriu invertible 2×2 es producte de matrius de traça zero.

5.7.28 Una projectivitat de la recta projectiva està definida per les imatges A', B', C' de tres punts A, B, C. Construïu gràficament la imatge d'un punt D.

5.7.29 La projectivitat f està definida per un punt fix U i les imatges A', B' de dos punts A, B. Construïu el segon punt fix (si existeix).

5.7.30

a) Una involució amb punts fixos P, Q intercanvia A, C i també B, D. Proveu que existeix una involució que transforma P, A, C en Q, B, D i que existeix una involució que transforma P, A, B en Q, D, C.

b) Siguin A, B, C punts d'una recta d, i A', B', C' punts de la mateixa recta que compleixen les equacions $(A', A, B, C) = (B', B, C, A) = (C', C, A, B) = -1$. Proveu que la projectivitat f donada per $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ és una involució el·líptica.

5.7.31 Proveu que dues involucions de $\mathbb{C}P^1$ sempre tenen un parell involutiu comú. Si f i g són dues involucions de $\mathbb{R}P^1$, f el·líptica i g hiperbòlica, demostreu que $f \circ g$ té dos punts fixos reals i deduïu que f i g tenen un parell involutiu comú.

5.7.32 Estudieu les projectivitats de la recta projectiva real $\mathbb{R}P^1$ que deixen invariants tres punts A, B, C, potser intercanviant-los. En la referència $(A, B; C)$ doneu les equacions de les projectivitats obtingudes.

5.7.33 Doneu una expressió de la projectivitat de la recta projectiva real o complexa que envia els punts $-1, 0, 1$ als punts $\infty, -2, -3/2$ respectivament. Classifiqueu-la a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$.

5.7.34 Donats dos punts fixos d'una involució de la recta projectiva real, doneu una construcció de la imatge d'un punt arbitrari X.

5.7.35 Donats dos punts A, B de la recta projectiva, proveu que existeix una única involució h tal que $h(A) = A$ i $h(B) = B$.

5.7.36 Donades dues rectes paral·leles en el pla afí real i un segment sobre una d'elles, doneu una construcció del punt mitjà del segment.

5.7.37 Suposem que tenim una aplicació entre les rectes projectives

$$r : y - 3x - 2z = 0$$

i

$$s : y = 0$$

que conserva la raó doble. Si els punts $[0, 2, 1], [1, 5, 1], [1, 3, 0]$ de r van a parar respectivament sobre els punts $[6, 0, 1], [10, 0, 1], [1, 0, 0]$ de s, trobeu una fórmula que ens doni les coordenades de la imatge sobre la segona recta d'un punt genèric $[x, y, z]$ de la primera.

5.7.38 Demostreu que dues diagonals d'un quadrilàter (quatre rectes i els sis vèrtexs corresponents) determinen sobre la tercera dos punts que separen harmònicament els vèrtexs del quadrilàter que són sobre aquesta tercera diagonal.

5.7.39 Donats dos parells de punts sobre una recta, p, p' i q, q' tals que

$$(p, p', q, q') > 0,$$

demostreu que hi ha un únic parell de punts r, r' que separa harmònicament cada un dels parells anteriors, és a dir tal que

$$(p, p', r, r') = (q, q', r, r') = -1.$$

5.7.40 Demostreu que si una projectivitat de la recta projectiva és hiperbòlica i té un parell de punts corresponents conjugats harmònics amb els punts fixos, llavors la projectivitat és una involució.

5.7.41 Si d'una involució f de la recta projectiva coneixeu un dels seus punts fixos P i un parell de punts corresponents, és a dir un punt A i la seva imatge $f(A)$, construïu utilitzant un regle la imatge d'un punt arbitrari C.

5.7.42 [**Teorema de Poncelet**] Siguin π i π' dos plans diferents de l'espai projectiu kP^3. Demostreu que tota projectivitat $f : \pi \longrightarrow \pi'$ es pot obtenir com a composició de menys de cinc perspectivitats (menys de sis si s'admet que π i π' poden coincidir).

6. Quàdriques

Veurem que les seccions còniques es poden interpretar com zeros de polinomis de segon grau. Via el procés d'homogeneïtzació, aquestes còniques (quàdriques si la dimensió és més gran) corresponen en el projectiu als zeros dels polinomis *homogenis* de segon grau. Aquests polinomis es poden identificar a les aplicacions bilineals simètriques dels espais vectorials, i utilitzarem la classificació que d'aquestes aplicacions es fa a àlgebra per classificar les quàdriques. Tot el que necessitem d'àlgebra està demostrat aquí o a l'apèndix.

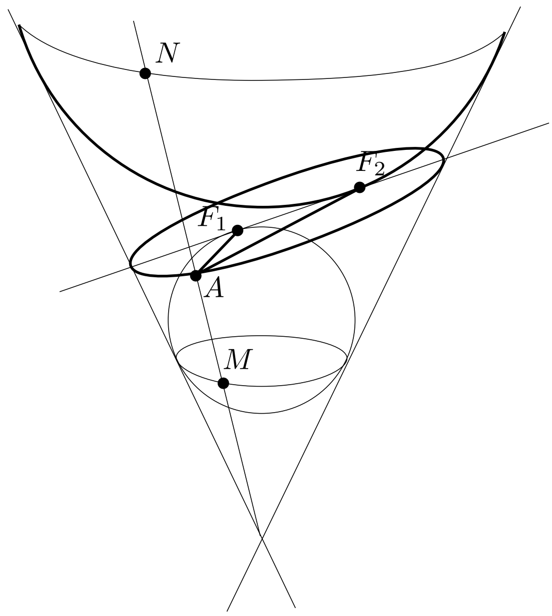
Per a un cos arbitrari el problema de classificació es molt difícil ja que depèn de l'aritmètica del cos. Aquí només farem els casos $k = \mathbb{R}, k = \mathbb{C}$ o k finit.

Acabarem el capítol parlant de plans tangents a quàdriques i interpretant la quàdrica dual com la quàdrica tal que els seus punts són els hiperplans tangents. En passar al dual cada punt d'una quàdrica es transforma en el pla tangent a la quàdrica en aquell punt.

6.1 Introducció. L'el·lipse

Quan tallem un con de $\mathbb{R}^3$ per un pla que no passa pel vèrtex, obtenim una corba anomenada cònica que, segons la posició relativa del pla respecte al con, és una el·lipse, una paràbola o una hipèrbola.

Estudiem el cas de l'el·lipse, que apareix en tallar el con per un pla que forma amb l'eix del con un angle superior al que forma la generatriu amb l'eix.



Un cop tallat el con amb el pla, inscrivim dins del con dues esferes tangents interiors al con i tangents al pla en els punts F_1 i F_2 respectivament. Sigui A un punt de la intersecció. La generatriu per A és tangent a les dues esferes en punts respectius M, N. Com que el punt A és exterior a les dues esferes, tenim $AF_1 = AM$ i $AF_2 = AN$, ja que les tangents a una esfera des d'un punt exterior són iguals.

En particular, $AF_1 + AF_2 = AM + AN = MN$, però MN és constant, és a dir no depèn del punt A elegit a la intersecció del con i el pla, ja que els equadors de les dues esferes són paral·lels.

Tenim doncs dues descripcions d'una el·lipse, com a secció d'un con o com a lloc geomètric dels punts del pla tals que la seva suma de distàncies a dos punts donats és constant.

També es pot descriure com el lloc geomètric dels punts del pla tals que el quocient de distàncies a un punt i a una recta donats és una constant més petita que 1. Consulteu el problema 7.8.34 o qualsevol tractat clàssic.

Per altra banda, si recordem que un con té equació $x^2 + y^2 = z^2$, és clar que en tallar amb un pla, que té equació lineal, obtindrem una equació quadràtica. Concretament, si posem l'origen de coordenades del pla amb el qual hem tallat el con en el punt mitjà del segment F_1F_2 i considerem la recta F_1F_2 com l'eix de les x, tenim

$$F_1 = (c, 0), \quad F_2 = (-c, 0), \quad A = (x, y).$$

Si posem $MN = 2a$, tenim

$$d(A, F_1) + d(A, F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Passant una de les arrels a l'altre costat de la igualtat i elevant al quadrat obtenim

$$a^2 + xc = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

que tornant a elevar al quadrat i posant $b^2 = a^2 - c^2$ ens dóna

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que es coneix per equació canònica de l'el·lipse.

Tot això ens indica que estudiar seccions còniques serà, des del punt de vista algebraic, estudiar polinomis de segon grau. De fet, el llenguatge projectiu ens permetrà restringir-nos als polinomis *homogenis* de segon grau, que es coneixen per *formes quadràtiques*, i seran un cas particular de les formes bilineals.

6.2 Recordatori d'àlgebra: classificació de les aplicacions bilineals simètriques

Repassem breument alguns resultats que necessitarem i que podeu trobar a l'apèndix 11.5 o amb més detall a [11].

A partir d'ara el cos k, a més de ser commutatiu, el suposarem de característica diferent de 2. Ho fem per evitar problemes en algun moment en què haurem de dividir per 2, especialment quan fem la identificació de les aplicacions bilineals simètriques amb les formes quadràtiques.

Comencem recordant la definició i el teorema de diagonalització d'aplicacions bilineals simètriques.

Definició 6.2.1 *Una* aplicació bilineal ϕ *sobre* E *és una aplicació*

$$\varphi : E \times E \longrightarrow k$$

tal que, per a tot $u, v, w \in E$ *i per a tot* $\lambda \in k$, *es compleix*

(1) $\phi(u + v, w) = \phi(u, w) + \phi(v, w)$,

$\phi(u, v + w) = \phi(u, v) + \phi(u, w)$,

(2) $\phi(\lambda u, v) = \lambda\phi(u, v)$,

$\phi(u, \lambda v) = \lambda\phi(u, v)$.

Quan $\phi(u, v) = \phi(v, u)$ per a tot $u, v \in E$, es diu que ϕ és *simètrica*.

Matriu associada a una aplicació bilineal

Sigui $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ una base de E. Associem a cada aplicació bilineal ϕ sobre E una matriu $\Phi \in M_n(k)$ de la manera següent:

$$\Phi = (a_{ij}), \quad \text{amb} \quad a_{ij} = \phi(e_i, e_j).$$

Conèixer ϕ és equivalent a conèixer Φ. En efecte, siguin

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i, \qquad v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j.$$

Llavors

$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j \phi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i a_{ij} v_j \\ &= u^t \Phi v, \end{aligned} \tag{6.1}$$

on u i v de la darrera igualtat denoten les matrius columna formades respectivament per les components dels vectors u i v respecte de la base $\mathcal{B}$.

La matriu Φ es diu matriu de ϕ respecte de la base $\mathcal{B}$ i la denotarem per $M(\phi,\mathcal{B})$, és a dir, $\Phi = M(\phi,\mathcal{B})$.

Canvi de base

Siguin $\mathcal{B}_1 = (e_1,\ldots,e_n)$ i $\mathcal{B}_2 = (u_1,\ldots,u_n)$ dues bases de E. Quina relació hi ha entre les matrius $\Phi_1 = M(\phi,\mathcal{B}_1)$ i $\Phi_2 = M(\phi,\mathcal{B}_2)$?

Per la definició d'aquestes matrius, tenim que

$$(\Phi_2)_{ij} = \phi(u_i,u_j) = \phi(a_{ki}e_k, a_{rj}e_r) = a_{ki}a_{rj}\phi(e_k,e_r) = (M^t\Phi_1 M)_{ij},$$

on $M = M(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)$ és la matriu del canvi de base. Els indexos k,r estan sumant de 1 a n.

És a dir, es compleix que

$$\Phi_2 = M^t\Phi_1 M$$

que és la *fórmula del canvi de base* per a formes bilineals.

La pregunta ara és si donada Φ_1 existeix M invertible tal que $M^t\Phi_1 M$ sigui una matriu diagonal.

6.2.1 Diagonalització

Teorema 6.2.2 *Si ϕ és una aplicació bilineal simètrica sobre un k-espai vectorial E, existeix una base de E respecte de la qual la matriu de ϕ és una matriu diagonal.*

Demostració. La demostració està implícita en el següent mètode que ara explicarem, que és una adaptació del mètode de Gauss K.F. (1777-1855) per a resoldre sistemes d'equacions lineals triangulant, i que ens dóna al mateix temps la nova base en la qual l'aplicació bilineal simètrica diagonalitza.

Mètode per a trobar la base en què una aplicació bilineal simètrica diagonalitza

Per diagonalitzar una aplicació bilineal simètrica seguirem els passos següents:

a) Escriurem la matriu de ϕ en una certa base $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$, $A = M(\phi,\mathcal{B})$, i, sota seu, la matriu identitat.

b) Diagonalitzarem A pel mètode de Gauss amb la precaució que tota operació que afecti files s'ha de repetir igual afectant columnes (per exemple, si substituïm la fila 2 per la suma de les files 1 i 2, també hem de substituir la columna 2 per la suma de les columnes 1 i 2). La matriu identitat afegida queda afectada també per aquests canvis.

c) La base en la qual ϕ diagonalitza està formada per les columnes que apareixen, un cop A ha diagonalitzat, on era la matriu identitat. Més precisament, cadascuna d'aquestes columnes està formada per les components dels vectors de la nova base respecte la inicial.

El mètode és fàcil de justificar, ja que canviar primerament la fila i, F_i, per $F_i+\lambda F_j$, i a continuació la columna i, C_i, per $C_i+\lambda C_j$, correspon a fer el canvi de base

$$\begin{aligned} e'_k &= e_k \qquad\qquad k\neq i \\ e'_i &= e_i+\lambda e_j. \end{aligned}$$

En efecte, la fila i-èssima de la matriu de ϕ en aquesta nova base té component k-èsima

$$\phi(e'_i,e'_k) = \phi(e_i,e_k)+\lambda\phi(e_j,e_k), \quad k\neq i \tag{6.2}$$
$$\phi(e'_i,e'_i) = \phi(e_i,e_i)+2\lambda\phi(e_i,e_j)+\lambda^2\phi(e_j,e_j). \tag{6.3}$$

Recordem que, per simetria, aquestes són també les components k-èssimes de la columna C_i. Els termes de la matriu de ϕ en la base inicial, que no pertanyen ni a la fila F_i ni a la columna C_i no queden afectats per aquest canvi de base.

D'altra banda, quan fem la transformació

$$F'_i = F_i+\lambda F_j,$$

obtenim una nova fila que té component k-èssima

$$\phi(e_i,e_k)+\lambda\phi(e_j,e_k), \quad k=1,\dots,n,$$

expressions que, per a $k\neq i$, coincideixen amb (6.2).

Però la modificació que acabem de fer de la fila F_i afecta a totes les columnes de la matriu. Concretament el terme (i,i) de la columna C_i, que valia $\phi(e_i,e_i)$, ara val $\phi(e_i,e_i)+\lambda\phi(e_j,e_i)$, i el terme (i,j) de la columna C_j, que valia $\phi(e_i,e_j)$, ara val $\phi(e_i,e_j)+\lambda\phi(e_j,e_j)$. Per tant, quan a continuació del canvi $F'_i=F_i+\lambda F_j$, realitzem la transformació

$$C'_i = C_i+\lambda C_j,$$

obtenim que aquesta nova columna C'_i té component k-èssima

$$\phi(e_k,e_i)+\lambda\phi(e_k,e_j), \qquad k\neq i \tag{6.4}$$
$$\phi(e_i,e_i)+\lambda\phi(e_j,e_i)+\lambda(\phi(e_i,e_j)+\lambda\phi(e_j,e_j)). \tag{6.5}$$

Expressions que coincideixen respectivament amb (6.2) i (6.3), i per tant, el mètode queda justificat.

Veiem ara que els canvis realitzats es "guarden" bé a la matriu identitat que hem situat a sota de la matriu inicial.

El canvi de files no afecta aquesta matriu identitat, però el de columnes sí. Concretament canvia la columna que tenia un 1 al lloc i (corresponent a e_i) en una columna que té un 1 al lloc i i una λ al lloc j (corresponent a $e_i+\lambda e_j$). Per tant les columnes de la matriu identitat així transformada són les components dels vectors de la nova base respecte $\mathcal{B}$.

Finalment veiem que el mètode de Gauss ens porta a la diagonalització, ja que si a_{11} és diferent de zero, llavors el canvi

$$F'_2 = F_2-\frac{a_{12}}{a_{11}}F_1, \quad C'_2 = C_2-\frac{a_{12}}{a_{11}}C_1$$

ens passa de

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{12} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

a

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}.$$

És a dir, hem obtingut un zero en el lloc 2 de la primera fila i en el lloc 2 de la primera columna. Aplicant-ho ara a les altres files i columnes, és a dir, fent

$$F_i' = F_i - \frac{a_{1i}}{a_{11}} F_1, \quad C_i' = C_i - \frac{a_{1i}}{a_{11}} C_1, \quad i = 2, \ldots, n,$$

obtenim una matriu amb la primera fila i la primera columna formada per zeros, excepte el terme a_{11}. Continuant ara el procés pivotant sobre el nou terme a_{11} podem anar reduint la dimensió, i en un nombre finit de passos diagonalitzem.

Si a_{11} és zero, mirem els altres termes de la diagonal. Si a_{ii} és diferent de zero, $i \neq 1$, permutem la fila 1 amb la fila i i la columna 1 amb la columna i. Correspon al canvi de base $e_1' = e_i, e_i' = e_1$ i deixar invariants els altres vectors de la base. D'aquesta manera el nou terme a_{11} és diferent de zero i som en el cas anterior.

Si els termes de la diagonal són zero, però $a_{0i} \neq 0, i \neq 0$, la transformació $F_1' = F_1 + F_i, C_1' = C_1 + C_i$, que correspon al canvi de base $e_1' = e_1 + e_i$, $e_j' = e_j, j \neq 0$, ens proporciona un nou $a_{11} \neq 0$, perquè la característica del cos és diferent de dos, i estem en el cas anterior. $\square$

Aquest mètode és essencialment una manera mecànica d'aplicar l'anomenat *mètode de completació de quadrats* que explicarem més endavant (vegeu 8.1.1 o [11]).

Aquest teorema ens diu que hi ha una base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E tal que $\phi(e_i, e_j) = a_{ij}\delta_{ij}$ amb a_{ij} elements del cos k i $\delta_{ij} = 0$, excepte quan $i = j$, en què val 1. Podem afinar una mica més en funció del cos on siguem. Per exemple:

$k = \mathbb{R}$.

Podem fer que els a_{ii} de la diagonal siguin $+1$ o -1. En efecte, si $\phi(e, e) = \pm a^2$, posem $e' = \frac{1}{a} e$ i obtenim $\phi(e', e') = \pm 1$ (si $a \neq 0$), de manera que tindrem

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& -1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& -1 && \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}.$$

$k = \mathbb{C}$.

El canvi $e_i' = \dfrac{1}{\sqrt{a_{ii}}} e_i$ $(a_{ii} \neq 0)$ ens permet posar

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

ja que tot element no nul té arrel quadrada.

En cossos arbitraris tindrem el problema de saber si els elements tenen arrel quadrada o no. Els cossos finits tenen propietats bones que ens permeten classificar.

k finit.
Podem posar

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \phi = \begin{pmatrix} a & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

amb a no quadrat perfecte (vegeu l'apèndix 11.5 o amb més detalls [11], teorema 9.10.3).

Exercici 6.2.3 *Trobeu la base de $\mathbb{R}^3$ en què diagonalitza l'aplicació bilineal simètrica*

$$\phi = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solució. El següent esquema segueix els passos anteriors

$$\begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2+\frac{1}{6}F_1]{} \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_2+\frac{1}{6}C_1]{} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+24F_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 46 \\ 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3+24C_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 46 \\ 1 & \frac{1}{6} & 4 \\ 0 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que ens diu que la nova base és $u_1 = (1,0,0), u_2 = (\frac{1}{6},1,0), u_3 = (4,24,1)$, i que en aquesta base

$$\phi = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -\frac{1}{12} & \\ & & 46 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

6.2.2 Classificació de les aplicacions bilineals simètriques

La relació d'equivalència més natural entre aplicacions bilineals és la següent: Dues aplicacions bilineals són equivalents si, en bases possiblement diferents, tenen la mateixa expressió matricial.

Per escriure això de manera còmoda és convenient introduir la notació d'*imatge recíproca*. Si $f : E \longrightarrow E$ és un isomorfisme del k-espai vectorial E, definim la imatge recíproca de ϕ per f, $f^*\phi$, per

$$(f^*\phi)(u,v) = \phi(fu, fv).$$

Si pensem matricialment escriurem

$$\phi(u,v) = u^t \Phi v$$

on $\Phi = M(\phi, \mathcal{B})$ és la matriu de ϕ respecte d'una certa base $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_n)$ i la u i la v a la dreta de la darrera igualtat representen les matrius columna formades per les components dels vectors u i v respecte de la mateixa base $\mathcal{B}$.

Per tant, si $M = M(f, \mathcal{B})$ és la matriu de f en una certa base $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_n)$, la matriu $\Phi^* = M(f^*\phi, \mathcal{B})$ de $f^*\phi$ respecte de la mateixa base $\mathcal{B}$ és igual a $M^t \Phi M$ ja que

$$(\Phi^*)_{ij} = (f^*\phi)(e_i, e_j) = (fe_i)^t \Phi f e_j = (M^t \Phi M)_{ij},$$

ja que la columna i de M, $i = 0, \dots, n$, està formada per les components de $f(e_i)$ respecte de $\mathcal{B}$. Tenim doncs

$$\Phi^* = M^t \Phi M.$$

El problema ara és saber si donades les matrius Φ i $\Phi*$ existeix una matriu M invertible tal que $\Phi^* = M^t \Phi M$.

Definició 6.2.4 *Direm que dues aplicacions bilineals simètriques ϕ, ϕ' d'un k-espai vectorial E són equivalents si i només si existeix un isomorfisme $f : E \longrightarrow E$ tal que $f^*\phi' = \phi$.*

Es diu també que ϕ i ϕ' són equivalents mòdul isomorfisme.

Observem que, si $(e_, \dots, e_n)$ és una base de E, tenim

$$(f^*\phi')(e_i, e_j) = \phi'(fe_i, fe_j) = \phi(e_i, e_j),$$

que ens diu que la matriu de ϕ en la base e_i és igual a la matriu de ϕ' en la base $f(e_i)$, d'acord amb la idea de classificació abans esmentada.

Observem també que si ϕ és equivalent a ϕ', i fixem una base $\mathcal{B}$, llavors existeix una matriu invertible M tal que $M^t \Phi' M = \Phi$, amb $\Phi = M(\phi, \mathcal{B})$ i $\Phi' = M(\phi', \mathcal{B})$.

Recíprocament, si donades ϕ i ϕ' existeix una matriu invertible M tal que $M^t \Phi' M = \Phi$, amb $\Phi = M(\phi, \mathcal{B})$ i $\Phi' = M(\phi', \mathcal{B})$ llavors ϕ i ϕ' són equivalents.

És suficient definir l'isomorfisme f per la condició $M = M(f, \mathcal{B})$ i ja es compleix que $f^*\phi' = \phi$.

En general, és a dir quan k és un cos arbitrari, és difícil saber si dues aplicacions bilineals simètriques són equivalents o no. Depèn de l'aritmètica del cos k. No obstant això, en alguns casos és molt senzill, com ara veurem.

A l'apèndix 11.5 i amb més detall a [11], capítols 8 i 9, trobareu el següent teorema de classificació:

Teorema 6.2.5 (teorema de classificació)

Siguin ϕ i ϕ' aplicaions bilineals simètriques d'un k-espai vectorial E.

Si $k = \mathbb{C}$, ϕ i ϕ' són equivalents si i només si tenen el mateix nombre de $+1$ en la seva expressió diagonal. És a dir, el rang classifica.

Si $k = \mathbb{R}$, ϕ i ϕ' són equivalents si i només si tenen el mateix nombre de $+1$ i -1 en la seva expressió diagonal. És a dir, el rang i el nombre de $+1$ classifiquen.

Si k és finit, ϕ i ϕ' són equivalents si i només si tenen el mateix rang i el mateix discriminant de la part no singular.

Recordem que el *discriminant* és el determinant mòdul quadrats, és a dir que si el determinant, en el cas finit, és quadrat perfecte estem en el cas

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

i si no ho és, som en el cas

$$\begin{pmatrix} a & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

amb a no quadrat perfecte.

La *part no singular* és qualsevol subespai F de E tal que $E = \operatorname{rad} E \perp F$, on $\operatorname{rad} E$ denota el *radical* de E i està definit per

$$\operatorname{rad} E = \{v \in E; \phi(v, w) = 0,\ \forall w \in E\},$$

i $\perp$ denota la suma directa de subespais vectorials. Vegeu també la proposició 8.3.2.

Però des del punt de vista projectiu no ens interessarà exactament la classificació anterior, sinó la següent.

6.2.3 Classificació projectiva

Definició 6.2.6 *Direm que dues aplicacions bilineals simètriques ϕ, ϕ' d'un k-espai vectorial E són projectivament equivalents ($\phi \sim \phi'$) si i només si existeix un isomorfisme $f : E \longrightarrow E$ tal que $f^*\phi' = \lambda\phi$, $\lambda \in k$.*

Es diu que f és una *similitud* entre ϕ i ϕ'. Així, quan ϕ i ϕ' són projectivament equivalents, es diu també que són equivalents mòdul similituds.

Observem també que, en notació matricial, ϕ és projectivament equivalent a ϕ' si i només si existeix M invertible tal que

$$M^t \phi' M = \lambda \phi, \ \lambda \in k. \tag{6.6}$$

Com abans, el teorema de classificació depèn del cos.

6.2.4 Classificació projectiva en el cas real, $k = \mathbb{R}$

Observem primerament que, per exemple, les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

no són equivalents, ja que no tenen el mateix nombre de $+1$ i -1, però sí que són projectivament equivalents ($\lambda = -1$).

El que sí es conserva és el nombre de parells $\{+1, -1\}$. D'aquests parells, és a dir dels subespais vectorials de dimensió 2 que admeten una base en la qual

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

se'n diu *plans hiperbòlics*. Estan caracteritzats per ser subespais vectorials de dimensió 2 no singulars que contenen un vector isòtrop. *No singular* vol dir que no hi ha cap vector, excepte el zero, ortogonal per ϕ a tots els altres. Un vector *isòtrop* és un vector u tal que $\phi(u, u) = 0$.

Del nombre total de plans hiperbòlics que apareixen en combinar els parells $\{+1, -1\}$ de l'expressió diagonal de ϕ se'n diu *índex*. Tenim doncs:

Teorema 6.2.7 *Dues aplicacions bilineals simètriques sobre un espai vectorial real són projectivament equivalents si i només si tenen el mateix rang i el mateix índex.*

El *rang* és la dimensió del subespai vectorial més gran en què ϕ és no singular i coincideix per tant amb la suma del nombre de $+1$ i -1 que apareixen a l'expressió diagonal de ϕ. L'índex val $i = \min\{r^+, r^-\}$.

Per exemple, sobre $\mathbb{R}P^3$ tenim només els vuit casos

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

6.2.5 Classificació projectiva en el cas complex, $k = \mathbb{C}$

En aquest cas els conceptes de congruència i similitud són equivalents, ja que si ϕ i ϕ' són projectivament equivalents amb $f^*\phi' = \lambda\phi$, llavors $F = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f$ compleix $F^*\phi' = \phi$, i per tant ϕ i ϕ' són congruents. Per tant:

Teorema 6.2.8 *Dues aplicacions bilineals simètriques sobre un espai vectorial complex són projectivament equivalents si i només si tenen el mateix rang.*

Per exemple, sobre $\mathbb{C}P^3$ tenim només els quatre casos

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

6.2.6 Classificació projectiva en el cas k finit

Tenim dos casos segons la dimensió de E.

Teorema 6.2.9 *Suposem que la dimensió de E és parell. Llavors dues aplicacions bilineals simètriques són projectivament equivalents si i només si tenen el mateix rang i el mateix discriminant. Hi ha dues classes d'equivalència.*

Demostració. Tenim que

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix},$$

per tenir el mateix discriminant. A més, si c no és un quadrat perfecte,

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \not\sim \begin{pmatrix} c & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

per tenir discriminants diferents. Per tant tenim les mateixes dues classes que en el cas de congruències i no podem passar de l'una a l'altra multiplicant per un escalar. Aquest és un raonament sobre la part no singular. Per tant el rang i el discriminant classifiquen. ∎

Teorema 6.2.10 *Suposem que la dimensió de E és senar. Llavors dues aplicacions bilineals simètriques són projectivament equivalents si i només si tenen el mateix rang. Hi ha una sola classe d'equivalència.*

Demostració. Escric en dimensió 3 però l'argument val en general:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c & & \\ & c & \\ & & c \end{pmatrix}$$

perquè és multiplicar per un escalar. Però

$$\begin{pmatrix} c & & \\ & c & \\ & & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

per tenir el mateix discriminant ($c^3 = c^2 \cdot c$).

Per tant les dues classes que teníem en el cas de congruències són ara equivalents. Tenim doncs una sola classe, i el rang classifica. ∎

6.2.7 Càlcul ràpid de l'índex en el cas real

Ja hem vist que per classificar en el cas $k = \mathbb{R}$ tan sols necessitem calcular rang i índex. Per calcular l'índex d'una aplicació bilineal simètrica ϕ procedirem de la manera següent:

a) Considerarem la matriu de ϕ i calcularem el seu rang r i el seu polinomi característic.

b) Comptarem el nombre de canvis de signe r^+ entre els coeficients consecutius d'aquest polinomi.

c) L'índex buscat és $i = \min\{r^+, r - r^+\}$.

Justificació del mètode.

La matriu de ϕ està associada a una aplicació bilineal i no pas a una aplicació lineal. No obstant això, el que fa en realitat l'apartat b anterior és comptar el nombre de valors propis positius de ϕ, *com si ϕ fos la matriu associada a una aplicació lineal.* Això és molt sorprenent i ara ho justificarem.

Comencem recordant el teorema espectral (vegeu l'apèndix, teorema 6.2.11 o [11], teorema 11.1.3).

Teorema 6.2.11 (teorema espectral.) *Sigui E un espai vectorial real ($k = \mathbb{R}$), ϕ una aplicació bilineal simètrica sobre E, i g una altra aplicació bilineal simètrica sobre E, però aquesta definida positiva. Llavors existeix una base ortonormal respecte a g en la qual ϕ diagonalitza.*

Per raons òbvies es coneix també per teorema de diagonalització simultània. Definida positiva vol dir $g(v, v) > 0$, $\forall\, v \in E$, $v \neq 0$. Es diu també que g és una *mètrica.* Observeu que la condició $g(v, v) > 0$ no té sentit sobre un cos arbitrari.

Les aplicacions bilineals ϕ i g determinen una aplicació lineal $f : E \longrightarrow E$, anomenada *endomorfisme associat*, per la fórmula

$$\phi(u, v) = g(fu, v).$$

Que aquesta fórmula determina f queda clar si pensem que f queda determinada pel seu valor sobre una base. Si prenem, per exemple $e_0, \ldots, e_n$ una base ortonormal respecte a g, la fórmula anterior ens diu que

$$f(e_i) = \sum_j \phi(e_i, e_j)e_j,$$

i per tant f està totalment determinada. També es veu clarament que la matriu de f en aquesta base ortonormal respecte a g és justament la matriu de ϕ en la mateixa base. És a dir, que a la pràctica f no és més que la matriu de ϕ però pensada com a aplicació lineal.

El teorema espectral ens diu que existeix una segona base $u_1, \ldots, u_n$ ortonormal respecte a g en la qual ϕ diagonalitza. Tenim doncs

$$\phi(u_i, u_j) = a_{ij}\delta_{ij} = g(fu_i, u_j),$$

que implica

$$f(u_i) = a_{ii}u_i.$$

És a dir, *la base respecte a la qual hi ha diagonalització simultània, donada pel teorema espectral, està formada pels vectors propis de f, normalitzats respecte a g, i els termes que apareixen a l'expressió diagonal de ϕ són els valors propis de f.* Com que l'índex és invariant pels canvis de base, l'índex de A és igual a l'índex de D, i aquest es calcula directament com el mínim entre el nombre de valors propis positius i el nombre de valors propis negatius.

Ara bé, pel teorema de Descartes (consulteu l'apèndix, teorema 11.6.1), sabem que el nombre d'arrels positives del polinomi característic, és a dir el nombre de valors propis positius, coincideix amb el nombre de canvis de signe de coeficients no nuls consecutius d'aquest polinomi. Per tant, per saber el nombre de valors propis positius tan sols hem de comptar canvis de signe.

Aquesta és la justificació del mètode.

En llenguatge matricial, el que diem és que si denotem per A la matriu de ϕ respecte a la base g-ortonormal e_i i per D la matriu (diagonal) de ϕ respecte a la base g-ortonormal u_i del teorema espectral, tenim

$$M^tAM = D,$$

on M és la matriu que té per columnes les components dels u_i respecte als e_j. Però, com que M és la matriu del canvi entre bases ortonormals, és ortogonal, és a dir $M^t = M^{-1}$. Això és el que permet, per trobar D, manipular la matriu A com si fos la matriu associada a una aplicació lineal i buscar directament els seus valors i vectors propis, ja que

$$\det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = \det(M^{-1}AM - \lambda M^{-1}M) = \det(D - \lambda\,\mathrm{Id})$$

per ser $M^t = M^{-1}$. Per tant A i D tenen els mateixos valors i vectors propis, com havíem comentat abans.

Habitualment, quan ens donen una matriu simètrica A a coeficients reals i se'ns demana de classificar-la, s'està suposant que sobre el $\mathbb{R}^n$ corresponent s'ha elegit la base canònica usual e_i i el producte escalar ordinari g que la fa ortonormal, i que l'aplicació bilineal és $\phi(e_i, e_j) = A_{ij}$.

Exercici 6.2.12 *Classifiqueu projectivament*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Solució. Com que rang $r = 3$ i el característic és $-x^3 + 12x^2 - 37x + 30$, que té tres canvis de signe, tenim $r^+ = 3$, i per tant índex $i = \min\{r^+, r - r^+\} = 0$. És a dir, A és equivalent a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

6.3 Quàdriques

Veiem la relació entre quàdriques i formes quadràtiques.

6.3.1 Formes quadràtiques

Quan una aplicació bilineal simètrica $\phi : E \times E \longrightarrow k$ l'apliquem només a parells (u, u), obtenim una forma quadràtica. És a dir, que una *forma quadràtica* q és una aplicació

$$q : E \longrightarrow k$$

donada per

$$q(v) = \phi(v, v).$$

Observem que $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$.

El coneixement de $q(v)$, $\forall\, v \in E$, implica el coneixement de ϕ ja que

$$\phi(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v)).$$

(Recordem que sempre som en el cas carac $k \neq 2$.) Per tant si dues aplicacions bilineals simètriques coincideixen sobre la diagonal (u, u), són iguals. Tenim doncs una bijecció entre aplicacions bilineals simètriques i formes quadràtiques.

Coordenades.

Fixem una base $e_0, \ldots, e_n$ de E i posem $x = \sum_i x^i e_i$. Llavors

$$q(x) = \phi\left(\sum_i x^i e_i, \sum_j x^j e_j\right) = \sum_{ij} x^i x^j a_{ij} = x^t a x,$$

on $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$ i $a = (a_{ij})$ i $x^t = (x^0, \ldots, x^n)$. Així doncs, *una forma quadràtica $q(x)$ no és més que un polinomi homogeni de segon grau* (sempre suposarem que almenys un $a_{ij} \neq 0$, és a dir que el rang de a és diferent de zero).

En general podem pensar que un polinomi homogeni de segon grau, que és una expressió del tipus

$$\sum_{i \leq j} x^i x^j \bar{a}_{ij},$$

correspon a una forma quadràtica q donada per $q(x) = x^t a x$, on a és la matriu

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \bar{a}_{ii} \\ a_{ij} &= \bar{a}_{ij}/2 \quad i < j \\ a_{ji} &= \bar{a}_{ii}/2 \quad i < j, \end{aligned}$$

ja que llavors

$$q(x) = \sum_{ij} a_{ij} x^i x^j = \sum_{i<j} (a_{ij} + a_{ji}) x^i x^j + \sum_i a_{ii} x^i x^i = \sum_{i \le j} \bar{a}_{ij} x^i x^j.$$

Per exemple, l'expressió $5x^2 + y^2 + 6xy$ es pot escriure com

$$(x, y) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Direm que dues formes quadràtiques són equivalents, respectivament projectivament equivalents, quan ho siguin les aplicacions bilineals corresponents.

6.3.2 Quàdriques

Definició 6.3.1 *Una quàdrica $\mathcal{Q}$ és un subconjunt de $P(E)$ format pels zeros d'una forma quadràtica q. És a dir*

$$\mathcal{Q} = \{p(x) \in P(E); q(x) = 0\}.$$

Si $\dim P(E) = 2$, les quàdriques es diuen també *còniques*.

Observem que, com que $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$, l'equació $q(x) = 0$ té sentit sobre el projectiu.

Observem també que formes quadràtiques diferents poden donar lloc a la mateixa quàdrica. Per exemple, a $\mathbb{R}P^2$, les formes quadràtiques diferents $q(x, y, z) = x^2 + y^2$ i $q'(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2$ donen lloc a la mateixa quàdrica, la formada pel punt de coordenades homogènies $[0, 0, 1]$, única solució tant de $q(x, y, z) = 0$ com de $q'(x, y, z) = 0$.

És cert però que en aquest exemple q i q' són equivalents, ja que

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Però podem tenir la mateixa situació amb quàdriques no equivalents. Per exemple $q(x, y) = x^2 + y^2$ i $q'(x, y) = -x^2 - y^2$, a $\mathbb{R}P^1$, no són equivalents i donen lloc també a la mateixa quàdrica, la formada pel punt de coordenades homogènies $[0, 0, 1]$.

És cert però que en aquest exemple q i q' són projectivament equivalents ($\lambda = -1$).

Però podem tenir la mateixa situació amb quàdriques no projectivament equivalents. Per exemple $q(x, y) = x^2 + y^2$ i $q'(x, y) = x^2 + 2y^2$, a $\mathbb{Q}P^2$, no són equivalents i donen lloc també a la mateixa quàdrica, la formada pel conjunt buit (quàdrica sense punts). Que no són projectivament equivalents es veu fàcilment, ja que si intentem buscar una matriu invertible dos per dos tal que

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

obtenim les equacions

$$b^2 + d^2 = 2(a^2 + c^2) \text{ i } ab + cd = 0.$$

Però si $a \neq 0$, $b = -\frac{cd}{a}$ i $d^2 = 2a^2$, contradicció (sobre $\mathbb{Q}$!).

Si $a = 0$, $b \neq 0$ ja que $ad - bc \neq 0$, i $a = -\frac{cd}{b}$ implica $b^2 = 2c^2$, contradicció.

El fet de buscar el contraexemple sobre els racionals no és pas per casualitat, com es veurà a continuació.

Prendrem la definició següent:

Definició 6.3.2 *Dues quàdriques $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ de $P(E)$ són projectivament equivalents si existeix una projectivitat $\tilde{f} : P(E) \longrightarrow P(E)$ tal que $\tilde{f}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$.*

Aquesta definició sembla molt raonable des del punt de vista geomètric, però també té els seus inconvenients per tot el que hem comentat abans. No obstant això, afortunadament, sobre els reals i els complexos classificar quàdriques o formes quadràtiques és el mateix. És conseqüència del resultat següent, que podeu trobar a l'apèndix (teoremes 11.4.1 i 11.4.3).

Teorema 6.3.3 *Sigui $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$. Les quàdriques $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{Q}'$ són projectivament equivalents si i només si les formes quadràtiques corresponents q i q' són projectivament equivalents.*

Dir que dues formes quadràtiques q i q' són projectivament equivalents vol dir que les aplicacions bilineals ϕ i ϕ' de les quals provenen són projectivament equivalents. La notació f^*q vol dir $f^*\phi$, o més precisament $f^*q(x) = f^*\phi(x, x)$.

Observem que una de les implicacions del teorema és òbvia, ja que $f^*q' = \lambda q$ implica trivialment $\tilde{f}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$. L'altra no ho és tant, i de fet ja hem vist que per a $k = \mathbb{Q}$ el teorema no és cert.

Així doncs, aquest teorema ens diu que sobre els reals o els complexos la classificació projectiva de les quàdriques és equivalent a la classificació de les aplicacions bilineals simètriques. Però aquesta classificació l'hem obtingut ja en els teoremes 6.2.7 i 6.2.8 .

Vegem, com a exemple, aquesta classificació sobre $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ en dimensions 2 i 3.

6.3.3 Classificació a $\mathbb{C}P^2$

Com que el rang classifica, tenim

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

rang 3	rang 2	rang 1
$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	$x^2 + y^2 = 0$	$x^2 = 0$
no singular	dues rectes	recta doble

6.3.4 Classificació a $\mathbb{C}P^3$

Com que el rang classifica, tenim

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}$$

$r=4$	$r=3$	$r=2$	$r=1$
$x^2+y^2+z^2+t^2=0$	$x^2+y^2+z^2=0$	$x^2+y^2=0$	$x^2=0$
no singular	con	dos plans	pla doble

6.3.5 Classificació a $\mathbb{R}P^2$

Com que el rang i l'índex classifiquen, tenim

$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$$

$r=3, i=0$	$r=3, i=1$	$r=2, i=0$
imaginària	no singular	punt real

$$\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$$

$r=2, i=1$	$r=1, i=0$
dues rectes	recta doble

6.3.6 Classificació a $\mathbb{R}P^3$

Com que el rang i l'índex classifiquen, tenim

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$$

$r=4, i=0$	$r=4, i=1$	$r=4, i=2$	$r=3, i=0$
imaginària	no reglada	reglada	punt

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}$$

$r=3, i=1$	$r=2, i=0$	$r=2, i=1$	$r=1, i=0$
con	recta real	dos plans	pla doble

Sobre el nom *reglada* vegeu l'exercici 8.5.2.

6.4 Punts simples. Hiperplà tangent

Sigui E un k-espai vectorial de dimensió $n+1$ i ϕ una aplicació bilineal simètrica sobre E. Sigui $\mathcal{Q}$ la quàdrica determinada per ϕ, és a dir,

$$\mathcal{Q} = \{p(x); \phi(x,x) = 0\}$$

i sigui $A = p(a) \in \mathcal{Q}$. Denotem $\phi(a,\cdot)$ l'aplicació lineal de E a k donada per

$$\begin{array}{rccc} \phi(a,\cdot): & E & \longrightarrow & k \\ & x & \longmapsto & \phi(a,x). \end{array}$$

Definició 6.4.1 *El punt A és simple si l'aplicació lineal $\phi(a,\cdot)$ és diferent de zero.*

Observem que això equival a dir $\dim \operatorname{Im} \phi(a,\cdot) = 1$, o $\dim \ker \phi(a,\cdot) = n$. En aquest cas es diu que la varietat lineal projectiva

$$T_A\mathcal{Q} = p(\ker \phi(a,\cdot))$$

és l'hiperplà tangent a $\mathcal{Q}$ per A. Tant la definició de punt simple com d'hiperplà tangent no depenen del representant a de A elegit.

Coordenades.

Fixem una base. Si

$$q(x) = \sum_{i,j} b_{ij} x^i x^j, \quad (b_{ij} = b_{ji})$$

és l'expressió de la forma quadràtica associada a ϕ, tenim

$$\frac{\partial q}{\partial x^i}(a) = 2\sum_j b_{ij} a^j$$

o matricialment

$$\operatorname{grad} q(a) = 2\phi a,$$

on ara ϕ denota la matriu (b_{ij}) i a el vector columna format per les coordenades de a en la base fixada.

Per tant

$$\ker \phi(a,\cdot) = \{x \in E; x^t \phi a = 0\} = \{x \in E; x^t \cdot \operatorname{grad} q(a) = 0\}$$

i l'equació de l'hiperplà tangent a $\mathcal{Q}$ en el punt $A = p(a)$ és

$$x^0 \frac{\partial q}{\partial x^0}(a) + \cdots + x^n \frac{\partial q}{\partial x^n}(a) = 0.$$

Si A és simple aquesta equació representa un subespai vectorial de dimensió n, la qual cosa vol dir que almenys una de les derivades parcials és diferent de zero. Així doncs:

Teorema 6.4.2 *El punt $A = p(a)$ de la quàdrica $\mathcal{Q} = \{p(x); q(x) = 0\}$ és simple si i només si* $\operatorname{grad} q(a) \neq 0$.

Demostració. Obvi. ∎

En particular, el fet de que $\operatorname{grad} q(a)$ sigui o no zero, no depèn de la base elegida per escriure q i calcular les derivades parcials.

Teorema 6.4.3 *Sigui $\mathcal{Q}$ la quàdrica associada a la forma bilineal simètrica ϕ. Llavors* $\det\phi \neq 0$ *si i només si tots els punts de la quàdrica són simples.*

Demostració.

Observem que si A és un punt múltiple (és a dir, $\operatorname{grad} q(a) = 0$), llavors el sistema lineal

$$\phi \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

admet $(a_0, \dots, a_n)$ com a solució no trivial, i per tant $\det\phi = 0$.

Recíprocament, si $\det\phi = 0$, existeix una solució no trivial a del sistema anterior. Per tant tindrem $\phi a = \operatorname{grad} q(a) \cdot a = 0$. Però, com que

$$q(a) = \sum_{i,j} b_{ij} a^i a^j = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial q}{\partial x^i}(a) \cdot a^i = \frac{1}{2} \operatorname{grad} q(a) \cdot a = 0,$$

resulta que A és un punt (múltiple) de la quàdrica, i tenim el resultat buscat. ∎

L'expressió $2q(x) = x \cdot \operatorname{grad} q(x)$ que ha aparegut en calcular, es coneix per fórmula d'Euler, L. (1707-1783).

Teorema 6.4.4 *Sigui $A = p(a)$ un punt simple de la quàdrica $\mathcal{Q}$. Tota recta per A continguda a $T_A\mathcal{Q}$ o bé està totalment continguda a $\mathcal{Q}$ (si $\mathcal{Q}$ és una cònica, aquest cas es dóna únicament quan $\mathcal{Q}$ consta de dues rectes que es tallen en un punt diferent de A) o talla $\mathcal{Q}$ únicament en A. En aquest cas ho fa amb multiplicitat 2. Tota recta per A que no pertanyi a $T_A\mathcal{Q}$ talla $\mathcal{Q}$ en A amb multiplicitat 1.*

Demostració. Sigui $B = p(b)$ un punt arbitrari. La intersecció de la recta AB amb la quàdrica $\mathcal{Q}$ està donada per l'equació $\phi(a + sb, a + sb) = 0$, que escriurem de la forma

$$\beta s^2 + \gamma s = 0, \quad \beta = \phi(b, b), \quad \gamma = 2\phi(a, b).$$

Si $B \in T_A\mathcal{Q}$, llavors $\gamma = 0$, i tenim dues possibilitats:

a) $B \in \mathcal{Q}$. Llavors $\beta = 0$ i $\phi(a + sb, a + sb) = 0, \quad \forall\, s$, de manera que tota la recta AB pertany a $\mathcal{Q}$.

b) $B \notin \mathcal{Q}$. Llavors $\beta \neq 0$ i l'equació anterior és simplement $\beta s^2 = 0$, és a dir $s = 0$ (que correspon al punt A) és arrel amb multiplicitat 2.

Si $B \notin T_A\mathcal{Q}$, llavors $\gamma \neq 0$ i $s = 0$ és arrel simple de $\beta s^2 + \gamma s = 0$.

Si $\mathcal{Q}$ és una cònica, $A \in \mathcal{Q}$ és simple i la recta $T_A\mathcal{Q}$ està continguda a $\mathcal{Q}$, agafem un sistema de referència projectiu tal que $A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0)$ amb B un punt qualsevol de $T_A\mathcal{Q}$. Com que, per exemple, el punt $(1, 1, 0)$ també pertany a la recta i a la cònica, l'expressió general d'aquesta

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0$$

queda reduïda a

$$z(cz + 2ex + 2fy) = 0$$

que és doncs el producte de dues rectes que es tallen en $(-f, e, 0)$. Com que A és simple, $e \neq 0$, ja que $\operatorname{grad} q(a) = (0, 0, 2e)$, i per tant el punt d'intersecció és diferent de A. ∎

6.5 Quàdrica dual

Sigui ϕ una aplicació bilineal simètrica no singular sobre el k-espai vectorial E.

Recordem que el radical de ϕ a E, o simplement el radical de E, està definit per

$$\operatorname{rad} E = \{v \in E; \phi(v, w) = 0, \ \forall w \in E\}.$$

Quan $\operatorname{rad} E = 0$, diem que ϕ és no singular.

Aquesta ϕ ens dóna una manera de passar al dual. Concretament definim

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & E^* \\ & x & \longmapsto & \phi(x, \cdot) \end{array}$$

Aquesta f és clarament lineal, i a més és injectiva ja que si $\phi(x, \cdot) = 0$, x seria del radical de ϕ, que estem suposant que és zero. Per tant tenim, via ϕ, un isomorfisme entre E i E^*.

Aquest isomorfisme permet definir una aplicació bilineal simètrica ϕ^* sobre E^* de manera natural a partir de ϕ. Concretament

$$\phi^*(f(x), f(y)) = \phi(x, y).$$

Es diu que ϕ^* és l'aplicació bilineal simètrica dual de ϕ.

Estudiem-ho matricialment. Fixem e_i base de E, i e_i^* la seva base dual a E^*. Sigui M la matriu de ϕ respecte a e_i, M^* la matriu de ϕ^* respecte a e_i^*, i $M(f)$ la matriu de f respecte a les bases e_i a E i e_i^* a E^*.

Com que

$$M(f)_{ij} = f(e_j)(e_i) = \phi(e_j, e_i) = \phi(e_i, e_j),$$

resulta que $M(f) = M$. De la definició de ϕ^* es dedueix

$$M(f)^t \cdot M^* \cdot M(f) = M,$$

i per tant $M^* = M^{-1}$, és a dir que *la matriu de la quàdrica dual ϕ^* és la inversa de la matriu de la quàdrica ϕ.*

Relacionem ara f amb l'espai tangent. Si $\mathcal{Q}$ és la quàdrica associada a ϕ, tenim

$$T_A\mathcal{Q} = \{p(x); \phi(a, x) = 0\} = \{p(x); f(a)(x) = 0\} = p(\ker f(a)).$$

Recordant la dualitat entre hiperplans de $P(E)$ i punts de $P(E^*)$, tenim:

Teorema 6.5.1 *Si $u^t x = u_0 x_0 + \cdots + u_n x_n = 0$ és l'equació de l'hiperplà tangent a una quàdrica no singular $\mathcal{Q}$ determinada per l'aplicació bilineal simètrica no singular ϕ en un punt A, llavors $\phi^*(u, u) = 0$.*

Recíprocament, si $u \in E^*$ compleix $\phi^*(u, u) = 0$, llavors $u^t x = 0$ és l'equació de l'hiperplà tangent a $\mathcal{Q}$ en el punt $f^{-1}(u)$, on f és l'isomorfisme entre E i E^* donat per $f(x) = \phi(x, \cdot)$.

Demostració. Com que l'equació de $T_A\mathcal{Q}$ és $\phi(x,a) = a^t\phi x = 0$, resulta que $u = \lambda\phi a$. Com que això és una igualtat matricial i les matrius de ϕ i f coincideixen, tenim

$$\phi^*(u,u) = u^t\phi^{-1}u = \lambda^2 a^t\phi\phi^{-1}\phi a = \lambda^2 a^t\phi a = 0,$$

per ser $A \in \mathcal{Q}$.

Recíprocament, si $\phi^*(u,u) = 0$ i denotem $a = f^{-1}(u)$, tenim

$$\phi(a,a) = a^t\phi a = u^t\phi^{-1}\phi\phi^{-1} = u^t\phi^{-1}u = \phi^*(u,u) = 0$$

és a dir que $A = p(a) \in \mathcal{Q}$.

A més $T_A\mathcal{Q}$ està donat per $\phi(a,x) = a^t\phi x = 0$, però $a^t\phi = u^t$ ja que $f(a) = \phi a = u$. ∎

Aquest resultat vol dir que *la família d'hiperplans tangents a una quàdrica donada per una matriu simètrica* M ($\det M \neq 0$) *representa en el dual una família de punts que pertanyen a la quàdrica del dual donada per* M^{-1}.

6.6 Polaritat

Sigui $\mathcal{Q}$ una quàdrica de $P(E)$ determinada per una aplicació bilineal simètrica no singular ϕ. Per a tot punt $A = p(a) \in P(E)$ definim *l'hiperplà polar* de A respecte $\mathcal{Q}$ per

$$\Pi_A = \{p(x); \phi(a,x) = 0\}.$$

És un vertader hiperplà ja que la seva equació és $a^t\phi x = 0$ i $a^t\phi \neq 0$, per ser $\operatorname{rad}\phi = 0$. Es diu que A és el *pol* de Π_A.

Si $A \in \mathcal{Q}$ l'hiperplà polar és l'hiperplà tangent.

Si $B = p(b) \in P(E)$ i $\phi(a,b) = 0$ es diu que els punts A i B són *conjugats* respecte a $\mathcal{Q}$, de manera que l'hiperplà polar és el lloc geomètric dels punts conjugats.

Observem que amb la notació del paràgraf anterior

$$\Pi_A = p(\ker f(a)),$$

que ens diu que, via la dualitat, l'hiperplà Π_A correspon al punt del dual $f(a)$. Però recordem que el punt A correspon a l'hiperplà del dual $\ker a$ (interpretant com sempre $a : E^* \longrightarrow k$ donada per $a(\omega) = \omega(a)$). D'aquesta manera el parell pol-polar (A, Π_A) va a parar per dualitat al parell polar-pol $(\ker a, f(a))$. Que aquesta darrera parella són efectivament polar-pol respecte a la quàdrica dual ϕ^* es veu fàcilment, ja que, si escrivim els elements ω de E^* com $\omega = f(b)$, tenim

$$\Pi_{f(a)} = \{p(\omega); \phi^*(f(a), f(b)) = \phi(a,b) = f(b)a = a(\omega) = 0\} = p(\ker a).$$

Exercici 6.6.1 *Trobeu el pol respecte a una quàdrica donada ϕ de l'hiperplà $ax+by+cz+dt = 0$.*

Solució 1. Sigui $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ el punt buscat. L'hiperplà polar d'aquest punt respecte a ϕ té equació

$$\phi((\alpha,\beta,\gamma,\delta),(x,y,z,t)) = 0$$

o equivalentment

$$(x,y,z,t)\phi\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix} = 0.$$

Així

$$\phi\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix},$$

és a dir

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix} = \lambda\phi^{-1}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

Solució 2. Passem el problema al dual. És a dir, es tracta de trobar l'hiperplà polar respecte a ϕ^* del punt del dual de coordenades (a,b,c,d). Com que la matriu de ϕ^* és ϕ^{-1}, l'equació de l'hiperplà polar és $\phi^{-1}((a,b,c,d),(x,y,z,t)) = 0$, que es pot escriure

$$(x,y,z,t)\phi^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Si ara desfem el pas al dual, a aquest hiperplà del dual correspon el punt que té per coordenades els coeficients de x, y, z, t en l'equació de l'hiperplà, és a dir $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ amb

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \lambda\phi^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

com abans. ∎

6.7 Exercicis

6.7.1 Trobeu la base en la qual l'aplicació bilineal simètrica

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

diagonalitza.

6.7.2 Doneu l'equació canònica i classifiqueu les còniques projectives següents:

a) $4x^2 + y^2 + 2xz + 2yz = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 2xz + 2yz = 0$;

c) $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy - 6yz + 2xz = 0$;

d) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz = 0$;

e) $x^2 - 3z^2 - 2xy + 2xz - 6yz = 0$;

f) $x^2 + 3z^2 - 4xy - 4xz + 4yz = 0$;

g) $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 12xz - 6yz = 0$;

h) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 4xz + 2yz = 0$.

6.7.3 Doneu l'equació canònica i classifiqueu les quàdriques següents:

a) $2x^2 + 3y^2 - z^2 - 5 - 2xy + 2xz + 4yz - 2y + 4x = 0$;

b) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4yz - 6xz - 2x + 8y - 2z + 9 = 0$;

c) $x^2 + 5y^2 - 4z^2 + 4xy - 2yz + 2y - 1 = 0$;

d) $2x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 8x + 6y - 12z - 21 = 0$;

e) $2x^2 + y^2 - 4z^2 - 4xy - 4yz - 4y - 2z + 2 = 0$;

f) $x^2 + 3y^2 - 3z^2 + 3 + 6xy + 6xz - 14x + 6yz - 2y = 0$.

6.7.4

a) Donada la quàdrica projectiva

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - xy + xt + 2yz = 0,$$

trobeu el pla polar del punt $P = [1, 0, -2, 1]$.

b) Proveu que

$$2x - 2y - 3z + 8t = 0$$

és l'equació del pla tangent a la quàdrica

$$4x^2 + y^2 - 9z^2 - 16t^2 = 0$$

i trobeu el punt de contacte.

c) Trobeu els punts singulars de la quàdrica

$$4x^2 + 4y^2 - z^2 + 4zt - 4t^2 = 0.$$

Classifiqueu-la.

d) Trobeu les equacions dels plans tangents a la quàdrica

$$2x^2 - 6y^2 + 3z^2 - 5t^2 = 0$$

que passen per la recta definida per les equacions $x + 9y - 3z = 0$, $3x - 3y + 6z - 5t = 0$.

6.7.5 Donada la quàdrica de l'espai projectiu real

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - t^2 + 2xz + 2xt - 4yz + 4zt = 0,$$

a) Classifiqueu-la.

b) Trobeu l'equació del pla tangent en el punt $[-2, 1, 1, 1]$.

6.7.6 Donada la cònica

$$x^2 + y^2 - 2yz = 0$$

i el punt $A = [2, -1, -1]$,

a) Trobeu la polar de A.

b) Donat el punt $B = [1, 1, -2]$, trobeu el punt C tal que A, B, C sigui un triangle autopolar respecte a la cònica (cada vèrtex és el pol del costat oposat).

6.7.7 Demostreu que en un espai vectorial complex de dimensió n hi ha n classes d'equivalència d'aplicacions bilineals simètriques projectivament equivalents.

Demostreu que en un espai vectorial real de dimensió n hi ha

$$\begin{array}{rl} \dfrac{n^2+4n-1}{4} & \text{si } n \text{ és imparell} \\ \dfrac{n^2+4n}{4} & \text{si } n \text{ és parell} \end{array}$$

classes d'equivalència d'aplicacions bilineals simètriques projectivament equivalents.

7. Còniques

En aquest capítol restringirem la nostra atenció al cas $\dim P(E) = 2$. Les quàdriques en aquesta dimensió s'anomenen còniques. El punt central del capítol és la definició sintètica de cònica, és a dir una definició de cònica que no recorre a l'àlgebra. Concretament veurem que una cònica és el lloc geomètric dels punts d'intersecció de rectes homòlogues per una projectivitat entre feixos de rectes. En particular podrem parlar de la raó doble de quatre punts sobre una cònica, tot i no estar alineats, però és que de fet les còniques són rectes projectives.

Veurem també el teorema de Pascal, ja comentat a la introducció, i el seu dual. Donarem construccions efectives amb regle de punts sobre una cònica i de rectes tangents.

Interpretarem projectivament propietats i conceptes de les còniques afins com ara el centre. Concretament veurem que el centre és el pol de la recta de l'infinit. Com que depèn doncs de quina recta agafem com a recta de l'infinit, queda clar que el concepte de centre no és un concepte projectiu.

Recordarem la definició clàssica de cònica des del punt de vista euclidià, com a lloc geomètric dels punts del pla tals que el quocient de distàncies a una recta (directriu) i un punt (focus) és constant. Interpretarem tant la directriu com el focus en el context projectiu. Aquests conceptes involucren distàncies i per interpretar-los necessitarem una mètrica. Això ens obligarà a passar al projectiu complex.

7.1 Propietats generals

Teorema 7.1.1 *Siguin $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}$' còniques diferents que no tenen una recta en comú. Llavors $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ té com a molt quatre punts. Si k és algebraicament tancat i comptem amb multiplicitat, són exactament quatre.*

Demostració. *Cas 1.* $\mathcal{C}$ té un punt múltiple $A = p(a)$, (és a dir $\phi(a, \cdot) = 0$). Prenem $B = p(b) \in \mathcal{C}$, $B \neq A$. La recta AB està totalment continguda a la cònica, ja que, si ϕ és l'aplicació bilineal associada a $\mathcal{C}$, tenim

$$\phi(a + \lambda b, a + \lambda b) = 2\lambda\phi(a, b) = 0.$$

Agafem una referència projectiva en la qual $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 1, 0]$. Com que $[1, 1, 0]$ pertany també a la recta, l'equació de la cònica es redueix a $z(cz + 2ex + 2fy) = 0$, que ens diu que $\mathcal{C}$ és unió de dues rectes. Com que recta i cònica tenen com a molt dos punts en comú, les dues rectes en poden tenir com a molt quatre.

Cas 2. Tots els punts de $\mathcal{C}$ són simples. Prenem $A, B \in \mathcal{C}$ i $A \notin \mathcal{C}'$. Sigui D el punt d'intersecció de les rectes tangents a $\mathcal{C}$ per A i B respectivament. Prenem una referència projectiva amb $A = (0,1,0)$, $B = (0,0,1)$, $D = (1,0,0)$ (observem que no estan alineats). En aquesta referència (sigui qui sigui el punt unitat) la cònica s'escriu

$$q : ax^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0.$$

L'equació de la recta tangent per A és

$$x\frac{\partial q}{\partial x}(a) + y\frac{\partial q}{\partial y}(a) + z\frac{\partial q}{\partial z}(a) = dx + fz = 0.$$

Com que passa per $[1,0,0]$, tenim $d = 0$. Anàlogament la recta tangent per B és $ex + fy = 0$, que pel fet de passar per $[1,0,0]$ ha de tenir $e = 0$. En conclusió, la cònica té equació

$$ax^2 + 2fyz = 0.$$

Si $z = 0$, llavors $x = 0$ i l'únic punt d'aquesta cònica amb $z = 0$ és el $A = [0,1,0]$, que per hipòtesi no pertany a $\mathcal{C}'$.

Podem suposar doncs $z \neq 0$. Sigui $w = \frac{x}{z}$. Els punts de $\mathcal{C}$ són de la forma $[w, -\frac{a}{2f}w^2, 1]$, i si ara imposem que aquest punt pertanyi a la segona cònica $\mathcal{C}'$, obtenim una equació polinòmica de quart grau en w, que té per tant com a molt quatre arrels i exactament quatre si k és algebraicament tancat i comptem amb multiplicitat. ∎

Teorema 7.1.2 *Cinc punts del pla projectiu tals que cap recta en contingui quatre d'ells determinen una única cònica.*

Demostració. La idea és que a l'equació general de la cònica hi ha sis incògnites que queden reduïdes a cinc dividint tota l'equació per una d'elles. Com que tenim cinc condicions, plantejarem un sistema de cinc equacions amb cinc incògnites i tindrem el resultat.

Concretament, si agafem tres punts no alineats (dels cinc punts donats) com a referència projectiva $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, l'equació de la cònica es redueix a

$$dxy + exz + fyz = 0.$$

Si $[x_0, y_0, z_0]$, $[x_1, y_1, z_1]$ són les coordenades projectives dels altres dos punts, tenim

$$\begin{aligned} dx_0y_0 + ex_0z_0 + fy_0z_0 &= 0; \\ dx_1y_1 + ex_1z_1 + fy_1z_1 &= 0. \end{aligned}$$

Es pot veure ara que una de les tres expressions

$$x_0x_1\begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \quad y_0y_1\begin{vmatrix} x_0 & z_0 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}, \quad z_0z_1\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

és diferent de zero.

En efecte, si $x_0 = 0$ (mateix raonament per a x_1), ha de ser $y_0 \neq 0$ i $z_0 \neq 0$, ja que aquest punt és diferent als tres agafats com a referència. També ha de ser $x_1 \neq 0$, ja que si no tindríem quatre punts alineats (els quatre amb primera coordenada zero). L'anul·lació de la segona expressió ens dóna llavors $y_1 = 0$, i la del tercer $z_1 = 0$, cosa que no pot ser perquè el punt $[x_1, y_1, z_1]$ és diferent del $[1, 0, 0]$. Per tant, si $x_0 = 0$, una de les tres expressions anteriors, la segona o la tercera, és diferent de zero.

El mateix raonament és vàlid per a y_0 i z_0 (i anàlogament y_1 i z_1). Podem suposar doncs $x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1$ diferents de zero. Però llavors l'anul·lació de les tres expressions implicaria

$$\begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & z_0 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

i això és equivalent a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_1 \\ 0 & y_0 & y_1 \\ 0 & z_0 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_0 & x_1 \\ 1 & y_0 & y_1 \\ 0 & z_0 & z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

que ens diu que els quatre punts $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[x_0, y_0, z_0]$, $[x_1, y_1, z_1]$ estan alineats, en contra de la hipòtesi.

Per tant podem suposar, sense perdre generalitat, que la primera expressió és diferent de zero i agafar $f = 1$ (si fos la segona, agafaríem $e = 1$, i si fos la tercera, $d = 1$). Així podem assegurar que el sistema

$$\begin{aligned} dx_0y_0 + ex_0z_0 &= -y_0z_0 \\ dx_1y_1 + ex_1z_1 &= -y_1z_1 \end{aligned}$$

té solució única, i llavors la cònica buscada és

$$exy + dxz + yz = 0$$

amb e, d les solucions del sistema anterior.

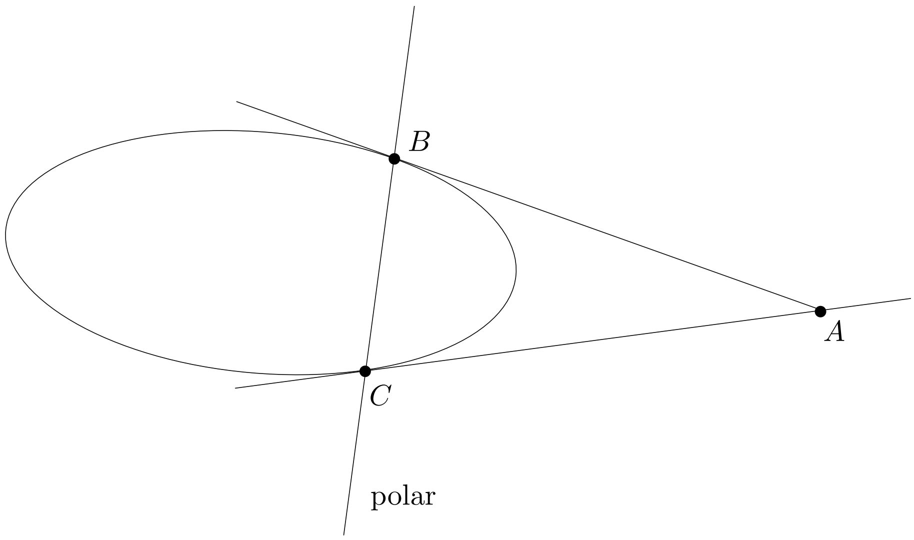
Finalment, per demostrar la unicitat observem que si $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ tenen cinc punts en comú, pel teorema anterior 7.1.1, tenen una recta en comú. Però quan una cònica conté una recta, la cònica consta únicament d'aquesta recta (doble) o de dues rectes. Una d'aquestes rectes conté tres punts i l'altra dos (o tres). Com que $\mathcal{C}'$ també consisteix en un parell de rectes, són les mateixes. ∎

7.2 Polaritat

Recordem que si ϕ és l'aplicació bilineal simètrica no singular associada a la cònica $\mathcal{C}$ i $A = p(a) \in P(E)$, es defineix la recta polar de A respecte $\mathcal{C}$ com

$$\text{Polar}\, A = p(\ker \phi(a, \cdot)).$$

Si $A \in \mathcal{C}$, aquesta recta és la tangent. Si $A \notin \mathcal{C}$ la polar és la recta determinada pels punts de contacte de les dues tangents a $\mathcal{C}$ per A (si aquestes tangents existeixen).



En efecte, si denotem per $B = p(b)$ i $C = p(c)$ aquests dos punts de contacte, tenim

$$\phi(a,b) = \phi(a,c) = 0$$

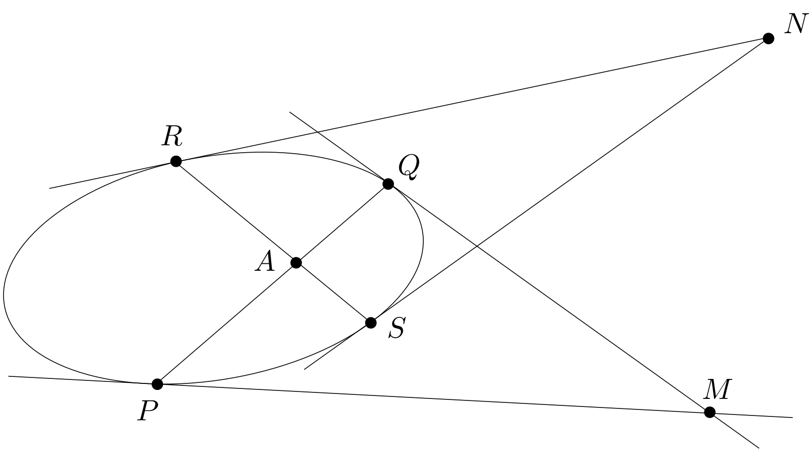
per pertànyer A a les dues tangents, i per tant

$$\phi(b + \lambda c, a) = 0$$

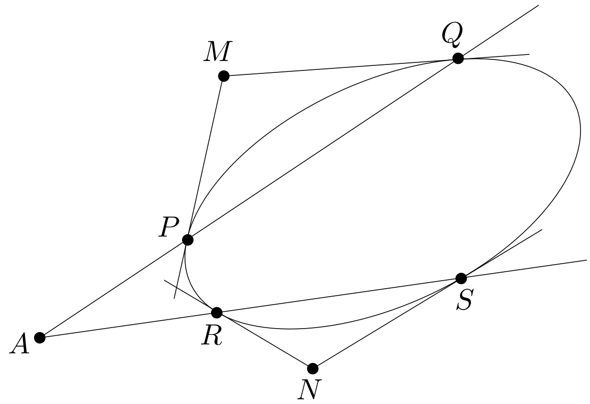
per a tot $\lambda \in k$, que ens diu que la recta BC és la polar de A.

Si no tenim aquestes dues tangents (per exemple A interior a $\mathcal{C}$ en el cas $k = \mathbb{R}$), podem traçar per A dues rectes qualssevol que tallin $\mathcal{C}$ en punts P, Q i R, S respectivament.

Siguin M, N els punts d'intersecció de les tangents a la cònica per P i Q i per R i S respectivament. Llavors clarament la recta MN és la polar de A respecte a $\mathcal{C}$, ja que A és conjugat de M i N.



El dibuix pot ser també així:



Observi's doncs que la polar de A és el lloc geomètric dels punts d'intersecció de les dues tangents a la cònica $\mathcal{C}$ pels punts en què les rectes per A la tallen.

En particular, si r passa pel pol de s, s passa pel pol de r (vegeu l'exercici 7.2.3).

Teorema 7.2.1 *Sigui $\mathcal{C}$ una cònica no singular i suposem que la recta determinada per dos punts $A, A' \notin \mathcal{C}$ talla $\mathcal{C}$ en punts M, M'.*

Llavors A i A' són conjugats respecte a $\mathcal{C}$ si i només si $(A, A', M, M') = -1$.

Demostració. Per estar M i M' a la recta AA', existeixen α i β únics tals que $M = p(a + \alpha a')$, $M' = p(a + \beta a')$. Per estar també a la cònica, α i β són arrels de l'equació

$$\phi(a + ta', a + ta') = t^2 + \phi(a', a') + 2t\phi(a, a') + \phi(a, a) = 0;$$

en particular

$$\alpha + \beta = -\frac{2\phi(a, a')}{\phi(a', a')}.$$

Per altra banda, com que

$$(A, A', M, M') = (a, a', a + \alpha a', a + \beta a') = \frac{\beta}{\alpha},$$

resulta que $\phi(a, a') = 0$ si i només si $\alpha + \beta = 0$, és a dir si i només si $(A, A', M, M') = -1$. ∎

Així, els punts de la polar de A tals que la recta que els uneix amb A és secant a la cònica estan caracteritzats com el lloc geomètric dels punts A' tals que el parell A, A' està separat harmònicament pels punts d'intersecció de la recta AA' amb la cònica.

7.2.1 Conjugació en un feix respecte a una cònica

Sigui $\mathcal{C}$ una cònica no singular del pla projectiu i sigui P un punt del pla. Sigui $\mathcal{F}_P$ el feix de rectes per P.

Definim una aplicació de $\mathcal{F}_P$ en $\mathcal{F}_P$ associant a cada recta r del feix, la recta del feix que passa pel pol de r.

Escriurem

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{F}_P & \longrightarrow & \mathcal{F}_P \\ r & \longrightarrow & s = PP_r \end{array}$$

on s és la recta determinada per P i pel pol P_r de r respecte a $\mathcal{C}$.

En coordenades, si $P = [p_0, p_1, p_2]$ i denotem per ϕ la matriu associada a la cònica, la imatge d'una recta $ax + by + cz = 0$ del feix és una altra recta $a'x + b'y + c'z = 0$ del feix caracteritzada per

$$(a', b', c') \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(a', b', c')\phi^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0,$$

ja que $P_r = (a, b, c)\phi^{-1}$.

L'aplicació φ és una projectivitat. Per veure això agafem coordenades de manera que $P = [0, 0, 1]$, ja que llavors les rectes del feix són de la forma $y = mx$, on m és el paràmetre projectiu i φ s'escriu, en funció de m, com

$$\varphi(m) = \frac{\alpha m + \beta}{\gamma m + \delta}$$

per a certs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, i per tant és una projectivitat.

Això permet calcular fàcilment les *tangents a una cònica des d'un punt exterior.*

En efecte, com que les tangents a $\mathcal{C}$ des de P són justament els punts fixos de φ, l'equació d'aquestes tangents és $ax + by + cz = 0$ amb els coeficients a, b, c caracteritzats per

$$(a, b, c) \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{7.1}$$

$$(a, b, c)\phi^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0. \tag{7.2}$$

Exercici 7.2.2 *Trobeu, emprant el mètode abans indicat, les tangents a l'el·lipse*

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

des del punt $(3, 0)$.

Solució. Pensem el nostre pla euclidià com el $z = 1$ d'un espai projectiu (homogeneïtzació.) El problema és doncs trobar la tangent a la cònica

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 0$$

des del punt $[3, 0, 1]$. Busquem doncs (a, b, c) tals que

$$(a,b,c)\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}=3a+c=0$$

$$(a,b,c)\begin{pmatrix}4&&\\&9&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=4a^2+9b^2-c^2=0.$$

Resolem i obtenim que les tangents són $3x\pm\sqrt{5}y-9=0$. ∎

Exercici 7.2.3 *Sigui $\mathcal{C}$ una cònica no singular i r i s dues rectes. Demostreu analíticament que si r passa pel pol de s, llavors s passa pel pol de r (es diu que r i s són conjugades).*

Solució. Siguin A, B els punts en els quals s talla $\mathcal{C}$ i sigui P el punt on es tallen les dues tangents a $\mathcal{C}$ per A i B respectivament.

En la base $A=[0,1,0], B=[0,0,1], P=[1,0,0]$ l'equació de la cònica és

$$x^2+cyz=0.$$

L'equació de r és llavors del tipus

$$\psi y+\eta z=0.$$

El pol és un punt $[a,b,c]$ tal que

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&c^{-1}\\0&c^{-1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\psi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\c^{-1}\eta\\c^{-1}\psi\end{pmatrix},$$

que és un punt de s, com volíem. ∎

Exercici 7.2.4 *Si la recta r és la polar del punt A respecte a una cònica $\mathcal{C}$ i f és una projectivitat, llavors $f(r)$ és la polar de $f(A)$ respecte a la cònica $f(\mathcal{C})$.*

Solució. Si ϕ és la matriu associada a $\mathcal{C}$, $A=[a_0,a_1,a_2]$, i M és la matriu de f, l'equació de $f(r)$ és

$$(a_0,a_1,a_2)\phi M^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0,$$

ja que aquesta equació es compleix trivialment quan

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}\quad\text{amb } (x_0,y_0,z_0)\in r.$$

Anàlogament l'equació de $f(\mathcal{C})$ és

$$M^{-1t}\phi M^{-1},$$

ja que llavors, si $X \in \mathcal{C}$,

$$(M(X))^t M^{-1t} \phi M^{-1} M(X) = X^t M X = 0.$$

La polar de $f(A)$ respecte $M^{-1t}\phi M^{-1}$ és

$$(M(A))^t M^{-1t} \phi M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

que és justament $f(r)$. ∎

7.3 Estructura projectiva de les còniques

Sigui $\mathcal{C}$, com abans, una cònica no singular de $P(E)$. Fixem $A \in \mathcal{C}$. Sigui $\mathcal{F}$ el feix de rectes per A. Considerem

$$\begin{array}{rrcl} j_A : & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & r & \longmapsto & r \cdot \mathcal{C} \\ & T_A\mathcal{C} & \longmapsto & A, \end{array}$$

és a dir, j_A envia cada recta per A al punt d'intersecció d'aquesta recta amb la cònica (diferent de A) i la tangent a $\mathcal{C}$ en A al mateix punt A.

Com que tota recta per A talla $\mathcal{C}$ en un únic punt diferent de A excepte la tangent que només la talla en A, j_A està ben definida i és bijectiva.

Aquesta bijecció ens permetrà parametritzar els punts X de la cònica pel pendent de les rectes AX.

7.3.1 Coordenades projectives d'un feix de rectes en el pla

Sigui $\mathcal{F}_A$ el feix de rectes per $A = [a_0, a_1, a_2] \in P(E)$. Recordem que cada una de les rectes d'aquest feix ($ax + by + cz = 0$ amb $aa_0 + ba_1 + ca_2 = 0$) representa el punt del dual de coordenades $[a, b, c]$, i per tant a tot el feix $\mathcal{F}_A$ correspon la recta r_A del dual d'equació $a_0x + a_1y + a_2z = 0$.

Direm que una aplicació $f : \mathcal{F}_A \longrightarrow \mathcal{F}_B$ és una *projectivitat entre feixos de rectes* quan l'aplicació $f^* : r_A \longrightarrow r_B$, entre les corresponents rectes del dual induïda per f, sigui una projectivitat.

Observem que

$$f^*[a, b, c] = [a', b', c'] \Longleftrightarrow f(\{ax + by + cz = 0\}) = \{a'x + b'y + c'z = 0\}$$

amb $aa_0 + ba_1 + ca_2 = 0$ i $a'b_0 + b'b_1 + c'c_2 = 0$ ($B = [b_0, b_1, b_2]$).

Aquesta definició és natural, ja que *projectivitat* vol dir essencialment conservar la raó doble, i la raó doble de quatre rectes concurrents és la raó doble dels quatre punts alineats que determinen en el dual.

Les projectivitats entre feixos les escriurem en funció de les coordenades projectives del feix. Concretament agafarem com a definició de *coordenada projectiva d'una recta del feix* $\mathcal{F}_A$ la coordenada projectiva del punt que aquesta recta determina en la recta r_A del dual.

Així, un cop fixats tres punts de r_A com a referència projectiva $\infty, 0, 1$, ja podem parlar de coordenada projectiva de les rectes del feix. L'elecció d'aquesta referència equival evidentment a elegir tres rectes del feix.

El que s'acostuma a fer, per simplificar, és agafar una base tal que $A = [1, 0, 0]$, i així les rectes per A tenen equació $y = \lambda z$ i $z = 0$. El punt A en el dual és la recta $x = 0$. Agafem ara coordenades projectives en aquesta recta del dual posant $[0, 0, -1], [0, 1, 0], [0, 1, -1]$ com a referència projectiva, és a dir com a punts ∞, 0, 1 respectivament. Recordem que llavors el punt $x[0, 0, -1] + y[0, 1, 0]$ té coordenada projectiva $t = \frac{x}{y}$.

D'aquesta manera la recta $y = \lambda z$ correspon al punt del dual $[0, 1, -\lambda]$ que té coordenada projectiva λ; és a dir el seu pendent en el pla y, z, i la recta $z = 0$ correspon al punt del dual $[0, 0, 1]$ que té coordenada projectiva ∞, que es pot interpretar també com el seu pendent. Podem doncs dir que la coordenada projectiva de les rectes del feix és el seu pendent.

7.3.2 Teorema de Steiner

Teorema 7.3.1 (teorema de Steiner) *Siguin A, B dos punts d'una cònica $\mathcal{C}$. L'aplicació entre el feix de rectes per A i el feix de rectes per B induïda per la cònica és una projectivitat.*

Demostració. L'aplicació que estem considerant és justament $j_B^{-1} \circ j_A$. Posem coordenades de manera que $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 1, 0]$. Llavors $\mathcal{C}$ s'escriu

$$cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0.$$

Les rectes per A tenen equació $y = tz$ (i $z = 0$, que és justament AB) i t representa la coordenada projectiva.

Les rectes per B tenen equació $x = sz$ (i $z = 0$, que és justament AB) i s representa la coordenada projectiva, agafant sobre $y = 0$ (dual del punt $B = [0, 1, 0]$) la referència $[0, 0, -1]$, $[1, 0, 0]$, $[1, 0, -1]$.

Per tant, en tallar dues d'aquestes rectes, tenim punts de la forma $[sz, tz, z]$, que, com que pertanyen a $\mathcal{C}$, compleixen

$$c + 2dst + 2es + 2ft = 0$$

o equivalentment

$$s = \frac{-2ft - c}{2dt + 2e}.$$

Per tant, en coordenades projectives

$$\begin{aligned}
j_B^{-1} j_A(t) &= \frac{-2ft - c}{2dt + 2e} \\
j_B^{-1} j_A(\infty) &= -\frac{f}{d}, && \text{perquè la recta tangent en } B \text{ és } dx + fz = 0; \\
j_B^{-1} j_A(-\frac{e}{d}) &= \infty, && \text{perquè la recta tangent en } A \text{ és } dy + ez = 0,
\end{aligned}$$

que vol dir que, en bases adequades, $j_B^{-1} j_A$ prové de l'aplicació lineal

$$\begin{pmatrix} -2f & -c \\ 2d & 2e \end{pmatrix}$$

i és doncs una projectivitat. ∎

Corol·lari 7.3.2 *Siguin A, B, C, D punts d'una cònica $\mathcal{C}$. La raó doble (XA, XB, XC, XD) és independent del punt $X \in \mathcal{C}$ considerat.*

Demostració. Obvi. ∎

Per tant, quan tinguem quatre punts sobre una cònica, podrem parlar de la seva raó doble (A, B, C, D); però s'ha d'entendre que ens referim a la raó doble (XA, XB, XC, XD), on X és un punt qualsevol de la cònica.

Teorema 7.3.3 (recíproc de Steiner) *Siguin $\mathcal{F}_A$ i $\mathcal{F}_B$ feixos de rectes pels punts A i B del pla projectiu. Sigui $h : \mathcal{F}_A \longrightarrow \mathcal{F}_B$ una projectivitat entre aquests feixos. Llavors el lloc geomètric dels punts homòlegs, és a dir els punts $r \cdot h(r)$ quan r varia entre totes les rectes de $\mathcal{F}_A$, és una cònica que conté A i B. Si $h(AB) = AB$ la cònica consta de dues rectes (AB i una altra anomenada eix de colineació).*

Demostració. Prenem coordenades de manera que $A = [1, 0, 0]$ i $B = [0, 1, 0]$. Sabem que la recta $r : y = tz$ del primer feix va a parar per h a la recta $h(r) : x = sz$ del segon amb

$$s = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Comparant l'equació amb l'obtinguda a la demostració del teorema de Steiner construïm la cònica

$$cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0$$

amb

$$\begin{aligned} \alpha &= -2f \\ \beta &= -c \\ \gamma &= 2d \\ \delta &= 2e. \end{aligned}$$

Aquesta cònica passa per A i B, i el punt $r \cdot h(r) = [s(t), t, 1]$ hi pertany.

Finalment, que $z = 0$ sigui fixa vol dir que el punt de coordenada $t = \infty$ va al punt $s = \infty$. Com que $t = \infty$ va a $s = \frac{\alpha}{\gamma}$, deduïm que $\gamma = 0$ i per tant $d = 0$. Així, la cònica és

$$z(cz + 2ex + 2fy) = 0,$$

que són dues rectes, una de les quals és AB. ∎

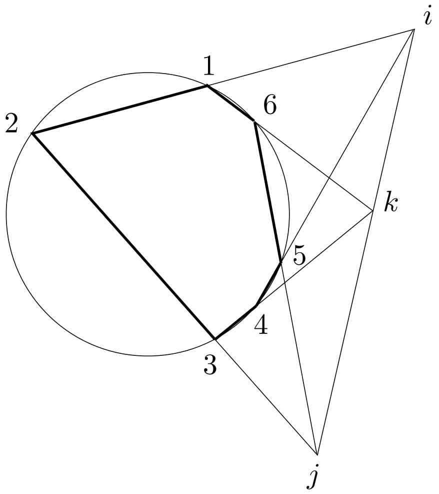
Teorema 7.3.4 (dual de Steiner) *Sigui $h : r \longrightarrow r'$ una projectivitat entre rectes. Llavors les rectes $m \cdot h(m)$ quan m varia en r, són tangents a una cònica. Si el punt $a = r \cdot r'$ no és fix, r i r' són tangents a la cònica. Si a és fix, totes les rectes $m \cdot h(m)$, $m \neq a$ passen per un punt.*

Demostració. Dualitzar el teorema de Steiner. ∎

7.4 Teoremes de Pascal i Brianchon

Teorema 7.4.1 (teorema de Pascal) *Donats sis punts* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *d'una cònica no singular* $\mathcal{C}$, *els punts* $i = 12 \cdot 45$, $j = 23 \cdot 56$, $k = 34 \cdot 61$ *estan alineats. Recíprocament, donats sis punts tals que els corresponents* i, j, k *estan alineats, llavors aquests punts estan sobre una cònica.*

Demostració.



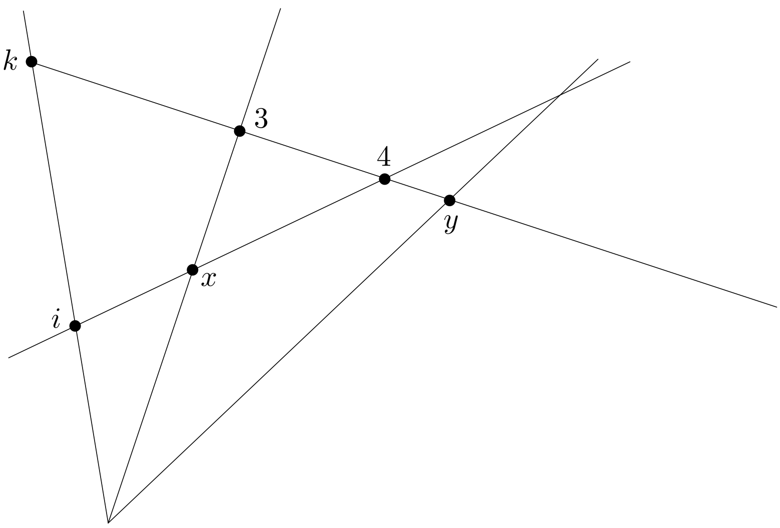
Definim $x = 45 \cdot 23$, $y = 56 \cdot 34$ i calculem la raó doble

$$(i, x, 4, 5) = (2i, 2x, 24, 25) = (21, 23, 24, 25),$$

ja que la recta $2i$ és la recta 21, i la recta 23 és la recta $2j$. Com que ara els punts són de $\mathcal{C}$, tenim

$$(21, 23, 24, 25) = (61, 63, 64, 65) = [\text{tallant amb } 34](k, 3, 4, y),$$

i per tant $(i, x, 4, 5) = (k, 3, 4, y)$. Per coincidir en el tercer lloc el mateix punt (el 4) les rectes ik, $x3, 5y$ són concurrents. Això és així pel fet que la projecció d'una recta sobre l'altra des del punt de tall $ik \cdot x3$ conserva la raó doble i per tant ha de portar el punt 5 sobre el punt y.



Finalment tenim

$$ik \cdot x3 = ik \cdot 23 = 5y \cdot 23 = 56 \cdot 23 = j,$$

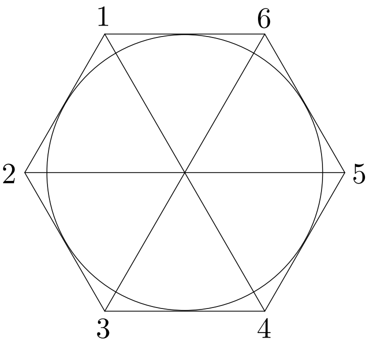
i per tant i, j, k estan alineats.

Deixem la demostració del recíproc com exercici. ∎

El teorema següent és el dual del teorema de Pascal.

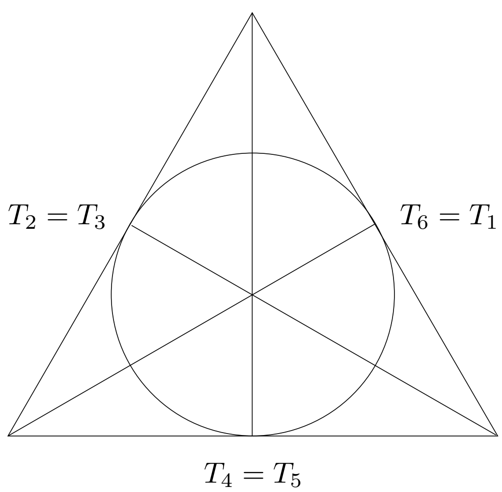
Teorema 7.4.2 (teorema de C.J. Brianchon (1785-1864)) *Siguin T_i, $i = 1, \ldots, 6$ sis rectes tangents a una cònica no singular $\mathcal{C}$. Sigui $i = T_i \cdot T_{i+1}$ (mod 6). Llavors les rectes 14, 25, 36 són concurrents.*

Demostració. S'obté dualitzant el teorema de Pascal. La notació ij vol dir la recta pels punts i, j. ∎



Exercici 7.4.3 *Demostreu que si un cònica està inscrita en un triangle, les rectes que uneixen els vèrtexs amb els punts de contacte dels costats oposats són concurrents.*

Solució.



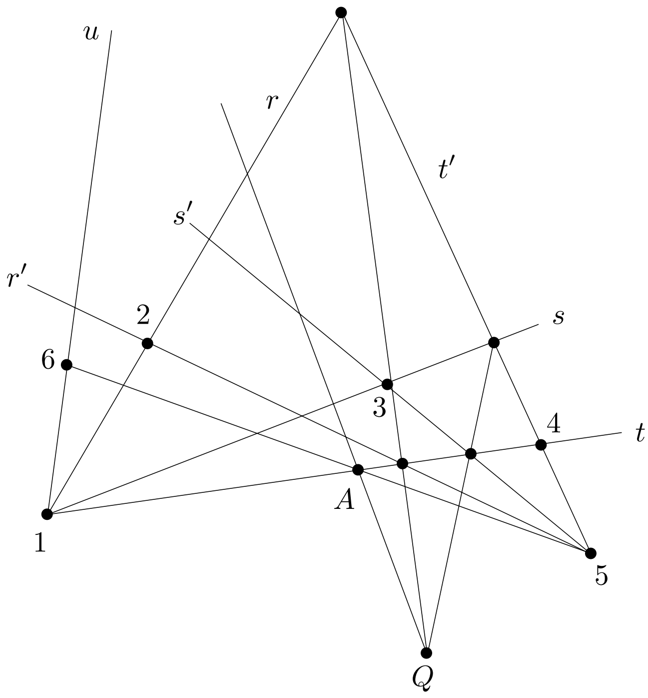
Apliquem el teorema de Brianchon amb $T_2 = T_3$, $T_4 = T_5$, $T_6 = T_1$ tenint en compte que el punt d'intersecció de T_2 i T_3 (i anàlogament els altres), quan T_2 s'acosta a T_3, és el punt de contacte. ∎

7.5 Construccions amb regle

Donem algunes construccions que podem fer emprant el regle.

Exercici 7.5.1 *Donats cinc punts d'una cònica, construir-ne més*

Solució 1. Siguin 1, 2, 3, 4, 5 els punts donats. Construïm les rectes $r = 12$, $s = 13$, $t = 14$, $r' = 52$, $s' = 53$, $t' = 54$. Construïm una recta auxiliar u per 1.



Busquem justament el punt on u talla la cònica. Per tant, tan sols hem de trobar una recta per 5, u', tal que $(u, r, s, t) = (u', r', s', t')$. Llavors el punt uu' serà el punt buscat.

Podem trobar u' així:

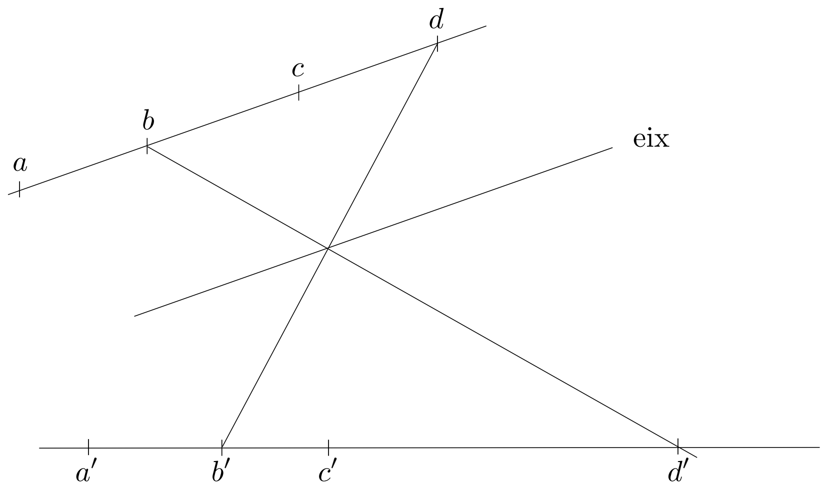
Primer mètode. Sigui Q el punt d'intersecció de les rectes $rt' \cdot r't$ i $st' \cdot s't$. Escrivim la raó doble

$$(r, s, t, u) = (rt', st', tt', ut') = [\text{projecció des de } Q \text{ sobre t}](tr', ts', tt', A),$$

on A és la intersecció amb t de la recta determinada per Q i ut'. Llavors la recta buscada u' és la recta $5A$.

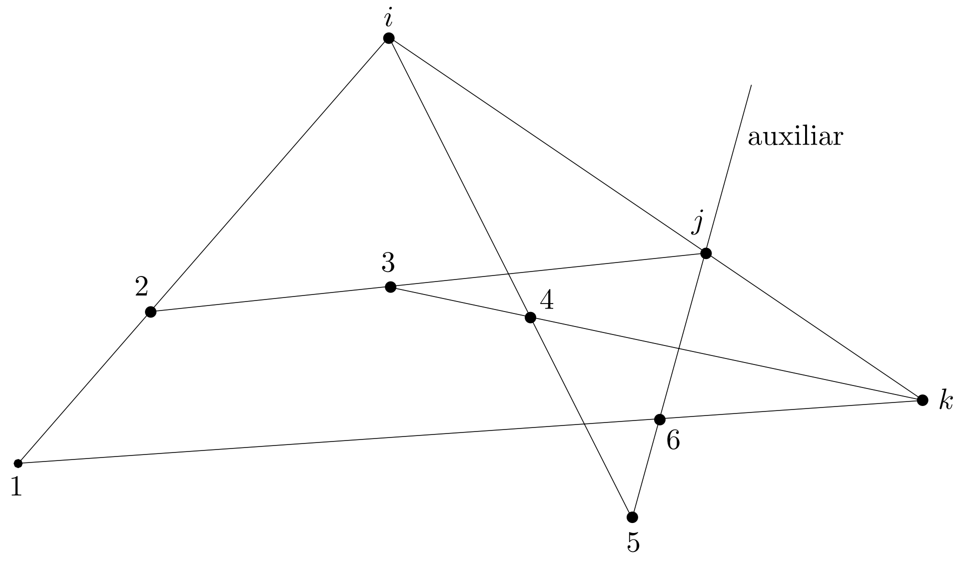
Segon mètode. Tallem r, s, t, u per una recta auxiliar α. Obtenim quatre punts a, b, c, d en una certa raó doble.

Tallem r', s', t' per una recta auxiliar β. Obtenim tres punts a', b', c' i hem de buscar un quart punt d' que tingui amb els altres tres la raó doble donada. Llavors u' serà la recta $5d'$.



Construïm l'homografia h determinada per $h(a) = a'$, $h(b) = b'$, $h(c) = c'$. Sabem que l'eix és la recta determinada pels dos punts $ab' \cdot ab$ i $ac' \cdot ca'$. El punt buscat d' tal que $(a, b, c, d) = (a', b', c', d')$ és justament $h(d)$ i es pot calcular com la intersecció amb β de la recta bq, on $q = db' \cdot$ eix, que equival a utilitzar el teorema de Pappus. ∎

Solució 2. (Pascal)



Tracem una recta auxiliar arbitrària pel punt 5. El punt que busquem, 6, ha d'estar sobre aquesta recta. Així, tenim $i = 12 \cdot 45$, $j = 23 \cdot$ auxiliar (ja que la recta auxiliar és la 56) coneguts. De k sabem que està sobre 34 i sobre ij, i per tant també és conegut, $k = 34 \cdot ij$. Però això ens permet conèixer 6 ja que $k = 34 \cdot 16$, i per tant $6 = 1k \cdot$ auxiliar. ∎

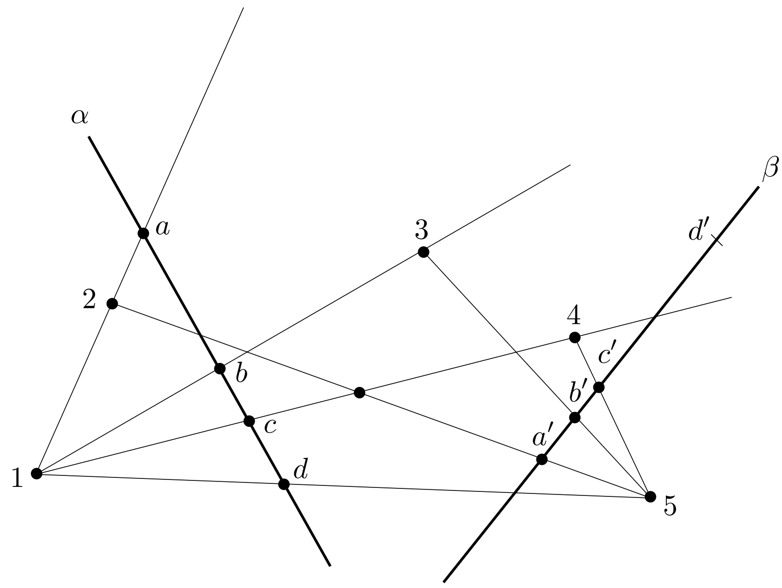
Exercici 7.5.2 *Donats cinc punts d'una cònica, construir la tangent a un d'ells*

Solució 1.

Mantenim la mateixa notació que a l'apartat anterior. Com que la projectivitat $j_B^{-1} j_A$ porta la tangent en A a la recta AB, podem repetir el procés anterior però agafant com a recta auxiliar u justament la recta 15. Com que $j_5^{-1}j_1$ és projectivitat, tindrem

$$(r, s, t, 15) = (r', s', t', \text{tangent en } 5)$$

A partir d'aquí es repeteix la construcció anterior:



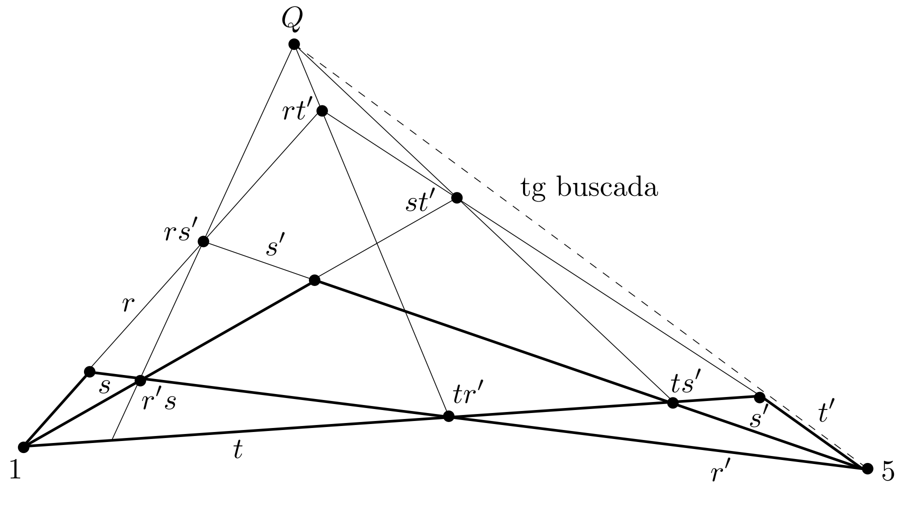
es tallen les quatre primeres rectes amb una recta auxiliar α i les tres segones amb una recta auxiliar β i es busca sobre β un quart punt d' que formi amb els altres tres la mateixa raó doble que les quatre primeres rectes. Llavors $5d'$ és la tangent buscada. ∎

Solució 2. (Pappus).

El dual de Pappus ens diu, amb les mateixes notacions que fins ara, que $rs' \cdot r's$, $rt' \cdot r't$, $st' \cdot ts'$ es tallen en un punt. Diguem-ne Q. Llavors

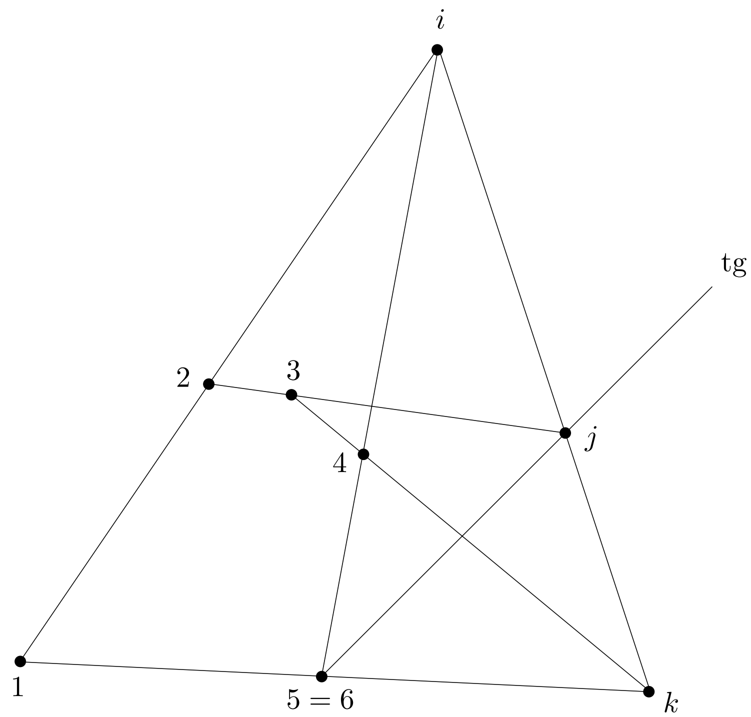
$$(r, s, t, 15) = (rt', st', tt', 5) =$$
$$= [\text{projecció des de } Q \text{ sobre } t](r't, s't, t't, Qs \cdot t) = (r', s', t', Q5);$$

per tant $Q5$ és la tangent buscada. ∎



Solució 3. (Pascal).

Imaginem que tenim sis punts 1, 2, 3, 4, 5, 6 = 5. Llavors $i = 12 \cdot 45$, $k = 34 \cdot 61$ són coneguts. Per contra $j = 23 \cdot 56 = 23 \cdot$ (tangent buscada) és encara desconegut. Però com que està alineat amb i, k, el podem trobar posant $j = 23 \cdot ik$. Llavors la tangent en el punt 5 és la recta $5j$. ∎



7.6 Còniques afins. Centre d'una cònica

Sigui $\mathcal{C}$ una cònica de $P(E)$. Si fixem una recta de l'infinit $H = p(V)$, i una descomposició $E = V \oplus < z_0 >$, sabem que $P(E) \backslash H$ és un espai afí.

Els punts afins de $\mathcal{C}$ són els punts de $\mathcal{C}$ que no pertanyen a H. Direm que constitueixen una cònica afí.

Si agafem una base adaptada $\{e_1, e_2, z_0\}$, l'expressió de $\mathcal{C}$ en coordenades respecte a aquesta base serà del tipus

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0.$$

Els punts afins de $\mathcal{C}$ són els que compleixen aquesta equació i tenen $z \neq 0$. Com que

$$x_0 = \frac{x}{z}, \quad x_1 = \frac{y}{z}$$

són les coordenades afins respecte a la referència afí $\{p(z_0); e_1, e_2\}$, resulta que els punts afins de $\mathcal{C}$ estan caracteritzats per

$$ax_0^2 + bx_1^2 + c + 2dx_0x_1 + 2ex_0 + 2fx_1 = 0.$$

En general, una quàdrica afí en un espai afí es defineix com els zeros d'un polinomi de segon grau. És a dir, com el conjunt de punts tals que les seves coordenades respecte a una referència afí compleixen una equació de segon grau. Pel procés d'homogeneïtzació sempre la podrem pensar com el conjunt de punts afins d'una cònica projectiva. Vegeu la secció 8.2.

Quan les còniques conviuen amb un infinit, té sentit la definició següent:

Definició 7.6.1 *El* centre *d'una cònica no singular és el pol de la recta de l'infinit.*

El resultat següent justifica el nom de *centre*.

Teorema 7.6.2 *Sigui r una recta que passa pel centre d'una cònica i que la talla en dos punts M i M'. Llavors el centre és el punt mitjà del segment MM'.*

Demostració.

Sigui A el centre de la cònica. Prenem una recta qualsevol per A i denotem per M i M' els punts on aquesta recta talla la cònica i per A' el punt de tall d'aquesta recta amb la recta de l'infinit.

Com que A i A' són conjugats tenim, pel teorema 7.2.1, $(A, A', M, M') = -1$, però aquesta és justament la condició que A sigui el punt mitjà de MM', com hem vist a la proposició 5.1.4, recordant que $(A, A', M, M') = (M, M', A, A')$. ∎

Observem que el concepte de punt mig és afí, ja que està caracteritzat per la raó simple.

Coordenades del centre

Si prenem $z = 0$ com a recta de l'infinit i

$$q : ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0$$

és l'equació de la cònica, el centre tindrà coordenades afins (c_0, c_1) tals que

$$(c_0, c_1, 1) \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall\, x, y.$$

Com que la igualtat es compleix per a tot x, y, això implica que

$$\begin{aligned} c_0a + c_1d + e &= 0 \\ c_0d + c_1b + f &= 0, \end{aligned}$$

que permet memoritzar les coordenades afins del centre (c_0, c_1) com la solució del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial q}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Comentari. Com sempre, aquestes equacions es poden obtenir sense passar al projectiu.

Donada la cònica afí $q : ax^2 + by^2 + 2dxy + 2ex + 2fy + c = 0$, el canvi $x' = x - c_0$, $y' = y - c_1$, on (c_0, c_1) és el centre, ens transforma la cònica en una cònica invariant per simetria respecte a l'origen. L'equació

$$(x' + c_0, y' + c_1, 1) \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' + c_0 \\ y' + c_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

ha de ser invariant per la transformació $(x', y') \mapsto (-x', -y')$. Per tant els termes lineals de l'equació anterior han de ser zero. Però aquests termes són

$$(c_0, c_1) \begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (e, f) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0,$$

és a dir

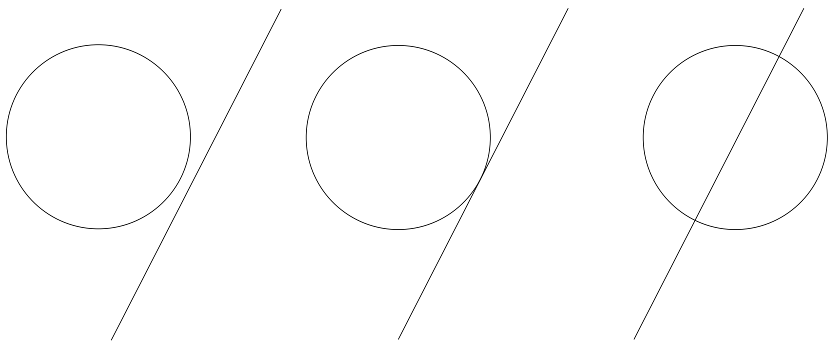
$$(c_o, c_1) = -(e, f) \begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}^{-1},$$

que no és més que la solució al sistema d'equacions en derivades parcials abans considerat.

Definició 7.6.3 *Si $\mathcal{C}$ és una cònica amb centre es diu que tota recta pel centre és un* diàmetre*. Dos diàmetres es diuen* conjugats *si els punts on tallen l'infinit són conjugats respecte a $\mathcal{C}$.*

Observem que els diàmetres són conjugats quan corresponen a rectes conjugades respecte a la cònica (l'una passa pel pol de l'altra).

Si estem en el pla projectiu real $\mathbb{R}P^2$ i tallem una cònica no singular (equació de segon grau) amb la recta de l'infinit (primer grau) ens podem trobar tres casos: que tinguin dos punts diferents en comú, un únic punt doble en comú o que no tinguin cap punt comú. De les còniques afins respectives se'n diu *hipèrbola*, *paràbola* i *el·lipse*.



El·lipse Paràbola Hipèrbola

Per exemple, la hipèrbola de $\mathbb{R}^2$ que en coordenades cartesianes té equació $xy = 1$ correspon, via el procés d'homogeneïtzació, a la cònica projectiva $xy - z^2 = 0$, que talla l'infinit $z = 0$ en dos punts, el $[0, 1, 0]$ i el $[1, 0, 0]$.

L'el·lipse de $\mathbb{R}^2$ que en coordenades cartesianes té equació $x^2 + 3y^2 = 1$ correspon, via el procés d'homogeneïtzació, a la cònica projectiva $x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$, que no talla l'infinit $z = 0$ en cap punt.

La paràbola de $\mathbb{R}^2$ que en coordenades cartesianes té equació $y^2 = x$ correspon, via el procés d'homogeneïtzació, a la cònica projectiva $y^2 - zx = 0$, que talla l'infinit $z = 0$ únicament en el punt $[1, 0, 0]$.

Exercici 7.6.4 *Demostreu que les rectes que uneixen punts homòlegs entre dues rectes homòlogues d'una afinitat són tangents a una paràbola.*

Solució. Per ser afinitat, la recta de l'infinit és invariant. Si la recta r va a parar per l'afinitat h a la recta r', el punt P on r talla l'infinit va al punt Q on r' talla l'infinit. Pel teorema 7.3.4, aplicat a l'afinitat h restringida a r, sabem que les rectes $m \cdot h(m)$ són tangents a una cònica, per a tot $m \in r$. Per tant la recta $PQ = Ph(P)$, que és la recta de l'infinit, és tangent, pel teorema anterior, a una cònica. Per tant aquesta cònica és una paràbola. ∎

7.7 Còniques afins mètriques. Diàmetres i focus

Per espai afí mètric entenem un espai afí ordinari $(\mathbb{A}, V)$ però amb un producte escalar a l'espai vectorial V. Denotarem per g aquest producte escalar, que el pensarem com una aplicació bilineal simètrica definida positiva. En particular estem en el cas real ($k = \mathbb{R}$), és a dir V és un espai vectorial real.

A partir d'aquest moment es pot parlar, per exemple, de distància entre punts, tot i que la distància no és un concepte afí, simplement dient

$$d(A, B) = \sqrt{g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}.$$

Des del punt de vista projectiu consisteix en considerar l'espai afí $P(E) \backslash H$ amb $H = p(V)$, i fixar una mètrica g a V. Es pot pensar doncs com una quàdrica a H. Aquesta manera de pensar és independent de la dimensió; però, com que ara volem parlar de còniques, suposarem que E és un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió 3 i, per tant, V és un subespai vectorial real de dimensió 2 de E.

En aquesta situació direm

Definició 7.7.1 *Dues rectes projectives r i r', que es tallen en un punt afí, es diuen* ortogonals *si tallen la recta de l'infinit en punts conjugats respecte a la mètrica g.*

És la definició habitual en els espais afins, ja que sabem que la direcció afí d'aquestes rectes està donada justament per la direcció representada pel punt on tallen l'infinit. Així, si els punts de tall són respectivament $p(a)$ i $p(b)$, amb $a, b \in V$, la condició de conjugació respecte g és $g(a, b) = 0$ que correspon a dir que les direccions afins a i b d'aquestes rectes siguin ortogonals a l'espai afí mètric considerat.

Per a les còniques amb centre tenim:

Definició 7.7.2 *Els* eixos *d'una cònica $\mathcal{C}$ són els diàmetres conjugats ortogonals.*

Que aquesta definició coincideix amb la clàssica d'eixos de simetria es veu així:

Considerem la cònica

$$ax^2 + by^2 + 2dxy + 2ex + 2fy + c = 0$$

del pla euclidià i suposem que està escrita respecte la referència afí $\{O; e_1, e_2\}$, on O és el centre i e_1, e_2 són els vectors ortogonals i conjugats, és a dir, les direccions del eixos. Compleixen, doncs, $g(e_1, e_2) = \phi(e_1, e_2) = 0$, on g és la mètrica euclidiana i ϕ l'aplicació bilineal simètrica que ens dóna la cònica.

A partir de les equacions del centre, veiem que $f = e = 0$, i la condició $\phi(e_1, e_2) = 0$ ens diu $d = 0$. Per tant tenim

$$ax^2 + by^2 + c = 0. \tag{7.3}$$

Per ser la base ortonormal, la simetria respecte a l'eix $< e_1 >$ s'escriu $(x, y) \longrightarrow (x, -y)$ i la simetria respecte a l'eix $< e_2 >$ s'escriu $(x, y) \longrightarrow (-x, y)$. Ara bé, aquests canvis deixen invariant l'expressió 7.3 i per tant les direccions $< e_1 >$ i $< e_2 >$ corresponen als eixos de simetria.

En terme d'involucions de la recta de l'infinit, podem descriure els eixos així:

Sigui σ la involució de la recta de l'infinit donada per conjugació respecte g, és a dir $\sigma(p(x)) = p(y)$ si i només si $g(x, y) = 0,\ x, y \in V$. És independent dels representants x, y escollits i està ben definida per ser g no singular i V de dimensió 2.

Sigui τ la involució de la recta de l'infinit donada per conjugació respecte la cònica ϕ, és a dir $\tau(p(x)) = p(y)$ si i només si $\phi(x, y) = 0,\ x, y \in V$. És independent dels representants i està ben definida si assumim ϕ no singular a V.

Llavors *els eixos són les rectes pel centre que tallen l'infinit en els punts fixos de* $\sigma \circ \tau$. Observem que si x és fix per $\sigma \circ \tau$, llavors l'altre punt fix és $\sigma(x) = \tau(x)$. En efecte

$$\sigma \circ \tau(x) = x \Longleftrightarrow \sigma(x) = \tau(x)$$

ja que són involucions. Per tant $\sigma \circ \tau(\tau(x)) = \sigma(x)$ i és fix.

Llavors tenim $g(x, \sigma(x)) = \phi(x, \tau(x)) = 0$, i per tant les rectes corresponents són conjugades i ortogonals.

També els *focus* es poden descriure projectivament, sempre que admetem nombres complexos.

Suposem doncs $\mathbb{R}P^2$ contingut a $\mathbb{C}P^2$ via la inclusió

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}P^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}P^2 \\ [x, y, z] & \longmapsto & [x, y, z]. \end{array}$$

És a dir que el nombre real x passa al nombre complex $x + 0i$ i anàlogament per y i z.

Observem però que la classe $[x, y, z]$ a $\mathbb{R}P^2$ està formada per (x, y, z) i els seus múltiples reals, mentre que la classe $[x, y, z]$ a $\mathbb{C}P^2$ està formada per (x, y, z) i els seus múltiples complexos. És a dir, que podem pensar $\mathbb{R}P^2$ com el subconjunt de $\mathbb{C}P^2$ format per aquells punts que, respecte una referència fixada, tenen coordenades homogènies reals o que es poden transformar en reals multiplicant per una certa constant complexa no nul·la.

Denotarem a partir d'ara per x, y, z les coordenades homogènies canòniques de $\mathbb{C}P^2$. Seran doncs nombres complexos. Seguint la manera de procedir anterior, fixem $z = 0$ com a infinit, i en aquest pla complex fixem la forma bilineal simètrica que respecte a aquestes coordenades s'escriu com

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

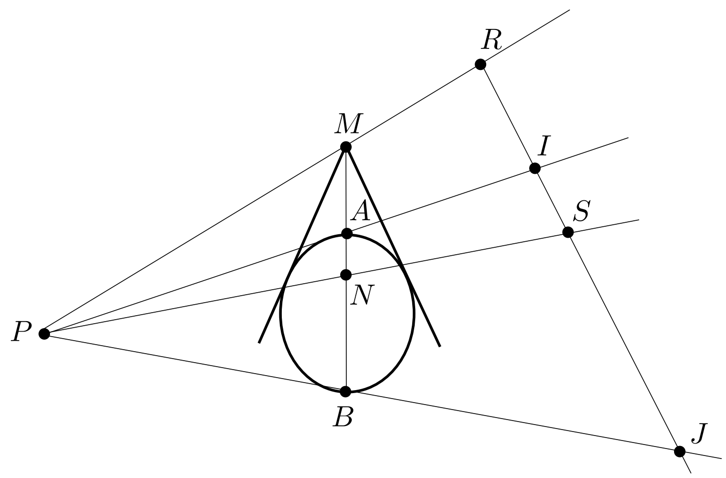
i que correspon doncs a la forma quadràtica $x^2 + y^2 = 0$. És no singular, però no podem parlar de definida positiva ja que estem sobre els complexos. Podem pensar que és la restricció a l'infinit de la cònica complexa $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Observeu que l'infinit es pot pensar com la recta projectiva $\mathbb{C}P^1$.

Aquesta forma quadràtica no té punts reals a l'infinit, és a dir que provinguin de $\mathbb{R}P^2$ per l'anterior inclusió, però sí de $\mathbb{C}P^2$, els anomenats punts cíclics $I = [1, i, 0]$, $J = [1, -i, 0]$. Es diuen cíclics perquè totes les circumferències de centre a l'origen hi passen.

Com en el cas real, direm que dues rectes complexes són ortogonals si tallen l'infinit en punts conjugats per g. Observem que, pel teorema 7.2.1 aplicat a la cònica $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ i a la recta de l'infinit, *dues rectes són ortogonals quan els punts de tall amb l'infinit són harmònicament conjugats dels punts cíclics.*

Definició 7.7.3 *Un punt P és un* focus *d'una cònica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}P^2$ si les tangents a $\mathcal{C}$ des de P tallen l'infinit en els punts cíclics.*

Les tangents són rectes complexes. No obstant això, podem fer-nos una idea de la situació en el dibuix següent:



A partir d'aquesta figura, que utilitza l'exercici 7.2.3 per poder assegurar que el pol M de PS i els punts de tangència A i B estan alineats , i emprant que la raó doble es conserva per projectivitats, es veu que els focus estan caracteritzats per la propietat següent:

Proposició 7.7.4 *Un punt P és un* focus *d'una cònica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}P^2$ si és tal que les rectes homòlogues del feix $\mathcal{F}_P$ per la conjugació induïda per $\mathcal{C}$ (vegeu la secció* 7.2.1*) són ortogonals.*

Demostració. Pel teorema 7.2.1, hem de veure que les rectes homòlogues tallen l'infinit en punts harmònicament conjugats dels punts cíclics. Amb la notació de la figura, on A i B són els punts de tangència i M el pol d'una recta qualsevol PN, tenim

$$(M, N, A, B) = (R, S, I, J)$$

per perspectivitat des de P, però $(M, N, A, B) = -1$, ja que M i N són conjugats respecte a la cònica, i per tant R i S són conjugats respecte a la mètrica de l'infinit, la qual cosa ens diu que PR i PS són ortogonals. ∎

Es diu que el feix pel focus P és un feix *harmònic.*

Per veure la relació amb la definició clàssica de focus, vegeu l'exercici 7.8.34.

Exercici 7.7.5 *Trobeu, emprant la definició projectiva, els focus de l'el·lipse del pla euclidià*

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Solució.

Pensem el nostre pla euclidià com el $z = 1$ de $\mathbb{R}^3$ i projectivitzem, és a dir l'identifiquem amb $\mathbb{R}P^2 \backslash \{z = 0\}$ (homogeneïtzació) i ho pensem tot dins de $\mathbb{C}P^2$. El problema és doncs trobar els punts $P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{C}P^2$ des dels quals les tangents a la cònica

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - z^2 = 0$$

passin pels punts cíclics I, J. Les dues rectes tangents $ax + by + cz = 0$ i $a'x + b'y + c'z = 0$ compliran doncs

$$ap_0 + bp_1 + cp_2 = 0 \tag{7.4}$$
$$a'p_0 + b'p_1 + c'p_2 = 0 \tag{7.5}$$
$$a^2A^2 + b^2B^2 - c^2 = 0 \tag{7.6}$$
$$a^2A^2 + b^2B^2 - c^2 = 0 \tag{7.7}$$
$$a + bi = 0 \tag{7.8}$$
$$a' - b'i = 0 \tag{7.9}$$

on les equacions 7.6 i 7.7 provenen de la condició de tangència 7.2, i les altres expressen simplement que les rectes passin pels punts P, I, J.

Posem $p_2 = 1$ per simplificar els càlculs i obtenim $a = -bi$, $a' = b'i$, i

$$-A^2 + B^2 - (p_0 i + p_1)^2 = 0$$
$$-A^2 + B^2 - (p_0 i - p_1)^2 = 0$$

Per tant $4ip_0p_1 = 0$, i $-A^2 + B^2 + p_0^2 - p_1^2 = 0$.

Com que $p_0 = 0$ o $p_1 = 0$, això ens diu en particular que els focus estan sobre els eixos de la el·lipse. Suposem, abans de continuar els càlculs, que $A > B$. Si $p_0 = 0$, llavors $p_1 = \pm iC$ on $C^2 = A^2 - B^2$. Si $p_1 = 0$, llavors $p_0 = \pm C$. Així doncs hem obtingut quatre focus, $[\pm C, 0, 1], [0, \pm iC, 1]$, dos de reals i dos d'imaginaris. Els dos focus reals estan sobre l'eix més llarg de l'el·lipse. Anàlogament si $B > A$. ∎

Exercici 7.7.6 *Siguin A i B dos punts del pla euclidià $\mathbb{R}^2$, i $h : \mathcal{F}_A \longrightarrow \mathcal{F}_B$ l'aplicació que envia tota recta r per A a una recta $h(r)$ per B obtinguda traslladant r paral·lelament fins a B i girant després un angle donat α (amb orientació fixada). Trobeu el lloc geomètric dels punts $r \cdot h(r)$ en variar r en $\mathcal{F}_A$.*

Solució.

Primer mètode [sense passar al projectiu].

Prenem $A = (0,0)$ i $B = (1,0)$. La recta $y = mx$ va a parar a la recta

$$y = \frac{m+\lambda}{1-m\lambda}(x-1), \quad \text{on } \lambda = \tan\alpha.$$

En tallar les dues rectes obtenim el punt

$$x = \frac{m+\lambda}{(1+m^2)\lambda}; \quad y = \frac{m(m+\lambda)}{(1+m^2)\lambda}.$$

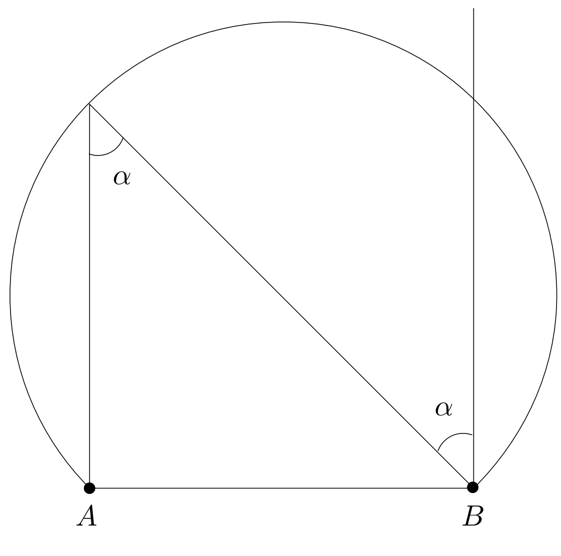
Eliminant m obtenim

$$x^2 + y^2 - x - \frac{y}{\lambda} = 0,$$

que és precisament la circumferència *arc capaç* del segment AB

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2\lambda}\right)^2 = \frac{1+\lambda^2}{4\lambda^2},$$

és a dir el lloc geomètric dels punts del pla des dels quals es veu el segment AB sota l'angle α (de fet l'arc capaç és una part d'aquesta circumferència). ∎



Segon mètode [passant al projectiu de manera natural].

Pensem el nostre pla afí com $z = 1$ d'un espai projectiu en el qual $z = 0$ fa el paper de pla de l'infinit. Prenem coordenades de manera que $A = (0,0,1)$, $B = (1,0,1)$. Les rectes per A tenen equació $y = tx$ (i $x = 0$, que és el cas $t = \infty$), i les rectes per B tenen equació $x = sy + z$ (i $y = 0$, que és el cas $s = \infty$). Aquestes rectes projectives, tallades amb $z = 1$, donen lloc a rectes afins de pendents respectius t i s^{-1}. Així, la recta per A de pendent $t = \tan\beta$ va a parar a la recta per B de pendent

$$s^{-1} = \tan(\alpha+\beta) = \frac{t+\lambda}{1-t\lambda},$$

on, com abans, $\lambda = \tan\alpha$. Aquesta relació entre s i t ens diu en particular que l'aplicació que ara considrem és una projectivitat.

En tallar aquestes dues rectes obtenim punts de la forma

$$[x, tx, x - stx] = [1, t, 1 - st],$$

és a dir

$$\begin{aligned} x &= \rho \\ y &= t\rho \\ z &= (1 - st)\rho = \left(1 - \frac{1 - t\lambda}{t + \lambda} t\right) x = \frac{\lambda(x^2 + y^2)}{y + \lambda x}, \end{aligned}$$

que ens dóna

$$x^2 + y^2 - zx - \frac{yz}{\lambda} = 0,$$

que en tallar per $z = 1$ ens dóna la mateixa circumferència d'abans. ∎

Tercer mètode [Steiner, comentaris].

La cònica originada per una projectivitat entre feixos de rectes ha estat ja calculada a la demostració del teorema de Steiner. Tan sols hauríem d'aplicar la fórmula. El problema que es presenta és que allà agafàvem coordenades de manera que els punts A, B (els vèrtexs dels feixos) estaven en el pla $z = 0$ que és el que agafem com a pla de l'infinit en el procés d'homogeneïtzació habitual. De manera que, si homogeneïtzem d'aquesta manera, no podem agafar després les coordenades de A i B com a la demostració del teorema de Steiner (no serien punts afins!).

Si volem mantenir els càlculs de Steiner no tenim més remei que agafar un nou pla de l'infinit que no contingui A, B. Agafarem per exemple $x + y = 0$, però podríem agafar-ne qualsevol altra.

Per poder parlar, si volem, de pendent de les rectes afins corresponents, hem de fixar un producte escalar a l'infinit, ja que parlem d'angles, que és un concepte mètric. En els altres dos mètodes s'ha suposat implícitament que tenim el producte escalar euclidià ordinari.

Recordem que per simplificar els càlculs, si el pla de l'infinit és $Ax+y+Cz = 0$, convé agafar com a base $(0, -C, 1)$, $(1, -A, 0)$.

Així, en el nostre cas $(A = 1, C = 0)$ la nostra referència afí serà

$$\{p(1, 0, 0); u = (0, 0, 1), v = (1, -1, 0)\}$$

i agafarem la mètrica que fa de $\{u, v\}$ una base ortonormal. Això correspon al procés d'homogeneïtzació donat per la inclusió

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}P^2 \\ (x, y) & \longmapsto & [x, 1 - x, y], \end{array}$$

de manera que la base canònica de $\mathbb{R}^2$ passa a la u, v.

La direcció (afí) de la recta afí determinada per la recta projectiva $y = tz$ és la direcció que representa el punt d'intersecció de la recta projectiva $y = tz$ amb la recta de l'infinit $x + y = 0$. Per tant el vector director de la recta afí $y = tz$ és $(-t, t, 1) = u - tv$.

Anàlogament el vector director de la recta $x = sz$ és $(s, -s, 1) = u + sv$.

Volem que $s = \tan(\alpha + \beta)$, on $\tan \beta = -t$; per tant

$$s = \frac{-t + \lambda}{1 + t\lambda},$$

i la cònica és (vegeu el teorema 7.3.3 amb $\alpha = -1, \beta = \lambda, \gamma = \lambda, \delta = 1$)

$$-\lambda z^2 + \lambda xy + xz + yz = 0,$$

que si la pensem a l'espai afí corresponent, és a dir si la tallem amb $x + y = 1$, obtenim

$$x^2 + z^2 - x - \frac{z}{\lambda} = 0. \qquad (7.10)$$

Fixem-nos ara que el punt de coordenades projectives $[x, y, z]$ té, en la referència afí considerada, coordenades afins (ξ, η) amb

$$\xi = \frac{z}{x + y}$$
$$\eta = -\frac{y}{x + y},$$

ja que

$$\left(\frac{x}{x + y} - 1, \frac{x}{x + y}, \frac{x}{x + y}\right) = \xi(0, 0, 1) + \eta(1, -1, 0).$$

Els punts de la nostra cònica són de la forma $[x, 1 - x, z]$ i compleixen l'equació (7.10). En aquest cas $\xi = z$, $\eta = x - 1$ i substituint a la mateixa equació (7.10) obtenim

$$\eta^2 + \eta + \xi^2 - \frac{\psi}{\lambda} = 0$$

que canviant la notació a $x = -\eta$ i $y = \psi$ ens dóna la mateixa circumferència abans obtinguda. ∎

7.8 Exercicis

7.8.1 Construccions amb regle.

a) Donades cinc tangents d'una cònica no singular, trobeu el punt de contacte d'una d'aquestes tangents.

b) Suposem donades cinc tangents d'una cònica no singular tals que no n'hi ha tres de concurrents. Construïu una tangent diferent de les donades.

c) Suposem donats cinc punts d'una cònica no singular i una recta concurrent a un d'aquests punts. Trobeu el segon punt d'intersecció de la recta amb la cònica.

d) Donat un arc d'una cònica no singular i una recta que interseca l'arc, trobeu el segon punt d'intersecció de la recta amb la cònica.

e) Donats quatre punts d'una cònica no singular i la tangent en un dels punts donats, construïu un altre punt diferent dels donats i la tangent en aquest punt.

En particular, quatre punts i una tangent determinen la cònica.

f) Donats tres punts diferents A, B, C d'una cònica no singular i dos tangents en punts A i B, construïu la tangent en C.

En particular, tres punts i dues tangents determinen la cònica.

g) Formuleu i resoleu el problema dual del problema (f).

7.8.2 Doneu l'equació i determineu la classe de la cònica que passa pels cinc punts donats:

a) $[0,0,1]$, $[2,1,0]$, $[2,-1,0]$, $[-2,0,1]$, $[2,2,3]$.

b) $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[2,2,1]$, $[2,-1,2]$.

c) $[1,-2,1]$, $[-3,1,0]$, $[-2,-1,1]$, $[2,-2,1]$, $[0,0,1]$.

7.8.3 Polaritat.

a) Trobeu l'equació de la recta polar del punt $A=[1,3,-1]$ respecte a la cònica $\mathcal{C}$ donada per l'equació $x^2-2y^2+4yz=0$.

b) Trobeu el pol de la recta $a =< 0,-1,2 >$ respecte a la cònica $y^2+4xz=0$.

c) Trobeu l'equació de la polar del punt A=[1,2,1] respecte a la cònica $-x^2+y^2+z^2-2xz=0$.

d) Trobeu el pol de la recta $a =< 1,-1,-2 >$ respecte a la cònica $x^2+y^2-z^2+2yz=0$.

7.8.4 Siguin A,B,C,D quatre punts alineats i sigui $\mathcal{C}$ una cònica donada per una aplicació bilineal simètrica ϕ. Demostreu que la raó doble d'aquests punts coincideix amb la raó doble de les seves rectes polars (que són concurrents).

Indicació: l'aplicació $f : E \longrightarrow E^*$ donada per $f(x)=\phi(x,\cdot)$ és una projectivitat.

7.8.5 Tangència.

a) Trobeu l'equació de les tangents de la cònica $x^2+y^2-10xz=0$ concurrents en el punt $A=[4,7,1]$.

b) Trobeu les equacions de les tangents a la cònica $x^2-y^2+xz=0$ concurrents en el punt $A=[1,2,3]$.

7.8.6 Sigui $\mathcal{C}$ una cònica no singular.

a) Donat un punt $A \notin \mathcal{C}$, construïu la polar de A.

b) Donat un punt exterior A, construïu les tangents de $\mathcal{C}$ concurrents a A.

c) Donada un recta a, construïu el pol de a.

d) Donat un punt $A \in \mathcal{C}$, construïu la tangent concurrent a A.

7.8.7 Siguin A, B, C tres punts d'una cònica no singular $\mathcal{C}$ i siguin a, b, c les tangents de $\mathcal{C}$ en punts A, B, C respectivament. Proveu que els parells $a \cap b$, $a \cap c$ i A, $a \cap BC$ són conjugats harmònics.

7.8.8 Siguin A, B, C, D punts d'una cònica no singular $\mathcal{C}$. Sigui r qualsevol recta per D i considerem els punts

$$P = BC \cap r, \quad Q = AC \cap r, \quad R = AB \cap r, \quad \text{i} \quad S \quad \text{tal que} \quad \{S, D\} = \mathcal{C} \cap r.$$

Llavors la raó doble (P, Q, R, S) no depèn de la recta r per D escollida, i coincideix amb la raó doble dels punts sobre la cònica.

7.8.9 Donats tres punts A, B, S i dues rectes p, q, tenim una recta variable que passa per S i talla p, q en P, Q. Trobeu el lloc geomètric del punt d'intersecció de AP i BQ.

7.8.10 Sigui $ABCD$ un paral·lelogram inscrit en una el·lipse. Proveu que el punt d'intersecció de les diagonals és el centre de l'el·lipse.

7.8.11 Siguin PA, PB dues tangents d'una cònica $\mathcal{C}$ amb els punts de contacte A i B respectivament. Sigui r una recta que interseca $\mathcal{C}$ en dos punts U i V. Proveu que la transformació α de r definida per $\alpha(X) = X'$, on $AX \cap BX' \in \mathcal{C}$, és una involució si i només si $P \in UV$.

7.8.12 Donats una recta r, dos punts A, B fora d'ella, i un punt $O \in r$. Per a $X \in r$, sigui $X' \in r$ el punt simètric a X respecte O (és a dir, O és el punt mitjà de XX'). Trobeu el lloc geomètric dels punts $AX \cap BX'$ amb X variable.

7.8.13 Classifiqueu les còniques segons els valors de λ:

$$x^2 + 4\lambda xy + 4y^2 - 2\lambda x + 4y - 3 = 0.$$

Determineu el centre (si existeix). Doneu el lloc geomètric dels centres en variar el paràmetre.

7.8.14 Siguin A_1, A_2, A_3 els punts bàsics d'un sistema de referència projectiu. Doneu l'equació general de les còniques tangents en A_2 i A_3 als costats A_1A_2 i A_1A_3 respectivament.

7.8.15 Trobeu el centre i les asímptotes de la hipèrbola $x^2-6xy+8y^2+2y=0$. Observeu que, des del punt de vista projectiu, les asímptotes són les tangents a la cònica en els punts en què aquesta talla la recta de l'infinit.

7.8.16 Siguin k, l asímptotes d'una hipèrbola i siguin p, q dos diàmetres conjugats. Proveu que $(k, l, p, q) = -1$.

7.8.17 Donats, en el pla euclidià, l'eix, el vèrtex i un punt d'una paràbola, construïu la tangent en aquest punt.

7.8.18 Sigui A, B, C un triangle variable tal que els costats BC, CA i AB passen per punts fixos P, Q i R. Si els vèrtexs B i C es mouen sobre rectes donades que passen per un punt O alineat amb Q i R, determineu el lloc geomètric que descriu el vertex A.

7.8.19 Considerem la família de còniques del pla afí real donades per

$$x^2 + 4\lambda xy + 4y^2 - 2\lambda x + 4y - 3 = 0$$

a) Classifiqueu-la segons els valors de λ.

b) Calculeu el centre.

c) Calculeu el lloc geomètric del centres en variar λ.

7.8.20

a) Donats quatre punts A, B, C, D d'una cònica no singular $\mathcal{C}$ i la tangent a $\mathcal{C}$ en el punt A, doneu una construcció de la tangent en el punt B.

b) Enuncieu i resoleu el dual de l'apartat anterior.

7.8.21 Donada la cònica

$$x^2 + 3y^2 - 4xy + 2x + 2y - 9 = 0,$$

a) Classifiqueu-la.

b) Trobeu, si existeixen, el centre, les asímptotes i els vèrtexs.

c) Trobeu l'equació de la tangent en el punt $(6, 3)$.

7.8.22 Sigui A, B, C tres punts no alineats d'una cònica $\mathcal{C}$ en el pla projectiu real i sigui r una recta tal que $A, B, C \notin r$.

a) Estudieu $\mathcal{C} \cap r$.

b) En cada cas doneu la classificació afí de $\mathcal{C}$ respecte a la recta de l'infinit r.

c) Si $\mathcal{C}$ és no singular i r és tangent a $\mathcal{C}$ en un punt D, doneu una construcció de la tangent a $\mathcal{C}$ en A.

7.8.23 Sigui $PQRS$ un quadrangle inscrit en una cònica. Demostreu que la recta AB és la polar de C on $A = QR \cap PS$, $B = QP \cap RS$, $C = PR \cap QS$.

7.8.24 Siguin A, B, C, D quatre punts sobre una cònica no singular i siguin a, b, c, d les quatre tangents en aquests punts. Demostreu que els punts $c \cap d$, $a \cap b$, $AD \cap BC$, $BD \cap AC$ estan alineats.

7.8.25 Demostreu que en tot triangle circumscrit a una cònica, les rectes que uneixen els vèrtexs amb els punts de contacte de costats oposats es tallen en un punt.

7.8.26 Demostreu que les tangents a una hipèrbola determinen amb les asímptotes segments tals que el seu punt mitjà és el punt de contacte.

7.8.27 Considereu la cònica afí $x^2 + 2xy - 2y + 4x = 0$.

a) Classifiqueu-la.

b) Trobeu l'equació de la recta tangent en el punt de coordenades afins (0,0).

c) Trobeu-ne el centre.

7.8.28 Siguin r, s, t tres rectes no concurrents del pla projectiu. Sigui $A \in r$ que no pertany ni a s ni a t, i siguin C i D dos punts que no pertanyen a cap d'aquestes tres rectes. Sigui X un punt variable de s i $B_X = AX \cap t$.

Trobeu el lloc geomètric dels punts $P_X = CX \cap DB_X$, en variar X.

7.8.29 Siguin r, s, t tres rectes no concurrents. Siguin $A \in r$ i $B \in s$ dos punts diferents que no pertanyen a t. Siguin C, D dos punts també donats que no pertanyen ni a r ni a s.

Trobeu el lloc geomètric dels punts $P_X C \cap Q_X D$, en variar X en t, on $P_X = AX \cap s$ i $Q_X = BX \cap r$.

7.8.30 Sigui PQR un triangle inscrit en una cònica no singular $\mathcal{C}$. Sigui r una recta que passa pel pol de PQ. Demostreu que els punts $r \cap PR$ i $r \cap QR$ són conjugats respecte de la cònica $\mathcal{C}$.

7.8.31 Sigui f una projectivitat del pla que deixa invariant una cònica. Demostreu que les rectes $Xf(Y), Yf(X)$, en variar X, Y en la cònica, es tallen sobre una recta. Aquesta recta es diu *eix de colineació*.

Indicació: considereu la projectivitat entre el feix de rectes per $f(A)$ i el feix de rectes per A que envia la recta $f(A)X$ a la recta $Af(X)$ i apliqueu Steiner.

7.8.32 Trobeu, emprant la definició projectiva, els focus d'una hipèrbola i d'una paràbola.

7.8.33 Demostreu que els focus pertanyen sempre als eixos de la cònica.

7.8.34 Demostreu, primerament per mètodes clàssics i després per mètodes projectius, la següent caracterització dels focus:

Les rectes que uneixen els focus d'una cònica amb dos punts qualssevol P, Q d'aquesta, formen un angle tal que les seves bisectrius passen, una per la intersecció de les tangents en els punts P, Q, i l'altra per la intersecció de la directriu amb la recta PQ.

Indicació (clàssica):

La definició clàssica de cònica en el pla euclidià és la següent: *Una cònica és el lloc geomètric dels punts del pla tals que el quocient de distàncies a un punt donat (focus) i a una recta donada (directriu) és una constant (excentricitat).*

Si l'excentricitat és més petita que 1 (distància al focus més petita que la distància a la directriu), tenim una el·lipse; si és igual a 1, és una paràbola, i si és més gran que 1, és una hipèrbola.

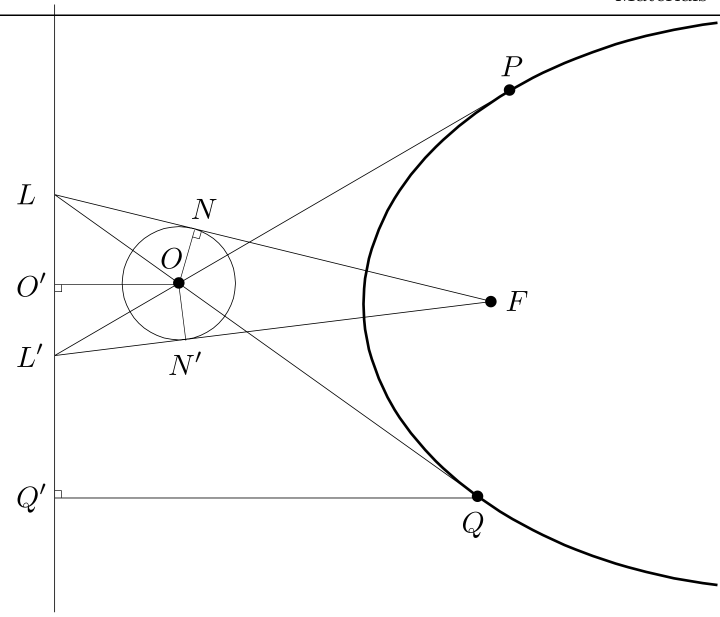
Denotem per F el focus, R la intersecció de la recta PQ amb la directriu, i P' i Q' els peus de la perpendicular a la directriu per P i Q respectivament.

Tenim
$$\frac{QF}{QQ'} = \frac{PF}{PP'} = \text{excentricitat},$$
d'on
$$\frac{FP}{FQ} = \frac{PP'}{QQ'} = \frac{RP}{RQ}.$$
Sigui M sobre la recta FP de manera que RM sigui paral·lela a QF. Per Tales obtenim $MF = RM$ i d'aquí ja és clar que RF és la bisectriu de l'angle $\angle QFM$.

A continuació, pensant la recta tangent a P com la posició límit de les secants PQ quan Q tendeix a P, deduïu que *el segment de tangent entre la directriu i el punt de contacte es veu des del focus sota un angle recte.*

Això ens permetrà demostrar que *la bisectriu interior de l'angle $\angle PFQ$ passa pel punt d'intersecció de les tangents a la cònica en P i Q.*

En efecte, sigui O el punt de tall de les tangents. Considerem la circumferència màgica de centre O (és a dir la circumferència de centre O i radi el producte de l'excentricitat per la distància de O a la directriu).



Tracem les dues tangents a aquesta circumferència pel focus. Siguin N i N' els punts de contacte i L i L' els punts de tall amb la directriu de les tangents FN i FN'. La relació

$$\frac{ON}{OO'} = \frac{FQ}{FQ'}$$

donada per construcció de la circumferència màgica ens diu, atès que FQ i ON són paral·leles, que la recta OQ passa per L. Anàlogament PO passa per L'. Ara ja és clar que FO és la bisectriu de l'angle $\angle PFQ$, ja que és bisectriu de l'angle $\angle NFN'$.

Indicació (projectiva):

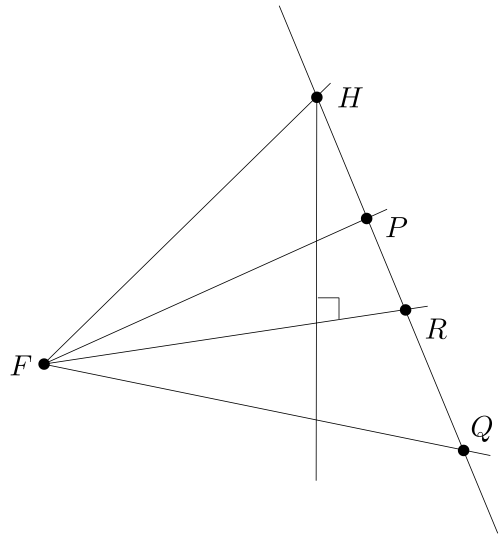
Projectivament la *directriu es defineix com la polar del focus.* Això està d'acord amb la definició clàssica, com es pot veure a partir dels comentaris anteriors, ja que si els repetim però amb PFQ alineats, veiem que les tangents en P i Q es tallen sobre la directriu i per tant aquesta és la polar del focus.

Amb la notació anterior el punt R és conjugat de F (per ser la directriu polar de F) i conjugat a O (ja que O és el pol de la recta PQ). Per tant OF és la polar de R. Per tant $(P, Q, R, H) = -1$ on $H = OF \cdot PQ$. En particular les rectes FP, FQ, FR, FH tallen la recta de l'infinit en punts harmònics.

Ara, les rectes FR i FH que són conjugades, són també perpendiculars, per definició de focus.

Això ens permetrà demostrar que *les rectes FR i FH són les bisectrius dels angles formats per les rectes FP i FQ.*

En efecte, qualsevol recta que passi pel punt d'intersecció de FH amb l'infinit (paral·lela doncs a FH)



talla perpendicularment FR en un cert punt R'. A més, si denotem per P' i Q' els punts de tall d'aquesta recta amb les rectes FP i FQ respectivament, tenim

$$(P', Q', R', H) = -1;$$

per tant la raó simple $(P', Q', R') = -1$, que ens diu que els segments $P'R'$ i $R'Q'$ són iguals en longitud i per tant FR és la bisectriu de l'angle $\angle PFQ$. Anàlogament per a l'altra bisectriu, com volíem.

De fet, a partir de la fórmula de Laguerre que veurem més endavant (vegeu 10.1), es pot donar una demostració d'aquesta propietat del feixos harmònics lleugerament diferent. És a dir que si les rectes FR i FH són perpendiculars i les rectes FP, FQ, FR, FH tallen la recta de l'infinit en punts harmònics, llavors FR i FH són les bisectrius dels angles formats per les rectes FP i FQ.

En efecte, la fòrmula de Laguerre ens diu que l'angle entre dues rectes que tallen l'infinit en punts A, B és funció únicament de la raó doble (A, B, I, J), on I, J són els punts cíclics.

Ara bé, és fàcil demostrar que $(A, B, C, D) = -1$ i $(C, D, I, J) = -1$ implica $(A, C, I, J) = (C, B, I, J)$. Això equival a dir que sempre que tinguem quatre rectes concurrents harmòniques que tallen l'infinit en punts A, B, C, D i tals que les rectes per C i D siguin perpendiculars, llavors aquestes rectes són bisectrius dels angles formats per les altres dues, que és la propietat del feix harmònic que volíem.

8. Classificació afí de les quàdriques

Clàssicament, el mètode de completació de quadrats ens diu que tota quàdrica afí és equivalent per una afinitat, a una quàdrica que té una expressió canònica molt senzilla. Essencialment suma de quadrats.

El problema és com saber quan, donades dues quàdriques, aquestes són equivalents en el sentit que hi ha una afinitat que porta l'una sobre l'altra. Per respondre això podem completar quadrats i comparar les equacions resultants. Veurem que apareixen tres tipus d'equacions.

Passarem a continuació a repensar aquests resultats des del punt de vista projectiu. El teorema important i sorprenent és que *la classificació afí es redueix a dues classificacions projectives.* La classificació projectiva és més senzilla, ja que treballa amb polinomis homogenis i es redueix, com ja hem dit abans, a la classificació de formes quadràtiques.

Més concretament, tota quàdrica afí es pot pensar com la restricció al projectiu menys un hiperplà (l'espai afí) d'una quàdrica projectiva. Dues quàdriques afins són equivalents quan les quàdriques projectives de les quals provenen són projectivament equivalents i, a més, les restriccions a l'infinit d'aquestes quàdriques són també projectivament equivalents.

Per exemple, en el cas complex, un parell de nombres, el rang de la quàdrica i el rang de la quàdrica a l'infinit, classifiquen. Sobre els reals necessitem quatre nombres, el rang i l'índex de la quàdrica i el rang i l'índex de la quàdrica a l'infinit.

8.1 Classificació afí, fora del context projectiu

Classificarem les quàdriques en un espai afí directament per mètodes afins i més endavant veurem que els resultats que aquí obtenim es recuperen en el context projectiu. Sabem que en tallar un con amb un pla obtenim una figura geomètrica anomenada cònica, i que aquesta figura varia segons la inclinació del pla. Ja hem estudiat l'el·lipse i hem vist que en bones coordenades s'escriu com

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Generalitzant aquesta expressió definirem quàdrica afí com els zeros d'un polinomi de segon grau. Això vol dir que si fixem en un espai afí $\mathbb{A}$ una referència afí i denotem per $r(x)$ un polinomi de segon grau en les indeterminades $x_1, \ldots, x_n$, que s'interpreten com les coordenades, llavors una quàdrica afí $\mathcal{Q}$ és

$$\mathcal{Q} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}; r(x) = 0\}.$$

Definició 8.1.1 *Es diu que dues quàdriques afins $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ són afinment equivalents quan existeix una afinitat f tal que $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$.*

Per exemple, en el pla afí $\mathbb{R}^2$, les quàdriques

$$\mathcal{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; r(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\} \tag{8.1}$$

i

$$\mathcal{Q}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; s(x, y) = x^2 + 10y^2 - 2xy - 6x + 42y + 36 = 0\} \tag{8.2}$$

són equivalents, perquè l'afinitat f d'equació

$$\begin{aligned} x' &= 3x + y + 1 \\ y' &= y - 2 \end{aligned}$$

ens porta l'una sobre l'altra, és a dir $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$

L'objectiu de la classificació és com saber a la pràctica quan dues equacions tan diferents com 8.1 i 8.2 són equivalents o no, i trobar explícitament aquesta afinitat que aquí apareix màgicament.

És clar que per passar d'una quàdrica a l'altra podem aïllar x, y en funció de x', y' a l'equació de l'afinitat i substituir els valors obtinguts a l'equació 8.1. Si canviem ara x', y' per x, y respectivament, obtenim l'equació 8.2. Però és molt més útil pensar els polinomis en forma matricial. Per exemple el polinomi

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

es pot escriure com

$$(x, y, 1) \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Com que la matriu és simètrica, estem interpretant el polinomi com una forma quadràtica actuant sobre vectors del tipus $(x, y, 1)$.

Més generalment, al polinomi

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} 2 b_k x_k + c$$

li associem la matriu simètrica

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b^t & c \end{pmatrix}$$

amb $a = (a_{ij})$ matriu quadrada $n \times n$, i $b = (b_k)$ matriu de n files i una columna.

Amb aquesta notació, l'exemple anterior s'escriu molt fàcilment. Tan sols hem de veure com l'afinitat

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

transforma la quàdrica (8.1), que ara s'escriu

$$(x, y, 1)r \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x, y, 1) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{8.4}$$

en la quàdrica (8.2), que ara s'escriu

$$(x, y, 1)s \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x, y, 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 10 & 21 \\ -3 & 21 & -36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{8.5}$$

(hem denotat per r i s les matrius associades als polinomis $r(x, y)$ i $s(x, y)$ respectivament.)

Per tant, tan sols hem de veure que si $(x, y, 1)$ compleix l'equació (8.4) llavors $(x', y', 1) = (x, y, 1)M^t$ compleix l'equació (8.5)

Però això és clar, ja que

$$\begin{aligned} (x', y', 1)\, s \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} &= (x, y, 1)M^t\, s\, M \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (x, y, 1) \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 9(x^2 + y^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Observem que el què realment hem provat amb aquest càlcul és que $M^t\, s\, M = 9r$. Com que els zeros de r són els mateixos que els zeros de $9r$, això justifica la definició següent.

Definició 8.1.2 *Dos polinomis de segon grau, $r(x)$ i $s(x)$, en n indeterminades es diuen afinment equivalents quan existeix una matriu invertible del tipus*

$$M = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on A és una matriu $n \times n$ i $b^t = (b_1, \ldots, b_n)$, tal que

$$M^t r M = \lambda s, \quad \lambda \in k, \tag{8.7}$$

on r i s són les matrius corresponents a $r(x)$ i $s(x)$ respectivament pel mètode anteriorment explicat.

Pels mateixos problemes comentats en estudiar quàdriques en el projectiu, ens interessarà més classificar les equacions (els polinomis de segon grau) que no les quàdriques (els seus zeros).

Per exemple, els polinomis $r(x, y) = x^2 + y^2$ i $s(x, y) = -x^2 - y^2$ són afinment equivalents, ja que prenent $M = id$ i $\lambda = -1$ tenim

$$M^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M = \lambda \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En canvi, si traguéssim la λ de la definició 8.1.2 els polinomis r i s anteriors no serien equivalents (no hi ha cap matriu M del tipus demanat a la definició que compleixi la condició (8.7) amb $\lambda = 1$, sobre $\mathbb{R}$), tot i tenir els mateixos zeros.

Observem finalment que així com acabem de veure que a cada polinomi li associem una matriu simètrica, també a cada matriu simètrica A li podem associar un polinomi, simplement posant

$$p(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De fet, aquesta correspondència és bijectiva, ja que si dues matrius simètriques A i B donen lloc, per aquest procediment, al mateix polinomi, llavors $A = B$.

Això es justifica amb el lema següent.

Lema 8.1.3 *Si dues formes quadràtiques coincideixen sobre tots els vectors que són fora d'un hiperplà, llavors coincideixen a tot arreu.*

Primera demostració, en coordenades. Suposo $n = 2$ per simplificar la notació, però l'argument és el mateix en qualsevol dimensió. Agafant l'hiperplà de l'enunciat com el $z = 0$ i restant les dues formes quadràtiques, el que volem veure és que

$$(x, y, 1)M \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

per tot a x, y implica $M = 0$.

Però el primer terme és un polinomi de segon grau en x, y. Si posem $y = 1$ tenim un polinomi de segon grau en x idènticament nul, i per tant els coeficients són zero i hem acabat. ∎

Segona demostració, sense coordenades. La situació, un cop restem les dues formes, és equivalent a tenir $E = V \oplus \langle z \rangle$ i $\phi(v + z, v + z) = 0$, $\forall\, v \in V$, on ϕ és una forma bilineal simètrica. En particular $\phi(z, z) = 0$, i per a tot $\lambda \neq 0$ tenim

$$\phi(v + \lambda z, v + \lambda z) = \lambda^2 \phi\left(\frac{1}{\lambda}v + z, \frac{1}{\lambda}v + z\right) = 0.$$

És a dir

$$\phi(v, v) + 2\lambda\phi(v, z) = 0, \quad \forall \in V.$$

Si fixem v i fem variar λ obtenim $\phi(v, v) = \phi(v, z) = 0$, de manera que $\phi = 0$. ∎

8.1.1 Classificació pel mètode de completació de quadrats

Un mètode còmode per trobar una matriu M del tipus anterior (afinitat) que transformi un polinomi donat r en un de més senzill s (diagonal) és l'anomenat *mètode de completació de quadrats* que funciona així:

Donada una expressió del tipus

$$\sum_{i\leq j} a_{ij}x^i x^j + \sum_j b_j x^j + c = 0, \quad (i, j \text{ sumen de 0 a } n)$$

seguirem el procediment següent:

Si $a_{00} \neq 0$, traiem factor comú i tenim

$$a_{00}\left((x^0)^2 + x^0\sum_{i=1}\frac{a_{0i}}{a_{00}}x^i\right) + \text{termes quadràtics sense } x^0 + \text{ termes lineals } =$$
$$a_{00}\left(\left(x_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}\frac{a_{0i}}{a_{00}}x^i\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}\frac{a_{0i}}{a_{00}}x^i\right)^2\right) +$$
$$+ \text{ termes quadràtics sense } x^0 + \text{ termes lineals.}$$

Si fem ara el canvi de variable afí

$$\begin{aligned} y^0 &= x^0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}\frac{a_{0i}}{a_{00}}x^i \\ y^i &= x^i \qquad\qquad i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

l'expressió anterior queda

$$a_{00}(y^0)^2 + q(y^1, \ldots, y^n) + \text{termes lineals en } y^1, \ldots, y^n,$$

on $q(y^1, \ldots, y^n)$ és un polinomi quadràtic en $y^1, \ldots, y^n$.

Així hem aconseguit que la part quadràtica tingui una variable menys i per tant, repetint el procés, aniran sortint a fora els termes $(y^1)^2, (y^2)^2$ etc., fins que quedin només els termes lineals.

Però això pressuposa tenir en cada pas el a_{00} corresponent diferent de zero. Si això no es dóna vol dir que tenim només elements quadràtics de la forma $x^i x^j$, amb $i \neq j$. Suposem, per escriure menys, que al llarg del procés ens queda tan sols el terme yz. Fem llavors el canvi afí

$$\begin{aligned} y' &= y + z \\ z' &= y - z, \end{aligned}$$

de manera que

$$yz = \frac{1}{4}(y'^2 - z'^2)$$

i ja ho tenim transformat en suma de quadrats, que és el que volem.

Per tant, en un nombre finit de passos, tindrem la quàdrica donada inicialment de la forma

$$a_0(x^0)^2 + \cdots + a_r(x^r)^2 + b_0x^0 + \cdots + b_nx^n + c = 0, \quad a_i \neq 0,\ i = 0, \ldots, r.$$

Fem llavors

$$x'^i = x^i + \frac{b_i}{2a_i} \quad i = 0, \ldots, r$$

i obtenim, en les noves coordenades i on c ha canviat, una expressió del tipus

$$a_0(x^0)^2 + \cdots + a_r(x^r)^2 + b_{r+1}x^{r+1} + \cdots + b_nx^n + c = 0.$$

Primer cas.
Totes les $b_{r+j} = 0$. Tenim llavors

$$a_0(x^0)^2 + \cdots + a_r(x^r)^2 + c = 0. \tag{8.8}$$

Segon cas.
$b_s \neq 0$ per algun s entre $r+1$ i n. En aquest cas fem el canvi

$$\begin{aligned} x'^s &= b_{r+1}x^{r+1} + \cdots + b_n x^n + c \\ x'^j &= x^j \qquad\qquad\qquad\qquad j \neq s \quad j \geq r+1, \end{aligned}$$

que és un vertader canvi afí perquè el determinant és b_j, i per tant diferent de zero. La part quadràtica queda fixada i obtenim

$$a_0(x^0)^2 + \cdots + a_r(x^r)^2 + x^s = 0. \tag{8.9}$$

El resultat de tots els canvis de variable realitzats, sempre afins, ens dóna el canvi afí final, o equivalentment la matriu M de la definició 8.1.2.

La nova base està formada per les columnes de M^{-1}, com es pot veure a l'exercici 8.1.4.

Les expressions 8.8 i 8.9 reben el nom d'expressions canòniques.

Observeu que si apliquem el mètode a un polinomi homogeni (cas particular de l'anterior amb $b_i = c = 0$), el mateix càlcul demostra que tota aplicació bilineal simètrica diagonalitza, tal com diu el teorema 6.2.2, del qual hem obtingut doncs una segona demostració. A més, en aquest cas l'expressió canònica és sempre del tipus I, la qual cosa justifica el nom de *suma de quadrats*. Compareu aquest mètode amb el mètode emprat a la secció 6.2.1.

Tenim doncs tres tipus d'expressions canòniques, ja que de c tan sols importa si és zero o no, ja que si és diferent de zero podem dividir tota l'equació per c.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Tipus I.} & a_0(x^0)^2 + \cdots + a_r(x^r)^2 & = & 0,\ 0 \leq r \leq n, \quad a_i \neq 0; \\ \text{Tipus II.} & a_0(x^0)^2 + \cdots + a_r(x^r)^2 + 1 & = & 0,\ 0 \leq r \leq n, \quad a_i \neq 0; \\ \text{Tipus III.} & a_0(x^0)^2 + \cdots + a_r(x^r)^2 + 2x^{r+1} & = & 0,\ 0 \leq r \leq n-1,\ a_i \neq 0. \end{array}$$

Posem el 2 com a coeficient de x^{r+1} (correspondria al canvi afí $y^{r+1} = 2x^{r+1}$) per més comoditat a l'hora d'escriure la matriu simètrica associada al polinomi, que quedaria doncs així:

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & \\ & & & c \end{pmatrix}$$

(amb $a_i = 0,\ i > r,\ c = 0, 1$), pels tipus I i II, i

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{n-2} & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(amb $a_i = 0,\ i > r$), pel tipus III.

La revisió del procés de completació de quadrats ens diu també que expressions canòniques de tipus diferents corresponen a quàdriques no afinment equivalents. Per exemple, si $b_i = 0$ per a $i = 0, \cdots, r$, la constant c de 8.8 no varia en tot el procés, i per tant no podem passar, en aquest cas, d'una expressió amb $c = 0$ a una expressió amb $c \neq 0$.

Però podem pensar que podríem completar quadrats sense utilitzar exactament aquest mètode. O utilitzant aquest mètode però començant per una altra variable. De fet podem fer-nos les dues preguntes següents:

Q1. És possible passar d'un tipus a un altre per canvis afins?

Q2. Com es pot saber, dintre del mateix tipus, si dos quàdriques són equivalents o no?

Observem que en pensar matricialment veiem, comparant les fórmules 8.7 de la secció 8.1 i 6.6 de la secció 6.2.3, que polinomis afinment equivalents són, com matrius simètriques, projectivament equivalents.

Per tant quan $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$, els teoremes 6.2.7 i 6.2.8 responen la pregunta *Q2.* Concretament ens diuen, en els cas real, que dintre de cada tipus el rang i l'índex classifiquen, i en el cas complex, que dintre de cada tipus el rang classifica.

Però per exemple les matrius sobre $\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

una de cada tipus, tenen el mateix rang però no són afinment equivalents.

Per realment demostrar que no són afinment equivalents, contestant així la pregunta *Q1*, podríem procedir directament a partir de l'expressió 8.7. No obstant això, donarem tot seguit, a la secció 8.2, un criteri general de classificació que contestarà aquestes preguntes. Això ho farem considerant, com sempre, el nostre espai afí dintre d'un espai projectiu.

Abans però estudiem les expressions canòniques en el pla afí real i complex.

8.1.2 Classificació afí de les còniques complexes

Com que tot nombre complex té arrel quadrada les quàdriques es redueixen a les formes canòniques

$$\begin{array}{lrcl} \text{Tipus I.} & (x^0)^2+\cdots+(x^r)^2 & = & 0; \\ \text{Tipus II.} & (x^0)^2+\cdots+(x^r)^2+1 & = & 0; \\ \text{Tipus III.} & (x^0)^2+\cdots+(x^r)^2+2x^{r+1} & = & 0. \end{array}$$

Per tant en el cas del pla només tenim les possibilitats següents:

$$\begin{array}{rl} x^2+y^2+1=0 & \text{no singular} \\ x^2+y^2=0 & \text{dues rectes} \\ x^2+1=0 & \text{dues rectes paral·leles} \\ x^2=0 & \text{recta doble} \\ x^2+2y=0 & \text{paràbola} \end{array}$$

de manera que tota quàdrica de $\mathbb{C}P^2$ (cònica complexa) és afinment equivalent a una d'aquestes cinc. L'escalar λ que apareix a la definició 8.1.2 és irrellevant sobre $\mathbb{C}$ perquè tot element té arrel quadrada i podríem canviar la matriu invertible M dividint tots els seus elements per $\sqrt{\lambda}$.

8.1.3 Classificació afí de les còniques reals

Aquí les formes canòniques possibles són:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Tipus I.} & \pm(x^0)^2\pm\cdots\pm(x^r)^2 & = & 0; \\ \text{Tipus II.} & \pm(x^0)^2\pm\cdots\pm(x^r)^2+1 & = & 0; \\ \text{Tipus III.} & \pm(x^0)^2\pm\cdots\pm(x^r)^2+2x^{r+1} & = & 0, \end{array}$$

que en el pla dóna

$$\begin{array}{rl} x^2+y^2+1=0 & \text{imaginària} \\ x^2+y^2-1=0 & \text{el·lipse} \\ x^2+y^2=0 & \text{punt} \\ x^2-y^2=0 & \text{dues rectes} \\ x^2-y^2+1=0 & \text{hipèrbola} \\ x^2=0 & \text{recta doble} \\ x^2+1=0 & \text{imaginària} \\ x^2-1=0 & \text{dues rectes paral·leles} \\ x^2+2y=0 & \text{paràbola} \end{array}$$

de manera que tota quàdrica de $\mathbb{R}P^2$ (cònica real) és afinment equivalent a una d'aquestes nou. Observem que no hi ha més casos ja que equacions com $x^2+2y=0$ i $x^2-2y=0$ són equivalents ($y'=-y, x'=x$) i equacions com $x^2+y^2=0$ i $-x^2-y^2=0$ també són equivalents perquè la relació d'equivalència afí és mòdul un escalar (en aquesta cas $\lambda=-1$).

Exercici 8.1.4 *Apliqueu el mètode de completació de quadrats per posar en forma canònica l'expressió $3x^2-xy+4y-2$. Trobeu la base en la qual té aquesta expressió.*

Solució. Agrupem els termes en x:

$$3x^2 - xy + 4y - 2 = 3\left(x - \frac{1}{6}y\right)^2 - \frac{1}{12}y^2 + 4y - 2.$$

Seguint la teoria, el primer canvi serà

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{1}{6}y \\ y' &= y, \end{aligned}$$

i l'expressió anterior es transforma en

$$3x'^2 - \frac{1}{12}y'^2 + 4y' - 2,$$

que escriuré a partir d'ara sense les primes per no carregar la notació. Ara ens preocupem dels termes en y.

$$3x^2 - \frac{1}{12}y^2 + 4y - 2 = 3x^2 - \frac{1}{12}(y - 24)^2 + 48 - 2,$$

que amb el canvi

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y - 24 \end{aligned}$$

queda

$$3x'^2 - \frac{1}{12}y'^2 + 46.$$

Component els dos canvis trobem l'afinitat emprada

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si denotem per M aquesta matriu i $r : 3x^2 - xy + 4y - 2$ és el polinomi donat i $s : 3x^2 - \frac{1}{12}y^2 + 46$ l'obtingut completant quadrats, tenim $M^t s M = r$, és a dir r i s són afinment equivalents per la definició donada.

De l'equació de l'afinitat es dedueix que la referència afí en la qual l'expressió donada r té la forma més senzilla s (forma canònica) és

$$\left\{(4, 24); (1, 0), \left(\frac{1}{6}, 1\right)\right\}.$$

L'origen s'ha obtingut posant $x' = y' = 0$, i la base són les columnes de M^{-1}. Això darrer és un fet ben conegut, que és pel fet que si U és la matriu que té per columnes els vectors de la nova base, es compleix

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix},$$

de manera que directament obtenim $U = M^{-1}$.

Si l'expressió inicial és sobre $\mathbb{C}$, podem millorar l'expressió final $3x^2 - \frac{1}{12}y^2 + 46$ fent el canvi afí $x' = \sqrt{3}x$, $y' = \frac{1}{\sqrt{-12}}y$, de manera que obtenim

$$x'^2 + y'^2 + 46.$$

Si som a $\mathbb{R}$, podem fer $x' = \sqrt{3}x, y' = \frac{1}{\sqrt{12}}y$ per obtenir

$$x'^2 - y'^2 + 46.$$

De fet, en els dos casos podíem haver fet que el terme independent fos 1, ja que polinomis proporcionals són equivalents segons la definició que estem emprant, i podíem per tant dividir tota l'expressió per 46. ∎

8.2 Classificació afí en el context projectiu

Ja hem vist a la secció 7.6 com una cònica afí es pot pensar com el conjunt de punts afins d'una cònica projectiva. Revisem el procés en dimensió arbitrària.

Sigui $P(E)$ l'espai projectiu associat al k-espai vectorial E i sigui H un hiperplà de $P(E)$. Situem-nos a $P(E)\backslash H$ i fixem una descomposició $E = V \oplus \langle z_0 \rangle$ amb $H = p(V)$, de manera que, com és habitual, $P(E)\backslash H$ és espai afí sobre V amb la suma

$$p(a + z_0) + v = p(a + v + z_0) \quad \forall\, a, v \in V.$$

Una quàdrica afí és la intersecció amb $P(E)\backslash H$ d'una quàdrica projectiva $\mathcal{Q}$ de $P(E)$. Vegem que coincideix amb la definició habitual.

Coordenades.

Prenem una base $e_0, \ldots, e_{n-1}$ de V i l'ampliem amb z_0 a una base adaptada de E. D'aquesta manera H té equació $x^n = 0$ i un punt de coordenades homogènies $[x^0, \ldots, x^n]$ té coordenades afins

$$\left(\frac{x^0}{x^n}, \ldots, \frac{x^{n-1}}{x^n} \right),$$

respecte a la referència afí $\{p(z_0); e_0, \ldots, e_{n-1}\}$.

Sigui

$$\mathcal{Q} = \{p(x) \in P(E); q(x) = 0\}, \quad \text{on } q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i x^j.$$

Llavors

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{A}} = \mathcal{Q} \cap (P(E)\backslash H) = \{p(x) \in P(E); q(x) = 0 \text{ i } x^n \neq 0\}.$$

Si posem $y^i = \frac{x^i}{x^n}$, tenim

$$\sum_{i,j} a_{ij} x^i x^j = \sum_{i,j=0}^{n-1} a_{ij} y^i y^j (x^n)^2 + 2 \sum_{j=0}^{n-1} a_{nj} y^j (x^n)^2 + a_{nn} (x^n)^2.$$

Així

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{A}} = \left\{ (y^0, \ldots, y^{n-1}); \sum_{i,j=0}^{n-1} a_{ij} y^i y^j + 2 \sum_{j=0}^{n-1} a_{nj} y^j + a_{nn} = 0 \right\},$$

és a dir que una quàdrica afí és, en coordenades afins, el conjunt de zeros d'un polinomi de segon grau, d'acord amb la definició donada anteriorment. Assumirem que alguna $a_{ij} \neq 0$, $i, j \leq n-1$ per tenir efectivament grau dos.

Així doncs, donada una quàdrica projectiva $q(x) = \sum_{ij} a_{ij} x^i x^j = 0$, passem a la quàdrica afí corresponent a l'espai afí que té $x^n = 0$ com a infinit, canviant y^i per $\frac{x^i}{x^n}$ o simplement posant directament $x^n = 1$ a l'expressió anterior. Recíprocament, donada una quàdrica $q(y) = 0$ en un espai afí $\mathbb{A}$ la podem considerar com a restricció a $P(E)\backslash H$ de la quàdrica de $P(E)$ obtinguda canviant y^i per $\frac{x^i}{x^n}$. D'aquest procés se'n diu *homogeneïtzació*. Consisteix a pensar el nostre espai afí injectat en el projectiu via $(y^0, \ldots, y^{n-1}) \longmapsto [y^0, \ldots, y^n, 1]$, vegeu la secció 3.4.

La matriu M que apareix a la definició 8.1.2, que és la definició de polinomis afinment equivalents, es pot interpretar com una projectivitat que deixa invariant l'infinit (per tenir zeros sota de A).

Això suggereix la definició següent:

Definició 8.2.1 *Sigui H un hiperplà de $P(E)$. Dues formes quadràtiques q, q' de l'espai projectiu $P(E)$ es diu que són afinment equivalents ($q \overset{A}{\sim} q'$) si i només si existeix una projectivitat $\tilde{f}$ que deixa invariant l'hiperplà de l'infinit H tal que $f^*q' = \lambda q$.*

Aquí f^* és la imatge recíproca de qualsevol de les aplicacions lineals f de E que indueixen $\tilde{f}$. Com que dues d'aquestes aplicacions difereixen en un escalar, la igualtat $f^*q' = \lambda q$ és independent de la f considerada.

Matricialment

$$q \overset{A}{\sim} q' \Longleftrightarrow \exists\, M = \begin{pmatrix} N & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tal que } M^t q M = \lambda q',$$

on N és una matriu $n \times n$, i b és un vector columna.

És a dir que dues formes quadràtiques q i q' de $P(E)$ són afinment equivalents si i només si les seves restriccions a l'espai afí, $q_{\mathbb{A}}$ i $q'_{\mathbb{A}}$ són afinment equivalents.

En efecte, si $q_{\mathbb{A}}$ i $q'_{\mathbb{A}}$ són afinment equivalents en el sentit clàssic, la projectivitat que prové de l'aplicació lineal donada per la matriu de l'afinitat entre $q_{\mathbb{A}}$ i $q'_{\mathbb{A}}$

$$f = \begin{pmatrix} N & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deixa invariant l'infinit i compleix $f^*q' = \lambda q$.

Recíprocament, si $\tilde{f}$ és una projectivitat que deixa invariant l'hiperplà de l'infinit i tal que $f^*q' = \lambda q$, llavors

$$f = \begin{pmatrix} N & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

però llavors $\frac{1}{c} f$ és l'afinitat buscada.

Recordem que l'estructura afí de $P(E)\backslash H$ depèn de l'elecció d'un punt z_0, però que l'elecció de punts diferents dóna lloc a espais afins isomorfs. Per això no és estrany que a la definició anterior no aparegui el punt z_0, ja que si dues quàdriques són afinment equivalents en el sentit de la definició 8.2.1, les seves restriccions a l'espai afí $P(E)\backslash H$ seran afinment equivalents en sentit clàssic independentment del punt elegit per definir l'estructura afí.

Així, la classificació afí de les quàdriques és una classificació projectiva, en el sentit que es pot retrobar definint en el projectiu una certa relació d'equivalència entre quàdriques projectives.

Per mostrar la relació entre completar quadrats i el procés d'homogeneïtzació considerem l'exercici següent:

Exercici 8.2.2 *Quin canvi afí transforma en suma de quadrats l'expressió*

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + y - xy - \frac{1}{4}?$$

Solució.

Primer mètode.

Apliquem directament la completació de quadrats explicada al capítol anterior i obtenim

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} \\ y' &= y - 2, \end{aligned} \tag{8.10}$$

que vol dir que la nova referència afí té per origen $(1,2)$ $(x' = y' = 0)$ i base $(1,0), (\frac{2}{3}, 1)$, que són les columnes de la inversa de la part lineal

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Segon mètode.

Homogeneïtzem i completem quadrats amb la precaució de deixar la nova variable z com la última variable a *quadrar*. D'aquesta manera tindrem $z' = z$ i podrem passar fàcilment al cas afí. Tindrem

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}xz + yz - xy - \frac{1}{4}z^2 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z\right)^2 - \frac{1}{3}(y - 2z)^2 + z^2,$$

i per tant el canvi és

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ y' &= y - 2z \\ z' &= z, \end{aligned}$$

que correspon a considerar com nova base la $(1,0,0), (\frac{2}{3}, 1, 0), (1, 2, 1)$.

Si posem ara $z' = z = 1$, obtenim el mateix canvi afí de 8.10.

Observem que, per exemple, el canvi $x = x'$, $y = y'$, $z = x' + 2y' + z'$ també transforma l'expressió

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}xz + yz - xy - \frac{1}{4}z^2$$

en suma de quadrats, però ara es complicaria la interpretació afí. ∎

8.3 Preliminars algebraics al teorema de classificació afí de les quàdriques

L'objectiu que ara perseguim és donar la classificació afí de les quàdriques per mètodes purament projectius. De fet demostrarem en el teorema 8.4.1 que la classificació afí es redueix a dues classificacions projectives, l'una a tot l'espai projectiu i l'altra a l'infinit.

El problema és que si agafem dues quàdriques afins i les homogeneïtzem i aquestes quàdriques projectives són projectivament equivalents, no podem encara dir que les quàdriques afins siguin equivalents, ja que la projectivitat podria no respectar l'hiperplà de l'infinit, i no donar lloc doncs a una afinitat. Necessitem alguna cosa més, per exemple saber a quin dels tres tipus afins pertany la quàdrica, i això és justament el que permet fer la classificació a l'infinit. És a dir, que la classificació afí serà la classificació projectiva més alguna cosa més, que pot ser el coneixement del tipus afí o equivalentment la classificació projectiva a l'infinit.

En els casos complex i real ens dirà, tan sols mirant el rang o el rang i l'índex a tot l'espai i a l'infinit, si les quàdriques que apareixen a les llistes són equivalents entre elles o no, contestant així les preguntes *Q1.* i *Q2.*

Sigui ϕ una aplicació bilineal simètrica sobre un k-espai vectorial E. Si F és un subespai vectorial de E, definim

$$\operatorname{rad} F = \{v \in F; \phi(v, w) = 0 \ \forall w \in F\},$$

és a dir que $\operatorname{rad} F$ és el radical de $(F, \phi \mid F)$. No s'ha de confondre amb el subespai *ortogonal* a F

$$F^{\perp} = \{v \in E; \phi(v, w) = 0 \ \forall w \in F\}.$$

Es diu que el subespai vectorial F és *no singular* quan $\operatorname{rad} F = 0$. Recordem que quan $\operatorname{rad} E = 0$ (E és no singular) es diu també que ϕ és no singular. Utilitzarem el resultat següent ([11]):

Proposició 8.3.1 *Sigui E un k-espai vectorial i sigui ϕ una aplicació bilineal simètrica sobre E. Aleshores, el subespai vectorial F és no singular si i només si $E = F \oplus F^{\perp}$.*

Demostració. Com $\operatorname{rad} F = F \cap F^{\perp}$ l'únic problema és demostrar que si F és no singular, llavors $E = F + F^{\perp}$.

Sigui $e_1, \cdots, e_r$ una base de F i B la matriu de ϕ en aquesta base. Per hipòtesi, B és una matriu invertible. Prenem un vector $e \in E$ arbitrari. Volem provar l'existència d'una combinació lineal dels e_i satisfent:

$$e - (x_1 e_1 + \cdots + x_r e_r) \in F^{\perp}.$$

Equivalentment

$$\phi(e - \sum_{i=1}^{r} x_i e_i, e_j) = 0, \quad \forall j = 1, \cdots, r,$$

o, per bilinealitat,

$$\phi(e, e_j) = \sum_{i=1}^{r} x_i \phi(e_i, e_j), \quad \forall j = 1, \cdots, r.$$

Aquesta igualtat la podem escriure en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \phi(e,e_1) \\ \vdots \\ \phi(e,e_r) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix},$$

i, com que B és invertible, aquest sistema (on les x_i són les incògnites) té solució. ∎

Proposició 8.3.2 *Si $E = \operatorname{rad} E \perp F$, llavors el subespai vectorial F és no singular.*

Demostració. Obvi. ∎

Necessitarem el lema següent:

Lema 8.3.3 *Sigui ϕ una aplicació bilineal simètrica no singular sobre un k-espai vectorial E. Si V és un subespai vectorial de E de codimensió 1, singular, llavors $\dim \operatorname{rad} V = 1$.*

Demostració. Que sigui singular vol dir $\dim \operatorname{rad} V \geq 1$. Suposarem que $\dim \operatorname{rad} V > 1$ i arribarem a contradicció. Hi hauria llavors almenys dos vectors independents $e_1, e_2 \in \operatorname{rad} V$. Si posem $E = V \oplus \langle e \rangle$ i denotem $a = \phi(e_1, e)$ i $b = \phi(e_2, e)$, el vector $u = be_1 - ae_2$ és no nul (ja que si $a = 0$, e_1 seria del radical de E i estem suposant E no singular). Però $\phi(u, h) = 0$, $\forall\, h \in V$ i $\phi(u, e) = ba - ab = 0$ i per tant u seria del radical, contradicció. ∎

Teorema 8.3.4 (teorema de l'Amparo) [1] *Sigui ϕ una aplicació bilineal simètrica sobre un k-espai vectorial E i V un subespai vectorial de E de codimensió 1. Tenim llavors dues possibilitats:*

a) $\operatorname{rad} E \not\subset V$. *Llavors* $\dim \operatorname{rad} V = \dim \operatorname{rad} E - 1$, *(equivalentment $r_V = r_E$) i $i_V = i_E$.*

b) $\operatorname{rad} E \subset V$. *Llavors tenim dos casos:*

- **1)** $\operatorname{rad} E = \operatorname{rad} V$ *(equivalentment $r_E = r_V + 1$), i $i_E = i_V$ o $i_E = i_V + 1$.*
- **2)** $\operatorname{rad} V = \operatorname{rad} E \oplus \langle u \rangle$, $0 \neq u \in E$ *(equivalentment $r_E = r_V + 2$), i $i_E = i_V + 1$.*

Demostració. Remarquem primerament que r_V, i_V vol dir rang i índex de V. Com que $\dim E = \dim \operatorname{rad} E + r_E$ i $\dim V = \dim \operatorname{rad} V + r_V$, el teorema es pot enunciar en termes de rangs o en termes de radicals.

Cas a). Suposem primerament $\operatorname{rad} E \not\subset V$. Existeix llavors $e \in \operatorname{rad} E$ i $e \notin V$. Ampliant amb e qualsevol base de V tenim

$$\phi = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que demostra directament que el rang i l'índex de E i V coincideixen. La V dins la matriu és un petit abús de notació per indicar la matriu de ϕ restringida a V. Farem aquest abús també més endavant.

[1] Aquest teorema es coneix col·loquialment per teorema de l'Amparo, en honor d'Amparo López Villacampa, professora del Departament de Matemàtiques de la UAB a qui es deu aquesta demostració.

Cas b). Observem a continuació que $\operatorname{rad} E \subset V$ implica $\operatorname{rad} E \subset \operatorname{rad} V$. A partir d'aquí tenim dues possibilitats.

Cas b1). Suposem primerament $\operatorname{rad} E = \operatorname{rad} V$. Llavors $V = \operatorname{rad} E \perp F$ amb F no singular. Per ser F no singular existeix $e \in F^{\perp} \backslash V$ (cal raonar-ho). Prenem llavors una base de E formada per una base de $\operatorname{rad} E$ ampliada amb una base de F i ampliada amb e. Tindrem

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

amb $c = \phi(e, e) \neq 0$ (ja que, si no, e seria del radical) que demostra $r_E = r_V + 1$ i que l'índex pot com a molt augmentar en 1, és a dir $i_E = i_V$ o $i_E = i_V + 1$.

Cas b2). Considerem ara el cas $\operatorname{rad} E \neq \operatorname{rad} V$ (som en la situació $\operatorname{rad} E \subset \operatorname{rad} V$). Posem $\operatorname{rad} V = \operatorname{rad} E \perp R$, amb R un cert subespai vectorial. Demostrarem que $\dim R = 1$.

Descomponem $V = (\operatorname{rad} E \perp R) \perp F$ amb F no singular. Com abans, existeix $e \in F^{\perp} \backslash V$. Llavors $(R \perp F) \oplus \langle e \rangle$ és no singular (per ser complementari del radical) i $R \perp F$ n'és un subespai de codimensió 1 singular (ja que $\phi(R, R) = \phi(R, F) = 0$); per tant som en les hipòtesis del lema anterior i podem afirmar que $\dim \operatorname{rad}(R \perp F) = 1$. Però $\operatorname{rad}(R \perp F) = R$, i per tant $\dim R = 1$, com hem dit. Suposem que $R = \langle u \rangle$.

Observem ara que $\phi(u, e) \neq 0$, ja que en cas contrari $u \in \operatorname{rad} E$, que no podria ser.

Per tant $\langle u, e \rangle$ és un pla hiperbòlic, ja que és no singular i té un vector isòtrop ($\phi(u, u) = 0$, per ser $u \in \operatorname{rad} V$). En la base u, e' amb

$$e' = -\frac{\phi(e, e)}{2\phi(e, u)^2} u + \frac{1}{\phi(e, u)} e$$

tenim

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ampliem una base de $\operatorname{rad} E$ amb una base de F i u, e' tenim

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que demostra directament $r_E = r_V + 2$ i $i_E = i_V + 1$. ∎

Observem que si q és la quàdrica associada a ϕ i $q_{\mathbb{A}}$ la quàdrica afí corresponent a $P(E) \backslash H$, $H = p(V)$, aquest teorema ens diu que l'expressió de $q_{\mathbb{A}}$ en coordenades adaptades és del tipus I (cas a), del tipus II (cas b1) o del tipus III (cas b2).

Però aquesta versió és lliure de coordenades i ens permet veure que els tres tipus apareixen segons la "posició relativa" del radical respecte a l'hiperplà de l'infinit. En particular, si tenim $f^* \phi = \lambda \phi'$ amb f afinitat, tenim $f(\operatorname{rad} \phi') = \operatorname{rad} \phi$ i $f(V) = V$, i per tant no podem tenir cap afinitat entre quàdriques de diferent tipus, i contestem així la pregunta *Q1.*

Interpretació geomètrica.

Abans de continuar, interpretem geomètricament aquest teorema en un cas senzill. Situem-nos a $\mathbb{R}P^2$ amb

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

El teorema estudia de fet la posició relativa d'un pla per l'origen V respecte al con $x^2+y^2=z^2$. Com que ϕ té rang 3 i índex 1, els tres casos del teorema són els següents:

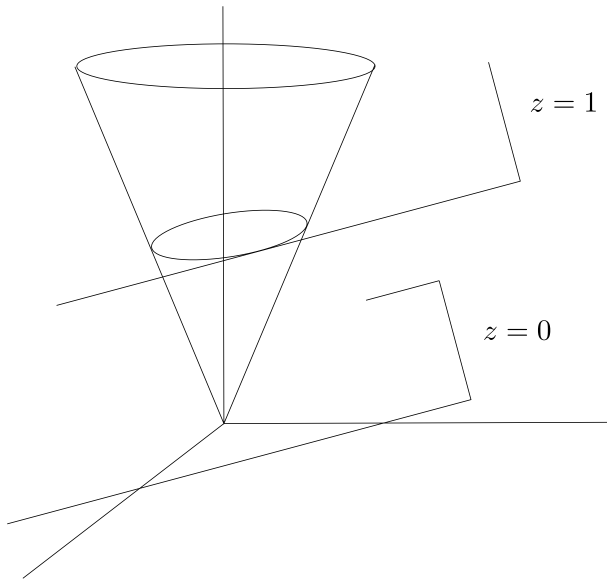
a) $r_E = r_V$. No es pot donar, ja que en aquest cas $r_E = 3$, i r_V com a molt pot ser 2, ja que $\dim V = 2$.

b1) Hi ha dues possibilitats, $r_V = 2$, $i_V = 0$ i $r_V = 2$, $i_V = 1$.

En el primer cas, que correspon a $(r, i, r_\infty, i_\infty) = (3, 1, 2, 0)$, ϕ restringida a V té la forma canònica

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix},$$

és a dir $x^2+y^2=0$, i per tant ϕ no té punts a l'infinit. Correspon a la figura

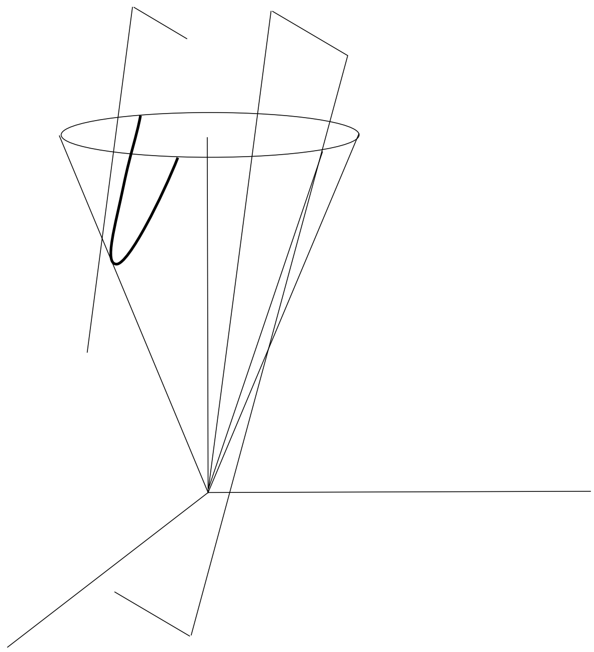


Si $H = p(V)$ és la recta de l'infinit de $\mathbb{R}P^2$ i agafem coordenades adaptades x, y, z a la descomposició $E = V \oplus \langle z_0 \rangle$, V té equació $z = 0$ i l'espai afí $\mathbb{R}P^2 \backslash H$ s'identifica amb $z = 1$. Així ϕ, a l'espai afí, no és més que el con tallat amb el pla $z = 1$, i això correspon a una *el·lipse*.

En el segon cas, que correspon a $(r, i, r_\infty, i_\infty) = (3, 1, 2, 1)$, ϕ restringida a V té la forma canònica

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix},$$

és a dir $x^2-y^2=0$, que són les dues rectes $y = \pm x$ de V. Correspon a la figura

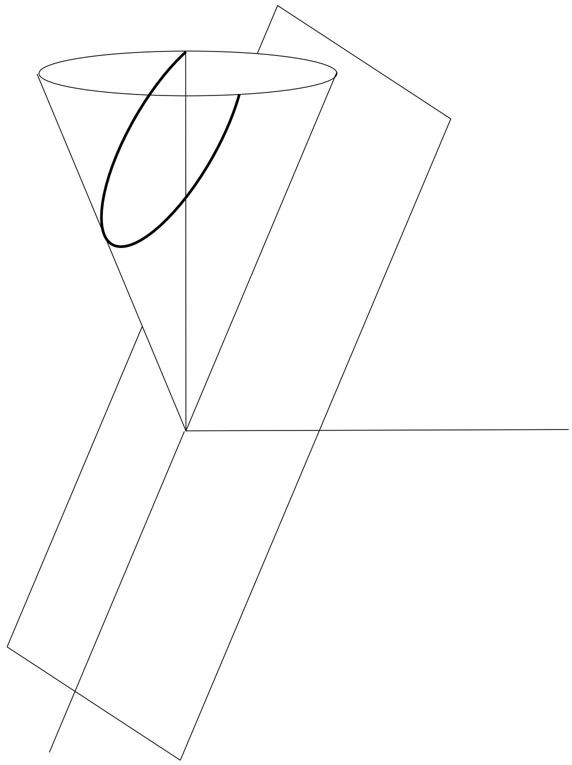


Identificant, com abans, V amb $z = 0$ i l'espai afí amb $z = 1$, ϕ a l'espai afí correspon a tallar el con amb un pla paral·lel a V, i obtenim així una *hipèrbola*.

b2) En aquest cas $r_V = 1$ i $i_V = 0$, que correspon a $(r, i, r_\infty, i_\infty) = (3, 1, 1, 0)$, ϕ té la forma canònica

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

és a dir $x^2 + 2yz = 0$, que tallant com abans amb $z = 1$ ens dóna la *paràbola* $x^2 + 2y = 0$



És a dir, que els tres casos del teorema d'Amparo corresponen geomètricament a la posició relativa respecte d'un con d'un pla que passa pel seu vèrtex, que pot tallar únicament en el vèrtex, tallar en dues rectes o ser tangent.

Teorema 8.3.5 (extensió de similituds) *Sigui ϕ una aplicació bilineal simètrica sobre un k-espai vectorial E. Sigui $\tau : V_1 \longrightarrow V_2$ una similitud entre subespais vectorials de E de codimensió 1. Llavors existeix una similitud $\tilde{\tau} : E \longrightarrow E$ tal que $\tilde{\tau}(V_1) = V_2$.*

Abans de donar-ne la demostració comparem-lo amb el teorema d'extensió d'isometries d'E. Witt (1911-1991) ([11], teorema 10.3.3).

Teorema 8.3.6 (teorema de Witt) *Sigui ϕ una aplicació bilineal simètrica sobre un k-espai vectorial E. Sigui $\tau : F_1 \longrightarrow F_2$ una ϕ-isometria entre subespais vectorials de E no singulars. Llavors existeix una ϕ-isometria $\tilde{\tau} : E \longrightarrow E$ tal que $\tilde{\tau} \mid F_1 = \tau$.*

Per ϕ-isometria entenem un isomorfisme f tal que $f^*\phi = \phi$. La notació $\tilde{\tau} \mid F_1$ vol dir $\tilde{\tau}$ restringit a F_1.

Observem, en comparar aquests dos teoremes, que el teorema sobre similituds no demana que V_1 i V_2 siguin no singulars. Per contra, exigeix codimensió 1, i la similitud $\tilde{\tau}$ *no estén* τ, tan sols porta V_1 a V_2. En general no es pot assegurar que existeixi $\tilde{\tau}$ tal que $\tilde{\tau} \mid V_1 = \tau$.

Demostració del teorema d'extensió de similituds.

Com que la similitud $\tau : V_1 \longrightarrow V_2$ conserva rangs, resulta que V_1 i V_2 estan sempre en el mateix cas dels tres possibles considerats en el teorema d'Amparo, ja que aquests casos estaven caracteritzats pel rang.

a) Estenem τ definint $\tilde{\tau} = \tau$ sobre V_1 i $\tilde{\tau}(e_1) = e_2$, on e_1 i e_2 són els complementaris de V_1 i V_2 respectivament introduïts al teorema 8.3.4 ($e_1, e_2 \in \operatorname{rad} E$, $e_1 \notin V_1$, $e_2 \notin V_2$). Clarament $\tilde{\tau}^*\phi = \lambda\phi$ i $\tilde{\tau}^*\phi \mid V_2 = \lambda\phi \mid V_1$.

b1) Estenem τ definint $\tilde{\tau} = \tau$ sobre $\operatorname{rad} E \perp F_1$, $\tilde{\tau}(u_1) = u_2$, $\tilde{\tau}(e_1) = \lambda e_2$, amb la notació del teorema 8.3.4, on λ és la raó de τ. Llavors $\tilde{\tau}$ és una similitud entre els plans hiperbòlics $\langle u_, e_1 \rangle$, $\langle u_2, e_2 \rangle$ ja que

$$(\tilde{\tau}^* \phi)(u_1, e_1) = \phi(u_2, \lambda e_2) = \lambda = \lambda \phi(u_1, e_1),$$

i sobre les altres possibilitats tots dos termes són nuls.

b2) Seguint novament el teorema 8.3.4 tenim

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{rad} E \perp F_1 \perp e_1, \quad \text{amb } \phi(e_1, e_1) = a \neq 0 \\ E &= \operatorname{rad} E \perp F_2 \perp e_2, \quad \text{amb } \phi(e_2, e_2) = b \neq 0. \end{aligned}$$

Comparant les matrius de ϕ respecte a bases adaptades respectivament a aquestes dues descomposicions i considerant només la part no singular, obtenim una expressió de canvi de base del tipus $M^t \cdot \phi \mid (F_1 \perp e_1) \cdot M = \phi \mid (F_2 \perp e_2)$, que implica

$$a \det \phi \mid F_1 \equiv b \det \phi \mid F_2 \pmod{k^{*2}},$$

és a dir mateix discriminant de la part no singular. Com que $\tilde{\tau}^* \phi \mid V_2 = \lambda \phi \mid V_1$, si ens reduïm novament a la part no singular, tenim

$$\lambda^m \det \phi | F_1 \equiv \det \phi | F_2 \quad (m = \dim F_1).$$

Per tant $a \equiv b \lambda^m$, que dóna lloc a dos casos:

m senar. Llavors $a\lambda = b\alpha^2$ per a un cert $\alpha \in k$ i podem definir $\tilde{\tau}(e_1) = \alpha e_2$ de manera que

$$(\tilde{\tau}^* \phi)(e_1, e_1) = \alpha^2 b = a\lambda = (\lambda \phi)(e_1, e_1).$$

m parell. Llavors $a = b\epsilon^2$, amb $\epsilon \in k$ i podem definir $\tilde{\tau}(e_1) = \epsilon e_2$ de manera que

$$(\tilde{\tau}^* \phi)(e_1, e_1) = \epsilon^2 b = a = \phi(e_1, e_1)$$

que ens diu que els subespais $\langle e_1 \rangle$ i $\langle e_2 \rangle$ són ϕ-isomètrics. Pel teorema de Witt 8.3.6 podem estendre aquesta ϕ-isometria a una de global $\tilde{\tau}$, que és la similitud buscada ($\lambda = 1$), ja que $\langle e_1 \rangle^\perp = V_1$, $\langle e_2 \rangle^\perp = V_2$ i $\tilde{\tau}(\langle e_1 \rangle^\perp) = \langle e_2 \rangle^\perp$. ∎

8.4 Teorema de classificació afí de les quàdriques

Tenim ja les eines per poder demostrar el teorema següent:

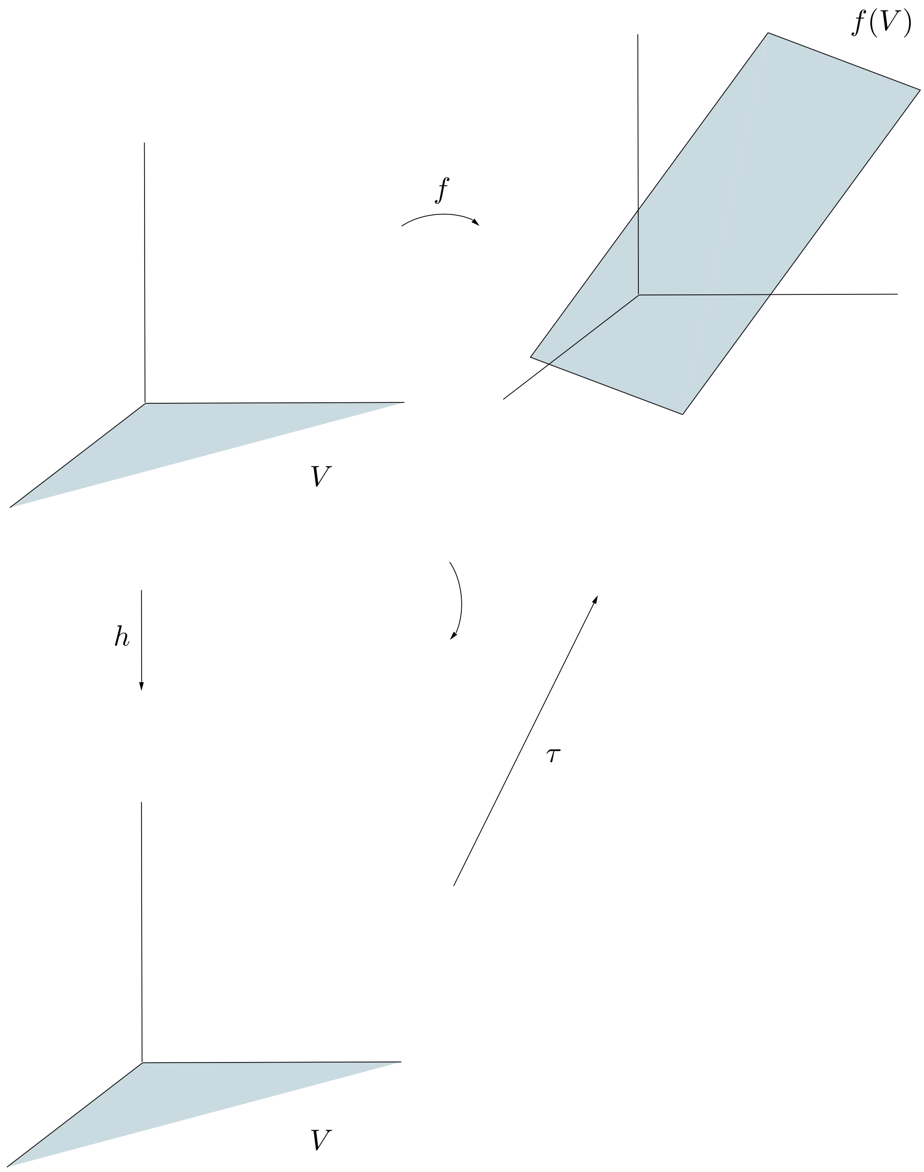
Teorema 8.4.1 (de classificació afí) *Sigui $H = p(V)$ un hiperplà de $P(E)$ i siguin q, q' dues formes quadràtiques de $P(E)$. Llavors*

$$q \overset{A}{\sim} q' \iff q \sim q' \text{ i } q_V \sim q'_V.$$

És a dir, dues quàdriques són afinment equivalents si i només si són projectivament equivalents i les restriccions a l'infinit d'aquestes quàdriques també són projectivament equivalents.

Demostració.

($\Longrightarrow$). Obvi.



($\Longleftarrow$). Sigui $f^*q' = \lambda q$ i $h^*q'_V = \mu q_V$ amb f isomorfisme de E i h isomorfisme de V. Recordem que q_V vol dir la restricció de q a V. Suposem que $V' = f(V)$. Llavors $\tau = f \circ h^{-1}$ és una similitud de V a V' entre q'_V i $q'_{V'}$ de raó $\lambda\mu^{-1}$. En efecte,

$$\tau^* q'_{V'} = h^{-1*} f^* q'_{V'} = \lambda h^{-1*} q_V = \lambda\mu^{-1} q'_{V'}.$$

Apliquem el teorema d'extensió de similituds a (E, q'), sent τ la similitud entre els hiperplans. Existeix $\tilde{\tau} : E \longrightarrow E$ tal que $\tilde{\tau}^* q' = \rho q'$ i $\tilde{\tau}(V) = V'$.

Com que volem deixar V invariant, definim finalment $\varphi = \tilde{\tau}^{-1} \circ f$, que és una similitud de raó $\lambda\rho^{-1}$ tal que $\varphi(V) = V$. ∎

Per tant la classificació afí corresponent a l'hiperplà de l'infinit $H = p(V)$, consisteix en dues classificacions projectives, l'una sobre l'espai projectiu de dimensió n, $P(E)$, i l'altra sobre l'espai projectiu de dimensió $n-1$, $P(V)$.

Per exemple, en el cas real ($k = \mathbb{R}$), on hem vist que la classificació projectiva és molt fàcil ja que és suficient calcular el rang i l'índex, la classificació afí serà també molt senzilla ja que tan sols haurem de calcular dues vegades rang i índex i obtindrem quatre nombres que classificaran afinment la quàdrica donada.

En coordenades adaptades, restringir a l'infinit és considerar la quàdrica que s'obté de la donada posant la darrera coordenada $x^n = 0$.

8.4.1 Classificació afí de les còniques complexes

Per estudiar les còniques de l'espai afí $\mathbb{C}^2$ identifiquem aquest espai amb $\mathbb{C}P^2$ menys un hiperplà.

Com que el rang classifica projectivament i els rangs possibles a $E = \mathbb{C}^3$ i a V, subespai vectorial de E de dimensió 2 (l'infinit), estan relacionats pel teorema 8.3.4, tenim

r	r_∞	Exemple	Nom
3	2	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	no singular
3	1	$x^2 + 2y = 0$	paràbola
2	2	$x^2 + y^2 = 0$	dues rectes
2	1	$x^2 + 1 = 0$	dues rectes paral·leles
1	1	$x^2 = 0$	recta doble

que coincideix amb la classificació abans obtinguda per mètodes purament afins (secció 8.1.2).

Estudiem com a exemple el cas $(r, r_\infty) = (3, 1)$. Prové de

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que dóna lloc a $x^2 + 2yz = 0$, que correspon a la cònica afí $(z = 1)$ $x^2 + 2y = 0$. Anàlogament els altres casos. Per construir la matriu associada a un parell (r, r_∞) és millor escriure primer la matriu a l'infinit (dues primeres files i dues primeres columnes) i completar-la després per fer quadrar els rangs.

8.4.2 Classificació afí de les quàdriques complexes en dimensió 3

Per estudiar les quàdriques de l'espai afí $\mathbb{C}^3$ identifiquem aquest espai amb $\mathbb{C}P^4$ menys un hiperplà. Els mateixos raonaments anteriors ens porten ara a

r	r_∞	Exemple
4	3	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$
4	2	$x^2 + y^2 + 2z = 0$
3	3	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$
3	2	$x^2 + y^2 + 1 = 0$
3	1	$x^2 + 2z = 0$
2	2	$x^2 + y^2 = 0$
2	1	$x^2 + 1 = 0$
1	1	$x^2 = 0$

Observem, com a exemple, que el cas $(r, r_\infty) = (4, 2)$ prové de

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que dóna lloc a $x^2 + y^2 + 2zt = 0$, que correspon a la quàdrica afí ($t = 1$) $x^2 + y^2 + 2z = 0$, i el 2 el podem eliminar, com abans.

8.4.3 Classificació afí de les còniques reals

Per estudiar les còniques de l'espai afí $\mathbb{R}^2$ identifiquem aquest espai amb $\mathbb{R}P^2$ menys un hiperplà.

Com que el rang i l'índex classifiquen projectivament i les relacions entre rang i índex a $E = \mathbb{R}^3$ i a V, subespai de E de dimensió 2 que prenem com a infinit, estan donades pel teorema 8.3.4, tenim

	r	i	r_∞	i_∞	Exemple	Nom
1.	3	0	2	0	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	imaginària
2.	3	1	2	0	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	el·lipse
3.	3	1	2	1	$x^2 - y^2 - 1 = 0$	hipèrbola
4.	3	1	1	0	$x^2 + 2y = 0$	paràbola
5.	2	0	2	0	$x^2 + y^2 = 0$	punt
6.	2	0	1	0	$x^2 + 1 = 0$	imaginària
7.	2	1	2	1	$x^2 - y^2 = 0$	dues rectes
8.	2	1	1	0	$x^2 - 1 = 0$	dues rectes paral·leles
9.	1	0	1	0	$x^2 = 0$	recta doble

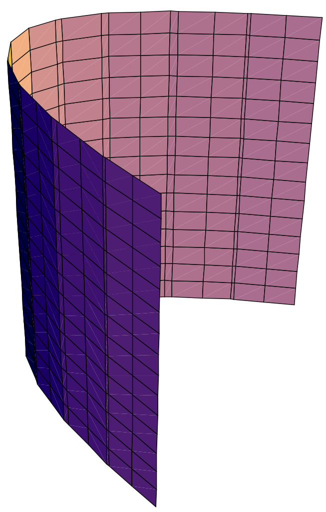
que coincideix exactament amb la classificació abans obtinguda per mètodes purament afins (secció 8.1.3). Anem suposant sempre $r_\infty > 0$, ja que, si $r_\infty = 0$, obtindríem (en posar $z = 1$ per passar a l'afí) expressions lineals (no quadràtiques) en les altres variables.

8.4.4 Classificació afí de les quàdriques reals en dimensió 3

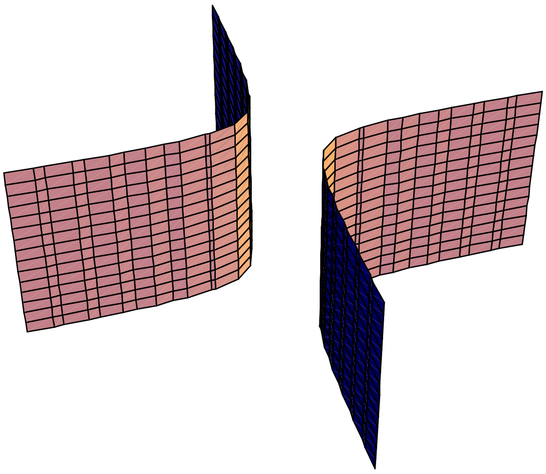
Per estudiar les quàdriques de l'espai afí $\mathbb{R}^3$ identifiquem aquest espai amb $\mathbb{R}P^4$ menys un hiperplà.

Comproveu, utilitzant com sempre 8.3.4, que la llista següent és exhaustiva:

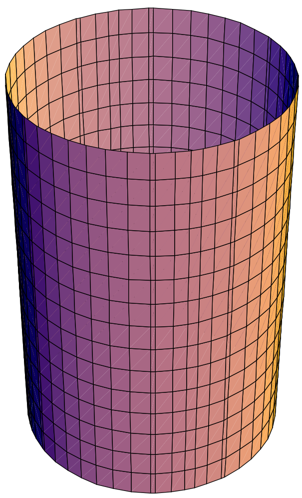
	r	i	r_∞	i_∞	Exemple	Nom
1.	4	1	3	1	$x^2+y^2-z^2+1=0$	hiperboloide de dos fulls
2.	4	2	2	1	$x^2-y^2+z=0$	paraboloide hiperbòlic
3.	4	1	2	0	$x^2+y^2+z=0$	paraboloide el·líptic
4.	4	2	3	1	$x^2+y^2-z^2-1=0$	hiperboloide d'un full
5.	4	1	3	0	$x^2+y^2+z^2-1=0$	el·lipsoide
6.	4	0	3	0	$x^2+y^2+z^2+1=0$	imaginària
7.	3	1	2	0	$x^2+y^2-1=0$	cilindre el·líptic
8.	3	1	2	1	$x^2-y^2+1=0$	cilindre hiperbòlic
9.	3	1	3	1	$x^2+y^2-z^2=0$	con
10.	3	0	3	0	$x^2+y^2+z^2=0$	punt
11.	3	0	2	0	$x^2+y^2+1=0$	cilindre imaginari
12.	3	1	1	0	$x^2+y=0$	cilindre parabòlic
13.	2	1	1	0	$x^2-1=0$	dos plans paral·lels
14.	2	1	2	1	$x^2-y^2=0$	dos plans
15.	2	0	1	0	$x^2+1=0$	plans imaginaris
16.	2	0	2	0	$x^2+y^2=0$	recta
17.	1	0	1	0	$x^2=0$	pla doble



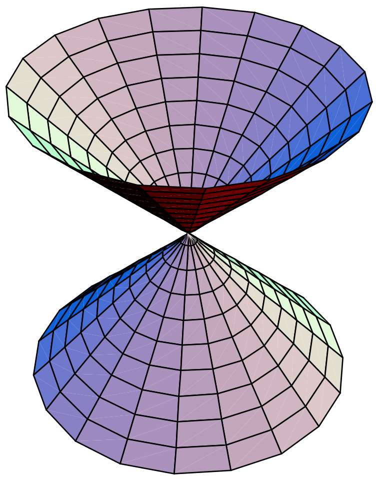
Cilindre parabòlic, $x=y^2$, (3,1,1,0).



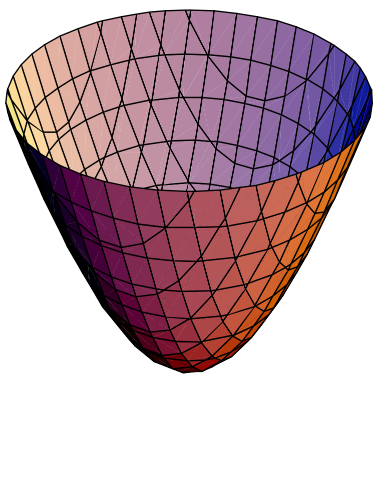
Cilindre hiperbòlic, $x^2 - y^2 = 1$, (3,1,2,1).



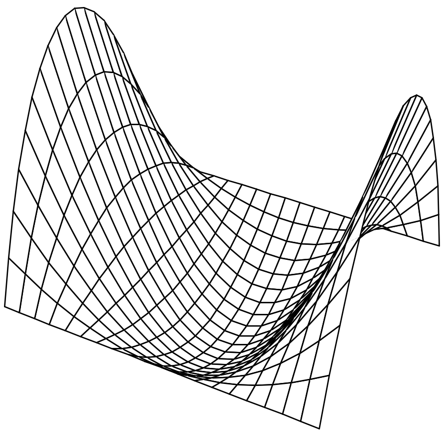
Cilindre el·líptic, $x^2 + y^2 = 1$, (3,1,2,0).



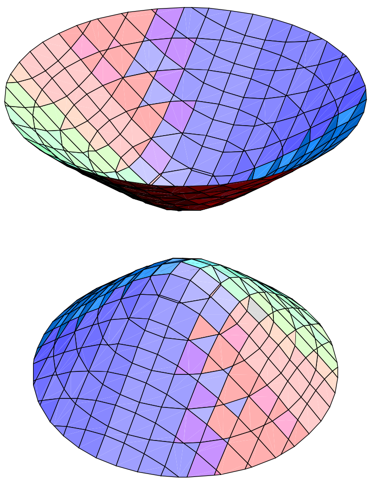
Con, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, (3,1,3,1).



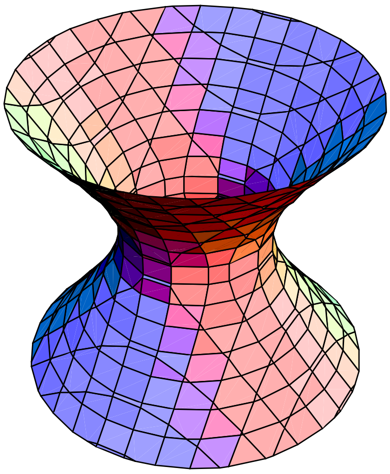
Paraboloide el·líptic, $x^2 + y^2 = z$, (4,1,2,0).



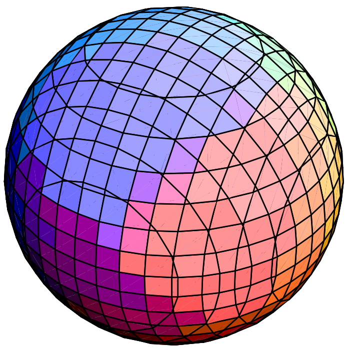
Paraboloide hiperbòlic, $x^2 - y^2 = z$, (4,2,2,1).



Hiperboloide de dos fulls, $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, (4,1,3,1).



Hiperboloide d'un full, $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$, (4,2,3,1).



El·lipsoide, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, (4,1,3,0).

Exercici 8.4.2 *Classifiqueu afinment* $3x^2 + 2y^2 - 6x + 8 = 0$ *aplicant el teorema anterior.*

Solució. Considerem primerament la quàdrica projectiva corresponent pel procés d'homogenització $3x^2 + 2y^2 - 6xz + 8z^2 = 0$, o equivalentment

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

que té rang $r = 3$. Com que el característic $-x^3 + 12x^2 - 37x + 30$ té tres canvis de signe, tenim $r^+ = 3$, i per tant índex $i = 0$.

Restringim ara a l'infinit (és a dir posem $z = 0$) i tenim

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

que té rang $r = 2$. Com que el característic $x^2 - 5x + 6$ té dos canvis de signe, tenim $r^+ = 2$, i per tant índex $i = 0$.

Per tant es tracta de la quàdrica afí $(r, i, r_\infty, i_\infty) = (3, 0, 2, 0)$.

La forma canònica és

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

o $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, que correspon a la quàdrica afí (dividint per z, o simplement posant $z = 1$ per no canviar notacions) $x^2 + y^2 + 1 = 0$. ∎

Aquest mètode és molt ràpid però no ens dóna la nova base ni el canvi de coordenades corresponent. Si ho volem, podem emprar el mètode de completar quadrats o la seva forma matricial abans explicada (vegeu l'exercici 8.1.4). Comproveu que el canvi

$$\begin{aligned} x &= x' + z' \\ y &= y' \\ z &= z', \end{aligned}$$

que correspon a prendre com a nova base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$, transforma $3x^2 + 2y^2 - 6xz + 8z^2 = 0$ en $3x^{'2} + 2y^{'2} + 5z^{'2} = 0$. Per tant el canvi afí ($z = z' = 1$) és $x = x' + 1$, $y = y'$, que correspon a prendre com a nova referència afí $\{(1, 0); (1, 0), (0, 1)\}$ i transforma $3x^2 + 2y^2 - 6x + 8 = 0$ en $3x^{'2} + 2y^{'2} + 5 = 0$.

Observació.

Per classificar afinment una quàdrica necessitarem doncs classificar la restricció d'aquesta quàdrica a l'hiperplà de l'infinit. Si som per exemple a $\mathbb{R}P^3$ i volem restringir $q = q(x, y, z, t)$ a $t = 0$, tan sols hem de substituir t per 0 per obtenir la quàdrica restringida

$$q_\infty(x, y, z) = q(x, y, z, 0).$$

Si l'hiperplà de l'infinit és arbitrari, per exemple $\Pi : x + by + cz + dt = 0$, la restricció de q a Π s'obté substituint $x = -by - cz - dt$ a l'equació de q

$$q_\infty(y, z, t) = q(-by - cz - dt, y, z, t).$$

Però ara y, z, t s'han d'interpretar com coordenades sobre Π. Concretament són coordenades respecte a la base de Π

$$u_1 = (-b, 1, 0, 0),\ u_2 = (-c, 0, 1, 0),\ u_3 = (-d, 0, 0, 1),$$

ja que tot punt de Π s'escriu com

$$(-by - cz - dt, y, z, t) = yu_1 + zu_2 + tu_3.$$

De manera que a la pràctica *per restringir q a Π tan sols aïllarem x a Π i substituirem a q.*

Anàlogament si el coeficient no nul de Π és el de y, z o t.

Exercici 8.4.3 *Classifiqueu afinment la cònica*

$$3x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

quan l'hiperplà de l'infinit és $y - z = 0$.

Solució. Clarament $(r, i) = (3, 1)$. Per classificar a l'infinit posem $y = z$ a l'equació i obtenim $3x^2 = 0$, que correspon, respecte a les coordenades x, z a la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant $(r, i, r_\infty, i_\infty) = (3, 1, 1, 0)$ i es tracta d'una paràbola. ∎

8.5 Exercicis

8.5.1 Sigui $\mathcal{Q}$ la quàdrica projectiva d'equació:

$$-2t^2 + 2tx + 4x^2 - 2ty + 2xy - 4tz + 4xz - 4yz = 0.$$

a) Classifiqueu-la.

b) Considereu el feix de plans que contenen la recta

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ y + z + t &= 0 \end{cases}$$

Prenent cada un dels plans d'aquesta família com a pla de l'infinit, quina és la quàdrica afí que determina l'equació de l'apartat anterior?

8.5.2 Sigui $\mathcal{Q}$ la quàdrica de $\mathbb{R}P^3$ d'equació $x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0$ (rang 4, índex 2). Pretenem demostrar que per cada punt de $\mathcal{Q}$ hi passen dues rectes contingudes totalment en la quàdrica (és per aquest motiu que a aquesta quàdrica se l'anomena *quàdrica reglada*).

a) Sigui $p_0 = [x_0, y_0, z_0, t_0]$ un punt de $\mathcal{Q}$. Demostreu que la recta que passa per p_0 i un altre punt $p_1 = [x, y, z, t] \neq p_0$ està totalment continguda en $\mathcal{Q}$ si i només si es compleixen les equacions

$$x_0x + y_0y - z_0z - t_0t = 0 \qquad \text{i} \qquad x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0.$$

(Noteu que (x_0, y_0, z_0, t_0) sempre serà una solució de les dues equacions.)

b) Utilitzant les simetries de l'equació $x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0$, trobeu per a cada (x_0, y_0, z_0, t_0) dues solucions més, linealment independents com a vectors de $\mathbb{R}^4$. Amb això obtenim dos punts p_1 i p_2 que determinen amb p_0 dues rectes contingudes en $\mathcal{Q}$.

c) Sigui π el pla de $\mathbb{R}P^3$ que conté els p_i. Comproveu que la intersecció de π amb $\mathcal{Q}$ són les dues rectes que hem calculat abans. Demostreu que no hi ha més rectes passant per p_0 contingudes a $\mathcal{Q}$.

d) Comproveu que π és el pla tangent a $\mathcal{Q}$ per p_0.

e) Demostreu que si la intersecció d'un pla Π amb $\mathcal{Q}$ són dues rectes, aleshores Π és el pla tangent a $\mathcal{Q}$ en algun punt.

8.5.3 Sigui $\mathcal{Q}$ la quàdrica reglada no singular de $\mathbb{R}P^3$ i r una recta qualsevol.

a) Demostreu que si r no és tangent a $\mathcal{Q}$, aleshores hi ha exactament dos plans per r que tallen $\mathcal{Q}$ en dues rectes cadascun i que la intersecció de $\mathcal{Q}$ amb la resta de plans per r són còniques no degenerades.

b) Què es pot dir si la recta r és tangent a $\mathcal{Q}$?

8.5.4 Classifiqueu les còniques afins següents:

a) $x^2 - 6xy + 8y^2 + 2y = 0$;

b) $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$;

c) $2x^2 + 3y^2 - 2xy + 4x + 3y + 4 = 0$;

d) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 4y + 4 = 0$;

e) $x^2 - 2xy + 2x - 6y - 3 = 0$.

8.5.5 Doneu la classe projectiva i la classe afí, les equacions canòniques de les següents quàdriques afins:

a) $2x^2 + 3y^2 - z^2 - 5 - 2xy + 2xz + 4yz - 2y + 4x = 0$;

b) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4yz - 6xz - 2x + 8y - 2z + 9 = 0$;

c) $x^2 + 5y^2 - 4z^2 + 4xy - 2yz + 2y - 1 = 0$;

d) $2x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 8x + 6y - 12z - 21 = 0$;

e) $2x^2 + y^2 - 4z^2 - 4xy - 4yz - 4y - 2z + 2 = 0$;

f) $x^2 + 3y^2 - 3z^2 + 3 + 6xy + 6xz - 14x + 6yz - 2y = 0$.

8.5.6 La intersecció de la quàdrica afí de $\mathbb{R}^3$ definida per

$$4xz + y^2 = 0$$

amb el pla $ax + z = 1$ és una cònica no singular. Classifiqueu la cònica.

8.5.7 Sigui $\mathcal{C}_1$ la cònica obtinguda com la intersecció de la quàdrica

$$xz + y^2 - y = 0$$

de $\mathbb{R}^3$ amb el pla

$$x - y + z = 1.$$

Decidiu si $\mathcal{C}_1$ és equivalent o no a la cònica $\mathcal{C}_2$ de $\mathbb{R}^2$ donada per

$$x^2 + 9y^2 + 6xy + 4x + 2y + 1 = 0.$$

8.5.8 Donada la quàdrica afí no singular reglada $\mathcal{C}$ i el punt P

$$\mathcal{C} : 3x^2 - 4y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz + 8x - 4y + 12z + 4 = 0; P(-2, 1, 1).$$

a) Classifiqueu-la.

b) Trobeu les famílies de rectes generatrius.

c) Trobeu dues rectes que passin pel punt donat P.

d) Comproveu que les rectes de l'apartat c) generen el pla tangent de $\mathcal{C}$ en el punt P.

Feu el mateix amb

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + z^2 - 2xz + 2yz + 2x - 4z - 4 = 0; P(0, 1, -1).$$

8.5.9 Classifiqueu segons el valor del paràmetre λ les còniques del pla afí real donades per

$$x^2 + 2\lambda xy + y^2 - 2\lambda x + 2y + 2 = 0.$$

8.5.10 Si A, B, C és un triangle de referència del pla projectiu, doneu l'equació general de les còniques tangents en B i C als costats AB i AC respectivament.

8.5.11 Classifiqueu les còniques afins

a) $x^2 + 5xy + y^2 - 2x - y + 1 = 0$;

b) $(x + 2y)^2 + 2x - y + 3 = 0$.

8.5.12 Donada la quàdrica de l'espai projectiu real

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 - 2xz + 2yz + 2zt = 0$$

i un pla Π que passa pel punt $[1, 0, 1, 0]$,

a) Classifiqueu-la.

b) Classifiqueu-la afinment si el pla de l'infinit és Π.

8.5.13 Donada la quàdrica de l'espai projectiu real

$$x^2 - 2xy + 2xz + 2y^2 - 4yz + 2yt - 4zt - 4t^2 = 0$$

i un pla Π que passa pel punt $[4, 3, 2, -1]$,

a) Classifiqueu-la.

b) Classifiqueu-la afinment si el pla de l'infinit és Π.

8.5.14 Considereu la cònica afí $y^2 + 2xy - 2x + 4y = 0$.

a) Classifiqueu-la.

b) Trobeu l'equació de la recta tangent en el punt de coordenades afins (0,0).

c) Trobeu el centre.

8.5.15

a) Classifiqueu la quàdrica de $\mathbb{R}P^3$

$$-4xy + z^2 - t^2 = 0.$$

b) Classifiqueu, en funció del paràmetre λ, la quàdrica afí que s'obté en restringir la quàdrica anterior a l'espai afí $\mathbb{R}P^3 - \Pi$, on

$$\Pi : x - y + \lambda z - t = 0.$$

8.5.16

a) Classifiqueu la quàdrica de $\mathbb{R}P^3$

$$x^2 - 4xy + 2xz - t^2 = 0.$$

b) Classifiqueu, en funció del paràmetre λ, la quàdrica afí que s'obté en restringir la quàdrica anterior a l'espai afí $\mathbb{R}P^3 - \Pi$, on

$$\Pi : x - y + \lambda z = 0.$$

8.5.17

a) Classifiqueu la quàdrica de $\mathbb{R}P^3$

$$x^2 + 2xz - t^2 = 0.$$

b) Classifiqueu, en funció del paràmetre λ, la quàdrica afí que s'obté en restringir la quàdrica anterior a l'espai afí $\mathbb{R}P^3 - \Pi$, on

$$\Pi : 2x + \lambda y - 3z = 0.$$

8.5.18 Classifiqueu les quàdriques en un pla afí sobre un cos finit.

9. Classificació mètrica de les quàdriques

En aquest capítol treballem sempre a $\mathbb{R}^{n+1}$ amb la distància euclidiana. Aquí dues quàdriques són equivalents quan podem posar l'una sobre l'altra per moviments rígids. És a dir, moviments que no canvien les distàncies. En una primera part no projectiva, donem la llista de les infinites quàdriques del pla, agrupades en les set famílies afins, i de l'espai, agrupades en les disset famílies afins.

Així com un espai afí es pot pensar com l'espai projectiu menys un hiperplà, un espai afí mètric es pot pensar com l'espai projectiu menys un hiperplà, més una mètrica en aquest hiperplà. Això és així pel fet que l'hiperplà que traiem té el paper de l'espai vectorial associat a l'espai afí corresponent.

Això ens permet classificar les quàdriques projectives mòdul una certa relació d'equivalència, diguem-ne mètrica, que recupera, en passar a l'afí, la classificació mètrica abans considerada.

9.1 Classificació mètrica de quàdriques, fora del context projectiu

Situem-nos a $\mathbb{R}^{n+1}$ amb la distància euclidiana. És un espai afí mètric, en el sentit que a l'espai vectorial associat, que és el mateix $\mathbb{R}^{n+1}$, hi ha definida una mètrica (aplicació bilineal simètrica definida positiva). Concretament la que té matriu identitat respecte a la base canònica. La denotarem per g. Tot isomorfisme f de l'espai vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f^*g = g$ es diu *isometria.* La matriu A de f respecte a la base canònica compleix doncs $AA^t = Id$, i es diu que és una matriu *ortogonal.* Una afinitat tal que la seva aplicació lineal associada sigui isometria es diu *desplaçament.*

Definició 9.1.1 *Direm que dues quàdriques de $\mathbb{R}^{n+1}$ són mètricament equivalents si existeix un desplaçament que porta l'una a l'altra.*

Per trobar aquest desplaçament, el que farem serà passar cadascuna d'elles a una expressió senzilla, la forma canònica, tal com fèiem en el cas afí.

Allà empràvem el mètode de completació de quadrats per diagonalitzar primerament la part quadràtica de l'expressió

$$\sum a_{ij}x^i x^j + \sum b_j x^j + k = 0$$

i a continuació fèiem uns petits canvis més per posar-la en forma canònica. Però els canvis que utilitzàvem no corresponien a desplaçaments, de manera que la quàdrica en forma canònica que obteníem, si bé era afinment equivalent a la donada, no ho era mètricament, en el sentit que les distàncies havien canviat.

Per fer la classificació mètrica hem de completar quadrats però utilitzant només transformacions ortogonals. Per fer això s'aplica el teorema espectral 6.2.11 a la part quadràtica

$$\sum a_{ij}x^ix^j$$

del polinomi de segon grau donat.

Les coordenades, en principi, són respecte a la base canònica. Podem pensar doncs que a l'espai vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$ hi tenim definides dues aplicacions bilineals simètriques: l'aplicació bilineal simètrica ϕ, donada per la matriu a_{ij} respecte a la base canònica, i l'aplicació bilineal simètrica no singular g, que té matriu identitat respecte a la base canònica.

El teorema espectral ens diu llavors que existeix una base ortonormal respecte a g en la qual ϕ diagonalitza, és a dir en la qual l'expressió anterior s'escriu com

$$\sum d_{ii}y^iy^i,$$

on ara les y^i són les coordenades respecte a la nova base.

La matriu P del canvi de base tindrà per columnes les components, respecte a la base canònica, dels vectors propis de la matriu $A = (a_{ij})$ associada a la forma quadràtica, normalitzats. Serà una matriu ortogonal ja que porta una base ortonormal (la canònica, en la qual implícitament se suposa donada l'expressió inicial) a una base ortonormal (la dels vectors propis). És a dir

$$P^{-1}AP = P^tAP = D, \tag{9.1}$$

on D és la matriu diagonal $D = (d_{ii})$. En particular $\det A$ i $\det D$ tenen el mateix signe.

Recordem que aquests d_{ii} són els valors propis de A ja que

$$\det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(D - \lambda\,\mathrm{Id}),$$

per ser $P^t = P^{-1}$. Aquesta fórmula ens diu que el polinomi característic de la part quadràtica és un invariant mètric.

Això ens permet posar la nostra quàdrica en la forma

$$d_0(x^0)^2 + \cdots + d_r(x^r)^2 + c_0x^0 + \cdots + c_nx^n + k = 0$$

mitjançant transformacions ortogonals (que han afectat també la part lineal).

No podem utilitzar els canvis

$$y^0 = x^0 + \sum \frac{a_{0i}}{a_{00}}x^i \quad y^i = x^i, \quad i = 1, \ldots, n$$

que utilitzàvem en el cas afí, ja que no són ortogonals.

Fem a continuació la translació

$$x'^i = x^i + \frac{c_i}{2d_i} \qquad i = 0, \cdots, r; \quad x'^j = x^j,\ j > r$$

que ens transforma l'anterior expressió en

$$d_0(x'^0)^2 + \cdots + d_r(x'^r)^2 + c_{r+1}x'^{r+1} + \cdots c_nx'^n + k' = 0 \tag{9.2}$$

Si totes les c_j són zero tenim ja una expressió molt reduïda, que en direm canònica, i que separarem en dos tipus segons k' sigui o no diferent de zero.

Si alguna c_j és diferent de zero podem reduir encara l'expressió, però no pas amb el canvi que empràvem en el cas afí, ja que no és ortogonal.

La idea és girar l'hiperplà

$$c_{r+1}x'^{r+1} + \cdots + c_n x'^n = 0$$

dins del subespai $x'^0 = \cdots x'^r = 0$ (de la k' ens en preocuparem després) de manera que passi a ser el $x'^n = 0$. Concretament passem de la base $e_0, \cdots, e_n$ en la que està escrita l'expressió 9.2 a la base formada pels vectors $\bar{e}_0 = e_0, \cdots, \bar{e}_r = e_r$, completats amb una base ortonormal dins l'hiperplà $\bar{e}_{r+1}, \cdots, \bar{e}_{n-1}$ i amb el vector unitari normal a l'hiperplà $\bar{e}_n$. La transformació corresponent a aquest canvi de base és ortogonal perquè passem de bases ortonormals a bases ortonormals.

D'aquesta manera l'expressió 9.2 es transforma en

$$d_0(\bar{x}^0)^2 + \cdots + d_r(\bar{x}^r)^2 + a\bar{x}^n + \bar{k} = 0$$

Si $\bar{k} = 0$ ja no podem reduir més i tenim l'expressió canònica. Si $\bar{k} \neq 0$ podem dividir tota l'equació per $\frac{a}{2}$ i fer la translació

$$\bar{\bar{x}}^i = \bar{x}^i,\ i \neq n, \qquad \bar{\bar{x}}^n = \bar{x}^n + \frac{k}{a},$$

per fer desaparèixer el terme independent. El fet de dividir per $\frac{a}{2}$ i no per a és perquè volem tenir un 2 com coeficient de $\bar{x}^n$ per analogia al cas afí. Resumint doncs aquest càlculs, podem arribar sempre per transformacions ortogonals i translacions a una de les tres expressions següents:

$$\begin{array}{llcll}
\text{Tipus I.} & d_0(x^0)^2 + \cdots + d_r(x^r)^2 & = & 0, \quad 0 \leq r \leq n, & a_i \neq 0; \\
\text{Tipus II.} & d_0(x^0)^2 + \cdots + d_r(x^r)^2 + 1 & = & 0, \quad 0 \leq r \leq n, & a_i \neq 0; \\
\text{Tipus III.} & d_0(x^0)^2 + \cdots + d_r(x^r)^2 + 2x^{r+1} & = & 0, \quad 0 \leq r \leq n-1, & a_i \neq 0,
\end{array}$$

que ens donen la classificació mètrica buscada.

S'ha d'observar que les expressions de tipus diferent no són equivalents entre si, ni tan sols afinment.

Si volem fixar de manera única els coeficients, en el sentit de que hi hagi una i només una quàdrica per a cada equació, els hem d'ordenar i normalitzar. Concretament en el cas I, per evitar considerar diferents quàdriques com $x^2+y^2 = 0$ i $2x^2 + 2y^2 = 0$, posarem $\sum |a_i| = 1$. Observem també que en canviar tots els coeficients de signe l'equació no varia. Per tant:

En el cas I, n'hi ha tantes com r-plas $(d_0, \cdots d_r)$, ordenades pels valors absoluts, normalitzades i llevat del signe. Volem dir que dues r-plas representen la mateixa quàdrica si i només si les dues estan normalitzades i un cop ordenades pels valors absoluts són iguals o iguals canviades de signe. Que, en aquesta situació, els d_i determinen la quàdrica és així pel fet que són invariants mètrics per ser els valors propis de la matriu A associada a la part quadràtica i, com sabem, els valors propis no varien en multiplicar una matriu a dreta i esquerra per una matriu ortogonal, és a dir en fer canvis de base ortogonals.

En el cas II, els coeficients determinen unívocament la quàdrica ja que el terme independent "+1" impedeix normalitzar o canviar de signe. Per tant n'hi ha tantes com r-plas $(d_0, \cdots d_r)$, ordenades. Volem dir que dues r-plas representen la mateixa quàdrica si només si un cop ordenades són iguals. Com abans, en aquesta situació, els d_i determinen la quàdrica.

En el cas III, un cop ordenats els r coeficients pels seus valors absoluts, podem encara canviar-los tots a la vegada de signe, ja que el canvi $x'^{r+1} = -x^{r+1}$ és una isometria. El coeficient 2 de x^{r+1} ens impedeix normalitzar. Per tant, n'hi ha tantes com r-plas $(d_0, \cdots d_r)$, ordenades pels valors absoluts, llevat del signe. Com abans, en aquesta situació, els d_i determinen la quàdrica.

9.1.1 Classificació mètrica de les còniques

1.	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1,$	$a \geq b > 0$		imaginària
2.	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$	$a \geq b > 0$		el·lipse
3.	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$	$a > 0,\ b > 0$		hipèrbola
4.	$x^2 = 2by,$	$b > 0$		paràbola
5.	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0,$	$a \geq b > 0,$	$\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$	punt
6.	$x^2 + b^2 = 0,$	$b > 0$		imaginària
7.	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0,$	$a \geq b > 0,$	$\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$	dues rectes
8.	$x^2 - b^2 = 0,$	$b > 0$		dues rectes paral·leles
9.	$x^2 = 0,$			recta doble.

Observem que a la hipèrbola el parell (a, b) és diferent del parell (b, a), per a $a \neq b$.

9.1.2 Classificació mètrica de les quàdriques a $\mathbb{R}^3$

1.	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1,$	$a \geq b > 0,\ c > 0$	hiperboloide de dos fulls
2.	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z,$	$a \geq b > 0$	paraboloide hiperbòlic
3.	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z,$	$a \geq b > 0$	paraboloide el·líptic
4.	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1,$	$a \geq b > 0,\ c > 0$	hiperboloide d'un full
5.	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,$	$a \geq b \geq c > 0$	el·lipsoide
6.	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1,$	$a \geq b \geq c > 0$	imaginari
7.	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$	$a \geq b > 0$	cilindre el·líptic
8.	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$	$a > 0,\ b > 0$	cilindre hiperbòlic

9.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$	$a\geq b>0,\ c>0,$	$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$	con
10.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,$	$a\geq b\geq c>0,$	$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$	punt
11.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$	$a\geq b>0$		cilindre imaginari
12.	$y^2=2px,$	$p>0$		cilindre parabòlic
13.	$y^2-b^2=0,$	$b>0$		plans paral·lels
14.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$	$a\geq b>0,$	$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$	plans secants
15.	$y^2+b^2=0,$	$b>0$		plans imaginaris
16.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,$	$a\geq b>0,$	$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$	recta
17.	$y^2=0$			pla doble.

L'hiperboloide d'un full és *reglat.* Per exemple, si $a=b=c=1$, les dues rectes per (x,y,z) tenen vectors directors $(xz\pm y, yz\pm x, x^2+y^2)$.

El paraboloide hiperbòlic també és reglat. Les rectes per (x,y,z) tenen vectors directors $(a,b,(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}))$ i $(a,-b,(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}))$. Vegeu el problema 8.5.2.

Com exemple de com es confecciona la taula, comentem l'expressió 9 del con. Un cop ordenats els valors absoluts dels coeficients normalitzats $\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}$, tenim vuit expressions diferents que es redueixen a quatre al no considerar el signe. Són

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,$$

però les tres últimes es redueixen a una sola permutant les variables, però aquesta permutació ens desordena els coeficients i per això a l'expressió del con la c no està ordenada respecte a a i b.

Exercici 9.1.2 *Classifiqueu mètricament la cònica*

$$2x^2+2y^2+2xy-4x-2y+1=0.$$

Solució. Ens preocupem primerament de la part quadràtica $2x^2+2y^2+2xy$. La base ortonormal de què parla el teorema espectral és la base de vectors propis de la matriu associada, normalitzats. Com que

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},$$

els valors propis són 3 i 1, i els vectors propis corresponents normalitzats són $u=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $v=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

La matriu del canvi de base és doncs

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},$$

i A en aquesta nova base és

$$P^tAP=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Les coordenades en la nova base u, v són

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

és a dir

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \end{aligned}$$

o equivalentment

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'), \end{aligned}$$

i per tant

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy = 3x'^2 + y'^2.$$

Però aquest canvi afecta també la part lineal, i per tant tenim

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 2y + 1 = \\ 3x'^2 + y'^2 - 2\sqrt{2}(x'+y') - \sqrt{2}(x'-y') + 1 = \\ 3x'^2 + y'^2 - 3\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' + 1. \end{aligned}$$

Fem ara la translació

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x' - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \bar{y} &= y' - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

i obtenim

$$3x'^2 + y'^2 - 3\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' + 1 = 3\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 1,$$

i es tracta doncs d'una el·lipse amb semieixos de longituds $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $b = 1$ sobre les direccions pròpies u, v i centre el punt $(x, y) = (1, 0)$ (correspon a $(\bar{x} = 0, \bar{y} = 0)$). El canvi final ha estat doncs el desplaçament

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \bar{y} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exercici 9.1.3 *Classifiqueu mètricament la quàdrica de* $\mathbb{R}^3$

$$x^2 + ay + bz + c = 0,$$

amb a, b, c *diferents de zero*

Solució. Sigui e_0, e_1, e_2 la base canònica de $\mathbb{R}^3$ respecte a la qual estem suposant escrita la quàdrica. Prenem com a nova base

$$e_0' = e_0,\ e_1' = \alpha e_1 + \beta e_2,\ e_2' = \gamma(a e_1 + b e_2)$$

amb

$$\alpha a + \beta b = 0,\ \alpha^2 + \beta^2 = 1,\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

És a dir, una base adaptada al pla $ay + bz + c = 0$.

Tenim

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma a \\ 0 & \beta & \gamma b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

d'on $x = x',\ y = \alpha y' + \gamma a z',\ z = \beta y' + \gamma b z'$ i per tant

$$x^2 + ay + bz + c = x'^2 + \gamma^{-1} z' + c = 0$$

que és equivalent a

$$2\gamma x'^2 + 2z' + 2\gamma c = 0$$

Fem ara la translació $\bar{x} = x',\ \bar{y} = y',\ \bar{z} = z' + \gamma c$ i tenim

$$x^2 + ay + bz + c = 2\gamma \bar{x}^2 + 2\bar{z} = 0$$

que és l'expressió canònica buscada. No simplifiquem el 2, per comparar millor amb l'expressió de Tipus III.

Per exemple, les quàdriques $x^2+3y+4z+1 = 0$ i $x^2+5z = 0$ són mètricament equivalents i el desplaçament que porta l'una a l'altra és

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}z \\ z' &= \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}z + \frac{1}{5} \ \blacksquare \end{aligned}$$

9.2 Classificació mètrica de quàdriques en el context projectiu ($k = \mathbb{R}$)

Utilitzarem una petita modificació del teorema 8.3.4.

Teorema 9.2.1 *Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial, ϕ una aplicació bilineal simètrica sobre E. Sigui V un subespai vectorial de E de codimensió 1 i g una mètrica a V. Llavors es poden donar dos casos*

a) *Existeix una base $e_1, \ldots, e_n$ a V, g-ortonormal, i $e \in E$ tal que $E = V \oplus \langle e \rangle$ i*

$$\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & c \end{pmatrix}$$

(les λ poden ser zero, $c = 0, \pm 1$).

b) *Existeix una base $e_1, \ldots, e_{n-1}, u$ a V, g-ortonormal, i $e \in E$ tal que $E = \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle \oplus \langle u, e \rangle$ i*

$$\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_{n-1} & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostració. Segons el teorema 8.3.4 sabem que hi ha tres possibilitats mútuament excloents donades per la relació entre els radicals de V i de E. Tant si ens trobem en el cas a) com en el cas $b.1$) del mencionat teorema podem aplicar el teorema espectral a (V, ϕ, g) per obtenir una base a V, ortonormal respecte a g, en la qual ϕ diagonalitza. Completant-la amb el mateix vector $e \notin V$ que figura a la demostració del teorema 8.3.4 tenim el resultat (si $\phi(e,e) = a, a \neq 0$, fem $e' = \frac{1}{\sqrt{|a|}} e$ per obtenir $\phi(e', e') = \pm 1$, com volíem).

En el cas $b.2$) del mateix teorema, recordem que teníem

$$E = \operatorname{rad} E \perp F \perp \langle u \rangle \perp \langle e \rangle$$

amb

$$V = \operatorname{rad} V \perp F = (\operatorname{rad} E \perp \langle u \rangle) \perp F$$

suma directa ortogonal respecte a ϕ.

L'observació important és que les descomposicions $\operatorname{rad} V = \operatorname{rad} E \perp \langle u \rangle$ i $V = \operatorname{rad} V \perp F$ amb F no singular del teorema 8.3.4, les podem agafar ara directament ortogonals respecte a g. Això és així pel fet que respecte a g tot subespai té complementari ortogonal (proposició 8.3.1 de l'apèndix o [11] teorema 9.6.2), i per tant podem prendre $< u >$ com el complementari g-ortogonal de $\operatorname{rad} E$ en $\operatorname{rad} V$, i F com el complementari g-ortogonal de $\operatorname{rad} V$ en V. Respecte a ϕ, la suma serà sempre ortogonal perquè un dels sumands és el radical.

Apliquem el teorema espectral a $\operatorname{rad} E$ i F i tindrem una base $e_1, \ldots, e_{n-1}$ de $\operatorname{rad} E \perp F$ ortonormal respecte a g en la qual ϕ diagonalitza. Normalitzant u obtenim que $e_1, \ldots, e_{n-1}, u$ és una base g-ortonormal de V. En modificar u per normalitzar-lo canviem el producte $\phi(u, e)$ per un escalar positiu. Dividint e per aquest escalar tenim l'expressió de ϕ que buscàvem. ∎

Donada doncs la terna (E, V, g), com en el teorema, les aplicacions bilineals simètriques sobre (E, V, g) queden classificades en tres tipus. Concretament direm que ϕ és del *tipus I* si existeix una base $e_1, \cdots, e_n$ g-ortonormal a V, que es pot ampliar amb un $e \notin V$ a una base de E, de manera que en aquesta base

$$\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Direm que ϕ és del *tipus II* si existeix una base $e_1, \cdots, e_n$ g-ortonormal a V, que es pot ampliar amb un $e \notin V$ a una base de E, de manera que en aquesta base ϕ o $-\phi$ s'escrigui com

$$\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Direm que ϕ és del *tipus III* si existeix una base $e_1, \cdots, e_n$ g-ortonormal a V, que es pot ampliar amb un $e \notin V$ a una base de E, de manera que en aquesta base

$$\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_n & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com que podem permutar els e_i i la base continua sent ortonormal, quan ens referim a *l'expressió canònica* de ϕ suposarem que els λ_i estan ordenats respecte als valors absoluts

$$0 \leq |\lambda_1| \leq \cdots \leq |\lambda_n|.$$

Si tenen el mateix valor absolut, posarem primer els positius.

Ordeno respecte als valors absoluts i no directament respecte als λ_i perquè m'interessarà que expressions que difereixen només en el signe siguin iguals, com ara $x^2 - 3y^2 = 0$ i $3x^2 - y^2 = 0$ (canviar x per y), que correspondran respectivament a $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, -3)$ i $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 3)$ que difereixen només en el signe. En canvi, si ordenéssim sense tenir en compte el valor absolut, correspondrien als parells $(-3, 1)$ i $(-1, 3)$, que no difereixen en el signe (hauríem de canviar l'ordre d'un d'aquests parells).

9.2.1 Classificació mòdul semblances

Amb tot això és raonable ara dir que dues aplicacions bilineals simètriques ϕ i ϕ' són equivalents, en algun sentit que involucri la mètrica, quan tenen la mateixa expressió canònica. Però això té algun petit problema, ja que expressions com

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

no serien equivalents, en aquest sentit, malgrat tenir exactament els mateixos zeros donats per $x^2 - 2y^2 = 0$.

Tampoc

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

no serien equivalents malgrat representar en $z = 1$ les paràboles isomètriques $y = \frac{1}{2}x^2, y = -\frac{1}{2}x^2$.

Per evitar aquests problemes precisarem la definició.

Definició 9.2.2 *Direm que dues aplicacions bilineals simètriques ϕ i ϕ' sobre (E, V, g) són semblants ($\phi \overset{S}{\sim} \phi'$) si i només si són del mateix tipus i les parts a l'infinit (és a dir a V) són proporcionals (amb constant de proporcionalitat positiva si són del tipus II).*

Teorema 9.2.3 *Siguin ϕ i ϕ' dues aplicacions bilineals simètriques sobre (E, V, g). Llavors $\phi \overset{S}{\sim} \phi'$ si i només si existeix un isomorfisme $f : E \longrightarrow E$ tal que $f(V) = V$, $f_V^* g = g$, $f^*\phi' = \rho\phi$, $\rho \neq 0$*

Demostració. Suposem primerament $\phi \overset{S}{\sim} \phi'$.

Si totes dues són del tipus I, tindrem bases e_i, e i e'_i, e' en les quals

$$\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ i } \phi' = \begin{pmatrix} \rho\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \rho\lambda_n & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Definim llavors f per $f(e_i) = e'_i, f(e) = e'$ i tenim el resultat, ja que clarament f deixa V invariant i és una isometria de g per portar bases ortonormals a bases ortonormals. A més

$$(f^*\phi')(e_i, e_i) = \phi'(e'_i, e'_i) = \rho\lambda_i = \rho\phi(e_i, e_i),$$

com volíem.

Si totes dues són del tipus II, tindrem bases e_i, e i e'_i, e' en les quals, potser canviant ϕ per $-\phi$ i ϕ' per $-\phi'$,

$$\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ i } \phi' = \begin{pmatrix} \rho\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \rho\lambda_n & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho > 0$$

Definim llavors f per $f(e_i) = e'_i, f(e) = \sqrt{\rho} e'$ i tenim el resultat, ja que clarament f deixa V invariant i és una isometria de g per portar bases ortonormals a bases ortonormals. A més

$$\begin{aligned} (f^*\phi')(e_i, e_i) &= \phi'(e'_i, e'_i) = \rho\lambda_i = \rho\phi(e_i, e_i) \\ (f^*\phi')(e, e) &= \rho\phi'(e', e') = \rho = \rho\phi(e, e) \end{aligned}$$

és a dir $f^*\phi' = \rho\phi$, com volíem.

Si totes dues són del tipus III, tindrem bases e_i, u, e i e'_i, u', e' en les quals

$$\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_n & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } \phi' = \begin{pmatrix} \rho\lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \rho\lambda_n & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definim llavors f per $f(e_i) = e'_i, f(u) = u', f(e) = \rho e'$ i tenim el resultat, ja que clarament f deixa V invariant i és una isometria de g per portar bases ortonormals a bases ortonormals. A més

$$\begin{aligned}(f^*\phi')(e_i, e_i) = \phi'(e'_i, e'_i) = \rho\lambda_i = \rho\phi(e_i, e_i)\\ (f^*\phi')(e, u) = \rho\phi'(e', u') = \rho = \rho\phi(e, u),\end{aligned}$$

és a dir $f^*\phi' = \rho\phi$, com volíem.

Demostrem ara el recíproc. Suposem doncs que existeix un isomorfisme f de E, isometria a V, tal que $f^*\phi' = \rho\phi$, $\rho \neq 0$. Aquesta darrera condició, ens diu que ϕ i ϕ' són del mateix tipus ja que el tipus queda determinat pel radical: rad $\phi \not\subset V$ en el cas I, rad $\phi =$ rad $\phi_{|V}$ en el cas II i rad $\phi_{|V} =$ rad $\phi + < u >$ en el cas III i aquestes condicions són invariants per l'isomorfisme f.

Suposem que són del tipus I.

Prenem una base e_i, e en la qual ϕ té l'expressió canònica. Prenem llavors com a nova base $e'_i = f(e_i), e' = f(e)$, que continua sent canònica en el sentit que e'_i és una base ortonormal de V, i calculem l'expressió de ϕ' en aquesta nova base.

Tenim

$$\phi'(e'_i, e'_i) = (f^*\phi')(e'_i, e'_i) = \rho\phi(e_i, e_i),$$

i les parts a l'infinit són proporcionals, com volíem.

Suposem que són del tipus II.

Prenem una base e_i, e en la que ϕ té l'expressió canònica. Prenem llavors com a nova base $e'_i = f(e_i), e' = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}}f(e)$, que continua sent canònica en el sentit que e'_i és una base ortonormal de V, i calculem l'expressió de ϕ' en aquesta nova base.

Tenim

$$\begin{aligned}\phi'(e'_i, e'_i) = (f^*\phi')(e'_i, e'_i) = \rho\phi(e_i, e_i)\\ \phi'(e', e') = \frac{1}{|\rho|}(f^*\phi')(e, e) = \pm\phi(e, e)\end{aligned}$$

amb signe $+$ si $\rho > 0$ i signe $-$ si $\rho < 0$.

Suposem $\phi(e, e) = +1$ (si $\phi(e, e) = -1$, canviem ϕ per $-\phi$). Si $\rho > 0$, $\phi'(e', e') = 1$ i ϕ' representa ja l'expressió canònica. Les parts a l'infinit són proporcionals, amb constant positiva ρ. Si $\rho < 0$, $\phi'(e', e') = -1$ i l'expressió canònica correspon a $-\phi'$, i les parts a l'infinit són proporcionals amb constant positiva $-\rho$.

Suposem finalment que són del tipus III.

Prenem una base e_i, u, e en la qual ϕ té l'expressió canònica. Prenem llavors com a nova base $e'_i = f(e_i), u' = f(u), e' = \frac{1}{\rho}f(e)$, que continua sent canònica en el sentit que e'_i, u' és una base ortonormal de V, i calculem l'expressió de ϕ' en aquesta nova base.

Tenim

$$\begin{aligned}\phi'(e'_i, e'_i) = (f^*\phi')(e'_i, e'_i) = \rho\phi(e_i, e_i)\\ \phi'(e', u') = \frac{1}{\rho}(f^*\phi')(e, u) = \phi(e, u) = 1\end{aligned}$$

i les parts a l'infinit són proporcionals, com volíem. ∎

És a dir, $\phi \stackrel{S}{\sim} \phi'$ si són afinment equivalents per una afinitat que és, llevat d'un escalar, isometria de la mètrica de l'infinit. Volem dir el següent:

Observem que l'anterior isomorfisme f es pot escriure

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

amb A matriu ortogonal. Tan sols hem de prendre una base ortonormal de V i completar-la amb un vector $e \notin V$.

Si considerem ara l'espai afí $P(E)\backslash p(V)$ amb l'estructura afí donada per qualsevol z_0 tal que $E = V \oplus < z_0 >$, la projectivitat $\tilde{f}$ induïda per f

$$\tilde{f} : P(E)\backslash p(V) \longrightarrow P(E)\backslash p(V)$$

dóna lloc a una afinitat (entre espais afins en el sentit clàssic) que té per aplicació lineal associada l'únic múltiple de f (restringit a V) tal que $f(z_0) - z_0 \in V$ (vegeu els comentaris posteriors a la definició d'afinitat 3.5.1). Per tant la matriu d'aquest representant de $\tilde{f}$ és un múltiple de la matriu abans considerada i s'escriurà com

$$f = \begin{pmatrix} B & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

amb B una matriu tal que $\mu B.B^t = Id$.

Amb notació de geometria afí, la matriu de f correspon a l'afinitat

$$x' = Bx + b',$$

i per tant la definició projectiva de quàdriques semblants coincideix amb la definició clàssica de quàdriques semblants, ja que correspon a considerar equivalents les que s'obtenen les unes de les altres component moviments ortogonals amb homotècies i translacions.

9.2.2 Classificació mètrica

Estudiem ara la classificació mètrica. En aquest cas ens cal algun control sobre el complement z_0 de V, ja que per exemple $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ tallat per $z = 1$ o tallat per $z = 2$ dóna cercles de diferent radi, semblants però no isomètrics. Això es el mateix que dir que

$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ i } \phi' = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

en bases respectives $\{e_1, e_2, e\}$ i $\{e_1, e_2, 2e\}$ són òbviament semblants però si tallem les dues pel mateix pla $z = 1$, on z és la tercera coordenada de la primera base, obtenim cercles no isomètrics.

Situem-nos doncs a (E, V, g, z_0), és a dir a l'espai vectorial E on hi ha fixat un subespai vectorial V en el qual hi ha una mètrica g i amb la descomposició $E = V \oplus < z_0 >$.

Definició 9.2.4 *Direm que dues aplicacions bilineals simètriques ϕ i ϕ' sobre (E, V, g, z_0) són mètricament equivalents ($\phi \stackrel{M}{\sim} \phi'$) si i només si són del mateix tipus i les parts a l'infinit de les seves expressions canòniques respecte a bases $\{e_i, e\}$ i $\{e'_i, e'\}$ amb $e' - e \in V$ són proporcionals en el cas I, iguals en el cas II, i iguals o canviades de signe en el cas III.*

Teorema 9.2.5 *Siguin ϕ i ϕ' dues aplicacions bilineals simètriques sobre (E, V, g, z_0). Llavors $\phi \overset{M}{\sim} \phi'$ si i només si existeix un isomorfisme $f : E \longrightarrow E$ tal que $f(V) = V$, $f^*_{|V} g = g$, $f(z_0) - z_0 \in V$, i*

a) $f^*\phi' = \rho\phi$, $\rho \neq 0$ si ϕ està en el cas I, o

b) $f^*\phi' = \pm\phi$ si ϕ està en els casos II o III.

Demostració. Suposem primerament $\phi \overset{M}{\sim} \phi'$.

Observem que, per linealitat i la invariància de V, la condició $f(z_0) - z_0 \in V$ implica $f(e) - e \in V$ per a tot $e \in E$.

Si totes dues són del tipus I, tindrem bases $\{e_i, e\}$ i $\{e'_i, e'\}$ amb $e' - e \in V$, en les quals

$$\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ i } \phi' = \begin{pmatrix} \rho\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \rho\lambda_n & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Definim llavors f per $f(e_i) = e'_i, f(e) = e'$ i tenim el resultat.

Si totes dues són del tipus II, tindrem bases $\{e_i, e\}$ i $\{e'_i, e'\}$ amb $e' - e \in V$ en les quals, potser canviant ϕ per $-\phi$ i ϕ' per $-\phi'$,

$$\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ i } \phi' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho > 0$$

Definim llavors f per $f(e_i) = e'_i, f(e) = \sqrt{\rho} e'$ i tenim el resultat.

Si totes dues són del tipus III, tindrem bases $\{e_i, u, e\}$ i $\{e'_i, u', e'\}$ amb $e' - e \in V$ en les quals

$$\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_n & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } \phi' = \begin{pmatrix} \pm\lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \pm\lambda_n & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on els signes $\pm$ són tots $+1$ o tots -1.

Definim llavors f per $f(e_i) = e'_i, f(e) = e'$ i $f(u) = u'$ si les parts a l'infinit són iguals, o $f(u) = -u'$ si les parts a l'infinit són de signe contrari.

Aquesta és la f buscada ja que clarament f deixa V invariant, és una isometria de g per portar bases ortonormals a bases ortonormals i

$$(f^*\phi')(e_i, e_i) = \phi'(e'_i, e'_i) = \pm\lambda_i = \pm\phi(e_i, e_i)$$
$$(f^*\phi')(e, u) = \pm\phi'(e', u') = \pm 1 = \pm\phi(e, u),$$

és a dir $f^*\phi' = \pm\phi$, com volíem.

Demostrem ara el recíproc. Suposem doncs que existeix un isomorfisme f de E, en les condicions del teorema. Com que $f^*\phi' = \mu\phi, \mu \neq 0$ ϕ i ϕ' són del mateix tipus.

Suposem que són del tipus I.

Prenem una base $\{e_i, e\}$ en la qual ϕ té l'expressió canònica. Agafem llavors com a nova base $e'_i = f(e_i), e' = f(e)$, que continua sent canònica en el sentit que e'_i és una base ortonormal de V, i a més $e' - e \in V$, i calculem l'expressió de ϕ' en aquesta nova base.

Tenim

$$\phi'(e'_i, e'_i) = (f^*\phi')(e'_i, e'_i) = \rho\phi(e_i, e_i),$$

i les parts a l'infinit són proporcionals, com volíem.

Suposem que són del tipus II.

Prenem una base $\{e_i, e\}$ en la qual ϕ té l'expressió canònica. Prenem llavors com a nova base $e'_i = f(e_i), e' = f(e)$, que continua sent canònica en el sentit que e'_i és una base ortonormal de V, i $e' - e \in V$, i calculem l'expressió de ϕ' en aquesta nova base.

Tenim

$$\begin{aligned} \phi'(e'_i, e'_i) &= (f^*\phi')(e'_i, e'_i) = \pm\phi(e_i, e_i) \\ \phi'(e', e') &= (f^*\phi')(e, e) = \pm\phi(e, e) \end{aligned}$$

(sempre el signe $+$ o sempre el signe $-$).

Per tant

$$\phi' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ o } \phi' = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -\lambda_n & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Com que per expressió canònica entenem la que correspon a $\phi(e, e) = 1$, resulta que les expressions canòniques de ϕ i ϕ' son iguals.

Suposem finalment que són del tipus III.

Prenem una base e_i, u, e en la qual ϕ té l'expressió canònica. Agafem llavors com a nova base $e'_i = f(e_i), e' = f(e)$, i $u' = f(u)$ si $f^*\phi' = \phi$ o $u' = -f(u)$ si $f^*\phi' = -\phi$. Llavors tenim

$$\begin{aligned} \phi'(e'_i, e'_i) &= (f^*\phi')(e'_i, e'_i) = \pm\phi(e_i, e_i)(\text{ tots } + \text{ o tots } -) \\ \phi'(e', u') &= \pm(f^*\phi')(e, u) = \phi(e, u) = 1, \end{aligned}$$

i les parts a l'infinit són iguals o canviades de signe, com volíem. ∎

És a dir, $\phi \overset{M}{\sim} \phi'$ si són afinment equivalents per una afinitat que és una isometria de la mètrica de l'infinit. Volem dir el següent:

Observem que l'anterior isomorfisme f es pot escriure

$$f = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

amb A matriu ortogonal. Tan sols hem d'agafar una base ortonormal de V i completar-la amb un vector $e \notin V$. El nombre 1 que figura a la matriu prové del fet que $f(e) - e \in V$.

Si considerem ara l'espai afí $P(E)\backslash p(V)$ amb l'estructura afí donada per qualsevol e tal que $E = V \oplus < e >$, la projectivitat $\tilde{f}$ induïda per f

$$\tilde{f} : P(E)\backslash p(V) \longrightarrow P(E)\backslash p(V)$$

dóna lloc a una afinitat (entre espais afins en el sentit clàssic) que té per aplicació lineal associada l'únic múltiple de f (restringit a V) tal que $f(e) - e \in V$, és a dir la mateixa f, tal com ja hem explicat a la secció 3.5.

Amb notació de geometria afí, la matriu de f correspon a l'afinitat

$$x' = Ax + b, \tag{9.4}$$

i per tant la definició projectiva de quàdriques mètricament equivalents coincideix amb la definició clàssica de quàdriques mètricament equivalents ja que correspon a considerar equivalents les que s'obtenen les unes de les altres component moviments ortogonals i translacions.

Recíprocament, si dues quàdriques d'un espai afí són mètricament equivalents, per una transformació del tipus 9.4, llavors les seves homogeneïtzades són mètricament equivalents per l'isomorfisme del tipus 9.3.

9.2.3 Classificació mètrica de còniques en el context projectiu

Observem que en estudiar les possibilitats considerades a la definició 9.2.4 en els casos de dimensió dos i tres retrobem (en tallar amb $x_{n+1} = 1$) la classificació obtinguda a 9.1.1 i 9.1.2. Fem com a exemple el cas de les còniques, és a dir $\dim E = 3$.

Els tres casos de 9.2.4 són

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0, \quad \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + z^2 = 0, \quad \lambda_1 x^2 + 2yz = 0,$$

sent la segona equació l'expressió de ϕ o $-\phi$.

Dintre de cada cas el rang i l'índex a l'infinit classifica afinment (perquè llavors el rang i l'índex global queda determinat).

Ara tallem per $z = 1$ per passar a l'afí i separem segons rang i índex dins de cada classe, i obtenim exactament la classificació 9.1.1.

Concretament, hi ha tantes còniques mètricament no equivalents en el cas I com parells $(\lambda_1, \pm\lambda_2)$ amb $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ i $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Correspon als casos $5, 7, 9$ de 9.1.1.

Hi ha tantes còniques mètricament no equivalents en el cas II com parells $(\pm\lambda_1, \pm\lambda_2)$ amb $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Correspon als casos $1, 2, 3, 6, 8$ de 9.1.1.

Finalment, del cas III n'hi ha tantes com nombres reals positius. Correspon al cas 4 de 9.1.1.

9.3 Exercicis

9.3.1 Classifiqueu mètricament les còniques del pla euclidià $\mathbb{R}^2$ següents:

a) $x^2 - 6xy + 8y^2 + 2y = 0$;

b) $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$;

c) $2x^2 + 3y^2 - 2xy + 4x + 3y + 4 = 0$;

d) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 4y + 4 = 0$;

e) $x^2 - 2xy + 2x - 6y - 3 = 0$.

9.3.2 Classifiqueu mètricament les quàdriques de l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ següents:

a) $2x^2 + 3y^2 - z^2 - 5 - 2xy + 2xz + 4yz - 2y + 4x = 0$;

b) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4yz - 6xz - 2x + 8y - 2z + 9 = 0$;

c) $x^2 + 5y^2 - 4z^2 + 4xy - 2yz + 2y - 1 = 0$;

d) $2x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 8x + 6y - 12z - 21 = 0$;

e) $2x^2 + y^2 - 4z^2 - 4xy - 4yz - 4y - 2z + 2 = 0$;

f) $x^2 + 3y^2 - 3z^2 + 3 + 6xy + 6xz - 14x + 6yz - 2y = 0$.

9.3.3 Digueu si les següents parelles de quàdriques són mètricament equivalents:

a) $x^2 + y^2 = 0, \quad 2x^2 + 2y^2 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$;

c) $x^2 + y^2 + 2zt = 0, \quad -x^2 - y^2 + 2zt = 0$.

9.3.4 Retrobeu, a partir de la definició 9.2.4, la classificació mètrica de quàdriques donada a la secció 9.1.2.

9.3.5 Doneu el tipus mètric de la quàdrica projectiva d'equació:

$$-2t^2 + 2tx + 4x^2 - 2ty + 2xy - 4tz + 4xz - 4yz = 0$$

(pensem $\mathbb{R}^3$, amb coordenades x, y, z i la mètrica $x^2+y^2+z^2 = 0$, com a subespai de $\mathbb{R}^4$ amb coordenades x, y, z, t).

9.3.6 Doneu el tipus mètric de les quàdriques projectives:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 - 2xz + 2yz + 2zt = 0$;

b) $x^2 - 4xy + 2xz - t^2 = 0$.

9.3.7 Són mètricament equivalents les còniques $x^2-y^2-z^2 = 0$ i $2xy+z^2 = 0$? (pensem $\mathbb{R}^2$, amb coordenades x, y i la mètrica $x^2 + y^2 = 0$, com a subespai de $\mathbb{R}^3$ amb coordenades x, y, z i la descomposició $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \oplus < (0, 0, 1) >$).

10. Geometria hiperbòlica i geometria el·líptica

En aquest capítol veiem, per justificar la frase de Cayley que citem a la introducció, que la geometria projectiva aporta un model tant per a la geometria hiperbòlica com per a l'el·líptica. Els punts i rectes interiors a una cònica s'interpreten com a punts i rectes hiperbòlics. Aquí, clarament, per un punt exterior a una recta passen infinites rectes que no la tallen. Vegem també que els moviments hiperbòlics són justament les projectivitats que fixen la cònica. Això és importantíssim ja que ens dóna un model lineal de les isometries hiperbòliques, concretament les projectivitats, que són en altres models molt complicades.

Com que la distància és una cosa invariant per moviments i els moviments són projectivitats, i les projectivitats deixan invariant la raó doble, la relació entre distància i raó doble apareix de manera natural.

Donem també la fórmula de Laguerre que ens relaciona angle i raó doble, amb el preu, això sí, d'haver de passar als complexos. També sembla natural aquesta necessitat, ja que les transformacions que conserven angles són justament les aplicacions holomorfes.

10.1 Fórmula de Laguerre

Propietats pròpies de la geometria mètrica admeten tractament projectiu. Ja hem vist per exemple a la secció 7.7 que fixant una recta de l'infinit $H = p(V)$ del pla projectiu $P(E)$ i una mètrica a V, podíem parlar d'ortogonalitat de rectes que es tallen en punts afins.

La fórmula de Laguerre, E. (1834-1886) va una mica més enllà i ens permet mesurar angles a partir de la raó doble. Vegem com funciona.

Siguin r, s dues rectes del pla euclidià que es tallen a l'origen $O = (0, 0)$. Les seves equacions seran doncs $r : y = mx$, $s : y = m'x$ amb $m = \tan\alpha$, $m' = \tan\alpha'$. La injecció

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{C}P^2 \\ (x, y) & \longmapsto & [x, y, 1] \end{array}$$

ens permet pensar el pla euclidià com l'espai afí $\mathbb{R}P^2 \setminus \{z = 0\}$ en el qual hem fixat a l'espai vectorial associat $\{z = 0\}$ la mètrica euclidiana ordinària, és a dir la que s'obté declarant que la base canònica és ortonormal. Pensem $\mathbb{R}P^2$ com subconjunt de $\mathbb{C}P^2$ tal com hem explicat a la secció 7.7.

La forma quadràtica associada a la mètrica euclidiana és x^2+y^2 que representa la cònica $x^2 + y^2 = 0$ que no té punts reals. La pensarem com la part real d'una cònica complexa. Concretament si denotem per x, y, z les coordenades homogènies canòniques de $\mathbb{C}P^2$, que seran doncs números complexos, i fixem $z = 0$ com infinit, llavors la mètrica euclidiana es pot pensar com la restricció a l'infinit real de la cònica complexa $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, és a dir, punts $[x, y, 0]$ amb $x, y \in \mathbb{R}, 0 \in \mathbb{C}$ tals que $x^2 + y^2 = 0$.

L'avantatge és que la cònica complexa $x^2 + y^2 = 0$, de la qual procedeix per restricció la cònica associada a la mètrica euclidiana, sí que te punts, els anomenats punts cíclics $I = [1, i, 0]$, $J = [1, -i, 0]$. La recta complexa I, J és, doncs, la recta de l'infinit.

Per altra banda les rectes r, s homogeneïtzades, és a dir pensades en el projectiu, tenen equacions $r : y = mx$, $s : y = m'x$ respecte a les coordenades homogènies $[x, y, z]$. Per tant tallen l'infinit $\{z = 0\}$ en els punts $R = [1, m, 0]$, $S = [1, m', 0]$. Calculem la raó doble d'aquests quatre punts

$$(I, J, R, S) = (i, -i, m, m') = \frac{m - i}{m + i} : \frac{m' - i}{m' + i}$$

$$\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{-\cos\alpha + i\sin\alpha} : \frac{\cos\alpha' + i\sin\alpha'}{-\cos\alpha' + i\sin\alpha'} = e^{2i(\alpha-\alpha')}.$$

És a dir, que l'angle entre les dues rectes r, s està donat per l'anomenada *fórmula de Laguerre*

$$\phi = \alpha - \alpha' = \frac{1}{2i}\log(I, J, R, S).$$

En particular r i s són perpendiculars ($\phi = \frac{\pi}{2}$) si i només si $(I, J, R, S) = -1$, és a dir si i només si tallen l'infinit en punts harmònicament conjugats als punts cíclics, d'acord amb els resultats ja obtinguts prèviament a 7.7.

Generalitzant doncs podem definir *angle projectiu* entre dues rectes r i s del pla projectiu real, que tallen l'infinit en punts R i S, per

$$\alpha = \frac{1}{2i}\log(I, J, R, S). \tag{10.1}$$

Anàlogament podem definir *distància projectiva* entre dos punts del pla projectiu real sempre que sobre la recta que determinen tinguem fixats dos punts més, per poder considerar la raó doble d'aquests quatre punts.

En efecte, volem que aquest nou concepte que definirem, la *distància projectiva*, compleixi algunes de les més importants propietats d'una distància euclidiana. Concretament voldrem que compleixi:

1. $d_P(A, A) = 0$;
2. $d_P(A, B) = -d_P(B, A)$ (és a dir, que tenim en compte el signe);
3. $d_P(A, B) + d_P(B, C) + d_P(C, A) = 0$ per A, B, C alineats.

Aquestes propietats les deduirem de la propietat multiplicativa de la raó doble. Aquesta propietat, fàcil de comprovar, diu que si A, B, C, I, J estan alineats llavors

$$(I, J, A, B)(I, J, B, C)(I, J, C, A) = 1.$$

sempre que $I \neq J$ i cap dels punts A, B, C no coincideixi amb I o J.

Prenent logaritmes tenim

$$\log(I, J, A, B) + \log(I, J, B, C) + \log(I, J, C, A) = 0.$$

i per tant, definint per a cada parella de punts X, Y d'aquesta recta, la seva distància projectiva per

$$d_P(X, Y) = k \log(I, J, X, Y),$$

on k és una constant arbitrària, obtenim una funció que compleix les propietats $1, 2$ i 3 abans esmentades.

Aquest procediment depèn però del parell de punts I, J que anem prenent sobre cada recta. Tot i que els podríem anar fixant arbitràriament, el més natural és fixar una vegada per totes una quàdrica, anomenada *absolut*, i prendre com a punts I, J sobre cada recta els punts en què aquesta recta talla la quàdrica. Sobre els reals podrien no tallar-se, ja que es tracta de resoldre un sistema format per una equació lineal i una de quadràtica, i és per això que ens veiem forçats a passar al projectiu complex on aquest sistema sempre tindrà solució, com ja hem fet, d'altra banda, en calcular l'angle per la fórmula de Laguerre.

10.2 Model projectiu de la geometria el·líptica

Situem-nos doncs a $\mathbb{C}P^2$ i prenem com a absolut la quàdrica $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Volem definir la distància entre punts *reals* de $\mathbb{C}P^2$, és a dir aquells que respecte a una referència fixada tenen coordenades homogènies reals o que es poden transformar en reals multiplicant per una certa constant no nul·la, com hem vist a la secció 7.7.

Prenem $A = [a_1, a_2, a_3], B = [b_1, b_2, b_3]$, dos punts reals. Prenem, per simplificar els càlculs, les determinacions reals de A i B de norma 1. Escriurem $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$ amb $A \cdot A = B \cdot B = 1$.

En tallar la recta que determinen amb l'absolut obtenim els punts

$$I = \frac{-A \cdot B + \sqrt{(A \cdot B)^2 - 1}}{2} \cdot A + B, \quad J = \frac{-A \cdot B - \sqrt{(A \cdot B)^2 - 1}}{2} \cdot A + B$$

El càlcul habitual de la raó doble ens dóna

$$(I, J, A, B) = \frac{-A \cdot B - \sqrt{(A \cdot B)^2 - 1}}{-A \cdot B + \sqrt{(A \cdot B)^2 - 1}},$$

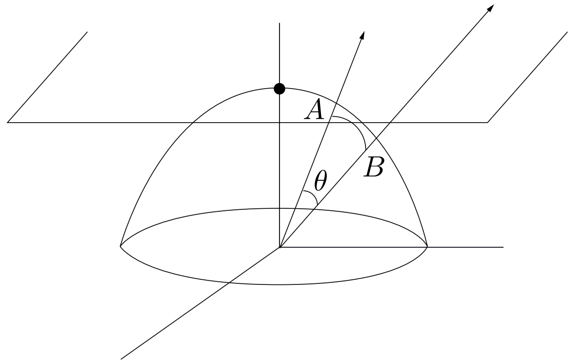
que, en funció de l'angle θ que formen els vectors unitaris A i B, s'escriu

$$(I, J, A, B) = \frac{-\cos\theta - i \sin\theta}{-\cos\theta + i \sin\theta} = e^{2i\theta}.$$

Si agafem, per analogia amb la fórmula de Laguerre, $k = \frac{1}{2i}$ a la definició de distància, tenim finalment

$$d_P(A, B) = \theta,$$

que és exactament i sorprenentment la distància entre els punts A i B mesurada sobre l'esfera de centre l'origen i radi 1.



És a dir, que la geometria de l'esfera, anomenada geometria el·líptica, s'obté com una part de la geometria projectiva.

De fet per geometria el·líptica s'entén la geometria de l'espai projectiu, que podem pensar com l'esfera amb els punts antipodals identificats, però pensat com a espai mètric amb la distància induïda per la distància ordinària de l'esfera. El que hem vist és que sobre $\mathbb{R}P^2$ aquesta distància coincideix amb la distància projectiva.

No ens estendrem en aquest punt, però observem que localment l'esfera i el projectiu són iguals. De fet el projectiu és l'hemisferi nord amb els punts de l'equador identificats antipodalment. De manera que si treballem a l'hemisferi nord calculant per exemple distàncies entre punts, no ens importa si som a l'esfera o al projectiu.

Ara veurem que la geometria hiperbòlica s'obté també com una part de la geometria projectiva. També l'euclidiana la podríem recuperar, però amb una mica més de feina i no ho farem aquí, vegeu [17]. Per això Cayley va exclamar: "La geometria projectiva és tota la geometria."

10.3 Model projectiu de la geometria hiperbòlica

La geometria hiperbòlica és la que s'obté en modificar el cinquè postulat d'Euclides pel següent:

Nou cinquè postulat. *Per un punt exterior a una recta hi passen infinites rectes que no la tallen.*

Podeu veure una formulació més precisa per exemple a [12].

La geometria projectiva aporta un model lineal de geometria hiperbòlica. És a dir que una part dels punts i rectes del pla projectiu, concretament els interiors a una cònica, poden ser considerats com punts i rectes del pla hiperbòlic, i els moviments o isometries entre aquests punts estan donats justament per un subgrup del grup de les projectivitats, concretament el format per les projectivitats que deixen invariant la cònica.

Recordem que des del punt de vista axiomàtic el pla hiperbòlic consisteix en dos conjunts, els elements del primer conjunt anomenats punts i els del segon anomenats rectes, i unes relacions entre aquests conjunts anomenades *pertànyer a*, *estar entre* i *ser congruent* que han de verificar els axiomes següents:

Axioma 10.3.1 *Donats dos punts diferents A i B, existeix una única recta r tal que A pertany a r i B pertany a r.*

Axioma 10.3.2 *Existeixen tres punts diferents A, B i C tals que A no pertany a la recta determinada per B i C.*

Sobre la relació *estar entre* exigim:

Axioma 10.3.3 *Existeix una correspondència bijectiva entre el conjunt de punts de qualsevol recta i el conjunt dels nombres reals que conserva la relació "estar entre".*

Axioma 10.3.4 *Siguin A, B i C tres punts diferents no alineats. Sigui r una recta que no passa per cap d'aquests punts.*

Si r talla el segment AB, llavors r talla un i només un dels segments BC i AC.

Suposem que entre els segments hi ha una relació, anomenada de *congruència*, que compleix:

Axioma 10.3.5 *Donats dos punts diferents A i B i un tercer punt A' i donada una semirecta r' d'origen A', existeix un únic punt B' sobre r' tal que el segment AB és congruent amb el segment $A'B'$ (escriurem $AB \equiv A'B'$). A més la relació de congruència entre segments és una relació d'equivalència.*

Axioma 10.3.6 *Siguin AB i BC segments sobre una recta r, sense punts interiors comuns. Siguin $A'B'$ i $B'C'$ segments sobre una recta r', sense punts interiors comuns. Si $AB \equiv A'B'$ i $BC \equiv B'C'$, llavors $AC \equiv A'C'$.*

Entre els angles també tenim una relació de congruència que compleix:

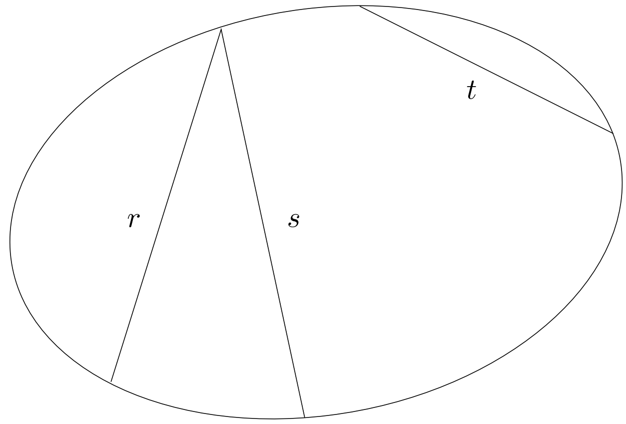
Axioma 10.3.7 *Suposem donats un angle $\angle h, k$, una recta r' i un costat del pla determinat per r'. Sigui h' una semirecta de r' amb origen O'. Existeix llavors una única semirecta k' d'origen O' tal que l'angle $\angle h, k$ és congruent a l'angle $\angle h', k'$ i tal que els punts interiors del $\angle h', k'$ són en el costat del pla prefixat respecte a r'.*

Axioma 10.3.8 *Sigui $A, B,$ i C tres punts no alineats i A', B' i C' tres punts més tampoc alineats. Si $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ i $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, llavors $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ i $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$.*

Axioma 10.3.9 *Per un punt exterior a una recta hi passen infinites rectes que no la tallen.*

El *model projectiu* és un objecte matemàtic que prové de la geometria projectiva i que compleix aquests axiomes. Consisteix en el següent:

Fixem una cònica no singular $\mathcal{C}$ del pla projectiu real. Agafem com a conjunt de punts del pla hiperbòlic els punts interiors a la cònica i com a conjunt de rectes la intersecció amb l'interior de la cònica de les rectes projectives.



r i s paral·leles
r i t ultraparal·leles

Els punts de la cònica no són punts *hiperbòlics*, però reben el nom de punts de l'infinit, i la cònica es diu també cònica de l'infinit.

Prenem com a relació *pertànyer a* la natural entre punts i rectes del projectiu. Per poder definir una relació d'*estar entre* observem que cada recta hiperbòlica està en correspondència bijectiva amb un segment de la recta real. La relació natural de *ser entre* a $\mathbb{R}$ la traspassem a la recta via aquesta bijecció.

Finalment la congruència de segments i d'angles es defineix així:

Definició 10.3.10 *Direm que dos segments AB i CD són congruents quan existeix una projectivitat Φ del pla projectiu que deixa invariant la cònica de l'infinit i tal que $\Phi(AB) = CD$.*

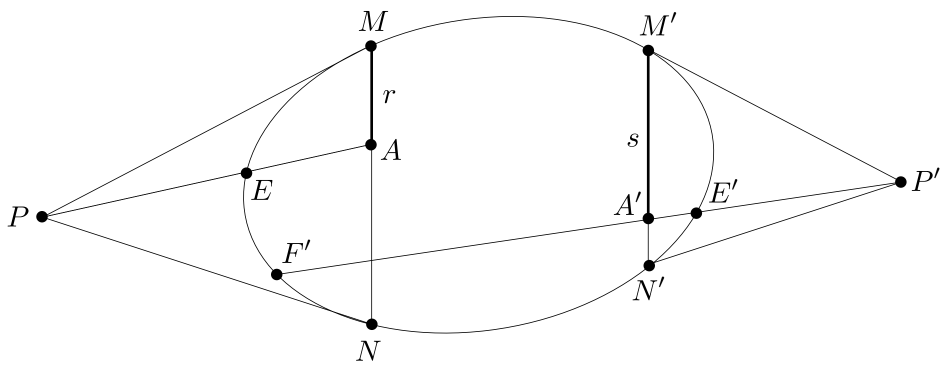
I anàlogament per a angles.

Les projectivitats que deixen invariant la cònica de l'infinit es diuen *isometries*, ja que per respectar la raó doble conserven la distància, i tenen el mateix paper que els desplaçaments en geometria euclidiana. Per a més informació sobre el tema consulteu [17].

Es pot comprovar llavors fàcilment que es compleixen el quatre primers axiomes. Els axiomes $5, 6, 7$ i 8 són conseqüència del resultat següent:

Teorema 10.3.11 *Sigui A un punt interior a la cònica de l'infinit $\mathcal{C}$ i r una semirecta per A. Sigui A' un altre punt interior i s una semirecta per A'. Existeixen dues projectivitats i només dues que deixen la cònica $\mathcal{C}$ invariant i tals que porten A en A' i r en s.*

Demostració.



Denotem per M el punt on r talla $\mathcal{C}$ i per N el punt on la prolongació de r talla $\mathcal{C}$. Sigui P el punt d'intersecció de les tangents a $\mathcal{C}$ per M i N.

Denotem per M' el punt on s talla $\mathcal{C}$ i per N' el punt on la prolongació de s talla $\mathcal{C}$. Sigui P' el punt d'intersecció de les tangents a $\mathcal{C}$ per M' i N'.

Siguin finalment E, F els punts d'intersecció de la recta PA amb $\mathcal{C}$ i E', F' els punts d'intersecció de la recta $P'A'$ amb $\mathcal{C}$.

Sabem, pel teorema 2.5.3, que existeix una projectivitat Φ que porta la quaterna P, M, N, E sobre la quaterna P', M', N', E' i una altra Φ' que porta la mateixa quaterna sobre P', M', N', F'. Les còniques $\mathcal{C}$ i $\Phi(\mathcal{C})$ coincideixen ja que tenen tres punts i les tangents a dos d'aquests punts en comú (vegeu els exercicis 7.2.4 i 7.8.1).

Pel mateix motiu $\Phi'(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Per tant Φ i Φ' són les projectivitats buscades.

La unicitat és clara ja que qualsevol projectivitat en les condicions del teorema ha de portar la primera quaterna en alguna de les altres dues, i dues projectivitats que coincideixen en una quaterna són iguals. ∎

La verificació ara dels axiomes és senzilla.

També és clar que es compleix l'axioma de les paral·leles, ja que, donada una recta hiperbòlica (que és un segment de recta projectiva) i un punt exterior hi ha infinites rectes per aquest punt que no tallen la recta donada.

Les rectes que no es tallen es classifiquen en paral·leles i ultraparel·leles. Concretament dues rectes es diuen paral·leles quan es tallen en un punt de la cònica (recordem que els punts de $\mathcal{C}$ no pertanyen a la geometria hiperbòlica), i ultraparal·leles si es tallen en un punt exterior.

Els axiomes permeten introduir una mesura de segments, és a dir una distància, i una mesura d'angles, vegeu [12].

La distància entre dos punts hiperbòlics A, B es pot calcular per

$$d(A, B) = k \log(A, B, P, Q),$$

on P, Q són els dos punts en què la recta AB talla la cònica $\mathcal{C}$.

Com abans, aquesta definició es justifica per ser la raó doble invariant per isometries i per la seva propietat multiplicativa.

L'angle entre dues rectes també es pot calcular a partir d'una expressió semblant però necessitem poder formar una raó doble entre aquestes dues rectes i dues rectes més. Novament tenim problemes en el cas real, que s'arreglen passant al cas complex. Definim l'angle entre dues rectes a, b

$$\angle(a, b) = \frac{1}{2i} \log(a, b, r, s),$$

on r, s són les dues tangents (complexes) a $\mathcal{C}$ des del punt d'intersecció de a i b.

Novament és invariant per isometries i es comporta bé amb la suma d'angles. De fet podem agafar qualsevol expressió de la forma

$$\angle(a, b) = k \log(a, b, r, s),$$

però si imposem que els angles rectes valguin $\pi/2$ ha de ser $k = \frac{1}{2i}$. En efecte, prenem coordenades de manera que $\mathcal{C}$ estigui donada per $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Agafem dues rectes per $P = [0, 0, 1]$. Les tangents des d'aquest punt a la quàdrica es calculen fàcilment recordant que són els punts fixos de la involució que la quàdrica determina en el feix de rectes per P. Són rectes $ax + by = 0$ amb $a^2 + b^2 = 0$, és a dir $< 1, \pm i, 0 >$.

Recordem que la raó doble de quatre rectes d'un feix es calcula a partir de la seva coordenada projectiva, que era essencialment el pendent.

$$\begin{aligned}\angle(a,b) &= k \log(a,b,r,s) = k \log(m_a, m_b, i, -i) = \\ &= k \log \frac{m_a m_b + 1 - i(m_a - m_b)}{m_a m_b + 1 + i(m_a - m_b)}.\end{aligned}$$

Per tant, si són perpendiculars, $m_a m_b + 1 = 0$, tenim

$$\angle(a,b) = k \log(-1) = k\pi i,$$

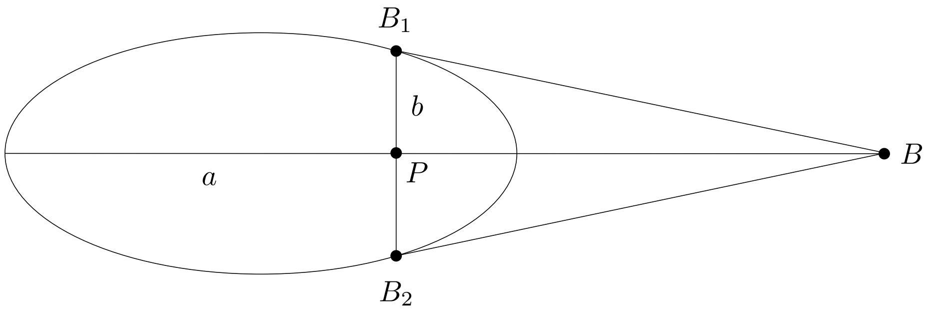
i per tant $k = \frac{1}{2i}$, com volíem.

10.4 Exercicis

10.4.1 Demostreu que el model projectiu de la geometria hiperbòlica compleix els axiomes.

10.4.2 Observeu que un tipus especial de moviment hiperbòlic són les homologies que deixen invariant l'absolut. Si el centre d'homologia és interior a l'absolut, reben el nom de simetries centrals, i si el centre d'homologia és exterior a l'absolut, es diuen simetries axials. Per què?

10.4.3 Demostreu que dues rectes hiperbòliques són perpendiculars si i només si són conjugades respecte a la cònica de l'absolut. Podeu seguir els passos següents ([14]):



Denotem per a i b aquestes rectes, que es tallen en un punt P i tallen la cònica de l'absolut $\mathcal{C}$ en punts respectius A_1, A_2 i B_1, B_2.

Recordeu que dues rectes són perpendiculars quan hi ha un moviment que superposa els angles que formen. Això només és possible si les rectes són invariants o si es transformen l'una en l'altra.

a) Si les rectes són invariants, P i B_1 són fixos i A_1 va a A_2. Deduïu que el moviment és una homologia d'eix b i centre el pol de b. Per ser a invariant, passa pel centre, i com que el centre és el pol, són conjugades.

b) Si el moviment porta la recta a sobre la recta b, tenim una projectivitat sobre $\mathcal{C}$ que porta A_1, B_1, A_2, B_2 respectivament sobre B_1, A_2, B_2, A_1. Per 7.8.31, les rectes A_1A_2, B_1B_1 (que interpretem com la tangent a B_1) i A_2A_1, B_2B_2 (que interpretem com la tangent a B_2) es tallen sobre l'eix de colineació. Com que aquest eix és diferent de a, perquè els punts on l'eix talla la cònica són fixos, això ens diu que a passa pel punt de tall de les tangents en B_1 i B_2, que és el pol de b.

c) Pel recíproc, observem que si a i b són conjugades la simetria d'eix b porta un angle en P sobre l'altra i hem acabat.

10.4.4 Construïu el punt mitjà d'un segment hiperbòlic.

Indicació: Donat el segment AB de la recta r, uniu el pol R de r amb A i B. Aquestes rectes tallen la cònica de l'absolut en punts respectius C, D i E, F. Les rectes CF i DE es tallen en el punt mitjà M buscat. El moviment que porta AM a MB és l'homologia d'eix RM i centre el punt d'intersecció de les rectes CE i FD.

10.4.5 Construïu, en geometria hiperbòlica, la bisectriu d'un angle. Comproveu que les bisectrius d'angles adjacents són perpendiculars.

10.4.6 Construïu, en geometria hiperbòlica, la perpendicular a una recta donada des d'un punt exterior.

10.4.7 Demostreu, en geometria hiperbòlica, que rectes paral·leles o secants no admeten una perpendicular comuna. Demostreu que les rectes ultraparal·leles admeten una perpendicular comuna i construïu-la.

10.4.8 Sigui P un punt hiperbòlic que no pertany a la recta hiperbòlica r i siguin A i B els punts en què r talla l'absolut. Sigui H el peu de la perpendicular de P a r. L'angle APH es diu *angle de paral·lelisme*. Demostreu que és igual a l'angle HPB i menor que un recte.

10.4.9 Demostreu que les bisectrius interiors d'un triangle hiperbòlic es tallen en un punt.

Indicació ([14]): Donat el triangle ABC considerem els punts de tall de la prolongació dels costats amb l'absolut. Apliqueu el teorema de Brianchon a l'hexàgon format per les sis tangents en aquests punts i tingueu en compte l'exercici 7.8.24. És a dir que *el teorema hiperbòlic sobre la intersecció de les bisectrius és el teorema projectiu de Brianchon.*

10.4.10 Demostreu que si dues mediatrius d'un triangle hiperbòlic es tallen, llavors la tercera passa també per aquest punt.

10.4.11 Demostreu que si dues altures d'un triangle hiperbòlic es tallen, llavors la tercera passa també per aquest punt.

Indicació ([14]): Siguin A', B', C' els pols dels costats respectius BC, AC,

AB*deltriangle*ABC.*Elproblemaequivaldemostrarquelesrectes*AA', BB'*i*CC'*estallenenunp*

Sigui $M = AC \cdot B'C'$ i $N = A'C \cdot B'C'$. Observeu que la polar de M és AB' i la polar de N és AH, on H és el pol de $A'C$. Observeu que $H = BC \cdot A'B'$.

Per l'exercici 7.8.4 sabem que la raó doble de quatre punts alineats és igual a la raó doble de les seves polars, $(B', C', M, N) = (AC, AB, AB', AH)$. Tallant amb la recta BC tenim $(B', C', M, N) = (C, B, L, H)$ on $L = BC \cdot AB'$.

Tenim doncs una projectivitat entre el feix de rectes per C i el feix de rectes per B' (l'única que porta les rectes CB', CC', CM, CN sobre les rectes $B'C, B'B, B'L, B'H$). Com que la recta CB' és fixa, els punts homòlegs estan alineats. Per tant $O = CC' \cdot B'B, A = CM \cdot B'L$ i $A' = CN \cdot B'H$ estan alineats. Anàlogament les altres rectes es tallen a O.

El fet que les altures d'un triangle hiperbòlic podrien no tallar-se correspon al fet que O podria no ser interior a la cònica de l'absolut.

11. Apèndix

Recollim aquí els resultats d'àlgebra que hem emprat en el text, per tal de facilitar-ne la lectura. Hi incloem també el teorema fonamental de geometria afí.

11.1 Cossos finits

Sigui k un cos amb un nombre finit d'elements.

Recordem que la característica d'un cos es defineix com el menor enter p tal que $p \cdot 1 = 1 + \cdots + 1 = 0$. És un nombre primer perquè si $p = p_1 p_2$, llavors

$$p \cdot 1 = (p_1 \cdot 1)(p_2 \cdot 1) = 0,$$

i hauria de ser $p_1 \cdot 1 = 0$ o $p_2 \cdot 1 = 0$, contra la hipòtesi de ser p el més petit amb aquesta condició.

Una primera observació és que si k és finit, llavors té característica diferent de zero. Això és pel fet que si 1 és la unitat del cos, la successió $1, 1+1, \cdots$ ha de tenir termes repetits, i per tant existeixen enters m i n tals que $m \cdot 1 = n \cdot 1$, és a dir $(m - n) \cdot 1 = 0$.

El recíproc no és cert. Per exemple el cos de les funcions racionals en una indeterminada i coeficients en un cos de característica p té infinits elements i característica p.

Teorema 11.1.1 *El nombre d'elements d'un cos finit de característica p és p^r, per a algun natural r.*

Demostració. Considero el subcos L de k format per

$$L = \{0, 1, 2 \cdot 1, \cdots, (p-1) \cdot 1\}.$$

Clarament k és un L-espai vectorial. La dimensió r d'aquest espai vectorial és un nombre finit, ja que k ho és. Per tant tots els elements de k s'obtenen de manera única com a expressions de la forma

$$x = a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r,$$

on $e_1, \cdots, e_r$ és una base fixada i els a_i són elements del cos L. Per tant tenim p^r elements. ∎

Teorema 11.1.2 *Donat un primer p i un enter r existeix un cos de característica p i p^r elements.*

Demostració. Considerem el polinomi

$$x^q - x = 0, \quad \text{amb } q = p^r.$$

com un polinomi a coeficients $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ i considerem les seves arrels, que sabem que existeixen en un cos més gran $\bar{\mathbb{F}}_p$ que conté $\mathbb{F}_p$ com a subcòs.

Aquí utilitzem el resultat d'àlgebra que diu que donat un cos commutatiu k i un polinomi a coeficients en k sempre existeix un cos commutatiu més gran, que el conté com a subcòs, en el qual hi ha les arrels del polinomi (vegeu per exemple [9], pàg. 178).

Com que aquesta equació i la seva derivada formal $qx^{q-1} - 1 = -1$ no tenen arrels comunes, l'equació té q arrels diferents. Aquestes arrels formen un cos, subcòs de $\bar{\mathbb{F}}_p$, ja que l'1 i el 0 de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ són arrels, la suma d'arrels és arrel a causa de la fórmula del binomi

$$(x \pm y)^q = x^q \pm y^q = x \pm y,$$

el producte d'arrels també és arrel, ja que

$$(xy)^q = x^q y^q = xy,$$

així com el pas a l'invers, ja que

$$(x^{-1})^q = (x^q)^{-1} = x^{-1}.$$

Per tant tenim un cos de $q = p^r$ elements i característica p. ∎

Diguem per acabar i sense demostració, perquè s'allunya dels objectius del curs, que dos cossos finits amb el mateix nombre d'elements p^r són isomorfs. De fet hi ha exactament r isomorfismes entre ells.

Com que nosaltres restringim l'atenció als cossos commutatius (llevat del petit comentari del teorema de Pappus), no ens cal utilitzar l'important resultat següent, però convé saber-lo:

Teorema 11.1.3 (J.H.M. Wedderburn (1882-1948)) *Tot cos finit és commutatiu.*

Podeu trobar-ne la demostració a [15].

11.1.1 Exemples de cossos finits

La demostració anterior que hi ha cossos de $q = p^r$ elements no ens diu realment com són aquests cossos, ja que no arribem a resoldre l'equació

$$x^q - x = 0$$

per trobar totes les seves arrels.

Una manera de construir efectivament aquests cossos és la següent:

Elegim un polinomi irreductible de grau r a coeficients $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. És a dir que no es pugui posar com a producte de polinomis amb coeficients també a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ i de grau més petit (diferent de zero).

Elegir aquest polinomi pot ser complicat, però està demostrat que existeix i podeu trobar taules on figuren aquests polinomis per als primers valors de p i r, per exemple a [7].

El cos buscat és

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]/ < x^r + a_1x^{r-1} + \cdots + a_{r-1}x + a_r >,$$

on $x^r + a_1x^{r-1} + \cdots + a_{r-1}x + a_r$ és el polinomi irreductible a coeficients $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Això és equivalent a dir que els elements del cos són les expressions de la forma

$$b_1x^{r-1} + \cdots + b_{r-1}x + b_r, \quad b_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ i = 1, \cdots, r$$

amb la suma i el producte entre ells efectuada de manera ordinària, recordant que els coeficients són a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ i que les potències de x superiors a $r-1$ es poden expressar com a potències d'ordre inferior o igual a $r-1$ a partir de la igualtat

$$x^r + a_1x^{r-1} + \cdots + a_{r-1}x + a_r = 0.$$

Per acabar i com a exemple construïm efectivament els cossos de quatre i vuit elements.

Per construir el cos de $4 = 2^2$ elements considerarem l'equació

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

on el polinomi és irreductible sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ per no tenir les arrels $0, 1$.

Llavors els elements del cos són

$$0, 1, x, 1 + x.$$

Si denotem $a = x, b = 1 + x$, els productes es calculen així:

$$\begin{aligned} aa &= x^2 = -1 - x = 1 + x = b; \\ ab &= x + x^2 = x + (-1 - x) = -1 = 1; \\ bb &= 1 + x^2 = -x = a. \end{aligned}$$

Anàlogament es calculen les sumes, de manera que tenim les taules de sumar i multiplicar següents:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

×	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Per construir el cos de $8 = 2^3$ elements considerarem l'equació

$$x^3 + x + 1 = 0,$$

on el polinomi és irreductible sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ per no tenir les arrels $0, 1$.

Llavors els elements del cos són

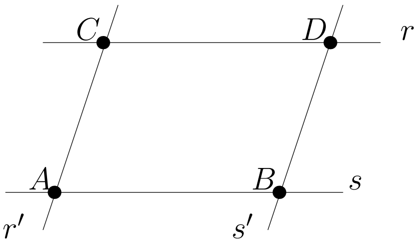
$$0, 1, x, 1 + x, x^2, 1 + x^2, x + x^2, 1 + x + x^2.$$

amb la suma i productes calculats com abans.

11.2 Teorema fonamental de la geometria afí

El teorema fonamental de la geometria afí que volem demostrar en aquesta secció diu, essencialment, que *si una aplicació f porta rectes a rectes és una semiafinitat*. Per demostrar això, el primer pas serà demostrar que l'aplicació lineal associada $\tilde{f}_P$ conserva la suma de vectors. Aquest fet és conseqüència gairebé directa del següent lema.

Lema 11.2.1 (Paral·leles entre paral·leles són iguals) *Suposem que dues rectes paral·leles r i s són tallades per dues rectes també paral·leles r' i s'. Siguin $A = r' \cap s, B = s' \cap s, C = r \cap r', D = r \cap s'$, els punts de tall. Llavors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.*



Per hipòtesis tenim $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{BD} = \mu\overrightarrow{AC}$. Però el punt D es pot escriure com

$$D = A + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD},$$

o bé com

$$D = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = A + \lambda\overrightarrow{CD} + \mu\overrightarrow{AC}.$$

Igualant aquestes expressions obtenim el resultat.

Teorema 11.2.2 (teorema fonamental de la geometria afí) *Sigui $\mathbb{A}$ un espai afí sobre un k-espai vectorial V de dimensió ≥ 2. Suposem que $k \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sigui $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una aplicació bijectiva que porta rectes a rectes.*

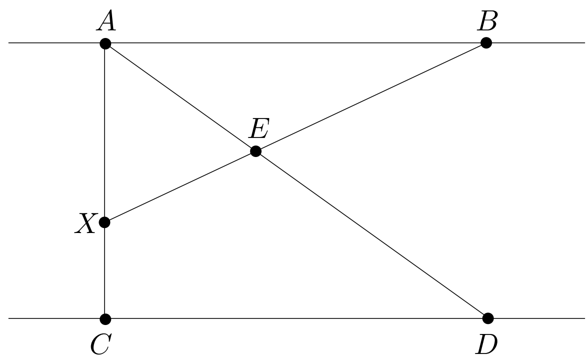
Llavors f és una semiafinitat.

Demostració. Abans de començar remarquem que quan diem que f porta rectes a rectes volem dir que f porta cada recta bijectivament sobre una altra recta. Aquesta hipòtesi és equivalent a exigir que f porti punts alineats a punts alineats (encara que en principi això sembli una mica més feble), tal com passava en el teorema fonamental de la geometria projectiva, teorema 4.3.1. Per veure aquesta equivalència podeu adaptar l'exercici 4.6.10 al cas afí.

Primera part: f porta rectes paral·leles a rectes paral·leles.

Si $\dim V = 2$, això és evident per ser f injectiva.

Siguin r_1, r_2 dues rectes paral·leles de $\mathbb{A}$ diferents. Prenem punts diferents A, B sobre r_1 i C sobre r_2. Sigui $D = C + \overrightarrow{AB} \in r_2$.



Si poguéssim assegurar que les rectes AD i BC es tallen, la demostració estaria pràcticament acabada, però això podria no ser així, com és el cas si k té característica 2. Per evitar aquest problema farem el següent:

Prenem $E \in AD$ diferent de A i D (aquí utilitzem que k no és $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Les rectes AC i BE es tallen en un cert punt X diferent de A. Això és així pel fet que els vectors directors d'aquestes rectes, AC i BE, són linealment independents (ja que $AC = BD$).

Com que f és injectiva i envia rectes a rectes, $f(r_1)$ i $f(r_2)$ són rectes que no es tallen. Però hem de veure que són al mateix pla.

Siguin r_3 la recta AD, r_4 la recta EB i s la recta AC. Les rectes $f(r_1), f(r_3)$ es tallen a $f(A)$ i determinen per tant un pla Π. Com que $f(E)$ i $f(B)$ pertanyen a aquest pla, tenim que $f(r_4) \subset \Pi$ i en particular $f(X) \in \Pi$. Però això implica que $f(s) \subset \Pi$, i per tant $f(C) \in \Pi$. Com que també $f(D) \in \Pi$, tenim que $f(r_2) \subset \Pi$ i $f(r_1), f(r_2)$ són coplanàries i en particular paral·leles, com havíem afirmat.

Segona part: $_P$*ésadditiva.*

Fixem un punt $P \in \mathbb{A}$, i posem, per alleugerir la notació, $\tilde{f} = \tilde{f}_P$.

Hem de veure que l'aplicació $\tilde{f} : V \longrightarrow V$ donada per

$$\tilde{f}(\overrightarrow{PX}) = \overrightarrow{f(P)f(X)}, \qquad \forall X \in \mathbb{A}$$

és semilineal.

Siguin $u = PQ, v = PR$ vectors linealment independents. Sigui $S = Q + PR$. Per la primera part de la demostració, i el lema 11.2.1, sabem que $f(P), f(Q), f(R), f(S)$ formen un paral·lelogram i $\overrightarrow{f(P)f(R)} = \overrightarrow{f(Q)f(S)}$. Així

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u) + \tilde{f}(v) &= \overrightarrow{f(P)f(Q)} + \overrightarrow{f(P)f(R)} = \\ &= \overrightarrow{f(P)f(Q)} + \overrightarrow{f(Q)f(S)} = \overrightarrow{f(P)f(S)} = \tilde{f}(u+v). \end{aligned}$$

Per tant $\tilde{f}$ respecta la suma de vectors independents.

Si $w = \lambda u$, tenim

$$\tilde{f}(u+w) + \tilde{f}(v) = \tilde{f}(u+w+v) = \tilde{f}(u) + \tilde{f}(w+v) = \tilde{f}(u) + \tilde{f}(w) + \tilde{f}(v).$$

Per tant, respecta la suma de vectors, siguin independents o no, és a dir

$$\tilde{f}(u_1 + u_2) = \tilde{f}(u_1) + \tilde{f}(u_2), \qquad \forall u_1, u_2 \in V.$$

Tercera part: comportament de amb els escalars. Fixem $u \in V$, $v \neq 0$.

Per portar rectes a rectes, per a tot element $\lambda \in k, \lambda \neq 0$ existeix un únic $\mu(\lambda) \in k$ tal que

$$\tilde{f}(\lambda u) = \mu(\lambda)\tilde{f}(u). \tag{11.1}$$

Obtenim així una aplicació $\mu : k \longrightarrow k$ que, per portar f cada recta bijectivament sobre una altra recta, és bijectiva. Per definició de semiafinitat, el que hem de demostrar és que $\tilde{f}$ és semilineal, és a dir que els escalars surten fora afectats d'un automorfisme del cos. Per tant el que hem de demostrar és que μ és un automorfisme.

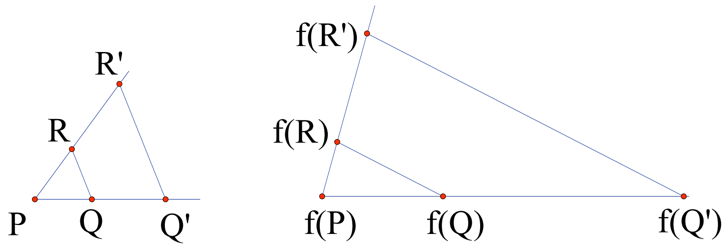
Però, encara més, hem de veure que si prenem un vector qualsevol $v \in E_1$, també es compleix

$$\tilde{f}(\lambda v) = \mu(\lambda)\tilde{f}(v), \tag{11.2}$$

per a la mateixa funció μ definida a (11.1), que depèn, per la seva pròpia definició, de u.

Per a això, considerem primer el cas en que $v \in V$ és linealment independent amb u. Posem $u = PQ, v = PR, \lambda u = PQ', \lambda v = PR'$.

En particular, les rectes RQ i $R'Q'$ són paral·leles. Per hipòtesis, les rectes $f(R)f(Q)$ i $f(R')f(Q')$ són també paral·leles.



Podem doncs aplicar el teorema de Tales i, observant que (11.1) es llegeix com

$$\overrightarrow{f(P)f(Q')} = \mu(\lambda)\overrightarrow{f(P)f(Q)},$$

obtenim

$$\overrightarrow{f(P)f(R')} = \mu(\lambda)\overrightarrow{f(P)f(R)}.$$

Equivalentment,

$$\tilde{f}(\lambda v) = \mu(\lambda)\tilde{f}(v), \tag{11.3}$$

és a dir, (11.2) és certa per a vectors linealment independents amb u. Això ja permet demostrar que μ és automorfisme. En efecte, si $\lambda' \in k, \lambda' \neq 0$,

$$\mu(\lambda\lambda')\tilde{f}(v) = \tilde{f}(\lambda\lambda' v) = \mu(\lambda)\tilde{f}(\lambda' v) = \mu(\lambda)\mu(\lambda')\tilde{f}(v),$$

ja que $\lambda' v$ és linealment independent amb u, i li podem aplicar la fórmula (11.3).

Per tant

$$\mu(\lambda\lambda') = \mu(\lambda)\mu(\lambda') \qquad \lambda, \lambda' \in k \backslash \{0\}.$$

Com que $\tilde{f}$ és additiva, és clar que $\mu(\lambda + \lambda') = \mu(\lambda) + \mu(\lambda')$ i clarament $\mu(1) = 1$. Per tant $\mu : k \longrightarrow k$ és un automorfisme de k.

Tan sols falta veure que

$$\tilde{f}(\lambda v) = \mu(\lambda)\tilde{f}(v),$$

quan v és linealment dependent amb u. Prenem doncs $v = \nu u$, amb $\nu \in k$. Llavors

$$\tilde{f}(\lambda v) = \tilde{f}(\lambda \nu u) = \mu(\lambda\nu)\tilde{f}(u) = \mu(\lambda)\mu(\nu)\tilde{f}(u) = \mu(\lambda)\tilde{f}(\nu u) = \mu(\lambda)\tilde{f}(v).$$

Per tant, $\tilde{f}$ és semilineal, com volíem demostrar. ∎

Corol·lari 11.2.3 *Sigui $\mathbb{A}$ un espai afí sobre un k-espai vectorial V de dimensió ≥ 2. Suposem que $k \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sigui $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una aplicació bijectiva que porta rectes a rectes i conserva la raó simple.*

Llavors f és una afinitat.

Demostració. Tot element λ del cos es pot escriure com la raó simple (A, B, C) de tres punts. Com f és semiafinitat tenim

$$(f(A), f(B), f(C)) = \sigma(\lambda) = (A, B, C)$$

on σ és l'automorfisme del cos associat a f. Així $\sigma(\lambda) = \lambda$ per tot λ, és a dir σ és la identitat. ∎

11.3 Teorema espectral

Teorema 11.3.1 *Sigui E un espai vectorial real ($k = \mathbb{R}$), ϕ una aplicació bilineal simètrica sobre E, i g una altra aplicació bilineal simètrica sobre E, però aquesta definida positiva. Llavors existeix una base ortonormal per g en la qual ϕ diagonalitza.*

Demostració. Sigui q la forma quadràtica associada a ϕ pensada com a aplicació sobre l'esfera unitat de g, és a dir

$$\begin{array}{rccc} q: & S^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \phi(x,x), \end{array}$$

on

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n ; g(x,x) = 1\}.$$

Sigui $v \in S^{n-1}$ un mínim absolut de q, que existeix per ser q contínua i S^{n-1} compacta.

L'aplicació diferenciable

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & q(\frac{x}{||x||}) \end{array}$$

té un mínim absolut a v, i per tant

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(v) = 0, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{11.4}$$

on les x_i són coordenades respecte a una base ortonormal en la qual g diagonalitza, que sempre existeix per ser definida positiva.

Com que

$$f(x_1, \cdots, x_n) = (\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j) \frac{1}{\sum_i x_i^2},$$

la igualtat 11.4 es tradueix, calculant derivades, en:

$$Av = q(v)v \tag{11.5}$$

on A és la matriu de ϕ respecte a la base anterior. Per abús de notació identifiquem v amb el vector columna corresponent.

Ampliem v a una base de $\mathbb{R}^n$ ortonormal respecte g, per exemple pel mètode de J.P. Gram (1850-1916)-E. Schmidt (1876-1959). Sigui P la matriu formada per aquests vectors posats en columna. La relació 11.5 ens diu que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} q(v) & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Ara, com que $P^{-1} = P^t$, per portar base ortonormal a base ortonormal, i el membre de l'esquerra és simètric, el de la dreta també ho ha de ser, de manera que tenim

$$P^tAP = \begin{pmatrix} q(v) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \tag{11.6}$$

A partir d'aquí provem el teorema per inducció sobre n. El cas $n = 1$ és trivial. Suposem $n > 1$ i el teorema cert per a formes quadràtiques amb menys de n variables. Obtenim la descomposició 11.6 i apliquem la hipòtesi d'inducció a la matriu B: existeix Q matriu $(n-1) \times (n-1)$ ortogonal tal que $Q^t B Q = D$, on D és una matriu diagonal. Aleshores la matriu

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

és també ortogonal i

$$(PP')^t A (PP') = \begin{pmatrix} q(v) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

és diagonal. Això acaba la demostració. ∎

11.4 Quàdriques i formes quadràtiques

Sigui, com sempre, $P(E)$ l'espai projectiu sobre un k-espai vectorial E. Siguin $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{Q}'$ quàdriques associades a formes quadràtiques q i q' respectivament.

Recordem que $\mathcal{Q}$ és projectivament equivalent a $\mathcal{Q}'$ ($\mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}'$) si existeix una projectivitat $\tilde{f}$ tal que $\tilde{f}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$ i que q és projectivament equivalent a q' ($q \sim q'$) si existeix una projectivitat $\tilde{f}$ tal que $f^*q' = \lambda q$, $\lambda \in k$, on f és qualsevol representant de $\tilde{f}$.

Teorema 11.4.1 *Si k és algebraicament tancat, llavors $\mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}'$ si i només si $q \sim q'$.*

Demostració. Utilitzarem el teorema dels zeros de D. Hilbert (1862-1943) (*Nullstellentsatz*), que diu que sobre un cos algebraicament tancat si un polinomi R s'anul·la sobre els zeros comuns a polinomis $P_1, \ldots, P_r$, existeix $s \geq 1$ tal que $R^s \in \langle P_1, \ldots, P_r \rangle$, on $\langle P_1, \ldots, P_r \rangle$ vol dir l'ideal generat per $P_1, \ldots, P_r$ a l'anell de polinomis (vegeu [9]).

Suposem primerament que existeix una projectivitat $\tilde{f}$ tal que $f^*q' = \lambda q$. Llavors

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathcal{Q}) &= \tilde{f}(\{p(x); q(x) = 0\}) = \{p(y); q(f^{-1}(y)) = 0\} \\ &= \{p(y); q'(y) = 0\} = \mathcal{Q}'. \end{aligned}$$

Recíprocament, suposem que existeix $\tilde{f}$ projectivitat tal que $\tilde{f}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$.

Sigui $\bar{q} = f^*q'$ amb f un representant de $\tilde{f}$, i sigui $\bar{\mathcal{Q}}$ la quàdrica associada a $\bar{q}$. Clarament $\mathcal{Q} = \bar{\mathcal{Q}}$. Com que q s'anul·la sobre els zeros de $\bar{q}$, aplicant el *Nullstellenzat* amb $r = 1$, tenim $q^s = \bar{q} \cdot p$, on p és un cert polinomi. Descomponent q i $\bar{q}$ en els seus factors irreductibles tindrem $q = q_1 \cdot q_2$, $\bar{q} = \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2$ (recordem que són polinomis de grau dos). Però llavors la igualtat $q^s = \bar{q} \cdot p$ implica $\bar{q}_i \mid q_1$ o $\bar{q}_i \mid q_2$. Recíprocament, $q_i \mid \bar{q}_1$ o $q_i \mid \bar{q}_2$. Com que $\bar{q}_1$ i $\bar{q}_2$ no tenen factors comuns, cada $\bar{q}_i$ és múltiple d'un q_j diferent, i per tant $\bar{q} = \lambda q$. És a dir $f^*q' = \lambda q$, com volíem. ∎

Teorema 11.4.2 *Si $\mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}'$ i $\mathcal{Q}$ té almenys un punt simple, llavors $q \sim q'$.*

Demostració. Sigui $\bar{q} = f^*q'$. Hem de provar que si q i $\bar{q}$ tenen els mateixos zeros, amb almenys un de simple, llavors $\bar{q} = \lambda q$.

Sigui $A = p(a)$ un punt simple de $\mathcal{Q}$. Fixem $B = p(b) \notin T_A\mathcal{Q}$ amb $q(b) \neq 0$. Que un tal B existeix és clar, ja que en cas contrari q s'anul·laria fora d'un hiperplà i això implica $q \equiv 0$ pel lema 8.1.3. Prenem ara $C = p(c) \in T_A\mathcal{Q}$ diferent de A arbitrari. Sigui $r_t = p(< a, b + tc >)$ una família de rectes per A, en variar t. Tallem aquestes rectes amb $\mathcal{Q} = \bar{\mathcal{Q}}$.

$$r_t \cdot \mathcal{Q} = \{p(sa + (b + tc)); q(sa + (b + tc)) = 0\}.$$

Sigui $s_0(t)$ solució de l'equació lineal en s $q(sa + (b + tc)) = 0$, és a dir

$$2s\phi(a, b + tc) + \phi(b + tc, b + tc) = 0,$$

amb ϕ l'aplicació bilineal simètrica associada a q. El punt $p(s_0(t)a + b + tc)$ ha de ser també un zero de $\bar{\mathcal{Q}}$, i per tant

$$2s_0(t)\bar{\phi}(a, b + tc) + \bar{\phi}(b + tc, b + tc) = 0$$

amb $\bar{\phi}$ l'aplicació bilineal simètrica associada a $\bar{q}$.

Així,

$$\phi(a, b)\bar{\phi}(b + tc, b + tc) = \bar{\phi}(a, b + tc) \cdot \phi(b + tc, b + tc)$$

per a tot t ($\phi(a, c) = 0$, per ser $C \in T_A\mathcal{Q}$).

Com que $\bar{\phi}(b+tc, b+tc)$ i $\phi(b+tc, b+tc)$ són polinomis en t del mateix grau (2 si $\phi(c, c) \neq 0$, 1 si $\phi(c, c) = 0$), això implica $\bar{\phi}(a, c) = 0$.

Així

$$(\bar{\phi} - \mu\phi)(b + tc, b + tc) = 0, \quad \text{amb } \mu = \frac{\bar{\phi}(a, b)}{\phi(a, b)}$$

($\phi(a, b) \neq 0$ perquè $B \notin T_A\mathcal{Q}$).

Si mantenim B fixat, de manera que μ serà una constant, i fem variar C sobre $T_A\mathcal{Q}$, tenim que $\bar{\phi} - \mu\phi$ s'anul·la sobre tot vector que no pertanyi a l'hiperplà tangent (de fet al subespai vectorial que dóna lloc a aquest hiperplà). Pel lema 8.1.3, $\bar{\phi} - \mu\phi \equiv 0$, com volíem. (Observem que d'aquí es desprèn que μ tampoc no depèn de B, cosa que es pot comprovar també directament.) ∎

Teorema 11.4.3 *Si $k = \mathbb{R}$, llavors $\mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}'$ si i només si $q \sim q'$.*

Demostració. Considerem l'expressió canònica de q. Si en els coeficients hi ha un parell $1, -1$, per exemple $x_0^2 - x_1^2 + \cdots$, el punt $[1, 1, 0, \cdots]$ és un punt simple de la quàdrica i podem aplicar el teorema anterior. Anàlogament per a q'.

Per tant ens queda només el cas en què tant q com q' tenen expressió canònica amb tots els coeficients $+1$. Com $x_0^2 + \cdots + x_r^2 = 0$ representa un hiperplà de codimensió $r + 1$ i hi ha un isomorfisme que porta l'hiperplà $\mathcal{Q}$ a l'hiperplà $\mathcal{Q}'$, la codimensió d'aquests hiperplans ha de ser la mateixa i per tant q i q' tenen el mateix rang i el mateix índex (zero) i són doncs equivalents. ∎

Exercici 11.4.4 Doneu una nova demostració del teorema 11.4.3 seguint els passos següents:

1. Si $\tilde{f}$ és una projectivitat tal que $\tilde{f}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$, llavors f porta plans hiperbòlics de ϕ a plans hiperbòlics de ϕ' (ϕ i ϕ' aplicacions bilineals simètriques associades a $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{Q}'$).
2. f conserva la suma directa. És a dir que, si H_1 i H_2 són plans hiperbòlics ortogonals respecte a ϕ, llavors $f(H_1)$ i $f(H_2)$ són plans hiperbòlics ortogonals respecte a ϕ'.
3. Si ϕ s'anul·la sobre un subespai F de E, llavors Φ' s'anul·la sobre $f(F)$.

11.5 Classificació de les aplicacions bilineals simètriques

Sigui E un k-espai vectorial i sigui ϕ una aplicació bilineal simètrica sobre E. El mètode de completació de quadrats ens diu que sempre existeix una base respecte a la qual l'expressió de ϕ és diagonal. El problema que ens plantegem ara és el de saber si donades dues aplicacions bilineals simètriques ϕ i ϕ' existeixen bases, possiblement diferents, respecte a les quals ϕ i ϕ' tenen la mateixa matriu associada. Això és equivalent a saber si existeix un isomorfisme f de E tal que

$$f^*\phi' = \phi.$$

Quan existeix una tal f, es diu que ϕ i ϕ' són equivalents. Matricialment, és a dir fixant una base i identificant ϕ i ϕ' amb les seves matrius, això és equivalent a saber si existeix una matriu invertible M tal que

$$M^t\phi' M = \phi.$$

En particular

$$\det \phi = \det \phi' \cdot (\det M)^2.$$

D'aquestes dues igualtats es desprèn que si dues aplicacions bilineals simètriques són equivalents, tenen el mateix rang i el mateix discriminant. Per rang entenem el rang de la matriu associada, i per discriminant, el determinant mòdul quadrats. Recordem que el rang d'una matriu no varia quan la multipliquem a dreta i esquerra per dues matrius invertibles.

És a dir que ϕ i ϕ' tenen el mateix discriminant si i només si els determinants són diferents de zero i el seu quocient és un quadrat perfecte. Dependrà doncs de l'aritmètica del cos. Per exemple, sobre $\mathbb{C}$ tenir el mateix discriminant o tenir el mateix determinant és el mateix, i sobre $\mathbb{R}$ tenir el mateix discriminant vol dir que els determinants tenen el mateix signe.

Observem que si $\dim E = n$ i en diagonalitzar ϕ apareixen r elements no nuls a la diagonal, llavors $\dim \operatorname{rad} E = n - r$.

Ampliant una base del radical a una base de tot l'espai obtenim una base en la qual

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

i una descomposició

$$E = \operatorname{rad} E \oplus F,$$

de manera que ϕ restringida a F és no singular. És a dir, que el radical de $(F, \phi|F)$ és zero. Així, per estudiar ϕ tan sols hem d'estudiar $\phi|F$, ja que la matriu fora d'aquí està formada per zeros, és a dir que el problema rau a classificar les aplicacions bilineals simètriques no singulars.

Classificació sobre $\mathbb{C}$.

Teorema 11.5.1 (classificació sobre $\mathbb{C}$) *Dues aplicacions bilineals simètriques sobre un $\mathbb{C}$-espai vectorial són equivalents si i només si tenen el mateix nombre de $+1$ en la seva expressió diagonal. És a dir el rang classifica.*

Demostració. En diagonalitzar la part no singular completant quadrats (vegeu el teorema 6.2.2) sempre podrem suposar que els elements de la diagonal són $+1$, ja que si $\phi(e, e) = a$, llavors

$$\phi(e', e') = 1, \quad \text{on} \quad e' = \frac{e}{\sqrt{a}},$$

i tindrem

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Un cop posades les dues aplicacions bilineals simètriques en aquesta forma canònica, és clar que podrem passar d'una expressió a l'altra per un canvi de base si i només si aquestes expressions canòniques tenen el mateix nombre de $+1$, és a dir el mateix rang. ∎

Classificació sobre $\mathbb{R}$.

La notació $E = F \perp H$ es llegeix "E és suma directa ortogonal de F i H" i vol dir $E = F \oplus H$ i que $\phi(u, v) = 0, \quad \forall u \in F, \forall v \in H$.

Teorema 11.5.2 (J.J.Sylvester (1814-1897)) *Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial i sigui ϕ una aplicació bilineal simètrica sobre E. Aleshores, podem descompondre E en suma directa ortogonal de manera que*

$$E = \operatorname{rad} E \perp E_+ \perp E_-,$$

amb ϕ que és definida positiva sobre E_+ i definida negativa sobre E_-. Les dimensions $r^+ = \dim E_+$ i $r^- = \dim E_-$ són independents de la descomposició i invariants dintre de la classe d'equivalència de ϕ.

Demostració. L'existència de la descomposició és clara, ja que es desprèn directament del teorema de diagonalització. Un cop diagonalitzada, els valors propis positius es poden transformar en $+1$ i els negatius en -1 simplement dividint el vector corresponent per l'arrel quadrada del valor absolut del valor propi; és a dir, si $\phi(e,e) = a$, llavors

$$\phi(e', e') = \pm 1, \quad e' = \frac{e}{\sqrt{|a|}}.$$

Demostrem la independència de r^+ i r^- de la descomposició. Suposem

$$E = \operatorname{rad} E \perp E_+ \perp E_- = \operatorname{rad} E \perp F_+ \perp F_-$$

amb ϕ definida positiva sobre E_+ i F_+ i definida negativa sobre E_- i F_-. Considerem l'aplicació lineal

$$F_+ \overset{i}{\hookrightarrow} E \xrightarrow{pr} E_+$$

obtinguda per composició de la inclusió canònica i de F_+ dins E i la projecció pr de E en E_+ determinada per la descomposició en suma directa

$$E = \operatorname{rad} E \perp E_+ \perp E_-,$$

és a dir

$$pr(e_0 + e_+ + e_-) = e_+, \quad e_0 \in \operatorname{rad} E, e_+ \in E_+, \, e_- \in E_-.$$

Si provem que aquesta aplicació $pr \circ i$ és injectiva, ja estarem llestos, ja que tindrem

$$\dim F_+ \leq \dim E_+$$

i per simetria, intercanviant els papers de E_+ i F_+, obtenim l'altra desigualtat.

Prenem $e \in F_+$ i considerem les seves components

$$e = e_0 + e_+ + e_-, \quad e_0 \in \operatorname{rad} E, \, e_+ \in E_+, \, e_- \in E_-$$

La imatge de e per $pr \circ i$ és e_+; si aquesta imatge és zero, és que $e = e_0 + e_-$, però aleshores

$$\phi(e,e) = \phi(e_-, e_-) \leq 0,$$

pel fet de ser ϕ definida negativa sobre E_-. D'altra banda, $\phi(e,e) \geq 0$, per ser ϕ definida positiva sobre F_+. En conclusió, $\phi(e,e) = 0$, i per tant, $e = 0$ ja que ϕ és definida positiva sobre F_+. Així $pr \circ i$ és injectiva, com volíem.

La invariància dintre de la classe d'equivalència vol dir que r^+ i r^- són els mateixos per a cada $\phi' = f^*\phi$, per a tot isomorfisme f, i això és immediat. ∎

Notem que els subespais E_+ i E_- no són invariants; el que diem que és invariant és la seva dimensió.

Teorema 11.5.3 (classificació sobre $\mathbb{R}$) *Dues aplicacions bilineals simètriques sobre un $\mathbb{R}$-espai vectorial són equivalents si i només si tenen el mateix nombre de $+1$ i -1 en la seva expressió diagonal. És a dir el rang i el nombre de $+1$ classifiquen.*

Demostració. Conseqüència immediata del teorema de Sylvestre. ∎

Observem que el fet que r^+ sigui invariant dintre de la classe d'equivalència ens permet dir ràpidament que dues aplicacions bilineals simètriques amb r^+ diferents no són equivalents. A més, si dues aplicacions bilineals simètriques tenen el mateix rang i el mateix r^+, és clar que són equivalents, ja que ambdues admeten l'expressió

$$\begin{pmatrix} 0 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 0 &&&&&& \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& 1 &&& \\ &&&&&& -1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& -1 \end{pmatrix}$$

amb el mateix nombre de $+1$ i de -1.

Classificació sobre cossos finits.

Sobre cossos finits també es pot completar la classificació gràcies a una propietat molt especial d'aquests cossos, que, recordem, són commutatius.

Lema 11.5.4 *Si k és un cos finit de característica diferent de dos, llavors la meitat exactament dels elements diferents de zero són quadrats. En particular, tots els no quadrats són de la forma ac_i^2, on a és un no quadrat qualsevol i $c_i \in k$, $i = 1, \cdots, \frac{1}{2}\operatorname{card} k$.*

Demostració. Sigui $k^* = k \setminus \{0\}$. Per ser k commutatiu, l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} k^* & \longrightarrow & k^* \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

és morfisme de grups (estructura multiplicativa del cos). La imatge és k^{*2}. El nucli són les arrels del polinomi $X^2 - 1$. Per ser k un cos de característica diferent de dos, aquest polinomi té exactament dues arrels 1 i -1. Pel teorema d'isomorfia

$$k^* / \{1, -1\} \simeq k^{*2},$$

i per tant

$$\operatorname{card} k^{*2} = \frac{1}{2} \operatorname{card} k^*,$$

i per tant la meitat del elements són quadrats.

Si prenem ara un no quadrat qualsevol a i formem tots el productes ac_i^2, on c_i^2 són la meitat dels elements del cos que són quadrats, obtenim tots els elements no quadrats, ja que si $ac_i^2 = c_j^2$, a seria quadrat. ∎

Teorema 11.5.5 *Tot element d'un cos finit de característica diferent de dos és suma de dos quadrats.*

Demostració. El zero i els quadrats ja són suma de dos quadrats. Falta veure-ho per als no quadrats.

Però sabem pel lema que si a no és quadrat, llavors qualsevol altre no quadrat és de la forma ac^2, $c \in k$.

Si demostrem que existeix un no quadrat a tal que $a = x^2 + y^2$, ja ho tindrem, ja que llavors qualsevol altra no quadrat serà de la forma

$$ac^2 = (xc)^2 + (yc)^2.$$

Considerem la llista d'elements del cos $1, 2, \cdots, p-1$, on p és la característica de k. Afirmem que el primer no quadrat d'aquesta llista és suma de dos quadrats. En efecte, si s és un quadrat i $s+1$ ja no, aleshores $s+1$ és suma dels dos quadrats s i 1. Això acaba la demostració si $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, o, més generalment, si algun element de la llista anterior és no quadrat.

En el cas general podem raonar així: imaginem que cap no quadrat, diferent del zero, fos suma de dos quadrats. Llavors $L = k^{*2} \cup \{0\}$ és un subgrup additiu de k (cada element té oposat perquè estem suposant que $-1 = p-1$ és un quadrat).

Com que també és clarament tancat pel producte i pas a l'invers, és un subcos de k. En particular podem pensar de manera natural k com a espai vectorial sobre L. En particular això implica (penseu com s'escriuen els elements en una base)

$$\operatorname{card} k = (\operatorname{card} L)^m,$$

on m és la dimensió del L-espai vectorial k. Com que en qualsevol cos la igualtat $a^2 = b^2$ implica $a = \pm b$ (ja que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$), tenim

$$\operatorname{card} L = \frac{1}{2}(\operatorname{card} k + 1),$$

i la relació anterior és impossible, per paritat. ∎

Corol·lari 11.5.6 *Per a tot $a \in k^*$, amb k cos finit de característica diferent de dos, les dues aplicacions bilineals simètriques que en una mateixa base s'escriuen respectivament com*

$$\begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix} \; i \; \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

són equivalents.

Demostració. Posem a com suma de dos quadrats, $a = b^2 + c^2$. Llavors

$$\begin{pmatrix} b & \\ & c \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \\ & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix} \quad ∎$$

Teorema 11.5.7 (classificació sobre cossos finits) *Sobre un cos finit de característica diferent de dos, dues aplicacions bilineals simètriques ϕ i ϕ' són equivalents si i només si tenen el mateix rang i el mateix discriminant de la part no singular.*

Demostració. Prenent una base en el radical de ϕ i ampliant-la, i una base en el radical de ϕ' i ampliant-la, veiem que les matrius associades seran equivalents si ho són sobre la part no singular. Suposem doncs ϕ i ϕ' no singulars.

Fixem-nos de moment en ϕ. La diagonalitzem i reordenant la podem posar com

$$\phi = \begin{pmatrix} c_1^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c_r^2 & & & \\ & & & ac_1^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & ac_r^2 \end{pmatrix}$$

amb $a \in k$ no quadrat.

Per tant és equivalent a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & a & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a \end{pmatrix},$$

ja que si

$$M = \begin{pmatrix} c_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c_r & & & \\ & & & ac_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & ac_r \end{pmatrix},$$

tenim

$$M^t A M = \phi.$$

Pel corol·lari anterior A és equivalent a

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

o a

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & a \end{pmatrix},$$

segons apareguin un nombre parell o senar d'a (és a dir, segons si el discriminant és 1 o diferent de 1). ∎

11.6 Teorema de Descartes

Teorema 11.6.1 (teorema de Descartes) *El nombre d'arrels positives r^+ d'un polinomi de coeficients reals, comptades amb la seva multiplicitat, és més petit o igual que el nombre v de canvis de signe de coeficients no nuls consecutius ($r^+ \leq v$).*

Si totes les arrels del polinomi són reals, llavors $r^+ = v$. (Aquesta és la situació que es dóna en calcular el polinomi característic de les aplicacions bilineals simètriques sobre espais vectorials reals.)

Demostració.

Com que la multiplicitat de l'arrel 0 no afecta r^+ ni v, podem suposar

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0, \text{ amb } a_0 > 0.$$

Si $p(x)$ és un polinomi de grau zero, el teorema és cert. No cal, però és instructiu, mirar què passa quan el grau és 1. Llavors

$$p(x) = ax + b, \quad b > 0, \text{ arrel } x = -\frac{b}{a}$$

Per tant, si $a > 0$, $r^+ = 0, v = 0$ i el teorema és cert; i si $a < 0$, $r^+ = 1, v = 1$ i el teorema també és cert.

Suposem el teorema cert fins a polinomis de grau $n - 1$ i sigui p un polinomi de grau n. Tenim

$$r^+(p') \leq v(p'),$$

ja que el polinomi derivat p' és de grau $n - 1$.

És clar que

$$v(p') = \begin{cases} v(p) & \text{si de } a_0 \text{ al següent coeficient no nul no hi ha canvi de signe;} \\ v(p) - 1 & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Com que p' s'anul·la entre dues arrels consecutives de p,

$$r^+(p') \geq r^+(p) - 1.$$

A més, si una arrel té multiplicitat m a p, té multiplicitat $m - 1$ a p'.

Tenim doncs dos casos.

Primer cas: $v(p') = v(p)$.

Observem que $p(0) = a_0 > 0$ i que $p'(0) = a_1 \geq 0$, ja que som en el cas que entre a_0 i el primer coeficient no nul no hi ha canvi de signe. Això implica que entre $x = 0$ i la primera arrel positiva de p la funció té un màxim (surt de $x = 0$ creixent i arriba a zero) i per tant hi ha un zero de p'. Així, en aquest cas

$$r^+(p') = r^+(p),$$

i per tant

$$r^+(p) = r^+(p') \leq v(p') = v(p),$$

com volíem.

Segon cas: $v(p') = v(p) - 1$.

Llavors

$$r^+(p) \leq r^+(p') + 1 \leq v(p') + 1 = v(p) - 1 + 1 = v(p)$$

i la primera part del teorema està demostrada.

Suposem ara que totes les arrels de p són reals.

Definim $\bar{p}(x) = p(-x)$. Per la primera part tenim

$$r^+(p) \le v(p) \qquad r^-(p) = r^+(\bar{p}) \le v(\bar{p}),$$

on r^- és el número d'arrels negatives de p.

Un moment de reflexió fa veure que $v(p) + v(\bar{p}) + m \le \operatorname{grau} p$, on m és la multiplicitat del zero.

Així, tenim

$$\operatorname{grau} p = r^+(p) + r^-(p) + m \le v(p) + v(\bar{p}) + m \le \operatorname{grau} p$$

i per tant $r^+(p) = v(p)$, com volíem. ∎

Bibliografia

[1] F. Ayres, *Geometria Proyectiva.* McGraw-Hill, 1971.

[2] H.S.M. Coxeter, *Projective Geometry.* Springer Verlag, 1987.

[3] S. Dubuc, *Geometrie Plane.* Press Universitaires de France, 1971.

[4] W.T. Fishback, *Projective and Euclidean Geometry.* John Wiley & Sons, 1969.

[5] R. Hartshorne, *Foundations of Projective Geometry.* Benjamin, Nova York, 1967.

[6] D. Hilbert, *Fundamentos de la Geometria.* Textos Universitarios 5, C.S.I.C, 1991.

[7] J.W.P. Hirschfeld, *Projective Geometries over Finite Fields.* Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, segona edició, 1999.

[8] M. Kline, *Geometria Proyectiva.* El Mundo de las Matemàticas, Vol IV, Grijalbo, 1983.

[9] S. Lang, *Algebra.* Addison-Wesley, tercera edició, 1971.

[10] A. López, *Geometría Proyectiva.* Apunts manuscrits, 1980.

[11] E. Nart, *Grups abelians finitament generats i formes quadràtiques.* Publicacions UAB, 1995.

[12] A. Reventós, *Geometria Axiomàtica.* Edicions IEC, 1993.

[13] P. Samuel, *Projective Geometry.* Springer-Verlag, 1988.

[14] L.A. Santaló, *Geometrias no euclidianas.* Eudeba, Buenos Aires, 1961.

[15] L.A. Santaló, *Geometria Proyectiva.* Eudeba, Buenos Aires, 1977.

[16] J.C. Sidler, *Géométrie Projective.* InterEditions, París, 1993.

[17] C.R. Wylie, Jr. *Introduction to Projective Geometry.* McGraw-Hill, 1970.

[18] S. Xambó, *Geometria.* Edicions UPC, 1997.

Índex alfabètic