Una lectura del

Disquisitiones generales circa superficies curvas

de C. F. Gauss

Agustí Reventós

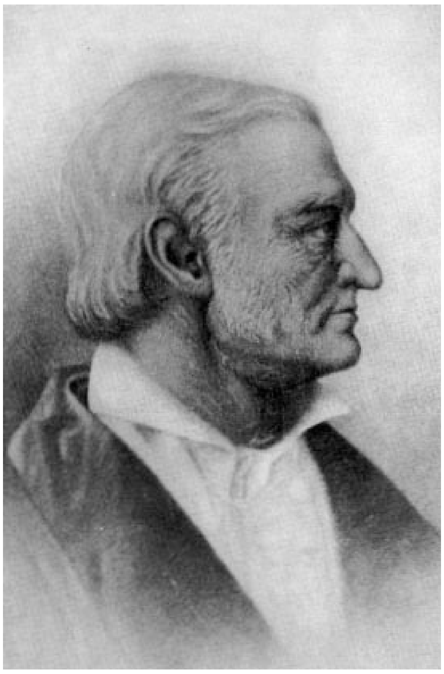
Carlos J. Rodríguez

Índex

1803

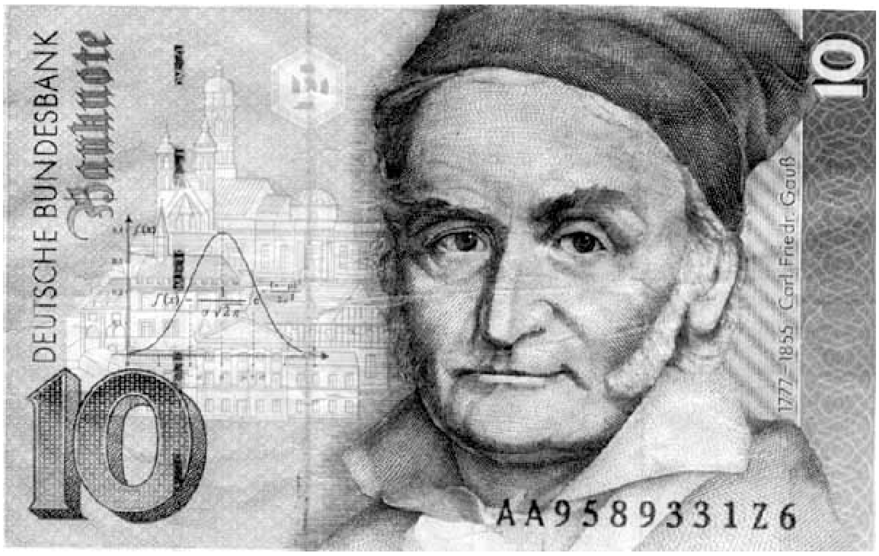
1828

1850



1854


C.F.GAUSS ∗ 1777 † 1855
DEUTSCHE
BUNDESPOST
10
H.EIDENBENZ
L.SCHNELL


DEUTSCHE BUNDESBANK
Banknote
10
1777 – 1855 Carl Friedr. Gauß
AA9589331Z6

Capítol 1

Introducció

El problema de la teoria de les paral·leles

A la definició *XXIII* dels *Elements,*[1] EUCLIDES defineix *rectes paral·leles* com aquelles rectes que, estant en un mateix pla, no es tallen. Tota la *teoria de les paral·leles* d'Euclides es basa en el cinquè postulat, que diu:

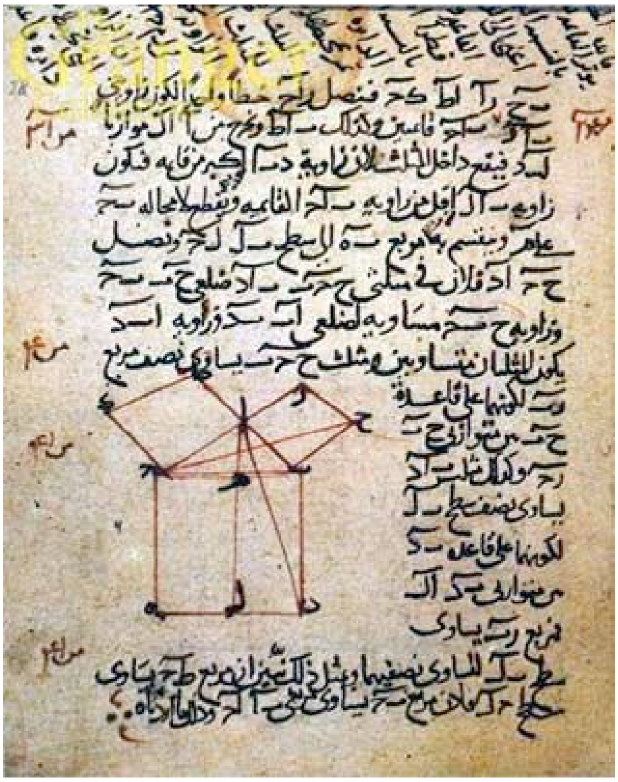
> Si una línia recta és tallada per dues línies rectes de manera que els angles interiors del mateix costat sumin menys de dos rectes, i si aquestes dues línies rectes es prolonguen indefinidament, llavors es tallen en el costat on estan aquests angles que sumen menys de dos rectes.

El *problema de la teoria de les paral·leles* consisteix a demostrar que aquest postulat és conseqüència dels altres postulats dels *Elements.* POSIDONI, ja en el segle *I* aC, va abordar el problema, equiparant rectes paral·leles amb rectes equidistants (vegeu [Bon55], pàg. 2).

El problema es va resoldre negativament a finals del segle *XIX*, dos mil anys després; és a dir, es va demostrar que el cinquè postulat no es pot deduir de la resta de postulats o, el que és el mateix, es va demostrar la seva independència.

La prova definitiva d'aquesta independència s'atribueix a BELTRAMI, el 1868, i consisteix a demostrar que els punts d'un subconjunt del pla euclidià, que anomenarem *nou pla*, interpretats com *nous punts*, i certs subconjunts d'aquest *nou pla* interpretats com *noves rectes*, satisfan tots els postulats d'Euclides excepte el cinquè (vegeu [Bel68], o la secció D.4). Aquesta nova geometria és, doncs, un exemple d'una geometria on no és vàlid el cinquè postulat. D'aquestes geometries se'n diuen geometries *no euclidianes.*

[1] Vegeu, per exemple, [DLt03] o [Euc56], pàg. 154-155.



El teorema de Pitàgores a la versió àrab dels *Elements,* obra de Naşīr al-Dīn al-Tūsī, 1258.

El cinquè postulat té diverses formulacions equivalents.[2] Dues, que seran molt importants en aquest llibre, són les següents:

1. *Per un punt exterior a una recta, en un pla donat, passa una única paral·lela.*

2. *La suma dels angles interiors d'un triangle és* $180°$*.*

De la primera formulació es dedueixen dues maneres de negar el cinquè postulat.

1 *a.* La primera consisteix a dir que per un punt exterior a una recta, en un pla donat, no hi passa cap paral·lela. Això ens porta a contradicció

[2] Vegeu, per exemple, [Rev04].

amb els altres postulats, i per tant aquesta manera de negar-lo la descartem. No obstant això, amb lleugeres modificacions, ens portaria a la geometria esfèrica.

1 *b.* La segona manera de negar-lo és dir que per un punt exterior a una recta, en un pla donat, hi passa més d'una paral·lela. Aquesta fou la manera emprada per Bolyai i Lobatxevski per descobrir la geometria hiperbòlica.

De la segona formulació, equivalentment, se'n dedueixen dues maneres de negar el cinquè postulat.

2 *a.* La primera, coneguda com la *hipòtesi de l'angle obtús*, dóna lloc a una geometria on la suma dels angles interiors d'un triangle és major que 180°. S'anomena *geometria de l'angle obtús* i és equivalent a la *segona hipòtesi* de Lambert, que explicarem a la secció següent.

2 *b.* La segona, coneguda com la *hipòtesi de l'angle agut*, dóna lloc a una geometria on la suma dels angles interiors d'un triangle és menor que 180°. S'anomena *geometria de l'angle agut* i equival a la *tercera hipòtesi* de Lambert.

Per raons que més endavant seran òbvies, la geometria de l'angle agut s'anomena també *geometría hiperbòlica.*[3]

La història de la demostració de la independència del cinquè postulat és una de les més importants en la història de les matemàtiques i en la història de les idees. Se la coneix com la *Història de les geometries no euclidianes.* En els dos mil anys que separen POSIDONI de BELTRAMI, molts matemàtics varen creure haver resolt el problema positivament.

D'aquesta història s'han escrit molts llibres i aquest que teniu entre les mans pot considerar-se'n un de més. De manera que hem de donar als lectors bones raons, a part de poder llegir Gauss en català, per haver-lo escrit. Vegeu la secció «Motivació» a la pàgina 21.

Saccheri i Lambert

Des del punt de vista històric tenen gran importància els anomenats quadrilàters de Saccheri i Lambert, ja que es van utilitzar per intentar demostrar, sense èxit, el cinquè postulat. En mirar de fer això, van fer geometria sense usar el cinquè postulat, de manera que van ser els primers a estudiar geometria absoluta.

[3] La geometria euclidiana compleix la *hipòtesi de l'angle recte*, equivalent a la *primera hipòtesi* de Lambert. És la geometria on la suma dels angles interiors d'un triangle és igual a 180°.

SACCHERI, el 1733, en la seva obra *Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universiae geometriae principia,* [Sac20], va obtenint resultats a partir dels postulats d'Euclides sense utilitzar mai el cinquè postulat. Això ho fa amb l'esperança de trobar un resultat contradictori amb la negació d'aquest postulat, la qual cosa demostraria que el postulat és cert. És a dir, deixaria de ser un postulat per passar a ser un teorema.

L'únic error que comet és considerar que certs resultats són contradictoris o falsos pel sol fet d'estar en contra de la intuïció euclidiana ordinària.

Definició. Un *quadrilàter de Saccheri* és un quadrilàter tal que els angles de la base són rectes i els costats contigus a la base són iguals.

Es pot demostrar que, en un quadrilàter de Saccheri, els angles oposats a la base són iguals i no són obtusos. Per tant, són aguts o rectes.

Saccheri rebutjava que aquests angles fossin aguts («l'hostil hipòtesi de l'angle agut») perquè aquesta hipòtesi el portava a obtenir resultats «que repugnen la naturalesa de la línia recta».

Concretament, la seva proposició *XXXIII* (vegeu [Sac20], pàg. 173), diu:

> La hipòtesi de l'angle agut és absolutament falsa; perquè repugna la naturalesa de la línia recta.

Per tant, els quatre angles havien de ser rectes, i això demostrava el cinquè postulat.

La contradicció que troba, a la demostració d'aquesta proposició, és que per un punt d'una recta s'hi poden traçar dues perpendiculars diferents; el seu error és que la recta que considera està formada per punts de l'infinit, que no són realment punts del pla.

Es quedava, així, a les portes del descobriment de la geometria no euclidiana.

LAMBERT, el 1766, a la seva obra *Theorie der Parallellinien*, [Lam86], fa raonaments semblants als de Saccheri però no cau en l'error de dir que ha demostrat el cinquè postulat.[4] De fet, sembla que ell veu possible una geometria sense el cinquè postulat, ja que escriu: «M'inclino a pensar que la hipòtesi de l'angle agut és certa en alguna esfera de radi imaginari», vegeu el punt 9 de l'*analogia*, a la secció següent, pàgina 15.

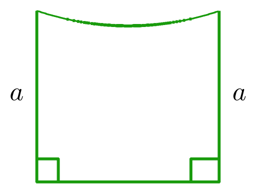
Definició. Un *quadrilàter de Lambert* és un quadrilàter amb tres angles rectes.

[4] El 1980 LAPTEV va afirmar que Lambert també va arribar a contradicció. Vegeu [Ros88], pàg. 101.

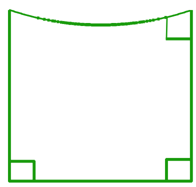
La primera hipòtesi de Lambert consisteix a suposar que el quart angle és recte. Llavors els costats oposats són congruents dos a dos i el quadrilàter és un rectangle. Estem en el cas de la geometria euclidiana.

La segona hipòtesi de Lambert consisteix a suposar que el quart angle és obtús. Això el porta a contradicció.[5]

La tercera hipòtesi de Lambert consisteix a suposar que el quart angle és agut. Es compleix, llavors, que cada costat adjacent a l'angle agut és més gran o igual que el seu oposat. A diferència de Saccheri, Lambert no va publicar la seva obra.



Saccheri



Lambert

Com a conseqüència d'aquests treballs, la geometria que s'obté en acceptar com a certa la negació del cinquè postulat se la coneix també com a *geometria de l'angle agut.* També es parla de *geometria hiperbòlica,* per motius que es veuran més endavant, o simplement de *geometria no euclidiana.*

L'analogia de Lambert

L'any 1766, en la seva obra *Theorie der Parallellinien* abans esmentada, Lambert va escriure (vegeu [Lam86]):

1. Es fàcil veure que, assumint la tercera hipòtesi, es pot anar més lluny i deduir conseqüències anàlogues, però diametralment oposades a les que es dedueixen de la segona hipòtesi. Però, per molt que es busqui en les conseqüències de la tercera hipòtesi, no hi aflora cap contradicció. Tot això ens fa veure clar que no és fàcil refutar aquesta hipòtesi. Citarem algunes conseqüències sense considerar de quina manera es poden estendre *mutatis mutandi* sota la segona hipòtesi.

[5] La proposició *XVII* d'Euclides ja demostra que la segona hipòtesi de Lambert no es pot donar. Però la seva prova i les de Lambert i Saccheri implícitament assumeixen que la recta és infinita. Si no suposem això, s'obté la geometria el·líptica. Vegeu [Dou70], pàg. 388, i [Nol06], pàg. 35.

2. La més impactant d'aquestes conseqüències és que, *sota la tercera hipòtesi, hauríem de tenir una mesura absoluta de longitud per a cada línia, d'àrea per a cada superfície i de volum per a cada espai físic.* Això refuta una afirmació que algú no versat podria prendre com un axioma de la geometria, perquè fins ara ningú ha dubtat de la no-existència d'una mesura absoluta. Hi ha quelcom d'exquisit en aquesta conseqüència, quelcom pel que desitjaríem que la tercera hipòtesi fos vertadera!

3. Malgrat aquest avantatge, no desitgem que sigui així, perquè portaria incomptables inconvenients. Les taules trigonomètriques serien immenses, no hi hauria figures semblants i proporcionals, cap figura es podria imaginar si no fos amb les seves magnituds absolutes, els astrònoms tindrien temps difícils, etc.

4. Però tots aquests arguments estan dictats per amor i odi, cosa que no ha de succeir en geometria o ciència.

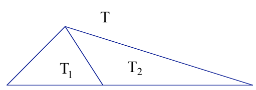
5. Tornem a la tercera hipòtesi. Com hem vist, sota aquesta hipòtesi la suma dels tres angles de cada triangle és menor que 180°. Però la diferència fins a 180° creix amb l'àrea del triangle; es pot expressar així: si un dels triangles té àrea més gran que l'altre, llavors el primer té una suma d'angles més petita que el segon.

6. Afegim justament la següent observació: teoremes completament anàlegs es compleixen sota la segona hipòtesi, excepte perquè la suma dels angles de cada triangle és major que 180°. L'excés és sempre proporcional a l'àrea del triangle.[6]

[6] Observem que Lambert s'adona que, per a la hipòtesi de l'angle agut, tan sols ha demostrat la monotonia, és a dir, que l'àrea creix amb el defecte, però que no és clar que creixi linealment amb el defecte.

Ja Saccheri havia usat que el defecte és additiu per a provar que existeixen rectes asimptòtiques (vegeu [Sac20], proposició *XXIV*, pàg. 125). L'argument de Lambert per a la monotonia es basa en l'observació que tant el defecte com l'àrea són funcions additives per a regions triangulades del pla.

Si tenim, com a la figura



$T = T_1 \cup T_2$, llavors és clar que àrea T = àrea T_1 + àrea T_2 i defecte T = defecte T_1 + defecte T_2. D'aquesta observació Lambert dedueix la monotonia entre l'àrea i el defecte angular (vegeu els articles 81 i 82, pàg. 201 i 202, de [ES95]). La linealitat, per a la

7. Pensem que és extraordinari que la segona hipòtesi es compleixi si en lloc d'un triangle pla en prenem un d'esfèric, perquè la seva suma d'angles és més gran que 180° i l'excés és també proporcional a l'àrea del triangle.

8. El que ens impressiona encara més és que *el que hem dit sobre triangles esfèrics es pot provar independentment de la dificultat presentada per les rectes paral·leles i assumint únicament l'axioma que cada pla a través del seu centre divideix l'esfera en dues parts iguals.*[7]

9. M'inclino a pensar que *la tercera hipòtesi és certa en alguna esfera de radi imaginari.*[8] Almenys això explicaria el fet que, contràriament al que succeeix amb la segona hipòtesi, la tercera ha resistit refutacions.

En els nou paràgrafs anteriors, LAMBERT va formular el que hem anomenat l'*analogia* (vegeu [ES95], pàg. 200-203, i [Ros88], pàg. 100).

Poca atenció s'ha dedicat en la història de les matemàtiques a aquestes línies. En aquest llibre demostrarem que l'*analogia* és el mètode de descobriment de *la geometria no euclidiana* i la clau per a entendre el *Disquisitiones generales circa supefícies curvas.*[9]

Tots els resultats vàlids en la geometria de l'angle agut que va mencionar GAUSS en les seves cartes es dedueixen quasi immediatament de l'*analogia.* GAUSS sabia que l'aplicació formal de l'*analogia* no era una demostració; TAURINUS, un matemàtic aficionat que va publicar dos textos[10] sobre el problema, basats en el desenvolupament formal de l'*analogia,* fou ben ponderat per GAUSS, com es desprèn de l'extensa carta que li va enviar (vegeu la pàgina 103).

geometria de l'angle agut és també certa, però la demostració rigorosa va trigar encara un temps, fins que varen aparèixer els treballs de Bolyai i Lobatxevski.

Per al cas de l'esfera, l'argument és similar, si parlem d'excés en lloc de defecte. La demostració de Harriot demostra que la relació entre l'àrea i el defecte no tan sols és monòtona sinó que és lineal. Si el defecte angular és zero, es tracta de la geometria euclidiana.

[7] La cursiva és nostra. Volem remarcar que LAMBERT està dient que les esferes de l'espai hiperbòlic tenen la geometria de l'esfera euclidiana. Un pas previ per a poder parlar de la paraesfera, que és la superfície que s'obté com a límit d'esferes que passen per un mateix punt quan el centre tendeix a infinit (vegeu la pàgina 112).

[8] La cursiva és nostra.

[9] D'ara endavant ens referirem al *Disquisitiones generales circa superficies curvas* simplement com el *Disquisicions.* Recordem que disquisició vol dir recerca minuciosa sobre alguna qüestió.

[10] El primer text, publicat el 1825, es titula *Theorie der Parallellinien*, i el segon, publicat el 1826, es titula *Geometriae Prima Elementa* (vegeu [ES95], pàg. 255-286).

El teorema que avui dia coneixem com a *teorema de Gauss-Bonnet*, que es pot considerar com un dels resultats fundacionals de la geometria diferencial, pot descobrir-se tractant de generalitzar el teorema sobre la proporcionalitat de l'àrea d'un triangle i la deficiència angular d'aquest, a triangles sobre una superfície qualsevol.

L'estudi d'aquesta proporcionalitat en el cas particular de l'esfera (l'àrea d'un triangle esfèric és proporcional a l'excés angular) porta a la bella demostració de Harriot (vegeu la secció E.4), la qual només depèn del fet que un pla pel centre d'una esfera la divideix en dues parts congruents, i en conseqüència és un resultat absolut que val, tant en l'espai euclidià com en el no euclidià. Cosa que LAMBERT diu precisament en el número 8 de l'*analogia*.

Aquest fet va portar WACHTER a descobrir, el 1816, la paraesfera de Gauss (vegeu [Ros88], pàg. 217, [Stä01], o [Bon55], pàg. 63). Aquesta superfície equival a la superfície F de J. Bolyai (vegeu la pàgina 112), o a l'horoesfera de Lobatxevski.

El programa analític de Lambert

A l'article 11 de l'obra de Lambert mencionada hi podem llegir els dos paràgrafs següents, que estableixen el que anomenarem *programa analític de Lambert*, programa establert aquí per LAMBERT per a poder resoldre el problema de la independència del cinquè postulat[11] (vegeu [ES95], pàg. 162, o [Dou70], pàg. 401):

> La qüestió és: es pot deduir correctament [el cinquè postulat] a partir dels postulats d'Euclides junt amb els altres axiomes? O, si aquests no fossin suficients, es poden donar altres postulats o altres axiomes o ambdós que tinguessin la mateixa evidència que els euclidians i a partir dels quals l'undècim [el cinquè] axioma es pogués provar?
>
> Per a la primera part d'aquesta qüestió es pot fer abstracció de tot el que hem anomenat prèviament *representació material*. I, com que els postulats d'Euclides i la resta d'axiomes estan ja expressats en paraules, es pot i s'ha d'exigir que en la prova mai ens recolzem en cap representació material, sinó que hem de fer la prova d'una manera absolutament simbòlica. Des d'aquest punt de vista, els postulats d'Euclides són com moltes equacions algebraiques,

[11] Aquest *programa analític* és, de fet, un programa lògic. Recordem que LAMBERT i SACCHERI són els únics que, entre els que estudiaren el cinquè postulat, publicaren també tractats de lògica.

> donades prèviament, i que s'han de resoldre per a $x, y, z, \ldots$, sense mirar la matèria que representen.[12]

Aquest programa només es va completar el 1899, quan HILBERT va fer la seva revisió dels *Elements,* i va publicar els famosos *Grundlagen der Geometrie* (vegeu [Hil91]); però és clarament l'antecedent del programa de fonamentació de Hilbert.

LAMBERT és conscient que només l'aritmetització de la geometria donaria la solució definitiva. Els fets li varen donar la raó. HILBERT diu textualment (vegeu [Lau99] , pàg. 319),

> *L'aritmetizació de la geometria* és el resultat de les modernes investigacions en geometria no euclidiana, les quals es focalitzen sobre una construcció lògicament rigorosa i sobre la més directa i completament impecable introducció de nombres en geometria.

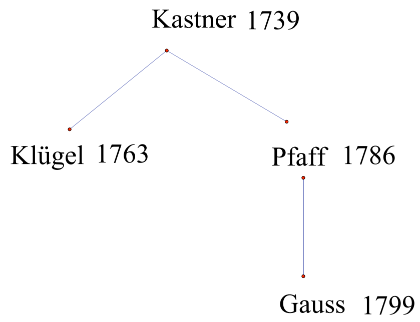
HILBERT és la persona que redueix la consistència de la geometria euclidiana a la consistència de l'aritmètica, i BELTRAMI redueix la consistència de la geometria hiperbòlica a la consistència de la geometria euclidiana.

Influència de LAMBERT sobre GAUSS

GAUSS coneixia el treball de Lambert.[13] A més, existeix correspondència entre LAMBERT i KLÜGEL (vegeu [ES95], pàg. 323), i KLÜGEL era «tiet» de GAUSS, ja que l'«avi» de GAUSS, KÄSTNER, fou el «pare» de KLÜGEL. Representem en un esquema els directors de tesi i els anys en què es van llegir.

[12] DOU a [Dou70] fa un comentari molt interessant sobre aquestes paraules de Lambert. El segon autor agraeix al professor Albert Dou haver-li cridat l'atenció sobre aquestes paraules de Lambert i haver-li facilitat els seus arxius personals sobre la història de les geometries no euclidianes.

[13] Està ben establert que GAUSS va consultar aquesta obra de Lambert a Göttingen, dos cops, una l'any 1795 i l'altre l'any 1797. Vegeu [Gra79a], pàg. 77, i [Gra79b], pàg. 241, o també [Dun04], pàg. 398.



KLÜGEL i PFAFF foren companys a Göttigen.[14] La tesi de Klügel és sobre la *teoria de les paral·leles*, i està justament dedicada a revisar les diverses proves que s'havien donat del cinquè postulat, incloent-hi el treball de Saccheri (vegeu [Klü63]).

KLÜGEL és la primera persona que creu en la independència del cinquè postulat (vegeu [Kli72], pàg. 867); afirma que només l'experiència està en la base d'acceptació d'aquest, i remarca que SACCHERI ha descobert resultats geomètrics que contradiuen l'experiència però no els axiomes. Aquest treball va motivar el treball de Lambert.

El *Disquisicions*

Els comentaris de DOMBROWSKI al *Disquisicions*, [Dom79], acaben amb aquestes paraules.

> És la culminació de més de quinze anys[15] de reflexió i treball sobre la geometria de superfícies, i al mateix temps una obertura a noves perspectives,

[14] Posteriorment GAUSS va fer amistat amb Pfaff i fins i tot va llogar una habitació a casa seva.

[15] El treballs de topografia varen fer que GAUSS s'interessés, ja a partir de 1812, per l'estudi de les geodèsiques dels el·lipsoides de revolució i l'existència de representacions conformes de superfícies. El 1816 suggereix un problema per a posar com a competició en una nova revista. Per diversos motius (vegeu [Dom79], pàg. 127), no es publica l'enunciat i la resposta del mateix GAUSS fins a 1825 (ell envia el treball amb data 11 de desembre de 1822), a *Astronomischen Abhandlungen* amb el títol ≪Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den Kleinsten Theilen ähnlich wird.≫ (Una solució general al problema d'aplicar una superfície donada sobre una altra superfície de manera que la imatge i la superfície aplicada siguin infinitessimalment similars). Vegeu [Gau27], vol. IV, pàg, 191 – 216. .

> quasi sense parangó en la literatura matemàtica per la seva densitat i bellesa de presentació, així com per la originalitat dels seus continguts i la força estimulant de les seves idees.

I és que GAUSS va escriure el *Disquisicions* amb molta cura. Justament el 21 de novembre de 1825, quan redactava la primera versió, va escriure a SCHUMACHER (vegeu [Gau27], vol 8, pàg. 400),[16]

> Recentment he represès de nou una part de les investigacions generals sobre superfícies corbes, les quals han de formar la base del meu projectat assaig sobre geodèsia avançada. És un tema tan ric com difícil, i m'aparta de qualsevol altra cosa. Desafortunadament, veig que haig d'anar molt enrere en l'exposició, perquè fins i tot el que és conegut s'ha de desenvolupar d'una manera diferent, adequada a les noves investigacions. Totes les arrels de l'arbre s'han de seguir fins als seus finals i *alguns d'aquests esforços em costen setmanes de treball esgotador*. Molts pertanyen a la *Geometria situs*, un camp gairebé completament incultivat fins ara.

En aquest llibre analitzem el *Disquisicions* a la llum de les dues hipòtesis següents:

1. GAUSS fou conscient que la solució definitiva de la prova de la independència de la hipòtesi de l'angle agut no es podia aconseguir si es continuava atribuint als punts, rectes i plans de la geometria absoluta, la representació material recollida en els dibuixos. Per això GAUSS va adoptar el *programa analític* de Lambert com a mètode per a resoldre definitivament el problema de la teoria de les paral·leles.

2. Pensem que es va proposar descobrir una superfície que jugués el paper de l'esfera de radi imaginari que LAMBERT havia suggerit a *l'analogia*.

Aquest programa passa per fer, primerament, un desenvolupament completament analític de la geometria esfèrica, amb la idea de poder generalitzar, posteriorment, els resultats i mètodes obtinguts de tal manera que es

Aquest article porta el subtítol «Ab his via sternitur ad maiora», (camí preparat per a coses més grans), a imitació de Newton, que a *De quadratura curvarum*, preludi del càlcul de fluxions, va escriure «et his principiis via ad maiora». El *Disquisicions* (1827) i els dos articles sobre geodèsia avançada, «Untersuchungen über Gegenstände der Höhern Geodaesie», *I* (1844) i *II* (1847), ([Gau27], vol. IV, pàg, $261-300$, i $303-340$ respectivament), representen etapes en aquest camí.

[16] Durant una estada de SCHUMACHER a Göttingen, durant el curs 1808-1809, va portar un bloc de notes que ell mateix va anomenar *Gaussiana* on s'han pogut trobar comentaris i opinions de GAUSS sobre la teoria de les paral·leles. SCHUMACHER era astrònom, alumne i amic de GAUSS, amb qui es cartejava gairebé setmanalment.

puguin aplicar a l'estudi de la geometria de qualsevol superfície corba. El *Disquisicions* és l'intent de GAUSS en aquesta direcció.

El teorema *VI* de l'article 2 del *Disquisicions*, que és intranscendent a la versió de 1827, no ho és en la versió no publicada de 1825,[17] on juga un paper fonamental (vegeu [Dom79], pàg. 101, o [Gau27], 8, pàg. 416).[18]

A la reconstrucció que fem de la geometria esfèrica, a l'apèndix E, veiem que tota la trigonometria esfèrica es dedueix analíticament del teorema *VI* de l'article 2 del *Disquisicions*. Provem, també, que aquest teorema es pot deduir algebraicament d'una manera bastant elemental, i que GAUSS tenia tots els elements per a desenvolupar-lo. De passada, en aquesta secció s'aritmetitza completament la geometria esfèrica, on val la hipòtesi de l'angle obtús. Això reforça encara més la idea de buscar una superfície anàloga a l'esfèrica, però on valgui la hipòtesi de l'angle agut: l'esfera imaginària de Lambert.

Però, quina és la superfície que representa aquesta esfera imaginària? Totes les pistes de l'aplicació formal de l'*analogia* porten a l'hiperboloide de dos fulls. Però, quins són els seus triangles i quines les seves diferències angulars?

Aquesta devia ser la pregunta que va conduir GAUSS a escriure el *Disquisicions*. De passada, els seus descobriments tenien aplicacions a la *geodèsia*, i el *Disquisicions* podia considerar-se també com el primer capítol d'un text sobre *geodèsia avançada*, com el mateix GAUSS va dir en la seva carta a SCHUMACHER del 21 de novembre de 1825, que hem comentat.

Si GAUSS hagués entès, com RIEMANN sí que va entendre, que $\mathbb{R}^2$ es podia *corbar* en ell mateix, sense necessitat de encaixar-lo corbat a $\mathbb{R}^3$, hauria pogut desenvolupar la geometria corresponent a l'element de longitud hiperbòlic. Aquest element de longitud s'obté transformant l'element lineal circular de l'esfera per l'*analogia*. TAURINUS havia avançat molt aquest treball en els seus escrits de 1825 i 1826 sobre la *geometria logaritme–esfèrica* (vegeu [ES95] pág. 255-286 i [Rod05]). Tan sols s'havia de dir que els triangles als quals TAURINUS es referia en els seus treballs eren els triangles geodèsics de la geometria de l'element lineal hiperbòlic.

Per què GAUSS no va donar aquest pas? Creiem que l'explicació més raonable és que ell buscava una superfície a $\mathbb{R}^3$ amb element lineal hiperbòlic; aquesta superfície seria la buscada *esfera imaginària* de Lambert.

[17] Podeu trobar aquesta versió a [Gau27]. N'hem fet un breu resum a l'apèndix B.

[18] Les paraules que va escriure GAUSS a la versió de 1825 foren: «Afegim un teorema més, que pel que sabem, no ha aparegut abans, i que es pot usar freqüentment amb profit.»

Tractant de respondre aquestes preguntes, GAUSS es va trobar amb la geometria intrínseca de superfícies, descobriment que magistralment va resumir en el *Disquisicions*.

Motivació

La principal raó que ens ha portat a presentar una traducció del *Disquisicions* comentada és que les dues hipòtesis que acabem d'establir permeten fer veure el lligam tan estret que hi ha entre el *Disquisicions* i el descobriment de la geometria no euclidiana, i el paper que va jugar, tant en aquest descobriment com en el mateix *Disquisicions*, l'*Analogia* de Lambert.

La lectura que resulta del *Disquisicions* feta sota aquestes hipòtesis també ens permet veure, amb uns altres ulls, les obres de J. Bolyai i Lobatxevski, que varen aconseguir organitzar deductivament i demostrar a la manera dels *Elements* els resultats de la nova geometria.[19]

En particular, donem respostes satisfactòries als següents interrogants històrics que la història, tal com ha estat explicada fins ara, no ha respost:

1. Per què el jove J. Bolyai es va avançar a Gauss?

2. Per què Gauss no va tornar a treballar en la teoria de les paral·leles després de llegir el treball de J. Bolyai?

3. Per què hi ha tantes coincidències entre les obres de J. Bolyai i Lobatxevski?

4. Per què va caldre esperar trenta-vuit anys, fins a l'assaig de Beltrami, de 1868, per a dilucidar la consistència de la geometria hiperbòlica descoberta per J. BOLYAI i LOBATXEVSKI al voltant de 1830?

Cap d'aquestes preguntes té avui una resposta satisfactòria.

Hem mirat de respondre a les dues primeres preguntes a la pàgina 116.

La resposta a la tercera pregunta és, segons la nostra opinió, que tots dos estaven guiats per l'*Analogia* de LAMBERT, que els deia quins resultats havien de demostrar.

I la resposta a la quarta és que no va ser fins a 1860 que es va fer pública, després de la seva mort, la bona opinió de GAUSS sobre els treballs de J.

[19] Els *Elements,* encara en el segle XIX, eren un ideal com exemple d'exposició en matemàtiques. L'anàlisi, sistematització del mètode dels infinitèsims, només va adquirir un estatus semblant a finals del mateix segle, a partir dels treballs de fonamentació de Dedekind i Weierstrass.

Bolyai i Lobatxevski. La gran autoritat científica de Gauss va propiciar la traducció i divulgació d'aquests treballs. Beltrami va trobar un element de longitud hiperbòlic on la geometria no euclidiana tenia una interpretació euclidiana molt senzilla (vegeu la secció D.4).

La història estàndar simplificada diu que Gauss va descobrir la geometria hiperbòlica i que les seves idees passaren a J. Bolyai a través del seu pare F. Bolyai, que havia estat amic de Gauss,[20] i a Lobatxevski a través de Bartels, que havia estat professor de Gauss abans de 1810 a Göttingen, i professor de Lobatxevski a Kazan, durant la dècada de 1810-1820.

Una nova versió d'aquesta història, més ajustada als fets, mostra que aquesta influència no va existir.

En el present treball donem evidències que Lambert fou la font comuna d'inspiració tant de Gauss, com de Lobatxevski i J. Bolyai.

Organització

La primera part d'aquest llibre està dedicat a la traducció del *Disquisicions*, que hem procurat fer més entenedora amb l'ajut d'unes quantes notes a peu de pàgina.

Hem usat essencialment la versió llatina[21] original de Gauss reproduïda per P. Dombrowski a [Dom79], així com la versió anglesa[22] que allà mateix apareix i la versió francesa de M. E. Roger, [Gau70].

La segona part del llibre consta de nou apèndixs. Els tres primers, de caràcter històric i la resta estan escrits amb el doble propòsit de completar

[20] Gauss i F. Bolyai varen ser molt bons amics quan eren tots dos estudiants a Göttingen. Es conserven força cartes on es manifesta aquesta amistat. Es veuen per últim cop el 25 de maig de 1799 a Brunsvic, en un passatge recordat posteriorment per F. Bolyai (vegeu [Dun04], pàg. 31):

> El vaig acompanyar el matí del 25 de maig de 1799 al cim d'una petita muntanya prop de Brunsvic. El sentiment que ens vèiem per darrer cop és indescriptible. Fins i tot una paraula sobre les llàgrimes és ineficaç. El Llibre del Futur és tancat. Llavors vàrem partir amb una encaixada de comiat, quasi sense paraules, amb la diferència que ell, portat pels àngels del temple de la fama i la glòria, retornava a Brunsvic i jo, molt menys digne, no obstant amb bona consciència, tornava a Göttingen, [...].

[21] L'ajut d'Albert Dou en aquest treball, que hem comentat abans, s'estén també a alguns detalls del llatí.

[22] Assenyalem de passada que, a la fonamental fórmula de la curvatura del final de l'article 11 d'aquesta versió anglesa, hi ha un petit error tipogràfic.

detalls i ser útils per a la docència de la geometria diferencial.[23]

A l'apèndix A comentem, un per un, els vint-i-nou articles del *Disquisicions*, tenint en compte el posterior desenvolupament de la geometria diferencial i la influència que aquests articles hi han tingut.

A l'apèndix B fem un breu resum de la versió preliminar del *Disquisicions* de 1825, essencialment per remarcar que els camins per a descobrir i els camins per a demostrar són oposats.

A l'apèndix C reproduïm passatges de totes les cartes en les quals Gauss parla de geometria no euclidiana. Volem remarcar el gran lligam que hi ha entre el *Disquisicions* i la geometria no euclidiana. Aquestes cartes van de 1799 a 1832, i el *Disquisicions* és de 1827.

A l'apèndix D comentem el treball de J. Bolyai, per nosaltres la persona que frustra el camí emprès per Gauss en el seu estudi de la teoria de les paral·leles. Expliquem què va veure Gauss a l'*Apèndix* de J. Bolyai que el va fer donar per acabat el problema de la teoria de les paral·leles (vegeu el peu de la pàgina 116).

A la secció E.3 de l'apèndix E calculem l'àrea de l'esfera; i a la secció E.4 donem la demostració de Harriot, que abans hem comentat, de la fórmula de l'àrea d'un triangle esfèric. A la secció E.5 obtenim analíticament les fórmules de la trigonometria esfèrica, totes conseqüència del teorema *VI* de l'article 2 del *Disquisicions*. Finalment, a la secció E.6, calculem la derivada de l'angle d'inclinació per a triangles esfèrics, ja que la generalització d'quest càlcul a superfícies arbitràries va portar Gauss al teorema del defecte.[24]

L'apèndix F està dedicat a calcular la derivada de l'angle d'inclinació sobre una superfície arbitrària. Ho fem, semblantment a Gauss, a partir de les equacions d'Euler-Lagrange, aplicades a una geodèsica que talla en un cert angle (variable) les línies coordenades. Obtenim la mateixa fórmula que obté Gauss en l'article 19 del *Disquisicions*, fórmula que es pot considerar com la versió infinitesimal del teorema del defecte.

A l'apèndix G explicitem com, a partir del teorema egregi i del càlcul de l'angle d'inclinació, obtenim el teorema del defecte. Informalment, passem del teorema egregi al teorema del defecte integrant dos cops, i per tant passem del teorema del defecte al teorema egregi derivant dos cops.

L'apèndix H està dedicat al desenvolupament formal de la geometria

[23]Durant la revisió de les proves d'impremta hem llegit la recensió que fa Osserman a *Notices of the Ams*, vol. 52, núm. 9, octubre de 2005, pàg. 1030, del llibre de Gray [Gra04], on precisament destaca la importància de la perspectiva històrica de la geometria en el debat sobre el seu ensenyament. Pensem que el nostre treball és una contribució positiva en aquesta direcció.

[24]És el teorema de Gauss-Bonnet per a triangles geodèsics.

analítica hiperbòlica seguint l'*analogia,* tal com ho va fer TAURINUS a les seves obres de 1825 i 1826 citades al peu de la pàgina 15; veiem la gran utilitat que té el teorema *VI* de l'article 2 del *Disquisicions* per a estudiar la natura dels triangles hiperbòlics de la hipotètica esfera imaginària. A la secció H.2 estudiem la pseudoesfera, com la superfície de revolució de la tractriu, i veiem que és isomètrica a un tros del pla hiperbòlic. A la secció H.3 veiem que l'esfera imaginària és, simplement, l'esfera de l'espai de Minkowski.

Com que hem donat una demostració analítica de les fórmules de la trigonometria esfèrica, però hem comentat que aquestes es poden deduir a partir del dibuix escaient, hem afegit l'apèndix *I*, escrit per Joan Girbau, a qui agraïm la seva amabilitat. En aquest apèndix es dóna una demostració directa de les fórmules de la trigonometria esfèrica i hiperbòlica basant-se, en el primer cas, en el dibuix i, en el segon, en el model de l'hiperboloide de la geometria no euclidiana.

Volem, finalment, agrair a Carles Casacuberta, president de la Societat Catalana de Matemàtiques, l'ajut que ens ha brindat. La invitació que la Societat ens va fer a impartir la conferència de clausura del curs 2003-2004[25] i els ànims que ens va donar a seguir en la nostra feina ens han ajudat a tirar endavant el nostre projecte.

També agraïm a Carles Currás la lectura detallada que va fer d'una primera versió d'aquest text. I en general a tots els geòmetres del Departament, amb qui hem compartit xerrades i punts de vista sobre els temes del present treball: Judit Abardia, Carlos Arturo Escudero, Eduard Gallego, Joan Girbau, Gregori Guasp, Mònica Manjarin, David Marín, Marcel Nicolau, Joan Porti, Jerome Scherer i Gil Solanes.

Finalment, voldríem emmarcar el nostre treball dintre dels actes de commemoració del 150 aniversari de la mort de Gauss, que va néixer el 30 d'abril de 1777 i va morir el 23 de febrer de 1855.

[25] «L'esfera imaginària», Institut d'Estudis Catalans, 14 de juny de 2004.

Capítol 2

La traducció

Disquisicions generals[1]

sobre superfícies corbes

C. F. Gauss

1

Disquisicions, en les quals s'han de considerar les direccions de diverses línies rectes a l'espai, arriben a un alt grau de claredat i simplicitat si emprem, com a auxiliar, una esfera de radi $= 1$[2] i centre arbitrari, i suposem que els diferents punts de l'esfera representen direccions de línies rectes paral·leles als radis que acaben en aquests punts. Com que la posició de tot punt de l'espai està determinada per tres coordenades, les distàncies des del punt a tres plans fixats que són perpendiculars entre ells, és necessari considerar, abans de tot, les direccions dels eixos perpendiculars a aquests plans: denotarem per $(1), (2), (3)$ els punts de l'esfera que representen aquestes direccions; la distància[3] des de qualsevol d'aquests punts a un dels altres dos

[1] A la pàgina següent reproduïm la primera pàgina d'aquest treball, tal com apareix al volum *IV* dels *Werke*. Vegeu [Gau28].

[2] Hem procurat, en aquesta traducció, mantenir la forma de la versió llatina original de Gauss. Hem mantingut, doncs, l'expressió «radi=1».

[3] Sobre l'esfera.

DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA SUPERFICIES CURVAS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE OBLATAE D. VIII. OCTOBR. MDCCCXXVII.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VI.
Gottingae MDCCCXXVIII.

36

serà un quadrant. Suposarem que les direccions dels eixos són aquelles en què les corresponents coordenades augmenten.[4]

2

No serà pas inútil de recordar aquí algunes proposicions que s'utilitzen freqüentment en qüestions d'aquest tipus.

I. L'angle entre dues rectes que es tallen està mesurat per l'arc entre els punts de l'esfera que corresponen a les direccions d'aquestes rectes.[5]

II. L'orientació de qualsevol pla es pot representar pel cercle màxim de l'esfera, el pla del qual és paral·lel al pla donat.

III. L'angle entre dos plans és igual a l'angle esfèric entre els cercles màxims que els representen, i, conseqüentment, està també mesurat per l'arc interceptat entre els pols d'aquests cercles màxims. I d'això se segueix que la inclinació d'una recta respecte a un pla està mesurada per l'arc del cercle màxim que va perpendicularment des del punt que correspon a la direcció de la recta fins al cercle màxim que representa l'orientació del pla.[6]

IV. Denotant per $x, y, z; x', y', z'$ les coordenades de dos punts, r la distància entre ells, i L el punt de l'esfera que representa la direcció de la recta que va del primer al segon punt, tindrem

$$\begin{aligned} x' &= x + r\cos(1)L\,, \\ y' &= y + r\cos(2)L\,, \\ z' &= z + r\cos(3)L\,. \end{aligned}$$

V. D'aquí es dedueix fàcilment que tenim, de manera general,

$$\cos^2(1)L + \cos^2(2)L + \cos^2(3)L = 1$$

i també, si L' denota qualsevol altre punt de l'esfera,[7]

$$\cos(1)L \cdot \cos(1)L' + \cos(2)L \cdot \cos(2)L' + \cos(3)L \cdot \cos(3)L' = \cos LL'\,.$$

[4] Gauss es compromet des del primer paràgraf amb l'enfocament analític. Dedica els dos primers articles a explicar succintament, però amb entenedora precisió, la geometria de rectes i plans a l'espai euclidià, incloent-hi la delicada qüestió de l'orientació.

[5] Pensa en rectes orientades. De fet hi ha dos arcs de cercle màxim que uneixen dos punts sobre l'esfera, però es refereix al que no excedeix de π.

[6] Pensa en plans orientats, és a dir, per a cada pla elegeix una de les dues normals.

[7] Observem que aquesta fórmula ens diu que el producte escalar de dos vectors unitaris L i L' dóna el cosinus de l'angle que formen.

VI. TEOREMA.[8] *Si L, L', L'', L''' denoten quatre punts de l'esfera, i A denota l'angle entre els arcs LL', $L''L'''$ en el seu punt d'intersecció, tindrem*

$$\cos LL'' \cdot \cos L'L''' - \cos LL''' \cdot \cos L'L'' = \sin LL' \cdot \sin L''L''' \cdot \cos A$$

Demostració. Denotem també per A el mateix punt d'intersecció, i posem

$$AL = t\,, \quad AL' = t', \quad AL'' = t'', \quad AL''' = t'''$$

Llavors tindrem[9]

$$\begin{aligned}
\cos LL'' &= \cos t \cdot \cos t'' + \sin t \cdot \sin t'' \cdot \cos A \\
\cos L'L''' &= \cos t' \cdot \cos t''' + \sin t' \cdot \sin t''' \cdot \cos A \\
\cos LL''' &= \cos t \cdot \cos t''' + \sin t \cdot \sin t''' \cdot \cos A \\
\cos L'L'' &= \cos t' \cdot \cos t'' + \sin t' \cdot \sin t'' \cdot \cos A
\end{aligned}$$

i per tant

$$\begin{aligned}
\cos LL'' &\cdot \cos L'L''' - \cos LL''' \cdot \cos L'L'' \\
&= \cos A\,(\cos t \cos t'' \sin t' \sin t''' + \cos t' \cos t''' \sin t \sin t'' \\
&\quad - \cos t \cos t''' \sin t' \sin t'' - \cos t' \cos t'' \sin t \sin t''') \\
&= \cos A\,(\cos t \sin t' - \sin t \cos t')\,(\cos t'' \sin t''' - \sin t'' \cos t''') \\
&= \cos A \cdot \sin(t' - t) \cdot \sin(t''' - t'') \\
&= \cos A \cdot \sin LL' \cdot \sin L''L'''\,.
\end{aligned}$$

[8]En aquest teorema GAUSS resol un problema bàsic de trigonometria esfèrica: trobar l'angle entre dos segments esfèrics; la seva prova es basa en una de les dues lleis de cosinus de la trigonometria esfèrica. La seva demostració és *visual*; és a dir, es recolza en la imatge que el lector té de la configuració geomètrica; aquest comentari, i similars, són importants des del punt de vista que estem suposant que GAUSS està desenvolupant el programa analític de Lambert, i els arguments visuals s'han d'evitar quan es refereixen a representacions materials directes dels conceptes matemàtics.

La configuració geomètrica d'aquest teorema és molt important en astronomia; i entre els pocs dibuixos que es troben en les obres de Gauss, el d'aquesta configuració és el més freqüent (vegeu el dibuix de la configuració de Menelau a la pàgina 141). A l'apèndix E demostrarem com pot deduir-se tota la trigonometria esfèrica a partir d'aquest teorema i en donarem una prova completament algebraica. Aquest comentari explica per què GAUSS, en la versió del *Disquisicions* de 1825, pondera tant aquest resultat (vegeu les obres completes de GAUSS, [Gau27], el treball de DOMBROWSKI, [Dom79] , pàg. 101, o l'apèndix B, pàgina 96).

[9]Usa fórmules de la trigonometria esfèrica, quan realment no li hauria calgut. Confronteu l'apèndix E.

Però com que hi ha, per a cada cercle màxim, dues branques que surten del punt A, aquestes dues branques formen en aquest punt dos angles que sumen $180^{\rm o}$: però la nostra anàlisi mostra que les branques que s'han d'agafar tenen direccions donades pel sentit que va del punt L a L', i del punt L'' a L'''; i com que els cercles màxims s'intersecten en dos punts, és clar que qualsevol dels dos punts es pot agafar arbitràriament. També, en lloc de l'angle A, podem prendre l'arc entre els pols dels cercles màxims dels quals els arcs LL', $L''L'''$ formen part: però és evident que s'han d'elegir aquells pols que estiguin similarment situats respecte a aquests arcs; és a dir, que quan anem de L a L' o de L'' a L''', els dos pols han d'estar del mateix costat, o bé a la dreta, o bé a l'esquerra.

VII. Siguin L, L', L'' tres punts sobre l'esfera i posem, per brevetat,

$$\begin{array}{rclrclrcl} \cos(1)L &=& x\,, & \cos(2)L &=& y\,, & \cos(3)L &=& z \\ \cos(1)L' &=& x', & \cos(2)L' &=& y', & \cos(3)L' &=& z' \\ \cos(1)L'' &=& x'', & \cos(2)L'' &=& y'', & \cos(3)L'' &=& z'' \end{array}$$

i també[10]

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z = \Delta.$$

Denotem per λ el pol del cercle màxim del qual LL' és una part, i que està situat en la mateixa posició respecte a aquest arc que el punt (1) respecte a l'arc (2)(3). Llavors tindrem, pel teorema anterior,

$$yz' - y'z = \cos(1)\lambda \cdot \sin(2)(3) \cdot \sin LL',$$

o, ja que $(2)(3) = 90°$,

$$\begin{array}{rcll} yz' - y'z &=& \cos(1)\lambda \cdot \sin LL', & \text{i similarment} \\ zx' - z'x &=& \cos(2)\lambda \cdot \sin LL' & \\ xy' - x'y &=& \cos(3)\lambda \cdot \sin LL'\,. & \end{array}$$

[10]Obserevem que Δ és el determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Multiplicant aquestes equacions per x'', y'', z'' respectivament, i sumant, obtenim, mitjançant el segon teorema deduït a V[11]

$$\Delta = \cos \lambda L'' \cdot \sin LL' \,.$$

Ara hem de distingir tres casos. *Primer*, quan L'' està en el cercle màxim del qual l'arc LL' forma part, tenim $\lambda L'' = 90°$, i per tant $\Delta = 0$. Si L'' no està sobre aquest cercle màxim, el *segon* cas serà quan L'' està en el mateix costat que λ, i el *tercer* cas quan estan en costats oposats: en aquests dos casos els punts L, L', L'' formaran un triangle esfèric, i estaran en el mateix ordre que els punts $(1), (2), (3)$ en el segon cas, i en ordre oposat en el tercer cas.[12] Denotant els angles d'aquest triangle simplement per L, L', L'' i la perpendicular dibuixada sobre l'esfera des del punt L'' al costat LL' per p, tindrem

$$\sin p = \sin L \cdot \sin LL'' = \sin L' \cdot \sin L'L'' \,, \quad \text{i} \quad \lambda L'' = 90° \mp p \,;$$

el signe de sobre en el segon cas, i el de sota en el tercer. A partir d'aquí se segueix que

$$\begin{aligned} \pm\Delta &= \sin L \cdot \sin LL' \cdot \sin LL'' = \sin L' \cdot \sin LL' \cdot \sin L'L'' \\ &= \sin L'' \cdot \sin LL'' \cdot \sin L'L'' \,. \end{aligned}$$

A més, és evident que el primer cas es pot considerar contingut en el segon o tercer, i es pot veure fàcilment que l'expressió $\pm\Delta$ representa sis vegades el volum de la piràmide formada pels punts L, L', L'' i el centre de l'esfera. Semblantment, és clar que l'expressió $\pm\frac{1}{6}\Delta$ representa de manera general el volum de qualsevol piràmide continguda entre l'origen de coordenades i els tres punts de coordenades $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$.

3

Es diu que una superfície corba té curvatura contínua en un dels seus punts A si les direccions de totes les rectes que van de A a punts de la superfície infinitament pròxims a A estan desviades infinitament poc d'un

[11] La fórmula següent ens dóna el volum del paral·lelepípede en la forma usual ≪altura × base≫.

[12] Associa el signe del determinant Δ a una base positiva o negativa. Aquesta distinció resulta fonamental quan en l'article 8 s'assigna un signe a la curvatura total.

mateix pla que passa per A:[13] es diu que aquest pla és el pla *tangent* a la superfície en el punt A. Si aquesta condició no es compleix en algun punt, la continuïtat de la curvatura queda en aquest punt interrompuda, com succeeix, per exemple, en el vèrtex d'un con. Les presents disquisicions estaran restringides a superfícies o a parts de superfícies tals que la continuïtat de la curvatura no s'interrompi en cap punt. Tan sols observarem ara que els mètodes utilitzats per a determinar la posició del pla tangent perden el seu significat en els punts singulars, en els quals la continuïtat de la curvatura és interrompuda, i han de portar a solucions indeterminades.

4

L'orientació del pla tangent s'estudia molt còmodament mitjançant la direcció de la recta normal a aquest pla en el punt A, la qual també es diu que és normal a la superfície corba. Representarem la direcció d'aquesta normal pel punt L sobre l'esfera auxiliar,[14] i posarem

$$\cos(1)L = X, \quad \cos(2)L = Y, \quad \cos(3)L = Z$$

i denotarem les coordenades del punt A per x, y, z. Siguin també $x+dx, y+dy, z+dz$ les coordenades d'un altre punt A' sobre la superfície corba; ds la seva distància a A, que és infinitament petita;[15] i finalment, sigui λ el punt sobre l'esfera que representa la direcció de l'element AA'.[16] Llavors tindrem

$$dx = ds \cdot \cos(1)\lambda\,, \quad dy = ds \cdot \cos(2)\lambda\,, \quad dz = ds \cdot \cos(3)\lambda$$

i, com que ha de ser $\lambda L = 90°$,

$$X\cos(1)\lambda + Y\cos(2)\lambda + Z\cos(3)\lambda = 0\,.$$

Combinant aquestes equacions obtenim

$$X dx + Y dy + Z dz = 0\,.$$

[13] El concepte de curvatura, com una funció sobre la superfície, encara no ha aparegut. Parla de *curvatura continua* únicament per dir que té pla tangent.

[14] L és el vector normal unitari a la superfície en el punt A, i defineix també l'orientació del pla tangent a la superfície en A.

[15] Pensa en ds com la distància euclidiana entre A i A', de manera que ds és la diagonal d'un paral·lelepípede de costats dx, dy, dz. L'aplicació del mètode dels infinitesimals a la geometria, que utilitza Gauss aquí, ja havia aparegut a la incipient geometria diferencial que Euler i Monge havien iniciat a finals del segle *XVIII*. Per aquest camí, el problema de la consistència de la geometria hiperbòlica dependria de la consistència del mètode dels infinitèsims.

[16] λ és un vector tangent a la superfície en el punt A.

Hi ha dos mètodes generals per a exhibir l'índole d'una superfície corba.[17] El *primer* utilitza l'equació entre les coordenades x, y, z, la qual podem suposar reduïda a la forma $W = 0$, on W serà una funció de les indeterminades x, y, z. Sigui

$$dW = Pdx + Qdy + Rdz$$

la diferencial total de la funció W. Sobre la superfície corba tindrem

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

i, conseqüentment,

$$P\cos(1)\lambda + Q\cos(2)\lambda + R\cos(3)\lambda = 0\,.$$

Com que aquesta equació, així com la que hem establert més amunt, ha de ser certa per a les direccions de tots els elements ds sobre la superfície corba, veiem fàcilment que X, Y, Z han de ser proporcionals a P, Q, R respectivament, i conseqüentment, com que[18]

$$XX + YY + ZZ = 1,$$

tindrem, o bé

$$X = \frac{P}{\sqrt{PP+QQ+RR}},\ Y = \frac{Q}{\sqrt{PP+QQ+RR}},\ Z = \frac{R}{\sqrt{PP+QQ+RR}},$$

o bé

$$X = \frac{-P}{\sqrt{PP+QQ+RR}},\ Y = \frac{-Q}{\sqrt{PP+QQ+RR}},\ Z = \frac{-R}{\sqrt{PP+QQ+RR}}.$$

El *segon* mètode expressa les coordenades en forma de funcions de dues variables p, q. Suposem que la diferenciació d'aquestes funcions dóna

$$\begin{array}{rcl} dx &=& adp + a'dq \\ dy &=& bdp + b'dq \\ dz &=& cdp + c'dq\,. \end{array}$$

[17]Es refereix que hi ha dues maneres de definir i estudiar les propietats d'una superfície, però hem preferit mantenir la paraula índole ja que en llatí Gauss escriu *exhibendam indole*.

El primer mètode consisteix a donar-la globalment com la superfície de nivell $W = 0$ d'una funció diferenciable $W(x, y, z)$; el mètode implícit. El segon, local, que la dóna com la imatge $x = x(p, q), y = y(p, q), z = z(p, q)$ d'una regió del pla p, q; el mètode paramètric.

[18]Mantindrem, al llarg de tota l'obra, l'escriptura de la versió llatina, que utilitza XX per X^2, etc.

Substituint aquests valors en la fórmula donada anteriorment, obtenim

$$(aX + bY + cZ)dp + (a'X + b'Y + c'Z)dq = 0\,.$$

Com que aquestes equacions s'han de complir independentment dels valors de les diferencials dp, dq, tindrem evidentment

$$aX + bY + cZ = 0, \quad a'X + b'Y + c'Z = 0\,.$$

A partir d'aquí veiem que X, Y, Z seran proporcionals a les quantitats[19]

$$bc' - cb', \quad ca' - ac', \quad ab' - ba'\,.$$

Per tant, posant, per brevetat,

$$\sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2} = \Delta$$

tindrem o bé

$$X = \frac{bc' - cb'}{\Delta}, \quad Y = \frac{ca' - ac'}{\Delta}, \quad Z = \frac{ab' - ba'}{\Delta}$$

o bé

$$X = \frac{cb' - bc'}{\Delta}, \quad Y = \frac{ac' - ca'}{\Delta}, \quad Z = \frac{ba' - ab'}{\Delta}\,.$$

Amb aquests dos mètodes generals n'hi ha associat un *tercer*,[20] en el qual una de les coordenades, per exemple z, està expressada en forma d'una funció de les altres dues x, y. Aquest mètode és evidentment tan sols un cas particular bé del primer mètode o bé del segon. Si posem

$$dz = tdx + udy$$

tindrem o bé

$$X = \frac{-t}{\sqrt{1 + tt + uu}}, \quad Y = \frac{-u}{\sqrt{1 + tt + uu}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1 + tt + uu}},$$

o bé

$$X = \frac{t}{\sqrt{1 + tt + uu}}, \quad Y = \frac{u}{\sqrt{1 + tt + uu}}, \quad Z = \frac{-1}{\sqrt{1 + tt + uu}}.$$

[19] El vector (X, Y, Z) ha de ser múltiple del producte vectorial $(a, b, c) \times (a', b', c')$.
[20] Aquest mètode dóna localment la superfície com la gràfica d'una funció.

Les dues solucions[21] trobades a l'article precedent[22] es refereixen evidentment a punts oposats de l'esfera, o a direccions oposades, com era d'esperar, ja que la normal es pot dibuixar cap a qualsevol dels dos costats de la superfície corba. Si desitgem distingir entre les dues regions que voregen la superfície, i anomenem l'una regió interior i l'altra regió exterior, podem llavors assignar, a cadascuna de les dues normals, la solució apropiada amb l'ajuda del teorema demostrat a l'article[23] 2 (*VII*), i al mateix temps establir un criteri per a distingir una regió de l'altra.

En el primer mètode, un tal criteri es pot donar a partir del signe de la quantitat W.[24] En realitat, parlant de manera general, la superfície corba divideix aquelles regions de l'espai en les quals W conserva un valor positiu d'aquelles en les quals el valor de W esdevé negatiu. De fet, es veu fàcilment a partir d'aquest teorema que, si W pren un valor positiu cap a la regió exterior, i suposem que la normal està dibuixada apuntant cap a fora, s'ha de prendre la primera solució. A més, serà fàcil decidir en cada cas si la mateixa regla per al signe de W es manté a través de tota la superfície, o si per a diferents regions hi haurà diferents regles: sempre que els coeficients P, Q, R tinguin valors finits i no tots s'anul·lin al mateix temps, la llei de continuïtat evitarà qualsevol canvi.[25]

Si seguim el segon mètode, podem imaginar dos sistemes de línies corbes sobre la superfície corba, l'un pel qual p és variable i q constant; l'altre pel qual q és variable i p constant: la posició respectiva d'aquestes dues línies en relació amb la regió exterior decidirà quina de les dues solucions s'ha d'agafar. És a dir, sempre que les tres línies següents, concretament la branca de la línia del primer sistema que surt del punt A quan p augmenta, la branca de la línia del segon sistema que surt del punt A quan q augmenta i la normal dibuixada cap a la regió exterior, estan situades *semblantment*

[21]En aquest article Gauss explica com escollir el signe en el vector normal per a cadascun dels dos mètodes de representar una superfície a l'espai euclidià.

[22]Gauss escriu aquí, i cada cop que surt l'expressió ≪article precedent≫ més endavant, ≪art. praec.≫.

[23]Gauss escriu aquí, i cada cop que surt la paraula ≪article≫ més endavant, ≪art.≫ Gauss té completament clar que haurà de controlar els problemes d'orientació amb el signe del determinant del producte mixt de tres vectors.

[24]Argument visual per a justificar l'elecció.

[25]Gauss s'adona que el conjunt descrit per $W = 0$ pot tenir diverses components. Però, com que 0 és un valor regular de W, el signe escollit en cada component serà el mateix. És interessant notar que, malgrat la curosa formulació analítica dels conceptes, darrere de cada argument fonamental existeix una representació gràfica, un dibuix, que l'il·lustra i ajuda a comprendre'l.

a com ho estan els eixos x, y, z respectivament de l'origen d'abscisses (e. g., si, a la vegada per a les tres primeres línies i per a les tres últimes, podem concebre la primera dirigida cap a l'esquerra, la segona cap a la dreta i la tercera cap a fora), s'ha d'agafar la primera solució; però sempre que la posició relativa de les tres línies és oposada a la posició relativa dels eixos x, y, z, la segona solució és la que preval.

En el tercer mètode, s'ha de veure si, quan z rep un increment positiu, amb x i y constants, el punt creua cap a la regió exterior o interior. En el primer cas, en el qual la normal apunta cap a fora, preval la primera solució; en el darrer cas, la segona.

6

De la mateixa manera que, traslladant les direccions normals a la superfície corba sobre la superfície esfèrica, fem correspondre a punts de la primera superfície punts de la segona,[26] així també qualsevol línia o qualsevol figura sobre la primera estarà representada per la corresponent línia o figura sobre la superfície esfèrica. En la comparació de dues figures que es corresponguin l'una amb l'altra d'aquesta manera, una de les quals és com la imatge de l'altra, es poden prendre dos punts de vista, un quan es considera únicament la quantitat, l'altra quan, oblidant relacions quantitatives, es considera només la posició.

El primer punt de vista és la base per a introduir algunes nocions noves que semblen útils dins de la teoria de superfícies corbes. Així, a cada part d'una superfície corba inclosa dintre de límits determinats li assignem una *curvatura total* o *integral*,[27] que és l'àrea de la figura corresponent sobre l'esfera. Aquesta curvatura integral s'ha de distingir d'una curvatura una mica més específica que anomenarem *mesura de curvatura*: la darrera es refereix

[26]En aquest article Gauss introdueix el que avui coneixem com a aplicació de Gauss i defineix la noció de *curvatura total* o integral, i la *mesura de curvatura*. No obstant això aquesta aplicació ja havia estat considerada per Rodrigues; vegeu el peu de la pàgina 84.

[27]Per què la definició d'*amplitud* de 1825 es converteix, amb el nom de *curvatura total* o integral, en la noció bàsica del *Disquisicions* de 1827? Doncs perquè la mesura de curvatura es pot deduir de la curvatura total i tenim una definició de curvatura per a superfícies que generalitza la noció de curvatura de corbes, però que és independent de les curvatures de les corbes sobre la superfície.

El nom de *curvatura* és una mica desafortunat, ja que malgrat que es defineix extrínsecament usant la forma que té la superfície dins l'espai euclidià, és, en realitat, intrínsec! Un nom correcte hagués estat *densitat del defecte angular,* com es veurà posteriorment quan parlem del teorema del defecte.

a un *punt* de la superfície, i representarà el quocient obtingut en dividir la curvatura integral de l'element de superfície al voltant d'un punt per l'àrea del mateix element; i per tant denota la raó de les àrees infinitament petites que es corresponen l'una amb l'altra, una sobre la superfície corba i l'altra sobre l'esfera. La utilitat d'aquestes innovacions quedarà abundantment justificada, esperem, pel que explicarem més endavant. Quant a la terminologia, l'hem pensat especialment desitjable per tal d'evitar tota ambigüitat, i per aquesta raó no hem cregut pas que haguéssim d'adoptar una terminologia anàloga a la que s'admet generalment (encara que no aprovada per tothom) a la teoria de corbes planes, d'acord amb la qual la mesura de curvatura s'hauria d'haver anomenat simplement curvatura, i la curvatura total, amplitud.[28] Però, per què no ser lliures en l'elecció de les paraules, sempre que no siguin sense sentit i no siguin susceptibles d'una interpretació errònia?

La posició d'una figura sobre l'esfera pot ser o bé similar a la corresponent figura sobre la superfície corba, o bé oposada (inversa); el primer cas es dóna quan dues línies de la superfície corba que surten del mateix punt, en direccions diferents però no oposades, estan representades sobre l'esfera per línies semblantment situades, això és, quan la imatge de la línia de la dreta està també a la dreta; el darrer cas és quan passa el contrari. Distingirem aquests dos casos pel *signe* positiu o negatiu de la mesura de curvatura. Però evidentment aquesta distinció es pot fer només quan sobre cada superfície elegim una cara concreta en la qual suposem que està la figura. Sobre l'esfera auxiliar usarem sempre la cara exterior, és a dir, la girada cap enfora des del centre; sobre la superfície corba es pot agafar com a cara exterior o bé la que habitualment es considera realment com a cara exterior, o bé més aviat aquella cara a partir de la qual se suposa dibuixada la normal; manifestament, no hi ha cap canvi respecte a la similitud de les figures, si sobre la superfície corba es transfereixen al costat oposat a la vegada la figura i la normal, sempre que la pròpia imatge sigui representada en el mateix costat de l'esfera.

El signe positiu o negatiu, que assignem a la *mesura* de curvatura d'una figura infinitament petita, segons la seva posició, l'estenem també a la curvatura integral d'una figura finita sobre la superfície corba. No obstant això, si volem discutir el cas general, són necessàries algunes explicacions, les quals només podem tocar aquí breument. Sempre que la figura sobre la superfície corba sigui tal que a punts diferents d'aquesta corresponguin punts *diferents*

[28] És estranya la paraula *amplitud.* Si la corba és tancada aquesta integral és igual a 2π pel nombre de voltes.

sobre l'esfera, la definició no necessita cap més explicació. Però si aquesta condició no es compleix, serà necessari tenir en compte dues o diverses vegades certes parts de la figura sobre la superfície esfèrica, de manera que, segons que la posició d'aquestes parts sigui similar o inversa, aquestes àrees s'acumularan o es destruiran les unes amb les altres. El que serà més simple en aquest cas serà suposar la superfície corba dividida en parts, tals que cada part, considerada separadament compleixi l'anterior condició; assignar llavors a cadascuna d'aquestes parts la seva curvatura integral, determinant la seva magnitud per l'àrea de la corresponent figura sobre l'esfera, i el signe per la posició d'aquesta figura; i, finalment, assignar a la figura total la curvatura integral que prové de la suma de les curvatures integrals corresponents a les parts individualment. Així, de manera general, la curvatura integral d'una figura és $= \int k d\sigma$, on $d\sigma$ denota l'element d'àrea de la figura, i k la mesura de curvatura en cada punt. Els punts principals amb relació a la representació geomètrica d'aquesta integral es redueixen als següents. Al perímetre de la figura sobre la superfície corba (sota la restricció de l'article 3) correspondrà sempre una línia tancada sobre l'esfera. Si aquesta última no s'intersecta a ella mateixa en cap punt, dividirà la superfície completa de l'esfera en dues parts, una de les quals correspondrà a la figura sobre la superfície corba; i la seva àrea, considerada positiva o negativa segons que, amb relació al seu perímetre, la seva posició sigui semblant o inversa a la posició de la figura sobre la superfície corba, representarà la curvatura integral de la figura sobre la superfície corba. Però sempre que aquesta línia es talli a ella mateixa una o diverses vegades, donarà una figura complicada, a la qual, no obstant això, és possible assignar una àrea concreta tan legítimament com en el cas d'una figura sense nodes; i aquesta àrea, pròpiament interpretada, donarà sempre un valor exacte per la curvatura integral. No obstant, hem de reservar per a una altra ocasió una exposició més estesa de la teoria d'aquestes figures considerades des d'aquest punt de vista tan general.[29]

[29] Gauss és conscient que la imatge esfèrica d'una superfície pot ser un objecte geomètric molt difícil de descriure analíticament. Probablement és en aquest punt que Gauss es troba en les dificultats que pertanyen al camp de la *Geometria situs*, tal com comenta a Schumacher (vegeu un breu resum de la carta a la pàgina 19); la imatge esfèrica d'una corba sobre la superfície pot ser una corba esfèrica molt complicada.

Tan curós i exigent com era Gauss en els seus escrits, s'ha de reconèixer que en aquest article, on introdueix el concepte bàsic de la seva nova teoria, hi ha el taló d'Aquiles d'aquesta.

Trobarem[30] ara una fórmula que expressarà la mesura de curvatura per a cada punt d'una superfície corba. Denotem per $d\sigma$ l'àrea d'un element d'aquesta superfície corba; llavors $Zd\sigma$ serà l'àrea de la projecció d'aquest element sobre el pla de coordenades x, y; i per tant, si $d\Sigma$ és l'àrea del corresponent element sobre l'esfera, $Zd\Sigma$ serà l'àrea de la seva projecció sobre el mateix pla: el signe positiu o negatiu de Z indicarà, de fet, que la posició de la projecció és similar o inversa a la de l'element projectat: evidentment aquestes projeccions tenen la mateixa raó com a quantitats i la mateixa relació quant a posició que els mateixos elements. Considerem ara un element triangular sobre la superfície, i suposem que les coordenades dels tres punts que formen la seva projecció són

$$\begin{array}{ll} x, & y \\ x+dx, & y+dy \\ x+\delta x, & y+\delta y\,. \end{array}$$

El doble de l'àrea d'aquest triangle s'expressarà per la fórmula

$$dx \cdot \delta y - dy \cdot \delta x$$

i aquesta expressió serà positiva o negativa segons que la posició del costat que va del primer punt al tercer, amb relació al costat que va del primer punt al segon, sigui similar o oposada a la posició de l'y-eix de coordenades respecte a l'x-eix de coordenades.

Anàlogament, si les coordenades dels tres punts que formen la projecció del corresponent element sobre la superfície esfèrica, des del centre de l'esfera com a origen, són

$$\begin{array}{ll} X, & Y \\ X+dX, & Y+dY \\ X+\delta X, & Y+\delta Y\,, \end{array}$$

el doble de l'àrea d'aquesta projecció s'expressarà per

$$dX \cdot \delta Y - dY \cdot \delta X$$

i el signe d'aquesta expressió està determinat de la mateixa manera que abans. Per tant, la mesura de la curvatura en aquest punt de la superfície serà

$$k = \frac{dX \cdot \delta Y - dY \cdot \delta X}{dx \cdot \delta y - dy \cdot \delta x}\,.$$

[30] En aquest article, utilitzant magistralment el mètode de les coordenades, que és el mètode propi de la geometria diferencial, troba la primera fórmula explícita per a la mesura de curvatura. Apareix la *segona forma fonamental*.

Si suposem ara que la superfície està definida d'acord amb el tercer mètode considerat a l'article 4, tindrem que X i Y estaran en forma de funcions de les quantitats x, y. Tindrem, per tant,[31]

$$\begin{aligned}
dX &= \left(\frac{dX}{dx}\right) dx + \left(\frac{dX}{dy}\right) dy \\
\delta X &= \left(\frac{dX}{dx}\right) \delta x + \left(\frac{dX}{dy}\right) \delta y \\
dY &= \left(\frac{dY}{dx}\right) dx + \left(\frac{dY}{dy}\right) dy \\
\delta Y &= \left(\frac{dY}{dx}\right) \delta x + \left(\frac{dX}{dy}\right) \delta y
\end{aligned}$$

Un cop substituïts aquests valors, l'anterior expressió es transforma en

$$k = \frac{dX}{dx} \cdot \frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy} \cdot \frac{dY}{dx}\,.$$

Posant, com abans,

$$\frac{dz}{dx} = t\,, \qquad \frac{dz}{dy} = u$$

i també

$$\frac{ddz}{dx^2} = T, \quad \frac{ddz}{dx \cdot dy} = U, \quad \frac{ddz}{dy^2} = V$$

o

$$dt = Tdx + Udy\,, \quad du = Udx + Vdy$$

tenim a partir de les fórmules anteriors

$$X = -tZ\,, \quad Y = -uZ\,, \quad (1 + tt + uu)ZZ = 1$$

i per tant

$$\begin{aligned}
dX &= -Zdt - tdZ \\
dY &= -Zdu - udZ \\
(1 + tt + uu)dZ + Z(tdt + udu) &= 0
\end{aligned}$$

[31] Mantindrem al llarg de tota l'obra la notació original de Gauss, $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, tot i que estem parlant de derivades parcials $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$. També usarem, com ell, ddx i no d^2x.

o

$$\begin{aligned} dZ &= -Z^3(tdt + udu) \\ dX &= -Z^3(1+uu)dt + Z^3 tudu \\ dY &= +Z^3 tudt - Z^3(1+tt)du \end{aligned}$$

i així

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= Z^3(-(1+uu)T + tuU) \\ \frac{dX}{dy} &= Z^3(-(1+uu)U + tuV) \\ \frac{dY}{dx} &= Z^3(tuT - (1+tt)U) \\ \frac{dY}{dy} &= Z^3(tuU - (1+tt)V)\,. \end{aligned}$$

Substituint aquests valors a l'expressió anterior, tenim[32]

$$\begin{aligned} k &= Z^6(TV - UU)(1+tt+uu) = Z^4(TV-UU) \\ &= \frac{TV-UU}{(1+tt+uu)^2}\,. \end{aligned}$$

8

Mitjançant una eleció adequada de l'origen i eixos de coordenades, podem fàcilment fer que les quantitats t, u, U s'anul·lin en un punt determinat A.[33] En efecte, les dues primeres condicions es compliran a la vegada si agafem com a pla x, y el pla tangent en aquest punt. Si, a més, l'origen se situa

[32] Aquesta fórmula expressa la curvatura com el quocient entre el determinant de la segona forma fonamental i el determinant de la primera, calculades per a una superfície donada pel tercer mètode, és a dir, com a gràfica d'una funció. La segona forma fonamental mesura com la superfície es doblega a l'espai. Rodrigues havia remarcat a [Rod15a] que la segona forma fonamental era la derivada de l'aplicació normal, avui coneguda com a aplicació de Gauss; vegeu [Oss90].

[33] En aquest article prova l'existència d'un sistema adequat de coordenades al voltant d'un punt A de cada superfície, en el qual aquesta es veu localment, llevat d'elements d'ordre tres, com la gràfica d'una quàdrica. De fet, aquestes coordenades foren introduïdes per Meusnier el 1785 en [Meu85]. En aquest sistema de coordenades la curvatura està donada per una fórmula molt senzilla, la qual cosa permet veure quasi immediatament la igualtat de la curvatura gaussiana i la curvatura euleriana.

en el mateix punt A, l'expressió per a la coordenada z tindrà evidentment la forma

$$z = \frac{1}{2}T^0xx + U^0xy + \frac{1}{2}V^0yy + \Omega\,,$$

on Ω serà de grau més gran que dos. Girant ara els eixos de x i y un angle M tal que

$$\tan 2M = \frac{2U^0}{T^0 - V^0}$$

es veu fàcilment que ha de resultar una equació de la forma

$$z = \frac{1}{2}Txx + \frac{1}{2}Vyy + \Omega\,,$$

que satisfà també la tercera condició. Un cop fet això, és evident que:

I. Si tallem la superfície corba per un pla que passi per la normal i l'eix de les x, obtindrem una corba plana, el radi de curvatura de la qual en el punt A serà $= \frac{1}{T}$, i el signe positiu o negatiu indicarà que la corba és còncava o convexa respecte a la regió en la qual l'eix de coordenades z és positiu.

II. Anàlogament, $\frac{1}{V}$ serà el radi de curvatura en el punt A de la corba plana que és la intersecció de la superfície i el pla a través dels eixos y i z.

III. Posant $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$, l'equació es transforma en

$$z = \frac{1}{2}(T\cos^2\phi + V\sin^2\phi)rr + \Omega\,,$$

a partir de la qual veiem que, si la secció està produïda per un pla a través de la normal en A i formant un angle ϕ amb l'eix de les x, tindrem una corba plana el radi de curvatura de la qual en el punt A serà

$$= \frac{1}{T\cos^2\phi + V\sin^2\phi}\,.$$

IV. Sempre que tinguem $T = V$, els radis de curvatura en *tots* els plans normals seran iguals. Però si T i V no són iguals, és evident que, atès que, per a tot valor de l'angle ϕ, $T\cos^2\phi + V\sin^2\phi$ està entre T i V, els radis de curvatura de les seccions principals considerades a *I* i *II* es refereixen a les curvatures extremes, l'un a la curvatura màxima i l'altre a la mínima, si T i V tenen el mateix signe; l'un a la màxima convexitat, l'altre a la màxima concavitat, si T i V tenen signes oposats. Aquestes conclusions contenen quasi tot el que l'il·lustre Euler fou el primer de provar sobre curvatura de superfícies corbes.

V. La mesura de curvatura en el punt A de la superfície té l'expressió senzillísima

$$k = TV,$$

per tant tenim el

TEOREMA.[34] *La mesura de curvatura a qualsevol punt de la superfície és igual a una fracció que té per numerador la unitat i per denominador el producte dels dos radis de curvatura extrems de les seccions per plans normals.*

Al mateix temps es veu que la mesura de curvatura serà positiva per a superfícies concavocòncaves o convexoconvexes (la qual distinció no és essencial), però negativa per a superfícies concavoconvexes. Si la superfície consta de parts de cada classe, llavors sobre les línies que separen aquestes parts la mesura de curvatura s'ha d'anul·lar. Més tard farem un estudi detallat de la natura de les superfícies corbes per a les quals la mesura de curvatura s'anul·la a tot arreu.

9

La fórmula general per a la mesura de curvatura donada al final de l'article 7 és la més simple de totes, ja que involucra tan sols cinc elements;[35] arribarem a una fórmula realment més complicada, concretament una que involucra nou elements, si desitgem emprar el primer mètode de representar una superfície. Conservant la notació de l'article 4, posem també

$$\begin{aligned}
\frac{d\,dW}{dx^2} &= P', \quad \frac{d\,dW}{dy^2} = Q', \quad \frac{d\,dW}{dz^2} = R' \\
\frac{d\,dW}{dy \cdot dz} &= P'', \quad \frac{d\,dW}{dx \cdot dz} = Q'', \quad \frac{d\,dW}{dx \cdot dy} = R''\,;
\end{aligned}$$

així que

$$\begin{aligned}
d\,P &= P'dx + R''dy + Q''dz \\
d\,Q &= R''dx + Q'dy + P''dz \\
d\,R &= Q''dx + P''dy + R'dz\,.
\end{aligned}$$

Ara, com que $t = -\dfrac{P}{R}$, obtenim per diferenciació

$$\begin{aligned}
RRdt &= -RdP + PdR \\
&= (PQ'' - RP')dx + (PP'' - RR'')dy + (PR' - RQ'')dz
\end{aligned}$$

[34] Prova la igualtat de la curvatura gaussiana i la curvatura euleriana.

[35] Una fórmula senzilla, però de la qual no es pot deduir el teorema egregi.

o, eliminant dz mitjançant l'equació

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

$$R^3dt = (-RRP' + 2PRQ'' - PPR')dx + (PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR'')dy.$$

Anàlogament obtenim

$$R^3du = (PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR'')dx + (-RRQ' + 2QRP'' - QQR')dy.$$

A partir d'això deduïm

$$\begin{aligned} R^3T &= -RRP' + 2PRQ'' - PPR' \\ R^3U &= PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR'' \\ R^3V &= -RRQ' + 2QRP'' - QQR' \end{aligned}$$

Substituint aquests valors a la fórmula de l'article 7, obtenim per a la mesura de curvatura k l'expressió simètrica següent:

$$\begin{aligned} (PP &+ QQ + RR)^2 \, k \\ &= PP(Q'R' - P'P'') + QQ(P'R' - Q''Q'') + RR(P'Q' - R''R'') \\ &+ 2QR(Q''R'' - P'P'') + 2PR(P''R'' - Q'Q'') + 2PQ(P''Q'' - R'R'') \,. \end{aligned}$$

10

Obtenim[36] una fórmula encara més complicada, concretament una que involucra quinze elements, si seguim el segon mètode general de definir la natura d'una superfície corba. És, no obstant això, molt important que desenvolupem aquesta fórmula també.[37] Retenint la notació de l'article 4, posem també

$$\frac{ddx}{dp^2} = \alpha, \qquad \frac{ddx}{dpdq} = \alpha', \qquad \frac{ddx}{dq^2} = \alpha''$$

$$\frac{ddy}{dp^2} = \beta, \qquad \frac{ddy}{dpdq} = \beta', \qquad \frac{ddy}{dq^2} = \beta''$$

[36] Gauss troba la mateixa fórmula de l'article anterior, però per a una superfície donada pel segon mètode, és a dir, donada en forma paramètrica.

[37] Perquè en podrem deduir una altra fórmula (vegeu l'article següent), de la qual es dedueix de manera analítica i directa el teorema egregi.

$$\frac{ddz}{dp^2} = \gamma, \qquad \frac{ddz}{dpdq} = \gamma', \qquad \frac{ddz}{dq^2} = \gamma''$$

i posem, per brevetat,

$$\begin{aligned} bc' - cb' &= A \\ ca' - ac' &= B \\ ab' - ba' &= C\,. \end{aligned}$$

Primer veiem que $Adx + Bdy + Cdz = 0$, o

$$dz = -\frac{A}{C}dx - \frac{B}{C}dy\,.$$

Així, com que z es pot mirar com una funció de x, y, tenim

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= t = -\frac{A}{C} \\ \frac{dz}{dy} &= u = -\frac{B}{C}\,. \end{aligned}$$

Llavors, a partir de les fórmules $dx = adp + a'dq$, $dy = bdp + b'dq$, tenim

$$\begin{aligned} Cdp &= b'\,dx - a'\,dy \\ Cdq &= -b\,dx + a\,dy\,. \end{aligned}$$

Per tant, obtenim, per a les diferencials totals de t, u,

$$\begin{aligned} C^3dt &= \left(A\frac{dC}{dp} - C\frac{dA}{dp}\right)(b'\,dx - a'\,dy) + \left(C\frac{dA}{dq} - A\frac{dC}{dq}\right)(b\,dx - a\,dy) \\ C^3du &= \left(B\frac{dC}{dp} - C\frac{dB}{dp}\right)(b'\,dx - a'\,dy) + \left(C\frac{dB}{dq} - B\frac{dC}{dq}\right)(b\,dx - a\,dy)\,. \end{aligned}$$

Si ara substituïm en aquestes fórmules

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dp} &= c'\beta + b\gamma' - c\beta' - b'\gamma \\ \frac{dA}{dq} &= c'\beta' + b\gamma'' - c\beta'' - b'\gamma' \\ \frac{dB}{dp} &= a'\gamma + c\alpha' - a\gamma' - c'\alpha \\ \frac{dB}{dq} &= a'\gamma' + c\alpha'' - a\gamma'' - c'\alpha' \\ \frac{dC}{dp} &= b'\alpha + a\beta' - b\alpha' - a'\beta \\ \frac{dC}{dq} &= c'\alpha' + a\beta'' - b\alpha'' - a'\beta' \end{aligned}$$

i si notem que els valors de les diferencials dt, du que així s'han obtingut han de ser iguals, independentment dels diferencials dx, dy, a les quantitats $Tdx + Udy$, $Udx + Vdy$ respectivament, trobarem, després de transformacions suficientment òbvies:

$$\begin{aligned}
C^3T &= \alpha Ab'b' + \beta Bb'b' + \gamma Cb'b' \\
&\quad -2\alpha' Abb' - 2\beta' Bbb' - 2\gamma' Cbb' \\
&\quad +\alpha'' Abb + \beta'' Bbb + \gamma'' Cbb \\
C^3U &= -\alpha Aa'b' - \beta Ba'b' - \gamma Ca'b' \\
&\quad +\alpha' A(ab' + ba') + \beta' B(ab' + ba') + \gamma' C(ab' + ba') \\
&\quad -\alpha'' Aab - \beta'' Bab - \gamma'' Cab \\
C^3V &= \alpha Aa'a' + \beta Ba'a' + \gamma Ca'a' \\
&\quad -2\alpha' Aaa' - 2\beta' Baa' - 2\gamma' Caa' \\
&\quad +\alpha'' Aaa + \beta'' Baa + \gamma'' Caa\,.
\end{aligned}$$

Per tant, si posem, per brevetat,[38]

$$\begin{array}{lllllllll}
A\alpha & + & B\beta & + & C\gamma & = & D & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & (1) \\
A\alpha' & + & B\beta' & + & C\gamma' & = & D' & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & (2) \\
A\alpha'' & + & B\beta'' & + & C\gamma'' & = & D'' & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & (3)
\end{array}$$

tindrem

$$\begin{aligned}
C^3T &= Db'b' - 2D'bb' + D''bb \\
C^3U &= -Da'b' + D'(ab' + ba') - D''ab \\
C^3V &= Da'a' - 2D'aa' + D''aa\,.
\end{aligned}$$

A partit d'això trobem, un cop fets els càlculs,

$$C^6(TV - U^2) = (DD'' - D'^2)(ab' - ba')^2 = (DD'' - D'^2)CC$$

i per tant la fórmula per a la mesura de curvatura

$$k = \frac{DD'' - D'D'}{(AA + BB + CC)^2}\,.$$

[38]Les tres equacions següents formen part de les *equacions de* GAUSS; vegeu la pàgina 84.

Mitjançant[39] la fórmula que acabem de trobar n'anem a establir una altra, la qual es pot comptar entre els més productius teoremes de la teoria de superfícies corbes. Introduïm les notacions següents:[40]

$$
\begin{array}{cccccccl}
aa & + & bb & + & cc & = & E & \\
aa' & + & bb' & + & cc' & = & F & \\
a'a' & + & b'b' & + & c'c' & = & G & \\
a\alpha & + & b\beta & + & c\gamma & = & m & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4) \\
a\alpha' & + & b\beta' & + & c\gamma' & = & m' & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5) \\
a\alpha'' & + & b\beta'' & + & c\gamma'' & = & m'' & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (6) \\
a'\alpha & + & b'\beta & + & c'\gamma & = & n & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (7) \\
a'\alpha' & + & b'\beta' & + & c'\gamma' & = & n' & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (8) \\
a'\alpha'' & + & b'\beta'' & + & c'\gamma'' & = & n'' & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (9) \\
AA & + & BB & + & CC & = & EG - FF = \Delta &
\end{array}
$$

Eliminem de les equacions $1, 4, 7$ les quantitats β, γ, la qual cosa es fa multiplicant-les per $bc' - cb', b'C - c'B, cB - bC$ respectivament i sumant. D'aquesta manera obtenim

$$
\begin{aligned}
&(A(bc' - cb') + a(b'C - c'B) + a'(cB - bC))\alpha \\
&= D(bc' - cb') + m(b'C - c'B) + n(cB - bC)\,,
\end{aligned}
$$

una equació que es transforma fàcilment en

$$AD = \alpha\delta + a(nF - mG) + a'(mF - nE).$$

[39] En aquest article Gauss, en un vertader *tour de force*, converteix la fórmula de la curvatura que ha obtingut a l'article anterior en una fórmula que conté només les funcions E, F, G, i les seves derivades, és a dir, fa desaperèixer la segona forma fonamental; com que aquestes funcions estan determinades per les longituds de corbes sobre la superfície, dues superfícies isomètriques tindran la mateixa curvatura. Ha descobert un invariant d'una nova geometria: la geometria intrínseca de superfícies! Tal com ja hem comentat a la pàgina 35, el nom de *curvatura* no és massa adequat; de fet aquest valor que acaba d'obtenir per a k és una obstrucció perquè la superfície es pugui posar plana, i no diu, per tant, res sobre la seva forma.

Però els càlculs que fa Gauss en aquesta secció són molt feixucs; en el vol. *II*, pàg. 108 de l'obra de Spivak [Spi79] se'n pot trobar una versió més simple, que usa la noció de producte vectorial.

[40] Les equacions numerades següents formen part de les *equacions de* Gauss; vegeu la pàgina 84.

Igualment l'eliminació de α, γ o α, β de les mateixes equacions dóna

$$\begin{aligned} BD &= \beta\delta + b(nF - mG) + b'(mF - nE) \\ CD &= \gamma\delta + c(nF - mG) + c'(mF - nE). \end{aligned}$$

Multiplicant aquestes tres equacions per $\alpha'', \beta'', \gamma''$ respectivament i sumant, obtenim

$$DD'' = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')\Delta + m''(nF - mG) + n''(mF - nE) \ldots\ldots (10)$$

Si tractem les equacions $2, 5, 8$[41] de la mateixa manera, obtenim

$$\begin{aligned} AD' &= \alpha'\delta + a(n'F - m'G) + a'(m'F - n'E) \\ BD' &= \beta'\delta + b(n'F - m'G) + b'(m'F - n'E) \\ CD' &= \gamma'\delta + c(n'F - m'G) + c'(m'F - n'E), \end{aligned}$$

i un cop aquestes equacions es multipliquen per α', β', γ' respectivament, la suma dóna

$$D'D' = (\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma')\delta + m'(n'F - m'G) + n'(m'F - n'E).$$

Una combinació d'aquesta equació amb l'equació (10) dóna

$$\begin{aligned} DD'' - D'D' &= (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'\alpha' - \beta'\beta' - \gamma'\gamma')\Delta \\ &+ E(n'n' - nn'') + F(nm'' - 2m'n' + mn'') \\ &+ G(m'm' - mm''). \end{aligned}$$

És clar que tenim[42]

$$\frac{dE}{dp} = 2m, \frac{dE}{dq} = 2m', \frac{dF}{dp} = m' + n, \frac{dF}{dq} = m'' + n', \frac{dG}{dp} = 2n', \frac{dG}{dq} = 2n'',$$

o

$$m = \frac{1}{2}\frac{dE}{dp}, \qquad m' = \frac{1}{2}\frac{dE}{dq}, \quad m'' = \frac{dF}{dq} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp},$$

$$n = \frac{dF}{dp} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dq}, \quad n' = \frac{1}{2}\frac{dG}{dp}, \quad n'' = \frac{1}{2}\frac{dG}{dq},$$

[41] Aquí no posa els números de les equacions entre claus, com a altres llocs.

[42] Aquestes equacions que ara dóna Gauss, en les quals apareixen les derivades de la mètrica, es poden reescriure fàcilment en termes de la mateixa mètrica i dels símbols de Christoffel.

A més, es mostra fàcilment que tindrem

$$\begin{aligned}
\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'\alpha' - \beta'\beta' - \gamma'\gamma' &= \frac{dn}{dq} - \frac{dn'}{dp} = \frac{dm''}{dp} - \frac{dm'}{dq} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{ddE}{dq^2} + \frac{ddF}{dp \cdot dq} - \frac{1}{2}\frac{ddG}{dp^2}\,.
\end{aligned}$$

Si substituïm aquestes diferents expressions a la fórmula de la mesura de curvatura obtinguda al final de l'article precedent, obtenim la fórmula següent, la qual involucra només les quantitats E, F, G i els seus quocients diferencials de primer i segon ordre:[43]

$$\begin{aligned}
4(EG - FF)^2 k = \;& E\left(\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right) \\
+\;& F\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dp}\right) \\
+\;& G\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right) \\
-\;& 2(EG - FF)\left(\frac{ddE}{dq^2} - 2\frac{ddF}{dp\cdot dq} + \frac{ddG}{dp^2}\right).
\end{aligned}$$

[43] La versió de 1825, que resumim a l'apèndix B, finalitza abruptament així:

> Consegüentment, la mesura de curvatura en el punt que es considera és igual a
>
> $$-\frac{1}{m}\frac{dd\,m}{d\,p^2}.$$

Aquesta fórmula expressa la curvatura en un sistema de coordenades sobre la superfície anàleg al sistema de coordenades polars en el pla. És el sistema de coordenades que en l'actual *Disquisicions* desenvolupa a l'article 15, i la fórmula anterior és la mateixa que trobarà a l'article 19.

Aquesta fórmula demostra el teorema egregi, sempre que puguem demostrar analíticament l'existència de coordenades polars sobre la superfície. Però ni el 1825, ni el 1827 Gauss disposava d'una demostració analítica completa d'aquest fet, com molt bé remarca Spivak ([Spi79], vol. *II*, pàg. 119).

¿Què fa canviar de plans a Gauss i redactar-ho tot en un nou ordre? El motiu podria ser que es va adonar, a partir de la fórmula anterior per a la curvatura, que aquesta només depèn de m i que aquesta funció m només depèn de com es mesuren les longituds sobre la superfície i no de com la superfície esta doblegada a l'espai.

Per tant, calia trobar algebraicament una fórmula per a la curvatura en el sistema de coordenades en el qual ve donada la superfície, per tal de tenir una prova totalment rigorosa del teorema egregi. Això és el que acaba de fer aquí.

Si observem[44] que es té sempre

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2,$$

es veu immediatament que $\sqrt{Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2}$ és l'expressió general d'un element lineal[45] sobre una superfície corba. Per tant, l'anàlisi feta a l'article precedent ens ensenya que per a trobar la mesura de curvatura no calen fórmules finites que expressin les coordenades x, y, z com a funcions de les indeterminades p, q, sinó que és suficient conèixer l'expressió general de la longitud de cada element lineal. Procedim a algunes aplicacions d'aquest teorema tan important.

Suposem que la nostra superfície es pot desenvolupar[46] sobre una altra superfície, corba o plana, de manera que a cada punt de la primera superfície,

---

[44] En aquest article enuncia el teorema egregi, que acaba de demostrar amb l'extraordinària fórmula del final de l'article 11. Aquesta fórmula ens diu que la curvatura es pot calcular a partir de la mètrica, i per tant ens diu que la curvatura gaussiana és un invariant mètric. El teorema egregi l'enuncia en termes de superfícies desenvolupables, en el sentit d'isomètriques.

De fet, Gauss, com un corol·lari, demostra que les superfícies desenvolupables sobre el pla, en el sentit d'isomètriques, tenen curvatura zero. Euler havia donat una prova d'aquest resultat (vegeu [Eul72]), però segons Gauss la seva prova no era satisfactòria. Justament és en aquest article d'Euler on s'introdueix el concepte de superfície desenvolupable.

De fet, Euler també va considerar el problema general de desenvolupar una superfície sobre una altra, però això no es va publicar fins molt després de la seva mort, concretament el 1862 (vegeu [Eul56], vol. 29, pàg. 437-440).

També Monge, el 1780, havia estudiat les superfícies que es podien desplegar sobre un pla. Vegeu [Mon80].

El problema de les superfícies que es poden desenvolupar sobre un pla és una generalització del problema de trobar bons mapes de la superfície terrestre, superfície que ja se sabia que no era esfèrica.

[45] Gauss utilitza *elementi linearis*, per referir-se a l'element de longitud ds. Apareix la *primera forma fonamental* amb la notació $Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2$ que utilitzem avui dia; els coficients E, F, G apareixen per primer cop a l'article 11.

[46] Aquí és on apareix per primer cop la paraula *explicari*, que hem traduït com a *desenvolupable*. Ho remarquem perquè normalment s'entén per superfície desenvolupable una superfície reglada de curvatura zero (de fet, les superfícies desenvolupables són els cons, els cilindres i les superfícies engendrades per les tangents a les corbes guerxes). A la versió francesa de Roger, [Gau70], es reserva la paraula *desenvolupable* per a aquelles superfícies que es poden aplicar isomètricament sobre el pla. Però com que Gauss usa la mateixa paraula *explicari* en els dos casos, ≪explicari in aliam superficiem≫ o superfícies ≪in planum explicabilis≫, nosaltres l'hem traduït sempre per *desenvolupable*.

És molt remarcable que en aquests moments Gauss no disposava d'exemples de superfícies desenvolupables sobre altres superfícies llevat de les desenvolupables sobre el pla. Les superfícies eren subconjunts de l'espai euclidià; fins i tot Beltrami, en el seu famós determinat per les coordenades x, y, z, correspongui un punt concret de la segona superfície, de coordenades x', y', z'. Evidentment x', y', z' es poden mirar també com a funcions de les indeterminades p, q, i per tant l'element[47] $\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$ tindrà una expressió de la forma

$$\sqrt{E'dp^2 + 2F'dp \cdot dq + G'dq^2}\,,$$

on E', F', G' també denoten funcions de p, q. Però per la mateixa noció de *desenvolupament* d'una superfície sobre una altra és clar que els elements que es corresponen l'un amb l'altre sobre les dues superfícies són necessàriament iguals. Per tant, tindrem idènticament

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'.$$

Així la fórmula de l'article precedent ens porta immediatament a l'egregi[48]

Teorema. *Si una superfície corba es desenvolupa sobre qualsevol altra superfície, la mesura de curvatura en punts corresponents no canvia.*

També és evident que *qualsevol part finita de la superfície mantindrà la mateixa curvatura integral després de ser desenvolupada sobre una altra superfície.*

Un cas particular al qual els geòmetres havien restringit la seva atenció fins ara és el de les superfícies desenvolupables sobre un pla. La nostra teoria mostra directament que la mesura de la curvatura en cada punt d'aquestes superfícies és $= 0$, i per tant, si la natura d'aquestes superfícies està definida

article de 1868, [Bel68], pensa que el seu model del disc és una carta d'una superfície. Remarquem també que en tot el *Disquisicions* no apareix explícitament cap més altra superfície que l'esfera. Superfícies tan interessants com són l'helicoide i la catenoide eren ja conegudes anteriorment, i aquestes es poden desenvolupar l'una sobre l'altra! La catenoide s'atribueix a Euler, al voltant de 1744, i l'helicoide a Meusnier, l'any 1776.

L'any 1839 Minding va demostrar a [Min39] que *superfícies amb curvatura constant i igual són localment isomètriques.* Per tant, l'esfera és el model *local* universal per a totes les superfícies de curvatura constant positiva, el pla ho és per a totes les de curvatura zero, i la pseudoesfera que estudiarem a la secció H.2, per a totes les de curvatura constant negativa.

Les superfícies de revolució de curvatura constant positiva són exemples interessants de superfícies, que sense ser subconjunts de l'esfera, són localment isomètriques a l'esfera. Vegeu, per exemple, [dC76], pàg. 174.

Sobre aquests temes podeu consultar, per exemple, [dC76], [Str70] o [Kli78]. A la pàgina 80 d'aquest darrer hi ha un exemple molt interessant (de E. Heintze) d'una superfície amb curvatura zero no reglada.

[47] Aquí, i diverses vegades més endavant, Gauss utilitza *element* en lloc d'*element lineal.*

[48] Il·lustre, insigne.

d'acord amb el tercer mètode, tindrem en cada punt[49]

$$\frac{ddz}{dx^2} \cdot \frac{ddz}{dy^2} - (\frac{ddz}{dx \cdot dy})^2 = 0\,,$$

un criteri que, encara que conegut des de fa un temps, no ha estat demostrat, almenys que nosaltres sapiguem, amb tan rigor com és desitjable.

13

Les consideracions que acabem d'exposar estan lligades a una manera particular de concebre les superfícies que ens sembla digna, al més alt grau, de la consideració dels geòmetres.[50] En efecte, si es considera una superfície, no com la vora d'un sòlid, sinó com un sòlid flexible però no extensible, una dimensió del qual suposem que s'anul·la, llavors una part de les propietats de la superfície dependran de la forma particular que pugui adoptar per una flexió, però altres són absolutes i invariants, qualsevol que sigui aquesta forma en què la superfície es flexiona. És precisament a aquest darrer tipus de propietats, l'estudi de les quals obre a la geometria un camp nou i fèrtil, que pertanyen la mesura de curvatura i la curvatura integral, en el sentit que hem donat a aquestes expressions; també hi pertanyen la teoria de les línies més curtes,[51] i altres temes que tractarem més endavant. Des d'aquest punt

[49]Última fórmula de l'article 11 amb $E = 1 + z_x^2$, $G = 1 + z_y^2$, $F = z_x z_y$.

[50]Aquest article és la contribució més original del *Disquisicions*. És el naixement de la geometria intrínseca de superfícies. Però és important destacar que les superfícies en les quals Gauss està pensant són subconjunts especials de l'espai; no pensa en aquestes superfícies com a varietats bidimensionals abstractes. Quan, en matemàtiques, es va pensar en varietats bidimensionals abstractes, no necessàriament encaixades a l'espai euclidià? Aquesta és una pregunta important per a entendre la història de *la geometria no euclidiana.*

J. Bolyai i Lobatxevski foren els primers a construir axiomàticament un exemple del que, en el segle *XX*, els matemàtics anomenaren varietat riemanniana bidimensional. La geometria d'aquest nou objecte estava definida axiomàticament, però faltava donar explícitament un element de longitud, és a dir, les funcions E, F i G; ambdós autors les varen poder construir a partir dels axiomes dels *Elements*, però reemplaçant el cinquè postulat per la hipòtesi de l'existència de paral·leles asimptòtiques. Sembla que no va ser fins al 1840 que Gauss es va aproximar a aquest concepte en els seus estudis de *Geometria situs* (vegeu [KY96], pàg. 98).

Gauss, en la seva famosa carta a F. Bolyai, on pondera el treball del seu fill J. Bolyai (vegeu la pàgina 106), indirectament reconeix que J. Bolyai ha trobat la superfície que ell buscava, no encaixada a l'espai euclidià com ell pensava trobar-la, sinó en un nou espai, l'espai hiperbòlic.

[51]Gauss utilitza la paraula *brevissimis*, que ja havia usat Euler a [Eul28], per a les corbes que donen la distància mínima entre dos qualssevol dels seus punts.

de vista, una superfície plana i una superfície desenvolupable sobre un pla, e. g., cilíndrica, cònica, etc., s'han de mirar com a essencialment idèntiques, de manera que l'autèntica naturalesa de la superfície considerada es basa sempre en la fórmula $\sqrt{Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2}$, que és el nexe entre un element lineal qualsevol i les dues indeterminades p, q. Però abans de seguir aquest estudi més enllà, hem d'introduir els principis de la teoria de les línies més curtes sobre una superfície corba donada.

14

La naturalesa[52] d'una línia corba a l'espai està donada generalment considerant les coordenades x, y, z de tots els seus punts com a funcions d'una variable, que denotarem per w. La longitud d'una tal línia des d'un punt inicial arbitrari fins a un punt de coordenades x, y, z està donada per la integral

$$\int dw \sqrt{(\frac{dx}{dw})^2 + (\frac{dy}{dw})^2 + (\frac{dz}{dw})^2}.$$

Si suposem que la posició de la línia experimenta una variació infinitament petita, de manera que les coordenades dels diferents punts reben les variacions $\delta x, \delta y, \delta z$, la variació de la longitud total és

$$= \int \frac{dx \cdot d\delta x + dy \cdot d\delta y + dz \cdot d\delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

expressió que podem canviar a la forma:

$$\frac{dx \cdot \delta x + dy \cdot \delta y + dz \cdot \delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$
$$- \int \left(\delta x \cdot d\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} + \delta y \cdot d\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} + \delta z \cdot d\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} \right).$$

Sabem que en el cas en què la línia és la més curta entre els seus punts extrems, tot el que està sota el signe integral s'anul·la. Com que la línia ha d'estar sobre la superfície donada, la qual està definida per l'equació $Pdx+Qdy+Rdz = 0$, les variacions $\delta x, \delta y, \delta z$ també han de complir l'equació $P\delta x+Q\delta y+R\delta z = 0$, i a partir d'aquí es dedueix directament, d'acord amb regles ben conegudes, que les diferencials

$$d\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad d\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad d\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

[52] En aquest article Gauss investiga les equacions de les geodèsiques.

han de ser proporcionals a les quantitats P, Q, R respectivament. Sigui dr l'element de la línia corba; λ el punt de l'esfera que representa la direcció d'aquest element;[53] L el punt de l'esfera que representa la direcció de la normal a la superfície corba; finalment, siguin ξ, η, ζ les coordenades del punt λ, i X, Y, Z les del punt L en relació amb el centre de l'esfera. Tindrem llavors

$$dx = \xi dr\,, \quad dy = \eta dr\,, \quad dz = \zeta dr\,,$$

a partir de les quals veiem que les anteriors diferencials esdevenen $d\xi, d\eta, d\zeta$. I com que les quantitats P, Q, R són proporcionals a X, Y, Z, el caràcter de la línies més curtes s'expressa per les equacions[54]

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{d\zeta}{Z}\,.$$

A més, es pot veure fàcilment que $\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}$ és igual a l'arc més petit sobre la superfície esfèrica que mesura l'angle entre les direccions de les tangents al principi i al final de l'element dr, i és, doncs, $= \dfrac{dr}{\rho}$, si ρ denota el radi de curvatura de la línia més curta en aquest punt. Així tindrem

$$\rho d\xi = X dr\,, \quad \rho d\eta = Y dr\,, \quad \rho d\zeta = Z dr\,.$$

15

Suposem[55] que un nombre infinit de línies més curtes surten d'un punt donat A sobre la superfície corba, i distingim aquestes línies l'una de l'altra per l'angle que el primer element[56] de cadascuna forma amb el primer element d'una, que prendrem com la primera: sigui φ l'angle o, més generalment, una funció d'aquest angle, i r la longitud d'aquesta línia més curta des del punt A al punt de coordenades x, y, z. Com que a valors determinats de les variables r, φ corresponen punts determinats sobre la superfície, les coordenades x, y, z es poden mirar com a funcions de r, φ. Mantindrem les

[53] Està identificant *element*, o element lineal, amb una petita porció de la corba, de la qual pot calcular el vector tangent.

[54] Gauss redemostra el teorema d'Euler, publicat en el segon volum de la *Mecànica*, [Eul56], que l'acceleració d'una geodèsica té la direcció de la normal a la superfície. Vegeu Rosenfeld, [Ros88], pàg. 282.

[55] Ja hem comentat que és justament aquí on Gauss introdueix el sistema de coordenades polars.

[56] Gauss utilitza l'expressió *elemento primo*. La tangent en el punt.

notacions $\lambda, L, \xi, \eta, \zeta, X, Y, Z$ amb el mateix significat que en l'article precedent, referint-se aquesta notació a qualsevol punt sobre qualsevol de les línies més curtes.

Totes les línies més curtes que són de la mateixa longitud r acabaran en una altra línia la longitud de la qual, mesurada a partir d'un punt inicial arbitrari, denotarem per v. Així v és pot mirar com a funció de les indeterminades r, φ, i si λ' denota el punt de la superfície esfèrica corresponent a la direcció de l'element dv, i també ξ', η', ζ' denoten les coordenades d'aquest punt en relació amb el centre de l'esfera, tindrem

$$\frac{dx}{d\varphi} = \xi' \cdot \frac{dv}{d\varphi}\,, \quad \frac{dy}{d\phi} = \eta' \cdot \frac{dv}{d\varphi}\,, \quad \frac{dz}{d\phi} = \zeta' \cdot \frac{dv}{d\varphi}\,.$$

A partir d'aquestes equacions i de les equacions

$$\frac{dx}{dr} = \xi\,, \quad \frac{dy}{dr} = \eta\,, \quad \frac{dz}{dr} = \zeta\,,$$

tenim

$$\frac{dx}{dr} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dr} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{dr} \cdot \frac{dz}{d\varphi} = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') \cdot \frac{dv}{d\phi} = \cos\lambda\lambda' \cdot \frac{dv}{d\phi}\,.$$

Denotem per S el primer membre d'aquesta equació, el qual serà també una funció de r, ϕ. La diferenciació de S respecte a r dóna

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dr} &= \frac{ddx}{dr^2} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{ddy}{dr^2} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{ddz}{dr^2} \cdot \frac{dz}{d\varphi} + \frac{1}{2} \frac{d((\frac{dx}{dr})^2 + (\frac{dy}{dr})^2 + (\frac{dz}{dr})^2)}{d\varphi} \\ &= \frac{d\xi}{dr} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{d\eta}{dr} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{d\zeta}{dr} \cdot \frac{dz}{d\varphi} + \frac{1}{2} \frac{d(\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta)}{d\varphi}\,. \end{aligned}$$

Però $\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta = 1$, i per tant la seva diferencial és $= 0$; i per l'article precedent tenim, si ρ denota el radi de curvatura de la línia r,

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{X}{\rho}\,, \quad \frac{d\eta}{dr} = \frac{Y}{\rho}\,, \quad \frac{d\zeta}{dr} = \frac{Z}{\rho}\,.$$

Així tenim

$$\frac{dS}{dr} = \frac{1}{\rho} \cdot (X\xi' + Y\eta' + Z\zeta') \cdot \frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{\rho} \cdot \cos L\lambda' \cdot \frac{dv}{d\varphi} = 0$$

ja que λ' està evidentment sobre el cercle màxim de pol L. A partir d'això veiem que S és independent de r, i és, per tant, una funció de ϕ únicament.

Però per a $r = 0$ tenim evidentment $v = 0$; conseqüentment $\dfrac{dv}{d\varphi} = 0$ i $S = 0$ independentment de φ. Així, en general, tenim necessàriament $S = 0$, i doncs $\cos\lambda\lambda' = 0$, i. e. $\lambda\lambda' = 90°$. A partir d'això obtenim[57]

TEOREMA. *Si sobre una superfície corba es dibuixen des del mateix punt inicial un nombre infinit de línies més curtes d'igual longitud, les línies que uneixen les seves extremitats seran normals a cadascuna de les línies.*

Hem pensat[58] que val la pena deduir aquest teorema a partir de la propietat fonamental de les línies més curtes: però la veritat del teorema es fa evident sense cap càlcul mitjançant el raonament següent. Siguin AB, AB' dues línies de longitud mínima de la mateixa longitud que formen en A un angle infinitament petit, i suposem que algun dels angles formats per l'element BB' amb les línies BA, $B'A$ difereix d'un angle recte per una petita quantitat; llavors, per continuïtat, l'un serà més gran i l'altre més petit que un angle recte. Suposem que l'angle en B és $= 90° - \omega$, i prenem un punt C sobre la línia AB, tal que $BC = BB' \cdot \operatorname{cosec} \omega$: llavors, com que el triangle infinitament petit $BB'C$ es pot considerar pla, tindrem $CB' = BC \cdot \cos\omega$, i conseqüentment

$$AC + CB' = AC + BC \cdot \cos\omega = AB - BC \cdot (1 - \cos\omega) = AB' - BC \cdot (1 - \cos\omega),$$

i. e., el camí de A a B a través del punt C és més curt que la línia de longitud mínima. Q.e.a.

16

Al teorema[59] de l'article precedent n'associem un altre, el qual enunciem com segueix. *Si sobre una superfície corba imaginem una línia qualsevol, i a partir de punts diferents d'aquesta es dibuixen perpendicularment i cap a un mateix costat una infinitat de línies més curtes de la mateixa longitud, la corba que uneix les seves altres extremitats talla cadascuna de les línies en angle recte.* Per a la demostració d'aquest teorema no es necessita fer cap canvi en l'anàlisi precedent, excepte que φ ha de denotar la longitud de

[57] Aquest resultat és conegut com el *Lema de Gauss*.

[58] Un comentari que torna a revelar l'interès de GAUSS per a trobar demostracions analítiques en lloc de les geomètriques, malgrat que aquestes siguin evidents. Aquesta actitud s'entén si acceptem la hipòtesi que el *Disquisicions* és part de la seva investigació sobre el cinquè postulat i desenvolupa el programa analític de Lambert.

[59] En aquest article estén el resultat obtingut anteriorment; explica com, de la mateixa manera, podria demostrar-se l'existència de coordenades normals a una corba sobre una superfície; i insisteix que les proves geomètriques són quasi òbvies.

la corba *donada* mesurada a partir d'un punt arbitrari; o també, una funció d'aquesta longitud; així tot el raonament funciona també aquí, amb aquesta modificació, i la veritat de l'equació $S = 0$ per a $r = 0$ està ara implícita a la mateixa hipòtesi. A més, aquest teorema és més general que el precedent, ja que podem considerar que l'inclou, si prenem com la línia donada un cercle infinitament petit descrit al voltant de A.[60] Finalment, advertim que també aquí com precedentment, consideracions geomètriques poden prendre el lloc de l'anàlisi, les quals, no obstant això, no ens prendrem el temps de considerar aquí, ja que són suficientment òbvies.[61]

17

Tornem[62] a la fórmula $\sqrt{Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2}$, que expressa de manera general la magnitud de l'element lineal de la superfície corba, i investiguem, primer de tot, el significat geomètric dels coeficients E, F, G. Ja hem dit a l'article 5 que podem suposar que tenim sobre la superfície corba dos sistemes de línies, l'un pel qual p és variable i q constant; l'altre pel qual q és variable i p constant. Qualsevol punt de la superfície es pot mirar com la intersecció d'una línia del primer sistema amb una línia del segon: i llavors l'element[63] de la primera línia adjacent a aquest punt i corresponent a una variació dp serà $= \sqrt{E}dp$; anàlogament l'element de la segona línia corresponent a la variació dq serà $= \sqrt{G}dq$; finalment, denotant per ω l'angle entre aquests elements, es veu fàcilment que

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}\,.$$

A més, l'àrea de l'element de superfície amb forma de paral·lelogram entre les dues línies del primer sistema, a les quals corresponen $q, q + dq$, i les dues línies del segon sistema, a les quals corresponen $p, p + dp$, serà

[60] En el límit, quan el cercle tendeix al punt, tenim les coordenades polars de l'article 15.

[61] Novament GAUSS prefereix demostracions analítiques, malgrat l'evidència geomètrica.

[62] Com que GAUSS està pensant en una superfície euclidiana, la geometria de la qual és la induïda per l'espai euclidià que la rodeja, les fórmules d'aquest article són teoremes que s'han de demostrar; no ho fa perquè eren resultats ben coneguts, que s'obtenien aplicant el mètode dels infinitèsims. Si la geometria estigués definida per E, F i G, aquestes fórmules serien definicions.

Precisament un dels problemes més fonamentals que J. BOLYAI aconsegueix tractar amb cert èxit és el problema de l'àrea en el pla hiperbòlic i ho fa definint l'àrea a partir del diferencial $dA = \sqrt{EG - F^2}dp \cdot dq$. Vegeu [Bol31], pàg. 30.

[63] Element de longitud.

$\sqrt{EG - FF}dp \cdot dq$. Qualsevol línia sobre la superfície corba, diferent de les que pertanyen a l'un o l'altre dels dos sistemes, s'obté concebent p i q com a funcions d'una nova variable, o que l'una és funció de l'altra. Sigui s la longitud d'una tal corba, mesurada a partir d'un punt inicial arbitrari, i en una direcció qualsevol elegida com a positiva. Sigui θ l'angle que l'element $ds = \sqrt{Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2}$ forma amb la línia del primer sistema dibuixada a través del punt inicial de l'element, i, perquè no hi hagi ambigüitat, suposem que aquest angle està mesurat a partir de la branca de la primera línia sobre la qual el valor de p augmenta, i és considerat com a positiu cap al costat on els valors de q augmenten. Fets aquests convenis, es veu fàcilment que

$$\cos\theta \cdot ds = \sqrt{E} \cdot dp + \sqrt{G} \cdot \cos\omega \cdot dq = \frac{Edp + Fdq}{\sqrt{E}}$$

$$\sin\theta \cdot ds = \sqrt{G}\sin\omega \cdot dq = \frac{\sqrt{EG - FF} \cdot dq}{\sqrt{E}}.$$

18

Investigarem[64] ara la condició perquè aquesta línia sigui de longitud mínima. Com que la seva longitud està expressada per la integral

$$s = \int \sqrt{Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2}$$

la condició de mínim requereix que la variació d'aquesta integral produïda per un canvi infinitament petit de posició sigui $= 0$. El càlcul, per als nostres propòsits, es fa més fàcil en aquest cas, si pensem en p com a funció de q. Fet això, si denotem la variació per la característica δ, tenim

[64] En aquest article, seguint un mètode emprat per Euler i Lagrange, mètode que es coneix avui com a càlcul de variacions (vegeu [Kli72]), Gauss calcula la condició que ha de complir l'angle d'inclinació d'una línia arbitrària respecte a les línies coordenades, per tal que la longitud d'aquesta línia sigui mínima; és a dir, troba l'equació d'Euler-Lagrange d'una geodèsica.

$$\begin{aligned}
\delta_s &= \int \frac{(\frac{dE}{dp}\cdot dp^2 + 2\frac{dF}{dp}\cdot dp\cdot dq + \frac{dG}{dp}\cdot dq^2)\delta p + (2Edp + 2Fdq)d\delta p}{2ds} \\
&= \frac{Edp + Fdq}{ds}\delta p + \\
&+ \int \delta p \left(\frac{\frac{dE}{dp}\cdot dp^2 + \frac{2dF}{dp}\cdot dp\cdot dq + \frac{dG}{dp}\cdot dq^2}{2ds} - d\cdot\frac{Edp + Fdq}{ds} \right)
\end{aligned}$$

i sabem que el que està inclòs en el signe integral s'ha d'anul·lar independentment de δp. Així doncs, tenim[65]

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dp}\cdot dp^2 \; + \; 2\frac{dF}{dp}\cdot dp\cdot dq + \frac{dG}{dp}\cdot dq^2 &= 2ds\cdot d\cdot\frac{Edp + Fdq}{ds} \\
&= 2ds\cdot d\cdot\sqrt{E}\cdot\cos\theta \\
&= \frac{ds\cdot dE\cdot\cos\theta}{\sqrt{E}} - 2ds\cdot d\theta\cdot\sqrt{E}\cdot\sin\theta \\
&= \frac{(Edp + Fdq)dE}{E} - \sqrt{EG - FF}\cdot dq\cdot d\theta \\
&= \left(\frac{Edp + Fdq}{E}\right)\cdot\left(\frac{dE}{dp}\cdot dp + \frac{dE}{dq}\cdot dq\right) - 2\sqrt{EG - FF}\cdot dq\cdot d\theta
\end{aligned}$$

Això dóna la següent condició per a una línia de longitud mínima:

$$\begin{aligned}
\sqrt{EG - FF}\cdot d\theta &= \frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{dE}{dp}\cdot dp + \frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{dE}{dq}\cdot dq + \frac{1}{2}\frac{dE}{dq}\cdot dp \\
&- \frac{dF}{dp}\cdot dp - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp}\cdot dq\,,
\end{aligned}$$

la qual també es pot escriure com

$$\sqrt{EG - FF}\cdot d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}\cdot dE + \frac{1}{2}\frac{dE}{dq}\cdot dp - \frac{dF}{dp}\cdot dp - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp}\cdot dq\,.$$

A partir d'aquesta equació, mitjançant l'equació

$$\cot\theta = \frac{E}{\sqrt{EG - FF}}\cdot\frac{dp}{dq} + \frac{F}{\sqrt{EG - FF}}$$

[65] A la versió anglesa hi ha un petit error tipogràfic corresponent a la quarta igualtat.

és també possible eliminar l'angle θ, i derivar-ne una equació diferencial de segon ordre entre p i q, la qual, no obstant això, seria més complicada i menys útil per a les aplicacions que la fórmula precedent.

19

Les fórmules generals,[66] que hem obtingut en els articles[67] 11 i 18 per a la mesura de curvatura i la variació en la direcció d'una línia de longitud mínima, esdevenen més simples si les quantitats p i q s'agafen de tal manera que les línies del primer sistema tallin ortogonalment a tot arreu les línies del segon sistema; i. e., de manera que tinguem amb generalitat $\omega = 90°$, o $F = 0$. Llavors la fórmula per a la mesura de curvatura esdevé

$$\begin{aligned} 4EEGGk &= E \cdot \frac{dE}{dq} \cdot \frac{dG}{dq} + E\left(\frac{dG}{dp}\right)^2 + \\ &\quad G \cdot \frac{dE}{dp} \cdot \frac{dG}{dp} + G\left(\frac{dE}{dq}\right)^2 - 2EG\left(\frac{ddE}{dq^2} + \frac{ddG}{dp^2}\right), \end{aligned}$$

i per a la variació de l'angle θ

$$\sqrt{EG} \cdot d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{dE}{dq} \cdot dp - \frac{1}{2} \cdot \frac{dG}{dp} \cdot dq\,.$$

Entre els diversos casos en els quals tenim aquesta condició d'ortogonalitat el més important és aquell en el qual totes les línies d'un dels dos sistemes, e. g., el primer, són línies de longitud mínima. Llavors, per a un valor constant de q, l'angle θ esdevé $= 0$, i per tant l'equació per a la variació de θ donada mostra que hem de tenir $\frac{dE}{dq} = 0$, que vol dir que el coeficient E ha de ser independent de q; i. e., E ha de ser o una constant o funció únicament de p. Serà més simple agafar com a p la longitud de cada línia del primer sistema, la qual, quan totes les línies del primer sistema es troben en un punt, s'ha de mesurar a partir d'aquest punt, o, si no hi ha intersecció comuna, a partir de qualsevol línia del segon sistema. Fetes aquestes convencions, és evident que p i q denoten ara les mateixes quantitats que varen ser denotades en els

[66] En aquest article Gauss mostra que les fórmules de la curvatura i de l'equació de la geodèsica adquireixen una forma especialment simple si les línies coordenades són ortogonals, per tant $F = 0$, i una de les línies coordenades defineix una família de geodèsiques, per exemple, en un sistema de coordenades polars com l'estudiat a l'article 15.

[67] Gauss escriu aquí, i cada cop que surt la paraula "articles" més endavant, «artt.».

articles 15, 16 per a r i φ, i que $E = 1$. Així les dues fórmules precedents esdevenen:

$$\begin{aligned} 4GGk &= \left(\frac{dG}{dp}\right)^2 - 2G\frac{ddG}{dp^2} \\ \sqrt{G}\cdot d\theta &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{dG}{dp}\cdot dq \end{aligned}$$

o, posant $\sqrt{G} = m$,

$$k = -\frac{1}{m}\cdot\frac{ddm}{dp^2}\,, \qquad d\theta = -\frac{dm}{dp}\cdot dq\,.$$

Parlant genèricament, m serà una funció de p, q i $m\,dq$ serà l'expressió per a un element qualsevol d'una línia del segon sistema. Però en el cas particular que totes les línies p surten del mateix punt, hem de tenir, evidentment, $m = 0$ per a $p = 0$; així doncs, en aquest cas, si prenem com a q l'angle que forma el primer element[68] d'una línia qualsevol del primer sistema amb el primer element d'una línia qualsevol agafada arbitràriament, i si remarquem que per a un valor infinitament petit de p l'element d'una línia del segon sistema (la qual es pot considerar com un cercle descrit amb radi p) és $= pdq$, tindrem, per a un valor infinitament petit de p, $m = p$, i consegüentment, per a $p = 0$, tindrem al mateix temps $m = 0$ i $\dfrac{dm}{dp} = 1$.[69]

20

Aturem-nos un moment a investigar[70] el cas en el qual p denota de manera genèrica la longitud de la corba més curta traçada des d'un punt

[68] Recordem que *primer element* vol dir la tangent.

[69] Així, la funció $m = \sqrt{G}$ no és arbitrària, sinó que ha de complir aquestes dues condicions inicials. Remarquem que dedueix aquestes condicions usant arguments geomètrics. Podeu trobar una deducció analítica al volum *II* de Spivak [Spi79], en la seva celebrada lectura del *Disquisicions*, o també a Struik [Str70], pàgina 158, on es detallen aquests arguments geomètrics de Gauss.

En aquest punt Gauss, renunciant a la prova analítica, està complint només parcialment amb el programa analític de Lambert; i, per tant, hauria de veure's com una debilitat del *Disquisicions*.

[70] Aquest és l'article més important del *Disquisicions* pel que fa a la història de la geometria no euclidiana. Gauss hi demostra que la curvatura total d'un triangle geodèsic $\triangle ABC$ és $\pm(\pi - (A + B + C))$; anomenarem aquesta diferència la *desviació angular* del triangle. També es parla d'*excés* (si val el signe menys) o *defecte* (si val el signe més). Aquest resultat fundacional de la geometria diferencial és un cas particular del *teorema de Gauss-Bonnet*, i en aquestes notes, aquest cas particular, l'anomenarem *teorema del*

fixat A a qualsevol altre punt de la superfície, i q l'angle que el primer element d'aquesta línia forma amb el primer element d'una altra línia més curta que surt de A. Sigui B un punt determinat sobre la línia per a la qual $q = 0$, i sigui C un altre punt determinat sobre la superfície pel qual q tindrà un valor que designarem simplement per A. Suposem els punts B, C units per una línia més curta, de la qual designarem, de manera general, per s, com en l'article 18, la longitud a partir del punt B i, com allà, també denotarem per θ l'angle que cada element ds forma amb l'element dp: i finalment, denotarem per θ^0, θ' els valors de l'angle θ en els punts B, C. Tindrem així, sobre la superfície corba, un triangle format per tres línies més curtes, els angles del qual en B i C, que denotarem simplement per les mateixes lletres, seran respectivament iguals al complement de l'angle θ° a 180°, i al mateix angle θ'. Però, tal com es veu fàcilment a partir de la nostra anàlisi, tots els angles s'expressen, no en graus, sinó per números, de tal manera que l'angle $57^\circ 17' 45''$, al qual correspon un arc igual al radi, es pren com a unitat, de manera que tenim

$$\theta^\circ = \pi - B, \quad \theta' = C\,,$$

on 2π denota la circumferència del cercle. Examinem ara la curvatura integral d'aquest triangle, la qual és $= \int k\; d\sigma$, on $d\sigma$ denota un element de superfície del triangle; i com que aquest element s'expressa per $m\,dp \cdot dq$, hem de calcular la integral $\int k\,m\,dp \cdot dq$ sobre tota la superfície del triangle. Comencem per la integració respecte a p, la qual, per ser

$$k = -\frac{1}{m} \cdot \frac{ddm}{dp^2}\,,$$

---

defecte.

En la demostració del teorema del defecte, la fórmula de la variació de l'angle d'inclinació $d\theta = -\dfrac{dm}{dp}dq$ juga un paper fonamental. Per això, a aquesta fórmula l'anomenarem *la versió infinitesimal del teorema del defecte.*

En el capítol 2 provarem detalladament com aquest resultat és el vertader origen del *Disquisicions*. La idea és senzilla: Gauss en la seva lectura del treball de Lambert va tractar de provar aquest teorema per al cas de la geometria de l'angle agut, ja que la prova de Lambert era clarament incompleta, com ell mateix assenyalava. Vegeu el treball d'Engels i Stäckel [ES95], el punt 5 de l'*analogia* i la carta de Gauss a Gerling de 1819, resumida a la pàgina 103 d'aquest llibre.

Amb la idea de seguir l'analogia de Lambert, estudia primer el resultat per a l'esfera ordinària, per tal de poder generalitzar-lo posteriorment a una esfera de radi imaginari. Fa una prova analítica d'aquest resultat a l'esfera i descobreix que la clau està a conèixer com canvia l'angle d'inclinació dels cercles màxims respecte dels meridians.

La generalització d'aquesta prova per a una superfície en general el porta a la seva versió del *Disquisicions* de 1825 i, posteriorment, al descobriment de la fórmula de la curvatura en termes que només depenen dels coeficients E, F i G: el nucli del *Disquisicions*.

dóna

$$dq \cdot \left(\text{Const.} - \frac{dm}{dp}\right),$$

per a la curvatura integral de l'àrea compresa entre les línies del primer sistema, a les quals correspon el valor $q, q + dq$ de la segona indeterminada: com que aquesta curvatura integral s'ha d'anul·lar per a $p = 0$, la constant introduïda per la integració ha de ser igual al valor de $\frac{dm}{dq}$ per a $p = 0$, i. e., igual a la unitat. Així tenim

$$dq \left(1 - \frac{dm}{dq}\right),$$

on per a $\frac{dm}{dq}$ s'ha de prendre el valor corresponent al cas en què l'àrea acaba en la línia CB. Però sobre aquesta línia tenim, per l'article precedent,

$$\frac{dm}{dq} \cdot dq = -d\theta\,;$$

per tant, la nostra expressió es redueix a $dp + dq$. Ara, per una segona integració, estesa des de $q = 0$ fins a $q = A$, obtenim per a la curvatura integral del triangle $= A + \theta' - \theta^\circ = A + B + C - \pi$.

La curvatura integral és igual a l'àrea d'aquella part de l'esfera que correspon al triangle, considerada amb signe positiu o negatiu segons que la superfície corba en la qual està el triangle sigui concavocòncava o concavoconvexa: per unitat d'àrea es prendrà el quadrat de costat igual a la unitat (el radi de l'esfera), de manera que la superfície completa de l'esfera és $= 4\pi$. Així la part de la superfície de l'esfera corresponent al triangle és a la completa superfície de l'esfera com $\pm(A + B + C - \pi)$ és a 4π. Aquest teorema, que si no ens equivoquem, s'hauria de contar entre els més elegants de la teoria de superfícies corbes, es pot enunciar també com segueix:[71]

L'excés sobre 180° *de la suma dels angles d'un triangle format per línies més curtes sobre una superfície concavocòncava, o el dèficit sobre* 180° *de la suma dels angles d'un triangle format per línies més curtes sobre una superfície concavoconvexa, està mesurat per l'àrea de la part de l'esfera que correspon, a través de les direccions de les normals, a aquest triangle, si la superfície total de l'esfera és igual a* 720 *graus.*[72]

Més generalment, sobre qualsevol polígon de n costats, cadascun d'ells format per línies més curtes, l'excés de la suma dels angles sobre $(2n - 4)$

[71] Aquest és el teorema del defecte.

[72] Curiosa manera de dir esfera de radi 1.

angles rectes, o el dèficit respecte a $(2n-4)$ angles rectes (segons la natura de la superfície corba), és igual a l'àrea del corresponent polígon sobre l'esfera, si la superfície total de l'esfera és igual a 720 graus; la qual cosa es dedueix directament del teorema precedent dividint el polígon en triangles.

21

Tornem[73] a donar als símbols p, q, E, F, G, ω els significats generals que els havíem donat abans, i suposem que la naturalesa de la superfície corba que es considera està definida també, de manera similar, per unes altres dues variables p', q'; en aquest cas l'element lineal general està expressat per

$$\sqrt{E'dp'^2 + 2F'dp' \cdot dq' + G'dq'^2}\,.$$

Així, a cada punt sobre la superfície, definit per valors determinats de les variables p, q, correspondrà un valor determinat de les variables p', q', les quals seran, doncs, funcions de p, q, i suposem que la diferenciació dóna

$$\begin{aligned} dp' &= \alpha dp + \beta dq \\ dq' &= \gamma dp + \delta dq\,. \end{aligned}$$

Ens proposem en aquest moment descobrir el significat geomètric dels coeficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Podem suposar, pel que precedeix, que sobre la superfície corba hi ha *quatre* sistemes de línies, per a les quals p, q, p', q' respectivament són constants.[74] Si a partir del punt determinat al qual corresponen els valors p, q, p', q' de les variables suposem dibuixades les quatre línies corresponents a aquests diferents sistemes, els elements d'aquestes línies, corresponents als increments positius dp, dq, dp', dq', seran

$$\sqrt{E} \cdot dp, \sqrt{G} \cdot dq, \sqrt{E'} \cdot dp', \sqrt{G'} \cdot dq'.$$

[73] A l'article anterior finalitza, des del nostre punt de vista, la primera part del *Disquisicions*, íntimament lligada al problema de la teoria de les paral·leles, com esperem demostrar en aquest treball. La resta d'articles, del 21 al 29, estan relacionats amb problemes de geodèsia. Gauss hi generalitza el famós teorema de Legendre sobre triangles geodèsics de l'esfera (vegeu el peu de la pàgina 77).

Si s'eliminessin aquests articles, la influència del *Disquisicions* sobre el desenvolupament de la geometria riemanniana no es veuria significativament afectada.

Però la idea de comparar un triangle geodèsic sobre una superfície amb el triangle euclidià de costats congruents és l'origen del treball d'A. D. Aleksandrov, [AZ67], sobre geometria intrínseca de superfícies.

[74] Aquí és clar que Gauss està considerant dos sistemes de coordenades sobre la mateixa superfície corba i estudia el canvi de coordenades. Aquest serà un punt central en l'estudi de les varietats abstractes.

Els angles que les direccions d'aquests elements determinen amb una direcció fixada arbitrària els denotarem per M, N, M', N', mesurats en el sentit en què la segona línia està situada respecte de la primera, de manera que $\sin(N - M)$ sigui una quantitat positiva: suposarem (la qual cosa és lícita) que la quarta línia està situada en el mateix sentit respecte de la tercera, de manera que $\sin(N' - M')$ també sigui una quantitat positiva. Un cop fets aquests convenis, si considerem un altre punt a distància infinitament petita del primer punt, al qual corresponen els valors

$$p + dp,\ q + dq,\ p' + dp',\ q' + dq'$$

de les variables, veiem sense massa dificultat que tindrem de manera general, i. e., independentment dels valors dels increments dp, dq, dp', dq',

$$\sqrt{E} \cdot dp \cdot \sin M + \sqrt{G} \cdot dq \cdot \sin N = \sqrt{E'} \cdot dp' \cdot \sin M' + \sqrt{G'} \cdot dq' \cdot \sin N'$$

ja que cadascuna d'aquestes expressions és simplement la distància del nou punt a la línia a partir de la qual comencen els angles de les direccions.

Per tant tenim, amb la notació introduïda anteriorment, $N - M = \omega$ i, per analogia, posem $N' - M' = \omega'$, i també $N - M' = \psi$.

Llavors l'equació que acabem de trobar es pot escriure de la forma següent:

$$\begin{aligned} \sqrt{E} \cdot dp \cdot \sin(M' - \omega + \psi) \quad &+ \quad \sqrt{G} \cdot dq \cdot \sin(M' + \psi) \\ &= \quad \sqrt{E'} \cdot dp' \cdot \sin M' + \sqrt{G'} \cdot dq' \cdot \sin(M' + \omega') \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \sqrt{E} \cdot dp \cdot \sin(N' \ - \ \omega - \omega' + \psi) &+ \sqrt{G} \cdot dq \cdot \sin(N' - \omega' + \psi) \\ &= \ \sqrt{E'} \cdot dp' \cdot \sin(N' - \omega') + \sqrt{G'} \cdot dq' \cdot \sin N'. \end{aligned}$$

I com que l'equació ha de ser evidentment independent de la direcció inicial, aquesta direcció es pot elegir arbitràriament. Llavors, posant a la segona fórmula $N' = 0$, o a la primera $M' = 0$, obtenim les equacions següents:

$$\begin{aligned} \sqrt{E'} \sin \omega' \cdot dp' \quad &= \quad \sqrt{E} \cdot \sin(\omega + \omega' - \psi) \cdot dp + \sqrt{G} \cdot \sin(\omega' - \psi) \cdot dq \\ \sqrt{G'} \sin \omega' \cdot dq' \quad &= \quad \sqrt{E} \cdot \sin(\psi - \omega) \cdot dp + \sqrt{G} \cdot \sin \psi \cdot dq \end{aligned}$$

i aquestes equacions, com que han de ser idèntiques a

$$\begin{aligned} dp' \quad &= \quad \alpha dp + \beta dq \\ dq' \quad &= \quad \gamma dp + \delta dq\,, \end{aligned}$$

determinen els coeficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Tindrem

$$\alpha = \sqrt{\frac{E}{E'}} \cdot \frac{\sin(\omega + \omega' - \psi)}{\sin \omega'}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{G}{E'}} \cdot \frac{\sin(\omega' - \psi)}{\sin \omega'},$$
$$\gamma = \sqrt{\frac{E}{G'}} \cdot \frac{\sin(\psi - \omega)}{\sin \omega'}, \qquad \delta = \sqrt{\frac{G}{G'}} \cdot \frac{\sin(\psi)}{\sin \omega'}.$$

Aquestes quatre equacions, juntament amb

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \cos \omega' = \frac{F'}{\sqrt{E'G'}},$$
$$\sin \omega = \sqrt{\frac{EG - FF}{EG}}, \qquad \sin \omega' = \sqrt{\frac{E'G' - F'F'}{\sqrt{E'G'}}},$$

es poden escriure com

$$\begin{aligned}
\alpha\sqrt{E'G' - F'F'} &= \sqrt{EG'} \cdot \sin(\omega + \omega' - \psi) \\
\beta\sqrt{E'G' - F'F'} &= \sqrt{GG'} \cdot \sin(\omega' - \psi) \\
\gamma\sqrt{E'G' - F'F'} &= \sqrt{EE'} \cdot \sin(\psi - \omega) \\
\delta\sqrt{E'G' - F'F'} &= \sqrt{GE'} \cdot \sin(\psi).
\end{aligned}$$

Com que per les substitucions $dp' = \alpha dp + \beta dq$, $dq' = \gamma dp + \delta dq$ el trinomi $E'dp'^2 + 2F'dp' \cdot dq' + G'dq'^2$ es transforma en $Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2$, fàcilment obtenim[75]

$$EG - FF = (E'G' - F'F')(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

i, com que, viceversa, el segon polinomi s'ha de transformar en el primer per la substitució

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)dp = \delta dp' - \beta dq', \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma)dq = -\gamma dp' + \alpha dq',$$

trobem

$$\begin{aligned}
E\delta\delta - 2F\gamma\delta + G\gamma\gamma &= \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'} \cdot E' \\
-E\beta\delta + F(\alpha\delta + \beta\gamma) - G\alpha\gamma &= \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'} \cdot F' \\
E\beta\beta - 2F\alpha\beta + G\alpha\alpha &= \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'} \cdot G'.
\end{aligned}$$

[75] Aquesta és la fórmula a la qual fem referència a la pàgina 91.

A partir de les disquisicions generals de l'article precedent passem a l'aplicació més estesa, en la qual, tot conservant per a p i q el seu significat més general, prenem per a p', q' les quantitats denotades a l'article 15 per r, φ, de manera que aquí també, per a qualsevol punt sobre la superfície, r serà la distància més curta des d'un punt fixat i φ l'angle en aquest punt entre el primer element[76] de r i una direcció fixada. Tenim així $E' = 1\,, \quad F' = 0\,, \quad \omega' = 90°$: posem també $\sqrt{G'} = m\,$, de manera que qualsevol element lineal serà $= \sqrt{(dr^2 + m\,md\phi^2)}$. Conseqüentment, les quatre equacions deduïdes a l'article precedent per a $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ donen:

$$\sqrt{E} \cdot \cos(\omega - \psi) = \frac{dr}{dp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$\sqrt{G} \cdot \cos\psi = \frac{dr}{dq} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$\sqrt{E} \cdot \sin(\psi - \omega) = m \cdot \frac{d\varphi}{dp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$
$$\sqrt{G} \cdot \sin\psi = m \cdot \frac{d\varphi}{dq} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Però l'última i penúltima equacions de l'article precedent donen

$$EG - FF = E\left(\frac{dr}{dq}\right)^2 - 2F \cdot \frac{dr}{dp} \cdot \frac{dr}{dq} + G\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 \quad \ldots \quad (5)$$
$$\left(E \cdot \frac{dr}{dq} - F \cdot \frac{dr}{dp}\right) \cdot \frac{d\varphi}{dq} = \left(F \cdot \frac{dr}{dq} - G \cdot \frac{dr}{dp}\right) \cdot \frac{d\varphi}{dp} \quad \ldots \quad (6)$$

A partir d'aquestes equacions es poden determinar les quantitats r, φ, ψ i (si és necessari) m, a partir de p i q:[77] de fet, la integració de l'equació (5) donarà r; un cop trobat r, la integració de l'equació (6) donarà φ; i l'una o l'altra de les equacions (1), (2) donarà ψ: finalment obtindrem m a partir de l'una o l'altra de les equacions (3), (4).

La integració general de les equacions (5), (6) introduirà necessàriament dues funcions arbitràries, el significat de les quals entendrem fàcilment si recordem que aquestes equacions no es limiten al cas que estem considerant aquí, sinó que són igualment vàlides si r i φ es consideren en el sentit més general de l'article 16, de manera que r és la longitud de la línia més curta normal a una línia fixada però arbitrària, i φ és una funció arbitrària de

[76] Vector tangent.

[77] Tenim, doncs, una caracterització analítica de les coordenades polars r, φ sobre la superfície, llevat del detall que el canvi de p, q a r, φ sigui difeomorfisme local.

la longitud d'aquella part de la línia fixada que és interceptada entre qualsevol línia de longitud mínima i un punt fix arbitrari. La solució general ha de contenir tot això amb tota generalitat; però les funcions arbitràries es transformen en funcions concretes quan es dóna la línia arbitrària i la funció que φ ha de representar. En el nostre cas, es pot agafar un cercle infinitament petit, amb centre el punt a partir del qual les distàncies r han estat mesurades, i φ denotarà les porcions en les quals aquest cercle és dividit pels diferents radis; d'on es conclou fàcilment que les equacions $(5), (6)$ són completament suficients per a aquest cas, sempre que les funcions que aquestes equacions deixen indeterminades compleixin les condicions que r i φ compleixen per al punt inicial i per als punts que estan a una distància infinitament petita d'aquest punt.

A més, pel que fa a la integració de les equacions $(5), (6)$, sabem que es pot reduir a la integració d'equacions diferencials ordinàries, les quals, no obstant això, freqüentment són tan complicades que hi ha poc a guanyar amb la reducció. Contràriament, els desenvolupaments en sèrie, que per a usos pràctics, quan només es considera una porció finita de la superfície, són de sobres suficients, no presenten dificultat; i les fórmules així obtingudes obren una font fructífera per a la solució de molts problemes importants. Però aquí desenvoluparem tan sols un únic exemple per demostrar la naturalesa del mètode.

23

Considerarem[78] ara el cas en què totes les línies per a les quals p és constant són línies més curtes i tallen ortogonalment la línia per a la qual $\varphi = 0$, la qual podem considerar com l'eix de les abscisses. Sigui A el punt per al qual $r = 0$, D qualsevol punt sobre l'eix d'abscisses, $AD = p$, B qualsevol punt a la línia més curta normal a AD en el punt D, i $BD = q$, de manera que p es pot pensar com l'abscissa, i q com l'ordenada, del punt B; suposarem que les abscisses són positives sobre una de les branques de l'eix d'abscisses, que correspon a $\varphi = 0$, mentre que sempre considerarem r com una quantitat positiva; prenem les ordenades positives en la regió en que φ varia entre 0 i 180°.[79]

[78] No es difícil, a partir d'aquesta secció, definir l'exponencial geodèsica.

[79] Considera coordenades polars r, φ, i utilitza la geodèsica $\varphi = 0$ com a origen d'un sistema de coordenades rectangulars p, q. Precisament aquestes són les coordenades que usa J. Bolyai a l'article 32 de l'*Apèndix*. En aquest treball, J. Bolyai troba genialment la funció n a partir, únicament, de la hipòtesi de l'angle agut; vegeu la pàgina 117.

Pel teorema de l'article 16 tindrem $\omega = 90°, F = 0$ i $G = 1$; i posarem també $\sqrt{E} = n$. Així n serà una funció de p i q, tal que per a $q = 0$ ha de ser $= 1$. L'aplicació de la fórmula de l'article 18 al nostre cas mostra que sobre *qualsevol* línia més curta hem de tenir

$$d\theta = \frac{dn}{dq} \cdot dp\,,$$

on θ denota l'angle entre l'element d'aquesta línia i l'element de la línia sobre la qual q és constant: ara, com que l'eix de les abscisses és aquest eix mateix una línia més curta, i donat que sobre ell tenim $\theta = 0$ a tot arreu, veiem que per a $q = 0$ hem de tenir a tot arreu

$$\frac{dn}{dq} = 0\,.$$

Per tant, concloem que, si desenvolupem n en sèrie de potències ascendents de q, aquesta sèrie ha de tenir la forma següent:

$$n = 1 + fqq + gq^3 + hq^4 + etc.$$

on f, g, h i etc. són funcions de p, o, posant

$$\begin{aligned} f &= f^0 + f'p + f''pp + etc.\,, \\ g &= g^0 + g'p + g''pp + etc. \\ h &= h^0 + h'p + h''pp + etc.\,, \end{aligned}$$

la forma

$$\begin{array}{llll} n = 1 + f^0qq & +f'pqq & +f''ppqq + etc. \\ & +g^0q^3 & +g'pq^3 + etc. \\ & & +h^0q^4 + etc.\, etc. \end{array}$$

24

Les equacions de l'article 22 donen, en el nostre cas,

$$n \sin\psi = \frac{dr}{dp}, \quad \cos\psi = \frac{dr}{dq}, \quad -n\cos\psi = m \cdot \frac{d\varphi}{dp}, \quad \sin\psi = m \cdot \frac{d\varphi}{dq},$$

$$n^2 = n^2\left(\frac{dr}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dp}\right)^2, \qquad n^2 \cdot \frac{dr}{dq} \cdot \frac{d\varphi}{dq} + \frac{dr}{dp} \cdot \frac{d\varphi}{dp} = 0\,.$$

Amb l'ajuda d'aquestes equacions, la cinquena i la sisena de les quals estan contingudes a les anteriors, es poden desenvolupar sèries per a r, φ, ψ, m, o per a qualsevol funció d'aquestes quantitats; d'entre aquestes sèries, anem a establir aquí les que són especialment mereixedores d'atenció.

Com que per a valors infinitament petits de p, q hem de tenir $rr = pp+qq$, les sèries per a rr han de començar amb els termes $pp+qq$: els termes d'ordre superior els obtenim pel mètode dels coeficients indeterminats,[80] mitjançant l'equació

$$\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{drr}{dp}\right)^2 + \left(\frac{drr}{dq}\right)^2 = 4rr\,.$$

Així tenim

$$\begin{array}{llllll}
[1] \quad rr & = pp & +\frac{2}{3}f^0 ppqq & +\frac{1}{2}f'p^3qq & +\left(\frac{2}{5}f'' - \frac{4}{45}f^0f^0\right)p^4qq & \textit{etc.} \\
 & +qq & & +\frac{1}{2}g^0ppq^3 & +\frac{2}{5}g'p^3q^3 & \\
 & & & & +\left(\frac{2}{5}h^0 - \frac{7}{45}f^0f^0\right)ppq^4 &
\end{array}$$

Llavors tenim, a partir de la fórmula

$$r\sin\psi = \frac{1}{2n}\cdot\frac{drr}{dp},$$

$$\begin{array}{llllll}
[2] \quad r\sin\psi & = p & -\frac{1}{3}f^0pqq & -\frac{1}{4}f'ppqq & -\left(\frac{1}{5}f'' + \frac{8}{45}f^0f^0\right)p^3qq & \textit{etc.} \\
 & & & -\frac{1}{2}g^0pq^3 & -\frac{2}{5}g'ppq^3 & \\
 & & & & -\left(\frac{3}{5}h^0 - \frac{8}{45}f^0f^0\right)pq^4 &
\end{array}$$

i a partir de la fórmula

$$r\cos\psi = \frac{1}{2}\cdot\frac{drr}{dq},$$

[80] Peu de pàgina del mateix Gauss : «Els càlculs, que es poden abreujar per alguns artificis, és superflu donar-los aquí».

$$[3] \quad r\cos\psi = q + \frac{2}{3}f^0 ppq + \frac{1}{2}f' p^3 q + \left(\frac{2}{5}f'' - \frac{4}{45}f^0 f^0\right) p^4 q \quad etc.$$

$$+\frac{3}{4}g^0 ppqq + \frac{3}{5}g' p^3 qq$$

$$+\left(\frac{4}{5}h^0 - \frac{14}{45}f^0 f^0\right) ppq^3$$

Aquestes fórmules donen l'angle ψ. Anàlogament, per a calcular l'angle φ, usarem les sèries en què es desenvolupen $r\cos\varphi$ i $r\sin\varphi$, les quals es troben mitjançant les equacions en derivades parcials

$$\begin{aligned}
\frac{d\cdot r\cos\varphi}{dp} &= n\cos\varphi\cdot\sin\psi - r\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dp}\\
\frac{d\cdot r\cos\varphi}{dq} &= \cos\varphi\cdot\cos\psi - r\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dq}\\
\frac{d\cdot r\sin\varphi}{dp} &= n\sin\varphi\cdot\sin\psi + r\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dp}\\
\frac{d\cdot r\sin\varphi}{dq} &= \sin\varphi\cdot\cos\psi + r\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dq}\\
n\cos\psi\cdot\frac{d\varphi}{dq} &+ \sin\psi\cdot\frac{d\varphi}{dp} = 0\,,
\end{aligned}$$

una combinació de les quals dóna

$$\begin{aligned}
\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{d\cdot r\cos\varphi}{dp} + r\cos\psi\cdot\frac{d\cdot r\cos\varphi}{dq} &= r\cos\varphi\\
\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{d\cdot r\sin\varphi}{dp} + r\cos\psi\cdot\frac{d\cdot r\sin\varphi}{dq} &= r\sin\varphi\,.
\end{aligned}$$

A partir d'aquestes equacions es poden desenvolupar fàcilment sèries per a $r\cos\phi, r\sin\phi$ que tindran evidentment per primer terme p, q respectivament, concretament

$$[4] \quad r\cos\varphi = p + \frac{2}{3}f^0 pqq + \frac{5}{12}f' ppqq + \left(\frac{3}{10}f'' - \frac{8}{45}f^0 f^0\right) p^3 qq \quad etc.$$

$$+\frac{1}{2}g^0 pq^3 + \frac{7}{20}g' ppq^3$$

$$+\left(\frac{2}{5}h^0 - \frac{7}{45}f^0 f^0\right) pq^4$$

$$[5] \quad r\sin\varphi \;=\; q - \frac{1}{3}f^0 ppq \quad -\frac{1}{6}f' p^3 q \quad -\left(\frac{1}{10}f'' - \frac{7}{90}f^0 f^0\right)p^4 q \quad etc.$$

$$-\frac{1}{4}g^0 ppqq \quad -\frac{3}{20}g' p^3 qq$$

$$-\left(\frac{1}{5}h^0 + \frac{13}{90}f^0 f^0\right)ppq^3$$

A partir de combinacions de les equacions [2], [3], [4], [5] es pot obtenir una sèrie per a $rr\cos(\psi+\phi)$, i a partir d'aquesta, dividint per la sèrie [1], una sèrie per a $\cos(\psi+\phi)$, i a partir d'aquestes una sèrie per al mateix angle $\psi+\phi$. No obstant això, les mateixes sèries es poden obtenir més elegantment de la manera següent. Diferenciant la primera i segona equacions introduïdes al principi d'aquest article, obtenim

$$\sin\psi\cdot\frac{dn}{dq} + n\cos\psi\cdot\frac{d\psi}{dq} + \sin\psi\cdot\frac{d\psi}{dp} = 0\,,$$

que combinada amb

$$n\cos\psi\cdot\frac{d\varphi}{dq} + \sin\psi\cdot\frac{d\varphi}{dp} = 0$$

dóna

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{dn}{dq} + \frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{d(\psi+\varphi)}{dp} + r\cos\psi\cdot\frac{d(\psi+\varphi)}{dq} = 0\,.$$

A partir d'aquesta equació, amb ajuda del mètode dels coeficients indeterminats, podem fàcilment obtenir una sèrie per a $\psi+\phi$, el primer terme de la qual ha de ser $\frac{1}{2}\pi$, acceptem que el radi és la unitat, i 2π denota la circumferència del cercle,

$$[6] \qquad \psi+\phi = \frac{1}{2}\pi - f^0 pq \quad -\frac{2}{3}f' ppq \quad -\left(\frac{1}{2}f'' - \frac{1}{6}f^0 f^0\right)p^3 q \quad etc$$

$$-g^0 pqq \qquad -\frac{3}{4}g' ppqq$$

$$-\left(h^0 - \frac{1}{3}f^0 f^0\right)pq^3 \qquad .$$

Sembla important també desenvolupar en sèrie l'àrea del triangle ABD. Per a aquest desenvolupament podem usar la següent equació condicional, la qual es dedueix fàcilment de consideracions geomètriques suficientment òbvies,[81] i en la qual S denota l'àrea considerada:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{dS}{dp}+r\cos\psi\cdot\frac{dS}{dq}=\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\int n\,dq\,,$$

la integració començant des de $q=0$. A partir d'aquesta equació obtenim, pel mètode dels coeficients indeterminats,

$$[7]\quad S=\frac{1}{2}pq-\frac{1}{12}f^0p^3q-\frac{1}{20}f'p^4q-\left(\frac{1}{30}f''-\frac{1}{60}f^0f^0\right)p^5q\quad etc.$$
$$-\frac{1}{12}f^0pq^3-\frac{3}{40}g^0p^3qq-\frac{1}{20}g'p^4qq$$
$$-\frac{7}{120}f'ppq^3-\left(\frac{1}{15}h^0+\frac{2}{45}f''+\frac{1}{60}f^0f^0\right)p^3q^3$$
$$-\frac{1}{10}g^0pq^4-\frac{3}{40}g'ppq^4$$
$$-\left(\frac{1}{10}h^0-\frac{1}{30}f^0f^0\right)pq^5\,.$$

25

A partir de les fórmules de l'article precedent, les quals es refereixen a triangles rectangles formats per les línies més curtes, procedim al cas general. Sigui C un altre punt sobre la mateixa línia més curta DB, per al qual, mantenint-se p, els caràcters $q', r', \varphi', \psi', S'$ designen el mateix que q, r, φ, ψ, S per al punt B. Tindrem així un triangle entre els punts A, B, C els angles del qual denotem per A, B, C, els costats oposats per a, b, c, i l'àrea per σ. Representem la mesura de curvatura en els punts A, B, C per α, β, γ respectivament. Suposant llavors (cosa que és lícita) que les quantitats $p, q, q-q'$ són positives, tindrem

$$A=\varphi-\varphi',\quad B=\psi\,,\quad C=\pi-\psi'$$
$$a=q-q',\quad b=r',\quad c=r\,,\quad \sigma=S-S'\,.$$

[81] Repeteix la frase de l'article 16.

Primerament expressarem l'àrea σ per una sèrie. Canviant a [7] cadascuna de les quantitats que fan referència a B per les que fan referència a C, obtenim una fórmula per a S', i així, fins a les quantitats de sisè ordre, obtenim

$$\begin{aligned}\sigma = \frac{1}{2}p(q-q')\Big\{1 \; - \; & \frac{1}{6}f^0(pp+qq+qq'+q'q') \\ - \; & \frac{1}{60}f'p(6pp+7qq+7qq'+7q'q') \\ - \; & \frac{1}{20}g^0(q+q')(3pp+4qq+4qq'+4q'q')\Big\}.\end{aligned}$$

Aquesta fórmula, amb ajuda de la sèrie [2], concretament

$$c\sin B = p\left(1 - \frac{1}{3}f^0qq - \frac{1}{4}f'pqq - \frac{1}{2}g^0q^3 - etc.\right)$$

es pot canviar en la següent:

$$\begin{aligned}\sigma = \frac{1}{2}ac\sin B\Big\{1 \; - \; & \frac{1}{6}f^0(pp-qq+qq'+q'q') \\ - \; & \frac{1}{60}f'p(6pp-8qq+7qq'+7q'q') \\ - \; & \frac{1}{20}g^0(3ppq+3ppq'-6p^3+4qqq'+4qq'q'+4q'^3)\Big\}.\end{aligned}$$

La mesura de curvatura per a qualsevol punt de la superfície esdevé (per l'article 19, on m, p, q eren el que n, q, p són aquí)

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{n}\cdot\frac{ddn}{dq^2} = -\frac{2f+6gq+12hqq+etc.}{1+fqq+etc.} \\ &= -2f-6gq-(12h-2ff)qq-etc.\end{aligned}$$

Per tant tenim, quan q, p es refereixen al punt B,

$$\beta = -2f^0 - 2f'p - 6g^0q - 2f''pp - 6g'pq - (12h^0 - 2f^0f^0)qq - etc.$$

També

$$\begin{aligned}\gamma &= -2f^0 - 2f'p - 6g^0q' - 2f''pp - 6g'pq' - (12h^0 - 2f^0f^0)q'q' - etc. \\ \alpha &= -2f^0\,.\end{aligned}$$

Introduint aquestes mesures de curvatura en la sèrie que dóna σ, obtindrem la següent expressió, exacta fins a les quantitats de sisè ordre (excl.):[82]

[82] Exclusivament, únicament. Hem respectat l'abreviació «excl.» de Gauss.

$$\sigma = \frac{1}{2}ac\sin B\Big\{1 + \frac{1}{120}\alpha(4pp - 2qq + 3qq' + 3q'q')
+\frac{1}{120}\beta(3pp - 6qq + 6qq' + 3q'q')
+\frac{1}{120}\gamma(3pp - 2qq + qq' + 4q'q')\Big\}$$

La mateixa precisió es mantindrà si substituïm p, q, q' per $c\sin B, c\cos B$, $c\cos B - a$, que dóna

[8] $$\sigma = \frac{1}{2}ac\sin B\Big\{1 + \frac{1}{120}\alpha(3aa + 4cc - 9ac\cos B)
+ \frac{1}{120}\beta(3aa + 3cc - 12ac\cos B)
+ \frac{1}{120}\gamma(4aa + 3cc - 9ac\cos B)\Big\}$$

Com que totes les expressions que fan referència a la línia AD normal a BC han desaparegut d'aquesta expressió, podem permutar entre ells els punts A, B, C i les expressions que hi fan referència. Per tant tindrem, amb la mateixa precisió,

[9] $$\sigma = \frac{1}{2}bc\sin A\Big\{1 + \frac{1}{120}\alpha(3bb + 3cc - 12bc\cos A)
+ \frac{1}{120}\beta(3bb + 4cc - 9bc\cos A)
+ \frac{1}{120}\gamma(4bb + 3cc - 9bc\cos A)\Big\}$$

[10] $$\sigma = \frac{1}{2}ab\sin C\Big\{1 + \frac{1}{120}\alpha(3aa + 4bb - 9ab\cos B)
+ \frac{1}{120}\beta(4aa + 3bb - 9ab\cos C)
+ \frac{1}{120}\gamma(3aa + 3bb - 12ab\cos C)\Big\}$$

La consideració del triangle rectilini de costats iguals a a, b, c és d'una gran utilitat;[83] els angles d'aquest triangle, que denotarem per A^*, B^*, C^*, difereixen dels angles del triangle sobre la superfície corba, concretament, de A, B, C, per quantitats de segon ordre; i serà molt important desenvolupar aquestes diferències curosament. No obstant això, serà suficient mostrar els primers passos en aquests càlculs, més tediosos que difícils.

Reemplaçant a les fórmules [1], [4], [5] les quantitats que fan referència a B per les que fan referència a C, obtindrem fórmules per a $r'r'$, $r'\cos\varphi'$, $r'\sin\varphi'$. Llavors el desenvolupament de l'expressió

$$rr + r'r' - (q-q')^2 - 2r\cos\varphi \cdot r'\cos\varphi' - 2r\sin\varphi \cdot r'\sin\varphi'\,,$$

que és $= bb + cc - aa - 2bc\cos A = 2bc(\cos A^* - \cos A)$, combinat amb el desenvolupament de l'expressió

$$r\sin\varphi \cdot r'\cos\varphi' - r\cos\varphi \cdot r'\sin\varphi',$$

que és $= bc\sin A$, dóna la fórmula següent:

$$\begin{aligned}\cos A^* - \cos A = -(q-q')p \cdot \sin A\Big\{&\frac{1}{3}f^0 + \frac{1}{6}f'p + \frac{1}{4}g^0(q+q')\\ &+ \left(\frac{1}{10}f'' - \frac{1}{45}f^0f^0\right)pp + \frac{3}{20}g'p(q+q')\\ &+ \left(\frac{1}{5}h^0 - \frac{7}{90}f^0f^0\right)(qq+qq'+q'q') + etc.\Big\}\end{aligned}$$

A partir d'aquí tenim, fins a quantitats de cinquè ordre,

$$\begin{aligned}A^* - A = -(q-q')p\Big\{&\frac{1}{3}f^0 + \frac{1}{6}f'p + \frac{1}{4}g^0(q+q') + \frac{1}{10}f''pp\\ &+\frac{3}{20}g'p(q+q') + \frac{1}{5}h^0(q+qq'+q'q')\\ &-\frac{1}{90}f^0f^0(7pp+7qq+12qq'+7q'q')\Big\}\end{aligned}$$

Combinant aquesta fórmula amb

$$2\sigma = ap(1 - \frac{1}{6}f^0(pp+qq+qq'+q'q') - etc.)$$

[83] Aquest article comença amb les paraules *Magnam utilitatem.* Neix la teoria de comparació.

i amb els valors de les quantitats α, β, γ trobats en l'article precedent, obtenim, fins a quantitats de cinquè ordre,

$$[11] \qquad A^* = A - \sigma\Big\{\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{12}\gamma + \frac{2}{15}f''pp + \frac{1}{5}g'p(q+q') + \frac{1}{5}h^0(3qq - 2qq' + 3q'q') + \frac{1}{90}f^0f^0(4pp - 11qq + 14qq' - 11q'q')\Big\}.$$

Amb operacions similars obtenim:

$$[12] \qquad B^* = B - \sigma\Big\{\frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{6}\beta + \frac{1}{12}\gamma + \frac{1}{10}f''pp + \frac{1}{10}g'p(2q+q') + \frac{1}{5}h^0(4qq - 4qq' + 3q'q') - \frac{1}{90}f^0f^0(2pp + 8qq - 8qq' + 11q'q')\Big\}$$

$$[13] \qquad C^* = C - \sigma\Big\{\frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{6}\gamma + \frac{1}{10}f''pp + \frac{1}{10}g'p(q+2q') + \frac{1}{5}h^0(3qq - 4qq' + 4q'q') - \frac{1}{90}f^0f^0(2pp + 11qq - 8qq' + 8q'q')\Big\}.$$

A partir d'aquestes fórmules deduïm, ja que la suma $A^* + B^* + C^*$ és igual a dos angles rectes, l'excés de la suma $A + B + C$ sobre dos angles rectes, concretament,

$$[14] \qquad A + B + C = \pi + \sigma\left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{3}f''pp + \frac{1}{2}g'p(q+q') + (2h^0 - \frac{1}{3}f^0f^0)(qq - qq' + q'q')\right).$$

Aquesta última equació podria haver estat obtinguda a partir de la fórmula [6].

27

Si la superfície corba és una esfera de radi $= R$, tindrem

$$\alpha = \beta = \gamma = -2f^0 = \frac{1}{R^2}\,; \quad f'' = 0\,,\ g' = 0\,,\ 6h^0 - f^0f^0 = 0\,,$$

o

$$h^0 = \frac{1}{24R^4}\,.$$

Conseqüentment, la fórmula [14] esdevé

$$A + B + C = \pi + \frac{\sigma}{RR}\,,$$

la qual és absolutament exacta; les fórmules 11-13 donen

$$\begin{aligned}
A^* &= A - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(2pp - qq + 4qq' - q'q') \\
B^* &= B - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(pp - 2qq + 2qq' + q'q') \\
C^* &= C - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(pp + qq + 2qq' - 2q'q')
\end{aligned}$$

o, amb la mateixa exactitud,

$$\begin{aligned}
A^* &= A - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(bb + cc - 2aa) \\
B^* &= B - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(aa + cc - 2bb) \\
C^* &= C - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(aa + bb - 2cc)\,.
\end{aligned}$$

Negligint quantitats de quart ordre, obtenim de l'anterior el ben conegut teorema establert primerament per l'il·lustre[84] LEGENDRE .[85]

28

Les nostres fórmules generals, si negligim els termes de quart ordre, esdevenen extremadament simples, concretament:

$$A^* = A - \frac{1}{12}\sigma(2\alpha + \beta + \gamma)$$

$$B^* = B - \frac{1}{12}\sigma(\alpha + 2\beta + \gamma)$$

$$C^* = C - \frac{1}{12}\sigma(\alpha + \beta + 2\gamma)\,.$$

[84] Gauss escriu «clar. LEGENDRE».

[85] Vegeu [Leg87]. Aquest article de Legendre està breument comentat a [Ita84]. Agraïm a Josep Pla la indicació sobre aquesta referència.

Així, als angles A, B, C sobre una superfície no esfèrica, se'ls han d'aplicar reduccions diferents, per tal que els sinus dels angles modificats siguin proporcionals als costats oposats. La desigualtat, genèricament parlant, serà de tercer ordre; però si la superfície difereix poc d'una esfera, la desigualtat serà d'ordre superior. Fins i tot en els grans triangles de la superfície de la terra, dels quals podem mesurar els seus angles, la diferència és sempre inapreciable. Així, per exemple,[86] en el triangle més gran que hem mesurat aquests darrers anys, concretament, el format pels punts Hohehagen, Brocken, Inselsberg, on l'excés de la suma dels angles era $= 14''.85348$, el càlcul ha donat les següents reduccions per ser aplicades als angles:

Hohehagen	...	$-4''.95113$
Brocken	...	$-4''.95104$
Inselsberg	...	$-4''.95131$

29

Com a colofó a aquest estudi compararem l'àrea d'un triangle sobre la superfície corba amb l'àrea del triangle rectilini de costats a, b, c. Denotarem l'àrea del darrer per σ^* que serà

$$= \frac{1}{2} bc \sin A^* = \frac{1}{2} ac \sin B^* = \frac{1}{2} ab \sin C^* \,.$$

Tenim, fins a quantitats de quart ordre,[87]

$$\sin A^* = \sin A - \frac{1}{12} \sigma \cos A \cdot (2\alpha + \beta + \gamma)$$

o, amb la mateixa exactitud,

$$\sin A = \sin A^* \left(1 + \frac{1}{24} bc \cos A \cdot (2\alpha + \beta + \gamma) \right) \,.$$

Substituint aquest valor a la fórmula [9], tindrem, fins a quantitats de sisè ordre,

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{1}{2} bc \sin A^* \Big\{ 1 \; &+ \; \frac{1}{120} \alpha (3bb + 3cc - 2bc \cos A) \\ &+ \; \frac{1}{120} \beta (3bb + 4cc - 4bc \cos A) \\ &+ \; \frac{1}{120} \gamma (4bb + 3cc - 4bc \cos A) \Big\} \end{aligned}$$

[86] Alguns autors han mal interpretat aquest exemple de Gauss. Vegeu el comentari de la pàgina 93.

[87] Utilitza que $\sin(A - \epsilon) \simeq \sin A - (\cos A)\epsilon$.

o, amb igual exactitud,

$$\sigma = \sigma^* \Big\{ 1 + \frac{1}{120}\alpha(aa+2bb+2cc) + \frac{1}{120}\beta(2aa+bb+2cc) + \frac{1}{120}\gamma(2aa+2bb+cc) \Big\}.$$

Per a la superfície esfèrica aquesta fórmula es converteix en

$$\sigma = \sigma^* \left(1 + \frac{1}{24}\alpha(aa+bb+cc) \right)$$

la qual, com es pot confirmar fàcilment, es pot substituir amb la mateixa precisió per

$$\sigma = \sigma^* \sqrt{\frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{\sin A^* \cdot \sin B^* \cdot \sin C^*}}\,.$$

Si aquesta fórmula s'aplica a triangles sobre superfícies corbes no esfèriques, l'error, genèricament parlant, serà de cinquè ordre, i serà imperceptible en tots el triangles que es puguin mesurar sobre la superfície de la terra.

Apèndix A

Els articles del *Disquisicions*

Articles 1 i 2. Geometria esfèrica

L'article §1, molt breu, està dedicat a identificar les rectes per l'origen amb els punts d'una esfera de centre arbitrari i radi 1.

L'article §2 està dedicat a estudiar la geometria esfèrica, i obté un resultat, el teorema *VI*, que engloba totes les fórmules de la trigonometria esfèrica.[1]

Calcula el volum d'una piràmide que té un vèrtex a l'origen de coordenades i els altres tres vèrtexs sobre l'esfera. Obté 1/6 del determinant[2] format per les coordenades d'aquests tres punts.

Nosaltres hem desenvolupat àmpliament aquests articles a l'apèndix E.

Articles 3 i 4. Superfícies

A l'article §3, Gauss defineix què vol dir que la superfície tingui curvatura contínua i comenta que el *Disquisicions* tractarà només amb superfícies corbes de curvatura contínua, en el sentit que tinguin un pla tangent en cada punt, que variï suaument.

A l'article §4 es preocupa de l'orientació del pla tangent, veu que hi ha el problema de la direcció de la normal, i, abans d'anar més lluny, dóna tres

[1] Sobre aquesta secció Spivak diu: ≪Aquesta secció es pot ometre completament≫. El que vol dir és que no és necessària per al desenvolupament posterior del *Disquisicions*. Però per a Gauss el teorema *VI* és molt important, sobretot a la versió de 1825, ja que la utilitza fonamentalment a l'article 14, a la prova del teorema del defecte (vegeu la pàgina 96).

[2] No utilitza aquesta paraula, tot i que la va inventar ell.

maneres per a definir superfície: la primera, com els zeros d'una funció; la segona, en forma paramètrica, i la tercera, com a gràfica d'una funció.

Article 5. Orientació

Torna al problema de l'orientació del pla tangent, però ara el signe de F, si estem considerant la superfície $F = 0$, li dóna un criteri per a elegir una de les dues direccions de la recta normal al pla tangent. Si la superfície està donada en paramètriques, pren com a direcció de la recta normal la direcció donada pel vector tal que els vectors tangents a les corbes $p = constant, q = constant$, i aquest vector, en aquest ordre, formin una base positiva respecte a la base canònica de $\mathbb{R}^3$. I anàlogament quan la superfície és gràfica d'una funció.

Article 6. Curvatura i curvatura integral

Defineix el que avui coneixem com a aplicació de Gauss, associant a cada punt de la superfície el punt de l'esfera unitat representat pel vector normal orientat a la superfície en el punt. Tota figura sobre la superfície té una corresponent figura sobre l'esfera, però ja adverteix que aquesta segona figura pot tenir autointerseccions i ser, en general, molt complicada.[3]

Defineix la curvatura integral d'una figura sobre la superfície com l'àrea de la imatge d'aquesta figura per l'aplicació de Gauss. I la mesura de curvatura com la funció que assigna a cada punt el quocient entre la curvatura integral d'una figura que conté el punt i l'àrea de la mateixa figura, quan aquesta figura tendeix al punt. Remarca molt el problema del signe, ja que pensa la curvatura integral com l'àrea amb signe. També comenta que la imatge de la figura sobre l'esfera pot estar sobreposada i, en aquests casos, s'ha de comptar tantes vegades com calgui, amb el signe corresponent en cada cas.

Acaba amb una frase que sembla acceptar que es pot anar més lluny en aquest punt:

> No obstant això, hem de reservar per a una altra ocasió una exposició més estesa de la teoria d'aquestes figures considerades des d'aquest punt de vista tan general.[4]

[3] Per exemple, quan arruguem un paper, sense estirar-lo, les normals van a parar a molts punts diferents de l'esfera, però aquest conjunt de punts té mesura zero.

[4] Vegeu el peu de la pàgina 37.

Article 7. Càlcul explícit de la curvatura

Primer càlcul de la mesura de curvatura. Obté, quan la superfície està donada en la forma $z = z(x, y)$, l'expressió

$$k = \frac{TV - U^2}{(1 + t^2 + u^2)^2} \,,$$

on

$$t = \frac{dz}{dx} \,, \qquad u = \frac{dz}{dy}$$

i

$$T = \frac{d^2z}{dx^2} \,, \quad U = \frac{d^2z}{dx \cdot dy} \,, \quad V = \frac{d^2z}{dy^2} \,.$$

De fet, com que la parametrització és

$$\varphi(x, y) = (x, y, z(x, y)) \,,$$

tenim que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= (1, 0, t) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= (0, 1, u) \end{aligned}$$

i, per tant, els coeficients e, f, g de la segona forma fonamental $\Phi = e\,dx^2 + 2f\,dx\,dy + g\,dy^2$ i els coeficients E, F, G de la primera forma fonamental $ds^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2$ estan donats per

$$\begin{aligned} E &= 1 + t^2, & F &= ut \,, & G &= 1 + u^2, \\ e &= \frac{T}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}} \,, & f &= \frac{U}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}} \,, & g &= \frac{V}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}} \,. \end{aligned}$$

Per tant,

$$k = \frac{TV - U^2}{(1 + t^2 + u^2)^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \,,$$

és a dir, *la curvatura és el quocient entre el determinant de la segona forma fonamental i el determinant de la primera forma fonamental.*

Article 8. Curvatura i curvatures principals

Demostra que $k = k_1 k_2$, és a dir, que la mesura de curvatura és el producte de les curvatures principals. Recordem que les curvatures principals eren ja conegudes per EULER i RODRIGUES. [5]

Articles 9 i 10. Diverses expressions per a la curvatura

A l'article §9 calcula per segon cop la curvatura. Ja anuncia que l'expressió serà més complicada que la precedent, que contenia només cinc elements. Ara dóna una fórmula per a k que involucra nou elements. Considera la superfície com $F = 0$.

A l'article §10 calcula per tercer cop la curvatura. També anuncia que l'expressió serà més complicada que la precedent, ja que ara la fórmula per a k involucra quinze elements. Considera la superfície parametritzada.

Article 11. Equacions de Gauss i fórmula de la curvatura

En llenguatge modern, les anomenades *equacions de* GAUSS de la superfície $X(p,q) = (x(p,q), y(p,q), z(p,q))$ són

$$\begin{aligned} X_{pp} &= \Gamma^1_{11} X_p + \Gamma^2_{11} X_q + eN \\ X_{pq} &= \Gamma^1_{12} X_p + \Gamma^2_{12} X_q + fN \\ X_{qq} &= \Gamma^1_{22} X_p + \Gamma^2_{22} X_q + gN\,, \end{aligned}$$

on Γ^k_{ij} són els símbols de Christoffel, e, f, g són els coeficients de la segona forma fonamental, i N el vector normal a la superfície. X_p i X_q denoten les

[5] Vegeu el treball d'EULER [Eul60], i també els del deixeble de MONGE, RODRIGUES, [Rod15a] i [Rod15b]. La contribució de RODRIGUES a aquest punt és molt important, tal com remarca OSSERMAN a [Oss90], pàg. 733. De fet, tal com es diu a [KY96], pàg. 6, RODRIGUES s'anticipa a GAUSS usant, ja el 1815, la imatge esfèrica d'una superfície, el quocient de les àrees de les corresponents superfícies, que en el límit és la curvatura de Gauss, la interpretació de la curvatura com el jacobià de l'aplicació de Gauss, i en demostrar que aquesta curvatura és igual al producte de les curvatures principals. Pensem que RODRIGUES no ha rebut el reconeixement que es mereix, i que la seva obra no ha estat suficientment divulgada, fins al punt que és pràcticament impossible accedir als seus treballs originals.

derivades parcials de X respecte de p i respecte de q. X_{pp}, X_{pq}, X_{qq} són les derivades segones.

Observem que les equacions

$$\begin{array}{llllllll} A\alpha & + & B\beta & + & C\gamma & = & D & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ A\alpha' & + & B\beta' & + & C\gamma' & = & D' & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2) \\ A\alpha'' & + & B\beta'' & + & C\gamma'' & = & D'' & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3) \end{array}$$

de l'article 10 i les equacions

$$\begin{array}{llllllll} a\alpha & + & b\beta & + & c\gamma & = & m & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4) \\ a\alpha' & + & b\beta' & + & c\gamma' & = & m' & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5) \\ a\alpha'' & + & b\beta'' & + & c\gamma'' & = & m'' & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6) \\ a'\alpha & + & b'\beta & + & c'\gamma & = & n & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7) \\ a'\alpha' & + & b'\beta' & + & c'\gamma' & = & n' & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8) \\ a'\alpha'' & + & b'\beta'' & + & c'\gamma'' & = & n'' & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9) \end{array}$$

de l'article 11 són les nou equacions escalars corresponents a les tres equacions vectorials anteriors. Les equacions (1), (2) i (3) s'obtenen de les tres equacions vectorials multiplicant els dos costats escalarment per N. Recordem que $e = D$, $f = D'$ i $g = D''$. Anàlogament les altres sis.

Observem que la numeració de Gauss és ja correlativa, és a dir, que numera aquestes equacions i no altres que apareixen entremig.

Observem també que les fórmules de Serret-Frenet per a corbes a l'espai, que daten de 1851, i que involucren la curvatura i la torsió de la corba, són l'anàleg unidimensional de les equacions de Gauss.

Un cop obtingudes aquestes equacions, les utilitza, juntament amb els càlculs de l'apartat anterior, per obtenir la impressionant fórmula per a la curvatura k,

$$\begin{aligned} 4(EG-F^2)^2k = E\left(\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right) \\ + F\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dp}\right) \\ + G\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right) - 2(EG-F^2)\left(\frac{d^2E}{dq^2} - 2\frac{d^2F}{dp\cdot dq} + \frac{d^2G}{dp^2}\right), \end{aligned}$$

que només involucra les funcions E, F, G que apareixen a l'element de longitud intrínsec de la superfície

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

i les seves derivades primeres i segones. És a dir, desapareix de la fórmula de k obtinguda a l'article 7 la menció explícita a la segona forma fonamental. En particular, *el coneixement de l'element de longitud implica el coneixement de la curvatura.*[6]

Aquesta fórmula és de fet el teorema egregi, que enuncia d'una manera lleugerament diferent a l'article següent.

Article 12. Teorema egregi

En aquest article, i com a conseqüència de la fórmula que acaba de demostrar, remarca que la curvatura és un invariant mètric. En particular, si dues superfícies es poden desenvolupar l'una sobre l'altra conservant distàncies, tenen la mateixa mesura de curvatura en punts corresponents. És el famós teorema egregi.

Per tant, l'anul·lació de la curvatura és una condició necessària per tal que una superfície sigui desenvolupable sobre un pla. El recíproc és cert localment i fou provat per MINDING (vegeu el peu de la pàgina 49).

Article 13. Geometria intrínseca

En aquest brevíssim article comenta que el teorema egregi obre el camí a estudiar el que avui es coneix com a geometria intrínseca d'una superfície. És a dir, l'estudi de les propietats de la superfície que depenen només de la mètrica.

Aquest és l'article més important del *Disquisicions*, i, sense cap mena de dubte, una observació genial. Tan sols li va faltar pensar les superfícies independentment del seu encaix a $\mathbb{R}^3$.

---

[6] En unes notes privades de GAUSS del 12 de desembre de 1822, (l'endemà de sotmetre per a publicació l'article comentat al peu de la pàgina 18), cinc anys abans, doncs, de la publicació del *Disquisicions*, i que ell mateix anomena ≪L'estat de les meves investigacions sobre la transformació de superfícies≫ (vegeu [Gau27], pàg. 381), s'hi troba la fórmula anterior per al cas de coordenades isotermals, és a dir, $ds^2 = E(du^2 + dv^2)$. Concretament demostra que

$$k = -\frac{1}{2E}\Delta \log E,$$

on Δ és el laplacià, i fa el comentari següent: ≪La curvatura conserva el mateix valor per a totes les transformacions de la superfície que deixin l'element de línia $E(du^2 + dv^2)$ invariant≫. Com que sempre existeixen coordenades isotermals (però això ho va provar més tard LIOUVILLE; vegeu [Lüt90], pàg. 742), aquesta fórmula implica el teorema egregi. De fet, aquesta és la prova que va donar LIOUVILLE del teorema egregi.

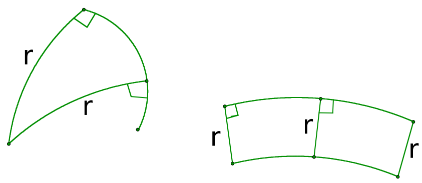
Article 14. Geodèsiques

Inicia l'estudi de geodèsiques sobre una superfície a partir del càlcul de variacions. Demostra que l'acceleració de les geodèsiques ha de ser normal a la superfície. El camí d'una partícula sobre una superfície, en absència de forces diferents de la força normal que la manté sobre la superfície, és una geodèsica. Vegeu el peu de la pàgina 53.

Articles 15 i 16. Lema de Gauss

A l'article §15 demostra que la línia que uneix les extremitats de geodèsiques d'igual longitud i que surten d'un mateix punt és perpendicular a aquestes geodèsiques.

A l'article §16 demostra que la línia que uneix les extremitats de geodèsiques d'igual longitud i perpendiculars a una corba inicial donada és perpendicular a aquestes geodèsiques.



Renamarquem que l'article §16 acaba amb aquestes paraules:

> [...] també aquí com precedentment, consideracions geomètriques poden prendre el lloc de l'anàlisi, les quals, no obstant això, no ens prendrem el temps de considerar aquí, ja que són suficientment òbvies.

Article 17. Interpretació geomètrica de E,F,G

En aquest article Gauss mostra cóm els coeficients E, F i G del ds^2 determinen i estan, al mateix temps, determinats per mesures sobre la superfície; l'element infinitesimal de longitud de la línia coordenada sobre la superfície donada per $q =$constant està donat per $\sqrt{E}dp$; el de la línia $p =$constant per $\sqrt{G}dq$; mentre que l'angle ω entre aquestes línies coordenades està donat per

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}};$$

i, finalment, l'element d'àrea està donat per $\sqrt{EG - F^2} dp \cdot dq$.

Article 18. Equació de les geodèsiques

En aquest article troba, emprant càlcul de variacions, i també en funció de E, F i G, les equacions d'una geodèsica sobre una superfície. Concretament troba l'equació necessària

$$\begin{aligned}\sqrt{EG - F^2} \cdot d\theta &= \frac{1}{2}\frac{F}{E} \cdot dE + \frac{1}{2}\frac{dE}{dq} \cdot dp \\ &- \frac{dF}{dp} \cdot dp - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp} \cdot dq\,,\end{aligned}$$

on θ és l'angle d'inclinació de la geodèsica respecte de les línies coordenades $q = constant$. Aquesta és l'equació d'Euler-Lagrange del funcional de longitud.

Segons Dombrowski ([Dom79], pag 109), aquesta fórmula es pot interpretar introduint el *transport paral·lel* segons la definició que molts anys més tard, al voltant de 1900, donaria Levi-Civita.

En efecte, la fórmula anterior es pot escriure com

$$\Theta = \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{F}{E} dE + E_q dp - G_p dq - 2F_p dp \right) ,$$

on posem, com Dombrowski, Θ i no $d\theta$, perquè aquesta 1-forma no és exacta.

Llavors, la fórmula

$$\theta^\circ = \pi - B, \quad \theta' = C$$

de l'article 20 es pot interpretar com

$$\int_c \Theta = \theta(\dot{c}(\sigma)) - \theta(\dot{c}(0))\,,$$

on $c : [0, \sigma] \to M$ és una geodèsica. És a dir, la integral de la *variació angular* Θ al llarg d'una geodèsica mesura l'angle que el vector tangent a una de les corbes coordenades va girant al llarg de c en relació amb el vector tangent a c en cada punt, que és una direcció *paral·lela al llarg de c*, en el sentit de Levi-Civita.

L'estudi de superfícies, i més generalment l'estudi de varietats de Riemann, porta ràpidament al problema de comparar l'angle entre vectors tangents situats a punts diferents de la varietat. Aquesta connexió entre espais tangents en punts diferents és el problema que ve a resoldre la *teoria de connexions*.

Article 19. La derivada de l'angle d'inclinació

Introdueix els sistemes de coordenades, que ell mateix posteriorment anomenarà *abcisogeodèsics ortogonals.* En aquests sistemes es compleix que $E = 1$ i $F = 0$. Un cas particular són els sistemes de coordenades polars geodèsiques, que utilitzarà abastament d'ara endavant. Troba la famosa fórmula per a la curvatura en aquestes coordenades

$$k = -\frac{1}{m} \cdot \frac{ddm}{dp^2}\,, \tag{A.1}$$

on $m = \sqrt{G}$.

Observem que si la mètrica és rotacionalment invariant, és a dir, quan m no depèn de q, com succeeix en el cas del pla, l'esfera i l'esfera imaginària, l'anterior equació en derivades parcials es transforma en una equació diferencial ordinària que es pot resoldre fàcilment.

A més Gauss dóna condicions inicials que han de complir les solucions d'aquesta equació diferencial; aquestes condicions, en coordenades polars p, q, (p la longitud, q l'angle), són $m = 0$ i $\frac{dm}{dp} = 1$, per a $p = 0$.

Està dient, doncs, encara que no ho explicita, que en aquestes condicions d'invariància rotacional, i almenys localment, la curvatura determina la mètrica! En el cas general, en què $m = m(p, q)$, l'equació de la curvatura és una equació en derivades parcials i el problema es complica.

Calcula també la derivada de l'angle d'inclinació θ i obté

$$d\theta = -\frac{dm}{dp}dq\,.$$

A l'apèndix F demostrarem com tot aquest important càlcul es pot copiar a partir del càlcul fet per a l'esfera. En aquesta reconstrucció, l'aparentment secundària fórmula de l'article 2, que tant pondera Gauss, jugarà un paper fonamental.

Observem, de passada, que si imposem que la funció $y = \sqrt{G}$ sigui rotacionalment simètrica, és a dir, que depengui només de p, i tenim curvatura constant[7] $-\frac{1}{R^2}$, l'anterior equació (A.1) es redueix a l'equació diferencial ordinària $y'' - \frac{1}{R^2}y = 0$, fàcil de resoldre i que ens porta de manera directa a l'aparició dels sinus i cosinus hiperbòlics. Això explica l'aparició natural d'aquestes funcions en l'*analogia* de Lambert i explica per què la geometria de l'angle agut es diu també geometria hiperbòlica.

[7] De fet, curvatura constant implica G rotacionalment simètrica.

Article 20. Teorema del defecte

En aquest article demostra el teorema del defecte per a triangles geodèsics: la integral de la curvatura, respecte de l'element d'àrea, és l'excés o el defecte del triangle. Coincideix, també, amb l'àrea de la imatge esfèrica del triangle.

A partir de la fórmula per a la curvatura (A.1), que és aproximadament el teorema egregi, obté, per una primera integració i posant atenció a les condicions inicials,

$$\int_0^{p(\theta)} k\sqrt{G}dp = 1 - \frac{d}{dp}\sqrt{G},$$

que, tornant a integrar, dóna

$$\int_0^{\alpha} \int_0^{p(\theta)} k\sqrt{G}dp\, d\theta = A - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dp}\sqrt{G}\, d\theta,$$

és a dir,

$$\int_T k\, dA = (\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

És a dir, la *curvatura total és igual a l'excés (o defecte)*, que és el teorema del defecte.

Si $k = 1/R^2$, tenim

$$\text{Àrea de } T = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

És a dir, a l'esfera de radi 1, l'*àrea és l'excés.*

Si $k = 1/(iR)^2 = -1/R^2$, tenim

$$\text{Àrea de } T = R^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)).$$

És a dir, a l'esfera de radi i, l'*àrea és el defecte.*

Observem que la recerca de l'esfera imaginària es redueix a la recerca d'una superfície de curvatura constant -1. Han desaparegut els nombres complexos.

Pensem que la recerca d'aquesta superfície portà Gauss a escriure el *Disquisicions.*

Article 21. Canvi de coordenades

En llenguatge modern, el que fa Gauss en aquest article és estudiar en gran profunditat la fórmula per al canvi de base de formes bilineals. De fet

considera
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix}$$
i dóna una interpretació geomètrica de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Una de les igualtats d'aquest article (vegeu la pàgina 65), s'obté simplement aplicant determinants a l'anterior igualtat.

Justament va ser el mateix GAUSS en el *Disquisitiones aritmethicae* (vegeu la magnífica traducció al català de la GRISELDA PASCUAL, [Gau01]), qui va estudiar en profunditat les formes quadràtiques.

En cert sentit, el *Disquisicions* es pot pensar com una aplicació del seu treball sobre formes bilineals a la geometria de superfícies de Monge i Euler.

Article 22. Coordenades polars

Com que sap canviar de coordenades, aplica els càlculs precedents a passar d'unes coordenades arbitràries a coordenades polars.

S'adona que al radi r i l'angle ϕ d'aquestes coordenades polars, que són funció de les coordenades inicials, queden caracteritzats com a funcions que són solució d'un sistema d'equacions en derivades parcials. En particular, el teorema d'existència de solucions de les equacions diferencials li dóna, a posteriori, l'existència local de coordenades polars.

En particular obté les equacions de les geodèsiques que passen pel pol simplement posant $\phi = constant$.

Però la solució d'aquest sistema és difícil en general, i GAUSS comenta que, no obstant això, moltes coses interessants se'n poden deduir, a partir de desenvolupaments en sèrie, encara que aquests només siguin vàlids localment.

Articles 23 i 24. Desenvolupaments en sèrie

A l'article §23 passa de coordenades polars r, ϕ a coordenades ortogonals. Concretament, considera unes noves coordenades p, q tals que les corbes $p = constant$ són geodèsiques ortogonals a la corba $\phi = 0$, i q és la distància del punt donat a la corba $\phi = 0$.

Resol, usant sèries, l'equació diferencial de les geodèsiques
$$d\theta = \frac{\partial n}{\partial q} \cdot dp\,,$$
on $ds^2 = n^2 dp^2 + dq^2$, i θ és l'angle entre la geodèsica i la corba $q = constant$.

A l'article §24, també a partir dels càlculs de l'article §22, obté sèries que representen les funcions r, ϕ (i altres) en termes de les coordenades p, q. Per exemple, $r^2 = p^2 + q^2 + ...$ Això li permet, entre altres coses, donar una sèrie que aproxima l'àrea del triangle rectangle sobre la superfície de vèrtexs $(0,0), (p,0), (p,q)$.

Article 25. Aproximació de l'àrea d'un triangle

Generalitza els càlculs de l'àrea del triangle rectangle de l'article precedent al càlcul de l'àrea d'un triangle arbitrari.

Article 26. Teoremes de comparació

Considera el triangle pla tal que els seus costats tenen respectivament la mateixa longitud que els costats d'un triangle donat sobre la superfície. Compara, a continuació, els angles d'aquests dos triangles. Obté una fórmula per a l'excés o defecte del triangle considerat.

Aquesta manera de fer ha donat, posteriorment, grans fruits en l'estudi de la geometria diferencial moderna, i és per això que ens agrada remarcar la perspicàcia de Gauss, que es va adonar de seguida de la importància d'aquesta idea, aparentment senzilla, i va començar la secció, tal com ja hem comentat a la pàgina 75, amb les paraules *magnam utilitatem*.[8]

Articles 27. Fórmules de Legendre

Aplica la fórmula que acaba d'obtenir a l'esfera de radi R. Obté així unes fórmules que, si negligim termes de quart ordre, coincideixen amb les fórmules de Legendre, [Leg87],

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2}\,,$$

on A és l'angle en un del vèrtexs del triangle sobre la superfície, A^* és l'angle en el vèrtex corresponent del triangle pla amb el qual comparem i σ és l'àrea del triangle.

[8] Aquesta idea de comparar triangles sobre la superfície amb triangles plans la va tenir ja Legendre per al cas particular de l'esfera. Vegeu l'article següent.

Article 28. Hohehagen[9], Brocken, Inselsberg

Per a superfícies en general, i no només sobre l'esfera, la relació entre A i A^* (igual per als altres vèrtexs) és

$$A^* = A - \frac{1}{12}\sigma(2\alpha + \beta + \gamma)\,,$$

on α, β, γ és la mesura de curvatura en els vèrtexs A, B, C respectivament.

La mala interpretació d'aquest article per part de molts lectors ha fet córrer rius de tinta, fins al punt que s'han hagut d'escriure diversos articles[10] explicant què estava fent Gauss quan aplicava les seves fórmules al triangle Hohenhagen, Brocken, Inselsberg.[11]

Simplement està parlant de la diferència que hi ha entre suposar que la terra és esfèrica i aplicar les fórmules de Legendre, amb la mateixa correcció $\dfrac{\sigma}{3R^2}$ per a cada angle (igual, per tant, a 4.95116, que correspon a 1/3 de l'excés 14.85348), i a suposar, com es fa en cartografia, que la terra és un el·lipsoide i aplicar llavors les fórmules de Gauss que contenen correccions diferents $\dfrac{1}{12}\sigma(2\alpha+\beta+\gamma)$, $\dfrac{1}{12}\sigma(\alpha+2\beta+\gamma)$ o $\dfrac{1}{12}\sigma(\alpha+\beta+2\gamma)$ per a cada angle, ja que la curvatura del geoide no és constant.

La diferència és pràcticament inapreciable.[12]

La mesura del triangle Hohenhagen, Brocken, Inselsberg[13] es va fer entre el 13 i el 27 de setembre de 1823 (Gauss a Brocken esperant que se n'anés

---

[9] Actualment escrit Hohenhagen, és una petita muntanya, al poblet de Dransfeld, a uns 15 quilòmetres de Göttingen. D'ara endavant, escriurem Hohenhagen

[10] Vegeu l'article de Miller [Mil72]. Destaquem, d'aquest article, la frase «El famós experiment és de fet una mera llegenda que va sorgir d'una interpretació errònia d'aquest important treball de 1827, Disquisitiones generales circa superficies curvas.»

Vegeu també l'article de Breitenberger [Bre84]. Destaquem, d'aquest article, la frase «[...] aquest és el quid de la qüestió d'aquest moltes vegades mal citat passatge.»

[11] L'aparició de l'article de E. Scholz, «Carl F. Gauss, el "gran triangulo" y los fundamentos de la geometría» a *La Gaceta de la RSME*, vol. 8.3, (2005), durant la correcció de les galerades del present llibre, mostra que la controvèrsia encara continua.

[12] Comentant això en una carta a Olbers ([Gau27], 9, pàg. 378), Gauss fa un comentari que ens ensenya la seva manera de fer i pensar: «[...] no obstant això, la dignitat de la ciència requereix que entenguem clarament la naturalesa d'aquesta desigualtat.»

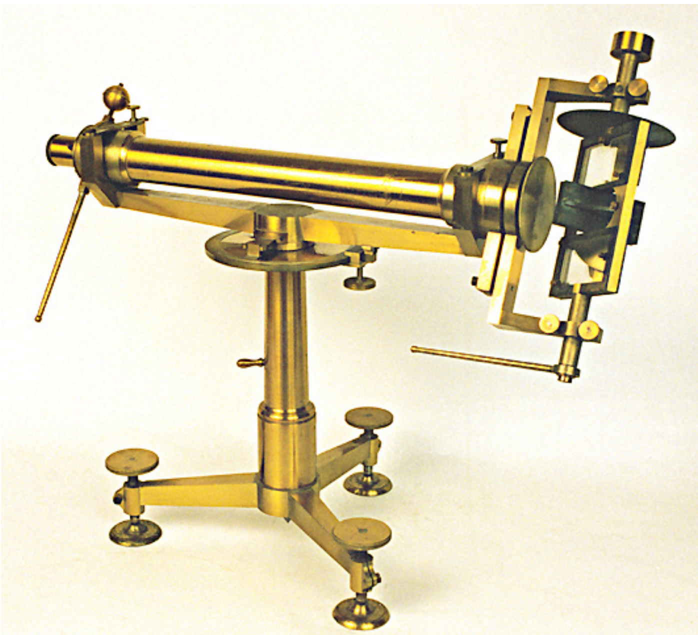
[13] Aquests càlculs no són coherents amb els que es poden trobar a la pàgina 314 de [Gau27], vol. *IX*, on es donen els costats i els angles d'aquest triangle. Concretament, els costats en metres són $HI = 84942.45328$, $IB = 105974.4570$ i $BH = 69195.07749$ i els angles $B = 53^o\ 6'\ 45.967''$, $H = 86^0\ 13'\ 58.691''$ i $I = 40^o\ 39'\ 30.195''$. Com que el triangle pla amb aquests costats té angles $B^* = 53^o\ 6'\ 41.009760''$, $H^* = 86^o\ 13'\ 53.763480''$ i $I^* = 40^o\ 39'\ 25.227360''$, podem calcular directament les diferencies en cada vèrtex, i tenim, en segons, $H - H^* = 4.92752$, $B - B^* = 4.95724$ i $I - I^* = 4.96764$. En particular l'excés és 14.8524.

la boira, i GERLING a Inselsberg), i entre el 5 i el 16 d'octubre del mateix any (GAUSS a Hohengagen). Aquestes mesures es feien reflectint la llum del Sol en uns miralls, usant un aparell inventat pel mateix GAUSS al voltant de 1820, i anomenat heliotropi.

Article 29. Comparació de l'àrea d'un triangle

Acaba el *Disquisicions* comparant l'àrea d'un triangle sobre una superfície amb l'àrea del triangle pla que té els costats de la mateixa longitud que els costats del triangle donat.

Ho aplica llavors al cas en què la superfície és l'esfera, i fa la mateixa observació de la secció §28, referint-se allà als angles, i ara a l'àrea, de què l'error que es comet en suposar que la superfície de la terra és una esfera, en lloc del geoide, és insensible.



Heliotropi

Apèndix B

El *Disquisicions* de 1825

La versió de 1825 consta de divuit articles. Hem consultat la versió anglesa [Gau68].

En els primers sis articles desenvolupa la geometria diferencial de corbes planes. Aquest tema desapareix a la versió de 1827.

A continuació inicia la teoria de superfícies de manera molt semblant a com apareixerà a la versió del 1827. De fet, en els articles set i vuit fa essencialment el que fa en els primers quatre de l'actual *Disquisicions*.

L'article realment nou i important és l'article 15, on dóna una primera demostració del teorema egregi.

Totes les altres coses que havia escrit no eren més que reformulacions de resultats coneguts pels que, podríem anomenar, precursors de la teoria de superfícies. Vegeu els treballs d'Euler [Eul28], [Eul60], [Eul72], Bernouilli [Ber67], Meusnier [Meu85], Monge [Mon80] i Lagrange [Lag92]. Un estudi de la teoria de corbes i superfícies abans (i després) de Gauss el podeu trobar en els articles de Girbau [Gir84] i [Gir73]

Article 1

Identifica les direccions de les rectes orientades del pla amb els punts d'una circumferència de radi 1.

Article 2

Defineix curvatura com el resultat de comparar l'amplitud d'un arc de corba amb la seva longitud. L'amplitud d'un arc de corba és la longitud de l'arc determinat sobre la circumferència de radi 1 per les direccions de les rectes tangents en els extrems de l'arc. Defineix *mesura de curvatura* en un punt

P de la corba com el límit de la curvatura de l'arc de la corba d'origen P quan l'altre extrem de l'arc s'acosta a P. Coincideix amb la derivada de l'angle d'inclinació de la recta tangent respecte al paràmetre arc.

Article 3

Introdueix el radi de curvatura com l'invers de la mesura de curvatura.

Article 4

Estudia el signe de la curvatura.

Article 5

Estudia el cas particular en què la corba és gràfica d'una funció.

Article 6

Estudia el cas particular en què la corba està parametritzada per la longitud de l'arc.

Article 7

Inicia l'estudi de superfícies. Identifica les direccions de les rectes orientades de l'espai amb els punts d'una esfera de radi 1. Recorda els mateixos resultats sobre l'esfera que apareixeran posteriorment a la secció §2 de la versió de 1827. Sobre la fórmula

$$\cos LL'' \cdot \cos L'L''' - \cos LL''' \cdot \cos L'L'' = \sin LL' \cdot \sin L''L''' \cdot \cos A$$

que correspondrà al teorema *VI* de la secció §2 de 1827 (vegeu la pàgina 28), diu:

> Afegirem aquí un altre teorema, que, pel que sabem, no ha aparegut abans, i que es pot utilitzar sovint amb profit.

Article 8

Estudia el pla tangent a una superfície i el signe del vector normal.

Article 9

Calcula la curvatura de la corba que s'obté tallant la superfície amb un pla.

Article 10

Calcula la curvatura de la corba que s'obté tallant la superfície amb un pla que conté la normal. Apareixen les curvatures normals.

Article 11

Troba les curvatures principals com les curvatures normals màxima i mínima. Considera l'avui anomenada aplicació de Gauss. Troba una fórmula per al producte de la màxima i mínima de les curvatures normals (que anomenarem curvatura euleriana), introdueix la mesura de curvatura (que anomenarem curvatura gaussiana) com la comparació entre amplitud i àrea. L'amplitud d'una figura és l'àrea de la seva imatge esfèrica, i demostra el notable resultat que la curvatura gaussiana coincideix amb la curvatura euleriana. De fet, aquest resultat havia estat ja provat per RODRIGUES el 1815 ([Rod15a], vegeu el peu de la pàgina 84).

Article 12

Estudia geodèsiques.

Article 13

Estudia corbes sobre superfícies.

Article 14

Utilitza la trigonometria esfèrica de l'article 7 per a calcular angles sobre l'esfera que són imatges, per l'aplicació de Gauss, d'angles sobre la superfície.

Article 15

Demostra, de manera incompleta, el teorema del defecte: *el defecte d'un triangle T és l'àrea de la seva imatge esfèrica T'*. Escriurem $\delta(T) = a(T')$. Donat un triangle a la superfície, GAUSS parla del triangle que s'obté per la imatge esfèrica, però remarquem que, encara que els costats del triangle original siguin geodèsiques, les seves imatges per l'aplicació de Gauss no són en general geodèsiques de l'esfera.

Concretament GAUSS diu (vegeu [Gau27], vol. 8, pàg. 435 o [Dom79], pàg. 132),

> La suma dels tres angles d'un triangle format per línies més curtes sobre una superfície corba arbitrària, és igual a la suma de 180° i l'àrea del triangle sobre l'esfera auxiliar, la bora del qual està formada pels punts L, corresponents als punts de la bora del triangle original, i de tal manera que l'àrea del triangle es pot mirar com a positiva o negativa segons si aquest està envoltat per la seva bora en el mateixa sentit que la figura original o en el contrari.

L'esbós de prova que GAUSS dóna allà mateix no el satisfà i comenta: «Aquesta prova necessitarà explicació i algun canvi en la seva forma».

És el resultat principal d'aquesta versió. Se'n dedueix el teorema egregi.

En aquesta secció apareixen les úniques figures que inclou GAUSS en aquest treball (vegeu la pàgina 100). A la versió del 1827 no hi ha cap figura.

Article 16

Demostra el teorema egregi, del qual diu únicament que és un teorema important.

La prova original del teorema egregi la dedueix GAUSS a partir de la igualtat $\delta(T) = a(T')$ de la manera (imprecisa) següent: Si canviem el triangle T per un polígon Q de n costats i n angles α_i, la fórmula $\delta(T) = a(T')$ es transforma en $\delta(Q) = a(Q')$, on $\delta(Q) = \sum \alpha_i - (n-2)\pi$. Equivalentment $\sum \alpha_i = \int_Q k + (n-2)\pi$. Com que les isometries conserven angles el terme $\int_Q k$ es conserva per isometries. Aproximant una regió petita qualsevol R per polígons també tindrem que $\int_R k$ es conserva. Finalment, com que la curvatura en el punt P és

$$k(P) = \lim_{R \mapsto P} \frac{\int_R k}{\text{àrea de } R}$$

és veu que aquest valor és invariant per isometries, és a dir, val el teorema egregi.

Com a corol·lari obté que, si una superfície es pot desenvolupar sobre un pla, llavors té curvatura zero, i comenta que aquest fet era ja conegut però no demostrat amb prou rigor. Es refereix als treballs de MONGE [Mon80].

Article 17

Lema de Gauss.

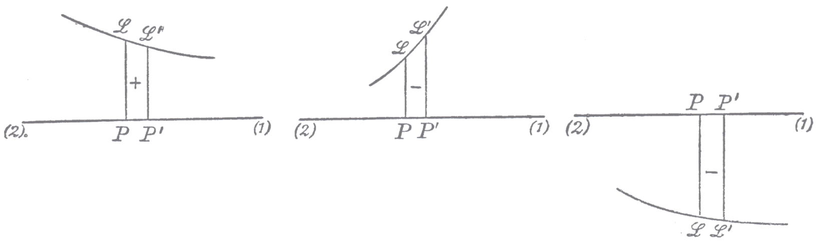
Article 18

Fórmula de la curvatura en polars:

$$k = -\frac{1}{m}\frac{dd\,m}{d\,p^2}.$$

En el peu de la pàgina 48 intentem explicar per què GAUSS s'atura aquí.

434 NACHLASS.



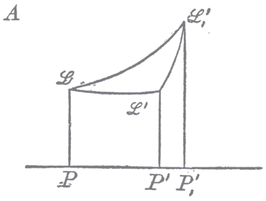
fang der Figur $LL'P'P$ in demselben Sinn umgeht, wie (1)(2)(3), negativ beim entgegengesetzten.

Man denke sich nun ein endliches Stück der Linie von L nach L' und nenne φ, φ' die an beiden Endpunkten geltenden Werthe des Winkels, so ist

$$\varphi' = \varphi + \text{Area}\, LL'P'P,$$

das Zeichen der Area eben so verstanden.

Man nehme nun ferner an, dass von dem Anfangspunkte auf der krummen Fläche unzählige andere kürzeste Linien auslaufen und nenne den Winkel, den indefinite das erste Element mit dem ersten Elemente der ersten Linie links herum macht, A; durch das zweite Ende dieser verschiedenen krummen Linien sei eine krumme Linie gezogen, von der wir vorerst unentschieden lassen, ob sie eine kürzeste Linie sei oder nicht. Setzen wir nun, dass indefinite für jede dieser Linien das, was für die erste φ, φ' war, durch ψ, ψ' bezeichnet wird, so ist $\psi' - \psi$ auf ähnliche Weise auf der Hülfskugel durch den Raum $LL'P'P$ darzustellen, und da offenbar $\psi = \varphi - A$ wird, so ist der Raum



$$\begin{aligned} LL'_1P'_1P'L'L &= \psi' - \psi - \varphi' + \varphi \\ &= \psi' - \varphi' + A \\ &= LL'_1L'L + L'L'_1P'_1P'. \end{aligned}$$

Ist nun die Grenzlinie auch eine kürzeste und macht sie fortschreitend genommen mit LL', LL'_1 die Winkel B, B_1, wird ferner für sie in den Punkten L', L'_1 durch χ, χ_1 dasselbe bezeichnet, was φ für L in der Linie LL'

Reproducció dels únics dibuixos del *Disquisicions* de 1825, pàg. 434 de [Gau27]. El *Disquisicions* de 1827 no té cap dibuix.

Apèndix C

Cartes de Gauss sobre geometria no euclidiana

Tot i que GAUSS no va anar massa lluny en el desenvolupament de la geometria no euclidiana, no hi ha dubte que estava en el camí correcte i definitiu, ja que la consistència de la geometria no euclidiana es va provar a través de la geometria diferencial.[1]

Ja hem comentat a la introducció que coneixia molt bé l'*analogia* de Lambert i, per tant, tenia un fil conductor que li indicava quins eren els resultats que havia d'anar trobant.

Probablement pel problema de la fonamentació, no va publicar res sobre aquest tema, tot i que després de la seva mort es varen trobar entre els seus papers uns escrits sobre teoria de les paral·leles, probablement de 1831, que no va arribar a publicar.[2] Però va deixar molta informació en diverses cartes als seus amics i col·legues.

Citem cronològicament els documents més importants que contenen comentaris, i tots els resultats de GAUSS, sobre el problema de les paral·leles.[3] Tots aquests resultats es poden deduir directament de l'*analogia*.[4] Cap pa-

[1]Una demostració elemental d'aquesta consistència, basada en propietats euclidianes d'un sistema de cercles ortogonals a un cercle donat, fou donada per CARSLAW el 1910, ([Bon55], pàg. 238).

[2]En aquests escrits GAUSS no arriba massa lluny, però ja s'hi entreveu la idea d'horocicle (vegeu [Gau27], volum *VIII*, pàg. 202-209, o [Bon55], pàg. $67-75$). L'enfocament és «a l'Euclides», és a dir, aborda el problema de les paral·leles axiomàticament, abandonant així el punt de vista analític del *Disquisicions.* La redacció s'assembla molt al treball de Bolyai (vegeu la pàgina 111).

[3]Totes les cartes que citem les podeu trobar també al volum *VIII* de [Gau27] entre les pàgines 159 i 220.

[4]Probablement el camí seguit per GAUSS.

raula de GAUSS es pot desaprofitar, però ens hem permès subratllar-ne algunes frases. Vegem alguns dels paràgrafs més importants d'aquestes cartes.

CARTA A F. BOLYAI (17 de desembre de 1799)

> Si es pogués demostrar l'existència d'un triangle d'àrea tan gran com volguéssim, aleshores es podria demostrar[5] amb tot rigor la totalitat de la geometria euclidiana. *Moltes persones prendrien aquesta proposició com un axioma, però jo no!* És possible que l'àrea no arribi mai a un cert valor límit.

CARTA A F. BOLYAI (25 de novembre de 1804)

> He llegit el teu manuscrit amb gran interès i cura, i he gaudit completament de la precisió subjacent. [...] He buscat la solució a aquest nus gordià, i fins ara he buscat en va. Desitges la meva atenta opinió: és que la teva explicació no em satisfà. Miraré de fer el punt crític (que pertany al mateix tipus d'obstacles que fan els meus esforços inútils) tan clar com pugui.

CARTA A GERLING (11 d'abril de 1816)

> Sembla paradoxal que pugui haver-hi una línia recta constant donada *a priori*,[6] però no trobo en això cap contradicció. De fet, seria desitjable que la geometria euclidiana no fos certa, ja que llavors tindríem una mesura universal a priori, per exemple, podríem assumir com a unitat de l'espai el costat del triangle equilàter amb angle $= 59°59'59''.99999$

CARTA A OLBERS (28 d'abril de 1817)

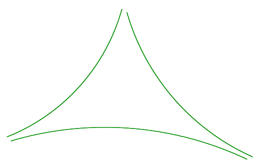
> Cada vegada estic més convençut que la necessitat física de *la nostra geometria euclidiana no pot ser demostrada*,[7] almenys per la raó humana [...] hem de posar la geometria, no en el mateix lloc que l'aritmètica, que és purament a priori, sinó en el mateix lloc que la mecànica. Potser en una altra vida ens serà possible de penetrar en la naturalesa de l'espai; però ara no és factible.

[5]Es dedueix del punt 5 de l'*analogia*. Vegeu la introducció, pàgina 14.
[6]Es dedueix del punt 2 de l'*analogia*. Vegeu la introducció, pàgina 14.
[7]Aquesta observació ens recorda l'afirmació de KLÜGEL, que hem comentat a la pàgina 18.

Carta a Gerling (25 d'agost de 1818)

> M'alegra que tingueu el coratge d'expressar-vos com si reconeguéssiu la possibilitat que la nostra teoria de les paral·leles, i amb aquesta tota la geometria, pogués ser falsa.

Carta a Gerling (16 de març de 1819)

> Sospito que el professor Schweikart estarà d'acord en tots aquests punts, la qual cosa m'alegraria molt perquè aquest punt de vista coincideix amb el meu. Tan sols vull remarcar que he desenvolupat la *geometria astral* tan lluny que puc resoldre completament tots els problemes un cop la constant C està donada. El defecte de la suma dels angles en el triangle pla respecte de 180° és, per exemple, no únicament més gran quan l'àrea es fa més gran, sinó que és exactament proporcional a aquesta, de manera que l'àrea té una cota que no es pot mai assolir, i aquesta cota és igual a l'àrea entre tres línies rectes asimptòtiques.[8]
>
> 
>
> La fórmula per a aquesta cota és:[9]
>
> $$\text{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \text{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}\,.$$

Carta a Taurinus (8 de novembre de 1824)

> Pel que fa al seu intent de demostrar el cinquè postulat no tinc res (o no gaire) a dir, llevat que és incompleta [...] [no és correcta la seva demostració que] la suma dels angles [d'un triangle] no pot ser inferior a la suma de dos angles rectes: *aquest és el punt crític, el penya-segat on es produeixen tots els naufragis.* M'imagino que sobre aquest problema no hi ha estat pas molt de temps. Jo hi he estat pensant durant més de trenta anys i no crec que ningú no hi hagi pensat més que jo, tot i que no n'he publicat res.

[8]S'està referint, clarament, al punt 5 de l'*analogia*. Vegeu la introducció, pàg. 14.

[9]Aquesta constant que multiplica π prové d'agafar com a unitat de longitud el segment que té angle de paral·lelisme $\pi/4$, i. e. $\Pi(1) = \frac{\pi}{4}$.

[...]

La suposició que la suma dels angles d'un triangle és inferior a dos rectes condueix a una geometria curiosa, molt diferent de la nostra (la euclidiana) però totalment consistent, que he desenvolupat a la meva entera satisfacció, de manera que puc resoldre-hi qualsevol problema llevat la determinació d'una constant que no es pot determinar a priori.

[...]

Tots els meus esforços per descobrir una contradicció, una inconsistència, en aquesta geometria no euclidiana no han tingut èxit, i la cosa més oposada a les nostres concepcions és que, si fos certa, *existiria en l'espai una magnitud lineal, determinada per ella mateixa* (però que ens és desconeguda). Però em sembla a mi que, malgrat la sàvia xerrameca dels metafísics, sabem massa poc, o quasi res en absolut, sobre la vertadera naturalesa de l'espai per a considerar impossible del tot el que ens sembla poc natural.[10]

Carta a Bessel (27 de gener de 1829)

I la meva convicció que no podem establir completament una geometria a priori s'ha tornat més forta. Mentrestant passarà probablement un temps abans no comenci a preparar les meves *molt extenses investigacions* sobre això per publicar-les; potser això no passarà mai mentre jo visqui ja que temo el rebombori dels beocis.[11]

[10] La carta a Taurinus és la més extensa i diligent de totes aquestes cartes de Gauss que estem comentant. A [Rod05] es pot trobar una anàlisi de l'obra de Taurinus, que va ser el primer a desenvolupar l'*analogia* usant lliurement els mètodes infinitesimals, seguint les idees del seu oncle Schweikart. Gauss, en aquesta carta, reconeix el mèrit de Taurinus, però en atribuir-se les seves conclusions va frustrar la carrera d'un matemàtic amb talent.

[11] Els beocis eren els natius de Beocia, a l'antiga Grècia, cèlebres perquè els seus exercits atacaven cridant. Aquí s'aplica als metafísics neokantians.

De fet Gauss no anava gens desencaminat, ja que fins i tot molt posteriorment, el 1871, el professor Lotze, un neokantià de Göttingen, va declarar que la geometria no euclidiana no tenia sentit, cosa que va causar molts problemes a Klein (vegeu [Lau99], pàg. 222).

Carta a Bessel (9 d'abril de 1830)

> Hem d'admetre humilment que si bé el nombre és merament un producte de les nostres ments, l'espai té una realitat fora de les nostres ments i les seves lleis no les podem saber a priori.

Carta a Schumacher (17 de maig de 1831)

> Fa algunes setmanes que he començat a escriure alguns resultats de les meves meditacions sobre aquest assumpte, que provenen de quaranta anys endarrere, i de les quals res he redactat, cosa que m'ha obligat tres o quatre vegades a començar de nou el meu treball. *No voldria, però, que això morís amb mi.*

Carta a Schumacher (12 de juliol de 1831)

> La longitud d'una circumferència de radi r és:
>
> $$L = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

i comenta que perquè les mesures coincideixin amb l'experiència k hauria de ser infinitament gran.[12]

Aquesta redacció la va interrompre el 1832, en conèixer el treball de János Bolyai.

Carta a Gerling (14 de febrer de 1832)

> Et comento que he llegit aquests dies un petit treball d'un hongarès, sobre geometries no euclidianes, que conté totes les meves idees i resultats, desenvolupats molt elegantment. [...] L'autor és un jove oficial austríac, fill d'un amic de la meva joventut, que vaig conèixer el 1798, amb qui havia parlat del tema, però aleshores les meves idees no havien arribat a la maduresa i formació d'ara. *Tinc aquest jove geòmetra com un dels genis més grans.*

[12] Aquesta fórmula es pot deduir a partir del punt 9 de l'*analogia*. Vegeu la introducció, pàg. 14.

Carta a F. Bolyai (6 de març de 1832)

> Ara deixa'm dir una cosa sobre el treball del teu fill. Si començo dient que no el puc alabar, restaràs desconcertat. No obstant això, no puc fer altra cosa: *si l'alabés, m'alabaria a mi mateix*, ja que el total contingut del treball, el camí que segueix el teu fill i els resultats a què ha arribat coincideixen quasi completament amb les meves reflexions de fa trenta o trenta-cinc anys.

I, més endavant,

> És, per tant, una agradable sorpresa per a mi, i estic molt satisfet que sigui justament el fill del meu vell amic qui m'hagi precedit de manera tan remarcable.

És en aquesta carta que suggereix el nom de *paraesfera*[13] per a la superfície F de J. Bolyai.

A més, la carta conté una demostració original que l'àrea d'un triangle hiperbòlic és proporcional al defecte. Aquesta demostració, una de les poques que va escriure Gauss, es basa en el fet, no suficientment aclarit per Gauss però que es pot deduir del treball de J. Bolyai, que els triangles amb tres vèrtexs a l'infinit tenen àrea finita.

Acabem amb un parell de cartes molt posteriors, a Schumacher i a Gerling, on Gauss remarca que fa més de cinquanta anys que es dedica al problema de les paral·leles i de la seva relació amb el teorema del defecte en el cas hiperbòlic.

La primera no figura a [Gau27], però la podeu trobar a [Ros88], pàg. 220. La publicació d'aquesta carta, just després de la mort de Gauss, el 1855, on pondera positivament el treball de Lobatxevski, va causar una forta impressió a la comunitat matemàtica europea. Quant haria pogut canviar aquesta història si Gauss hagués fet publica la seva molt bona opinió del treball de J. Bolyai !

Carta a Schumacher (28 de novembre de 1846)

> [...] el que Schweikart va anomenar *geometria astral*, Lobatxevski ho anomena *geometria imaginària*. Saps que durant 54 anys (1792) he compartit els mateixos punts de vista amb alguns desenvolupaments addicionals [...]. No

[13] És la superfície que hem anomenat horoesfera, seguint la notació de Lobatxevski, avui universalment acceptada. Vegeu el comentari al treball de J. Bolyai a la pàgina 113.

> he trobat res nou per mi en el treball de LOBATXEVSKI. Però el seu desenvolupament, en un vertader esperit geomètric, és diferent del camí[14] que jo vaig seguir.

CARTA A GERLING (10 d'octubre de 1846)

> El teorema que el sr. Schweikart li menciona a vostè, que en qualsevol geometria la suma de tots els angles exteriors d'un polígon difereix de 360° per una quantitat, [....] que és proporcional a l'àrea, és el primer teorema que es troba en el llindar d'aquesta teoria, *un teorema la necessitat del qual vaig reconèixer ja el* 1794.

Així doncs, segons el mateix GAUSS, es va començar a interessar en la geometria no euclidiana amb disset anys!

Recensions

Per completesa, citem també dues recensions que va fer GAUSS a *Göttingische gelehrte Anzeigen*, el 20 d'abril de 1816 (vegeu [Gau27], pag 170).

Comença amb el comentari següent:

> [...] Rarament passa un any sense un intent d'omplir aquests forats [els fonaments de la teoria de les paral·leles] i sense que puguem dir de cap manera, si parlem honestament i clarament, que hem anat més enllà del que va fer EUCLIDES fa 2000 anys.

Sobre el treball de J. C. Schwab comenta que l'autor creu demostrar que si una línia recta talla dues paral·leles ho fa amb el mateix angle, i sobre el treball de Matthias Metternich comenta que el seu error està a suposar que una successió monòtona de punts que s'acosta a un punt donat té per límit aquest punt.

[14]El camí diferent al qual es refereix GAUSS és possiblement el camí del *Disquisicions*: el camí de la recerca de l'esfera imaginària.

Apèndix D

János Bolyai *ab omni naevo vindicatus*

J. BOLYAI[1] està considerat la figura més gran de la ciència hongaresa i se'l té pel Copèrnic de la geometria. En el seu treball de 26 pàgines publicat el 1831 i citat generalment com a *Apèndix*, i que és un apèndix al volum I del *Tentamen*,[2] la monumental monografia en dos volums del seu pare, F. BOLYAI, va fer una troballa revolucionària creant l'anomenada geometria no euclidiana.

Podeu trobar la traducció anglesa de G. B. Halsted, per exemple, a [Bol31], [Bol02] i [Gra04][3]. I la de F. Kärteszi a [Kár87].

La voluntat de János d'estudiar la teoria de les paral·leles devia ser molt forta, ja que el 4 d'abril de 1820 va rebre una carta del seu pare que deia:

> Per l'amor de Déu! *Deixa les paral·leles tranquil·les*, abjura'n com d'una xerrada indecent, et prendran (com a mi) el teu temps, la salut, la tranquil·litat i la felicitat de la teva vida. Aquesta foscor sense fons pot devorar un miler d'altes torres com Newton i mai més no tornarà a brillar a la terra...

[1]Així com SACCHERI va reivindicar el paper d'Euclides a la seva famosa obra *Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universiae geometriae principia,* nosaltres volem reivindicar el paper de J. Bolyai com a fundador de la geometria hiperbòlica.

[2]*Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae introducendi,* 1832. Un intent d'introduir la joventut estudiosa en els elements de la matemàtica pura.

[3]Aquesta referència fou coneguda per nosaltres posteriorment a la redacció d'aquest treball. La opinió de Gray sobre Bolyai coincideix amb la que nosaltres estem defensant aquí, i que ja varem formular en tot detall l'any 2001 a [Rod05].

A principis de setembre de 1823, amb vint-i-un anys, János va ser nomenant sotslloctinent, i va ser assignat a la Direcció de Fortificacions de Temesvár.[4] Des d'aquí va escriure al seu pare la carta de 3 de novembre de 1823 que va esdevenir extensament coneguda:

> Apreciat pare! Tinc moltes coses per escriure-us sobre els meus nous descobriments, però, de moment, no puc sinó evitar-ne la discussió en profunditat aquí i us els escriuré en unes quartilles... Estic determinat a publicar un treball sobre les paral·leles tan aviat com l'hagi arreglat i preparat i hi hagi una oportunitat de fer-ho; de moment, encara no està descobert, però el camí que he seguit promet aconseguir la meva meta si d'alguna manera és possible; encara no està llest però *he descobert coses tan superbes que jo mateix estic atònit*, i significaria una vergonya eterna deixar-ho perdre per sempre; si vostè, apreciat pare, les veu, les reconeixerà; ara no puc dir més: *de no-res he creat un món nou i diferent*; totes les altres coses que us he enviat són com un castell de cartes comparat amb una torre.

La importància dels seus resultats no va ser reconeguda fins després de la seva mort i fins i tot llavors no sense resistència. Durant la seva vida, les seves brillants idees, que havien estat madurades a l'edat de vint-i-un anys, no van ser enteses. Les va presentar amb la bravesa revolucionària de la joventut, sense por de les crítiques de la classe dirigent científica.

Qui sí que va entendre les idees de J. Bolyai fou Gauss, que va ser injust amb J. Bolyai quan va formar la seva opinió sobre l'*Apèndix* el 1832.[5]

A més, una posterior conducta de Gauss és també reprensible. Quan va saber que el rus Lobatxevski [6] havia descobert el mateix, en essència, que J. Bolyai, no va informar-lo que hi havia una altra persona que havia obtingut resultats similars. Lobatxevski, per suggeriment de Gauss, fou elegit membre de la societat científica de Göttingen.

---

[4] Timisoara, Rumania.

[5] El juny de 1831 l'*Apèndix* fou enviat a Gauss, però es va perdre (sembla que per una epidèmia de còlera); només va arribar la carta de presentació de F. Bolyai i la còpia de l'*Apèndix* es va tornar al remitent, J. Bolyai. El gener del 1832 se li va tornar a enviar. Va contestar a F. Bolyai set setmanes més tard. Vegeu un breu resum d'aquesta carta a la pàgina 106.

[6] L'onze de febrer de 1826 Lobatxevski va fer una presentació de la seva geometria imaginària. Aquestes primeres notes es van perdre, però ell mateix en va redactar unes de noves el 1829, i es varen publicar a la revista de la seva Universitat, *El Missatger de Kazan* (vegeu [Boi91]). El 1837 publica *Géométrie imaginaire* (vegeu [Lob37]), i el 1840 a Berlín publica un resum de *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parellellinien* (vegeu [Lob55]), que fou l'obra llegida per Gauss. El seu treball és independent del de J. Bolyai. Però així com Lobatxevski era un professor universitari de cert prestigi, János era tan sols un sotslloctinent de vint-i-un anys. Per això és l'heroi d'aquesta història.

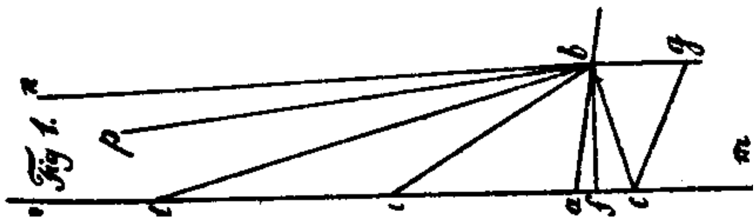
D.1 L'apèndix del Tentamen

La gran victòria de J. Bolyai sobre Gauss està que J. Bolyai va arribar a introduir l'element de longitud que buscava Gauss, a partir del desenvolupament purament axiomàtic de la geometria no euclidiana, és a dir, fent el mateix que havia fet Euclides, en els *Elements*, però a partir d'uns altres postulats.

Comentem breument l'*Apèndix*, destacant els punts més rellevants.

§1

En aquest paràgraf defineix paral·lela. Es basa en el dibuix



Diu concretament: ≪Si el raig am no és tallat pel raig bn, situat en el mateix pla, però és tallat per cada raig bp comprès en l'angle abn, direm que el raig bn és paral·lel al raig am; es denota per $bn||am$. És evident que hi ha un tal raig bn i només un, i que la suma dels angles bam, abn no excedeix d'un st.∠.[7] ≫

A la pàgina 128 reproduïm els dibuixos originals de J. Bolyai.

§2–§10

Dedica llavors els apartats §2 al §10 a estudiar les propietats del paral·lelisme, com, per exemple, la transitivitat.[8] De fet, aquesta transitivitat la prova a l'espai, i no només en el pla, ja que posteriorment, a la secció §10, ho necessitarà.

[7] Angle recte.

[8] Aquesta part és la que hem comentat que és molt semblant al treball no publicat de Gauss sobre teoria de les paral·leles, datat el 1831.

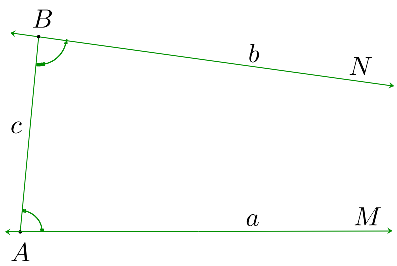
L'eina descoberta per J. Bolyai (coneguda també per Gauss i Lobatxevski) i que és el punt central del seu treball, sense la qual, i sens dubte, no hauria pogut fer res, és el que avui coneixem per *horoesfera*. Gauss proposa posteriorment dir-ne *paraesfera*, però J. Bolyai no li dóna cap nom, simplement la defineix en el §11 i li diu superfície F.

Recordem-ne la definició. La primera observació, molt rellevant, és que hem de sortir del pla i situar-nos a l'espai. És a dir, augmentar una dimensió. Fixem un raig o semirecta. Direm que dos punts A i B són *isogonals* corresponents, o breument punts corresponents (el terme és degut a Gauss), quan en considerar les semirectes paral·leles AM i BN al raig inicial es compleix que

$$\angle MAB = \angle NBA\,.$$

Escriurem, com J. Bolyai, $A \simeq B$, per a denotar que A i B són isogonals.

Aquesta relació és independent del cinquè postulat, pertany al reialme de la geometria absoluta i té les propietats reflexiva, simètrica i transitiva: $A \simeq A$; si $A \simeq B$, llavors $B \simeq A$; si $A \simeq B$ i $B \simeq C$, llavors $A \simeq C$. Si una relació té les propietats anteriors, se'n diu relació d'equivalència. És ben conegut que qualsevol relació d'equivalència en un conjunt dóna lloc a una subdivisió del conjunt en subconjunts disjunts. Se'n diuen classes d'equivalència.



Ara, cada classe d'equivalència obtinguda a partir de la relació anterior és un subconjunt de l'espai, que anomenarem *horoesfera*.[9] Es pot considerar també com la figura a la qual tendeix una esfera que passa per un punt fixat quan el centre tendeix a infinit.

[9] Observem que una manera de definir esfera sense explicitar el radi és la següent: Considerem el feix de rectes que passen per un punt O; diem que dos punts A i B són

§15

Aquest paràgraf el reproduïm completament, ja que és molt important i curt:[10]

> A la llum dels §13 i §14, *el Sistema de Geometria basat sobre la hipòtesi de la veritat de l'Axioma XI* [11] *d'Euclides es diu* Σ*; i el sistema basat sobre la hipòtesi contrària es diu* S*.*
>
> *Totes les coses de les quals no es diu explícitament si estan a* Σ *o a* S*, es sobreentén que estan enunciades absolutament,*[12] *és a dir, s'està dient que són certes tant a* Σ *com a* S*.*

En particular, tot el que s'havia dit fins aquí era absolut, és a dir, cert, tant si suposem el cinquè postulat com si no.

§16–§24

En aquests paràgrafs estudia les propietats de l'horoesfera, i arriba a l'extraordinari descobriment del §21: *La geometria de l'horoesfera és euclidiana!*

Més precisament, si considerem com a conjunt de *punts* els punts de l'horoesfera i com a conjunt de *rectes* els horocicles (intersecció amb l'horoesfera de plans que contenen el seu eix),[13] es compleixen els cinc postulats d'Euclides. En particular, *la geometria euclidiana de dimensió dos viu dins de la geometria hiperbòlica de dimensió tres.*[14]

---

isogonals corresponents, $A \doteq B$, quan

$$\angle OAB = \angle OBA.$$

Cada classe d'equivalència és una esfera de centre O. La definició d'horoesfera és una generalització natural d'aquesta manera de pensar, quan O tendeix a infinit.

[10] L'emfasitzat és de Bolyai.

[11] El cinquè postulat.

[12] D'aquest paràgraf va sortir el nom de geometria absoluta per a la geometria comuna al pla euclidià i al pla hiperbòlic.

[13] Qualsevol recta paral·lela a la semirecta emprada en la definició d'horoesfera es diu *eix* de l'horoesfera. Els horocicles es poden pensar també com la figura a la qual tendeix una circumferència que passa per un punt fixat quan el centre tendeix a infinit. Vegeu la secció D.2, pàgina 118.

[14] Aquest fet era conegut per Gauss, ja el 1816, a través del seu alumne Wachter i li podia haver suggerit, per reciprocitat, que l'espai euclidià podria contenir una superfície on fos certa la geometria hiperbòlica: la tan buscada esfera imaginària! Vegeu la nota a peu de pàgina 126.

§25

En aquest paràgraf demostra el teorema del sinus, és a dir, la fórmula (H.7) de la trigonometria hiperbòlica (pàgina 162), enunciada, però, en termes de longituds horocícliques. Concretament J. Bolyai demostra, de manera absoluta, és a dir, independent del cinquè postulat, que:

> *En qualsevol triangle rectilini, els cercles amb radi igual als seus costats són com els sinus dels angles oposats.*[15]

§26

En aquest paràgraf aplica els anteriors resultats a l'esfera i obté un resultat extraordinari, que ell mateix emfasitza:

> *La trigonometria esfèrica, que segueix d'això, s'ha establert, doncs, independentment de l'Axioma XI.*

Demostra, aplicant el §25, que

> *En qualsevol triangle esfèric, els sinus dels costats són com els sinus dels angles oposats.*

És a dir, la fórmula (E.7) de la trigonometria esfèrica (pàgina 143).[16]

§27–§30

En els paràgrafs §27, §28 i §29 estudia l'angle del paral·lisme donant-ne diverses expressions.

En el §30 calcula la longitud del cercle en funció del radi, de manera que pot escriure els resultats del §25 en funció de les longituds dels costats i obtenir, ara sí, exactament la fórmula (H.7) (pàgina 162).

De fet, demostra que la longitud L i l'àrea A d'un cercle de radi r són donats per

$$L = 2\pi R \tan z \tag{D.1}$$
$$A = \pi (R \tan z)^2 \,, \tag{D.2}$$

[15] Aquest enunciat conté el teorema del sinus per a les tres geometries.

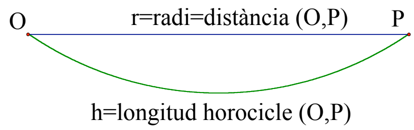
[16] El més sorprenent d'aquest resultat, colateral en el camí emprès per J. Bolyai, és que demostra que la intuïció inicial que va conduir al descobriment de l'horocicle, estava ben fonamentada. Recordem que Lambert, en el número 8 de la seva *analogia*, ja ho havia afirmat. Fins i tot sembla suggerir una prova elemental d'aquest fet que ens podria remetre a la prova de Harriot, que hem reproduït a la secció E.4.

on z és el complementari de l'angle de paral·lelisme de $r/2$. En particular

$$\tan z = 2 \sinh \frac{r}{2R} .$$

Si denotem per O el centre de la circumferència i per P un punt d'aquesta, la relació entre el radi $r = d(O, P)$ i la longitud h de l'horocicle que uneix aquests dos punts és

$$h = 2R \sinh \frac{r}{2R} .$$



De manera que també tenim

$$L = 2\pi h = 2\pi R \tan z = 2\pi (2R \sinh \frac{r}{2R}) \tag{D.3}$$

$$A = \pi h^2 = \pi (R \tan z)^2 = \pi (2R \sinh \frac{r}{2R})^2 . \tag{D.4}$$

§31

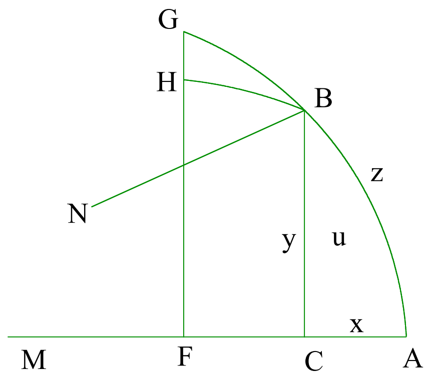
Aquest paràgraf està dedicat a la trigonometria hiperbòlica. Demostra que les fórmules que relacionen els angles i els costats d'un triangle hiperbòlic són anàlogues a les fórmules que relacionen els angles i els costats d'un triangle esfèric quan les longituds d'aquests costats es consideren imaginaris purs: l'*analogia* es compleix!

§32

És ara quan introdueix la mesura de longitud de corbes i, en particular, l'element de longitud ds.[17]

[17]En aquest article J. Bolyai introdueix per primer cop a l'*Apèndix* el mètode dels infinitèsims, passant de la geometria sintètica a la geometria diferencial. Sospitem que el mètode dels infinitèsims fou el mètode utilitzat per J. Bolyai a la primera versió del seu treball, l'any 1825, que es va perdre. Tan sols sabem que aquesta versió fou enviada al seu professor J. W. von Eckwher; vegeu [Kár87], pàg. 33. Que J. Bolyai era conscient que estava barrejant dos mètodes queda palès a la seva pròpia frase de la secció *VII* de l'article 32: «De totes formes, les coses tractades des de *IV* fins aquí es poden demostrar sense integració, però per brevetat han estat suprimides.»

Considera la corba AB d'equació $y = y(x)$, en coordenades rectangulars x, y. És a dir, es fixa el punt A i la recta AM, i llavors per a calcular les coordenades d'un punt B es calcula la distància y del punt a la recta AM i la distància x entre el peu de la perpendicular de B a AM i A.[18]



Reproducció de la figura 17 de l'*Apèndix*.

Demostra,[19] amb la seva notació,

$$\frac{dz^2}{dy^2 + \overline{BH}^2} \doteq 1\,. \tag{D.5}$$

Per dz entén un increment de z, essent z la longitud de AB; és, doncs, el nostre ds. Per $\overline{BH}$ entén la longitud de l'equidistant a FC. Per $\doteq$ entén que la igualtat és certa en el límit, quan $dx = FC$ tendeix a zero.

[18] El pla euclidià està caracteritzat pel fet de que les línies $y = constant$, en les coordenades rectangulars, és a dir, les equidistants a l'eix de les x, son línies rectes; el pla esfèric està caracteritzat pel fet que aquestes línies coordenades són circumferències concèntriques; i, en el pla hiperbòlic, aquestes línies coordenades no són ni rectes ni circumferències; tenen, això sí, longitud infinita, com en el cas euclidià.

[19] La demostració de J. Bolyai no és prou rigorosa, però es pot formalitzar aplicant trigonometria hiperbòlica al triangle infinitesimal de costat $dx = FC, dy = GH, dz = GB$ (vegeu per exemple [Kár87], pàg. 167). Segurament Gauss podia fer aquests càlculs en tot rigor. Pensem que Gauss havia de forçosament reconèixer, en la fórmula (D.5), l'expressió de l'element de longitud hiperbòlic. A aquesta fórmula ens referim a la pàgina 23 de la introducció quan diem que Gauss va veure alguna cosa a l'*Apèndix* que el va fer desistir en el seu projecte. J. Bolyai acaba de donar l'esfera imaginària sintèticament. Creiem que és el primer exemple d'una varietat de Riemannn de dimensió dos que no és una superfície de l'espai. L'obstrucció que tenia Gauss és que la buscava analíticament i a l'espai euclidià. Això respon les preguntes 1 i 2 de la pàgina 21.

Prèviament, §27, ha demostrat que la relació de longituds entre una recta i la seva equidistant a distància y (que no és recta!) és

$$\frac{\overline{BH}}{FC} = \frac{1}{\sin \Pi(y)},$$

o, equivalentment (vegeu (H.12), pàgina 164),

$$\frac{\overline{BH}}{FC} = \cosh \frac{y}{R}.$$

Identificant FC amb dx, la fórmula (D.5) s'escriu

$$dz^2 \doteq \cosh^2 \frac{y}{R} dx^2 + dy^2.$$

Això vol dir, en llenguatge modern, que l'element de longitud ds està donat per la fórmula

$$\boxed{ds^2 = \cosh^2 \frac{y}{R}\, dx^2 + dy^2} \tag{D.6}$$

que, en coordenades polars, és igual a (vegeu la secció D.3)

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R}\, d\theta^2}$$

El coneixement de l'element de longitud, és a dir, de la mètrica, li permet fer *geometria diferencial*, i en el mateix §32 calcula l'element d'àrea, l'àrea del cercle, l'àrea de l'esfera, volums, comenta que es poden calcular curvatures, evolutes, etc.

§33

Remarca que saber quina de les dues geometries és la real queda per decidir. Però si la real és la hiperbòlica faltarà encara decidir quin és el valor de la constant que dóna la proporcionalitat entre l'àrea i el defecte.

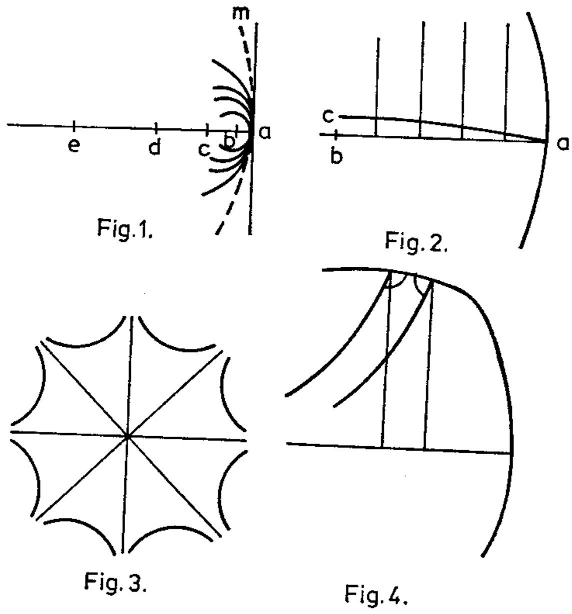
§34–§43

D'aquestes seccions destaquem dos fets fonamentals: a la secció 42 demostra que l'àrea d'un triangle hiperbòlic és proporcional al seu defecte i a la secció 43 demostra que, en geometria hiperbòlica, es pot quadrar el cercle (no pas tots!; vegeu [Rev04]).

D.2 Els dibuixos del descobriment

En un llibre d'exercicis de mecànica del jove J. Bolyai, de l'any acadèmic 1820-1821, quan era estudiant d'enginyeria a l'Acadèmia d'Enginyeria de Viena i tenia només divuit anys, es varen trobar, amb l'anotació *Parallelarum Theoria*, els dibuixos següents.[20]

La primera figura és la construcció de l'horocicle. El dibuix mostra una successió de circumferències, amb un punt comú de tangència, quan el centre es desplaça cap a l'infinit. Si aquest límit és una recta, estem en el cas de la geometria euclidiana; si aquest límit és una certa corba, com la m del dibuix, estem en el cas de la geometria de l'angle agut. Aquest mateix plantejament, en una dimensió més, dóna lloc a la construcció de les horoesferes, tan fonamental a l'obra de J. Bolyai.



Més encara, si pensem l'horoesfera com la posició límit d'esferes de radi R, quan el centre, i per tant R, tendeixen a infinit, és clar que la *geometria de l'horoesfera és euclidiana,* ja que és la geometria d'una esfera de radi

[20]Aquestes dibuixos apareixen a la pàgina 223 de [Kár87].

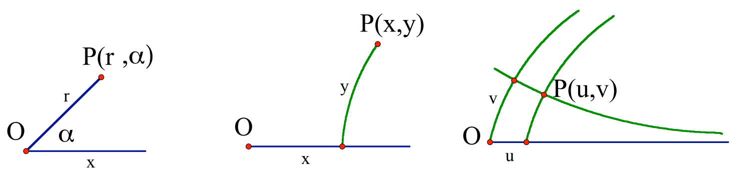
infinit.[21] Ja hem comentat que aquest fet, demostrat rigorosament, és una de les grans aportacions de J. Bolyai. Però aquests dibuixos són molt anteriors a l'*Apèndix*.

Les figures 2 i 4 semblen gràfiques de funcions, pensades per a estudiar analíticament *equidistants* i horocicles. En particular, la figura 4 s'assembla molt a la figura 24 de l'*Apèndix*, que hem reproduït a la pàgina 116.

La figura 3 fa pensar, irremissiblement, en l'octògon regular amb vèrtexs a l'infinit, centrat a l'origen del disc de Poincaré. La consideració de triangles *ideals*, és a dir, amb un o diversos vèrtexs a l'infinit, és natural en la geometria de l'angle agut, ja que apareixen com casos extrems de les fórmules trigonomètriques. De fet, una figura semblant, només amb quatre costats, apareix en la memòria que envia SCHWEIKART a GAUSS (vegeu [Gau27], pàg. 181).

D.3 Canvi de coordenades

En el pla hiperbòlic, a part de les coordenades polars o cícliques, i de les coordenades rectangulars o hipercícliques, es consideren també coordenades paracícliques o horocícliques, en les quals una de les distàncies es mesura sobre l'horocicle.



Cícliques Hipercícliques Paracícliques

Cícliques. r és la distància entre el punt P i l'origen O. α és l'angle entre la geodèsica PO i una geodèsica prefixada. Observem que $r = constant$ és un cercle hiperbòlic.

Hipercícliques. x és la distància entre l'origen O i la projecció del punt P sobre una geodèsica prefixada. y és la distància entre el punt P i aquesta

[21] Un pas crucial en la reconstrucció sintètica de la nova geometria fou donar una definició d'horocicle que no usés aquest procediment de pas al límit, propi dels mètodes de l'anàlisi però no pas de la geometria sintètica. J. BOLYAI troba aquesta definició a la secció 11 de l'*Apèndix* (vegeu la nota al peu de la pàgina 113). Curiosament és la mateixa definició que GAUSS dóna en els manuscrits del 1831, i també la de LOBATXEVSKI.

geodèsica prefixada. Observem que $y = constant$ és un hipercicle (equidistant).

Paracícliques. u és la distància sobre una geodèsica prefixada entre l'origen O i la intersecció amb aquesta geodèsica de l'horocicle per P i eix la geodèsica. v és la longitud de l'horocicle per O i eix la geodèsica prefixada entre O i la intersecció d'aquest horocicle amb la geodèsica per P pral·lela a la geodèsica prefixada. Observem que $u = constant$ és un paracicle (horocicle).[22]

Volem demostrar que l'element de longitud obtingut per J. Bolyai, que en coordenades rectangulars s'escriu com

$$ds^2 = \cosh^2 \frac{y}{R}\, dx^2 + dy^2$$

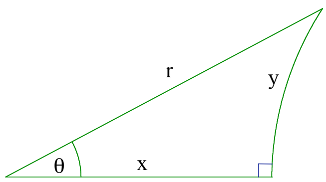
(vegeu la fórmula D.6), en coordenades polars està donat per

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R}\, d\theta^2.$$

Per a fer això, observem primerament que la relació entre les coordenades rectangulars i les coordenades polars està donada per[23]

$$\begin{aligned} \cosh \frac{r}{R} &= \cosh \frac{x}{R} \cosh \frac{y}{R} \\ \sinh \frac{y}{R} &= \sinh \frac{r}{R} \sin \theta, \end{aligned}$$

com es veu estudiant el triangle rectangle de la figura següent.



En particular, derivant aquestes fórmules obtenim

$$\begin{aligned} \sinh \frac{r}{R} \frac{\partial r}{\partial x} &= \sinh \frac{x}{R} \cosh \frac{y}{R} \\ \sinh \frac{r}{R} \frac{\partial r}{\partial y} &= \cosh \frac{x}{R} \sinh \frac{y}{R} \end{aligned}$$

[22]Recordem que per tres punts del pla hiperbòlic hi passa o bé una recta, o bé una circumferència, o bé un hipercicle, o bé un paracicle. Suposar que tres punts no alineats determinen una circumferència és equivalent al cinquè postulat.

[23]D'aquest sistema podem deduir l'expressió del canvi de coordenades: $x = x(r, \theta)$, $y = y(r, \theta)$.

i

$$
\begin{aligned}
\cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x} &= -\frac{\sinh\dfrac{x}{R}\,\cosh^2\dfrac{y}{R}\,\cosh\dfrac{x}{R}\,\sinh\dfrac{y}{R}}{(\cosh^2\dfrac{x}{R}\cosh^2\dfrac{y}{R}-1)^{3/2}} \\
\cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \frac{\sinh^2\dfrac{x}{R}\,\cosh\dfrac{y}{R}}{(\cosh^2\dfrac{x}{R}\cosh^2\dfrac{y}{R}-1)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Per tant,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial x} &= -\frac{\sinh\dfrac{y}{R}\,\cosh\dfrac{x}{R}\,\cosh\dfrac{y}{R}}{(\cosh^2\dfrac{x}{R}\,\cosh^2\dfrac{y}{R}-1)} \\
\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \frac{\sinh\dfrac{x}{R}}{(\cosh^2\dfrac{x}{R}\,\cosh^2\dfrac{y}{R}-1)}\,.
\end{aligned}
$$

Com que

$$
\begin{aligned}
dr &= \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy \\
d\theta &= \frac{\partial\theta}{\partial x}dx + \frac{\partial\theta}{\partial y}dy\,,
\end{aligned}
$$

podem substituir directament els anterior càlculs a $dr^2 + \sinh^2\dfrac{r}{R}d\theta^2$ i obtenim

$$dr^2 + \sinh^2\frac{r}{R}d\theta^2 = \cosh^2\frac{y}{R}\,dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

com volíem demostrar.

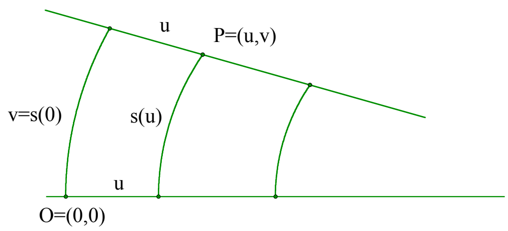
També es pot veure que aquest mateix element de longitud en coordenades paracícliques està donat per

$$ds^2 = du^2 + e^{-2u}dv^2. \tag{D.7}$$

Es dedueix de la relació

$$s(u) = s(0)e^{-u} \tag{D.8}$$

entre les longituds dels horocicles del mateix feix, compresa entre dos eixos (vegeu per exemple [Rev02], pàg. 120).[24]



Observem que les coordenades cícliques i hipercícliques tenen un anàleg clar a l'esfera, i que les expressions de l'element de longitud en cadascuna s'obté simplement substituint les funcions hiperbòliques per les funcions circulars corresponents.

No obstant això, les coordenades paracícliques no tenen un anàleg sobre l'esfera, ja que a l'esfera no hi ha horocicles.

D.4 Consistència de la geometria no euclidiana

Les últimes línies de l'*Apèndix* són aquestes:

> Manca, finalment (perquè la cosa estigui completa des de tots els punts de vista), demostrar la impossibilitat (sense cap suposició) de decidir *a priori* si Σ o alguna S (i quina) existeix. Això, tanmateix, es reserva per a una ocasió més convenient.

Recordem que Σ és la geometria euclidiana i S la geometria de l'angle agut. Quan diu *quina S existeix* sembla que s'està preguntant sobre la curvatura de l'Espai. Les diferents S difereixen en una constant iR, el radi de l'esfera imaginària, i per tant la curvatura de la geometria de l'angle agut és $-\dfrac{1}{R^2}$.

El problema de la consistència, en els seus orígens, es plantejava en el sentit de si els resultats de geometria obtinguts a partir d'un sistema d'axiomes contradeien o no l'experiència del món físic real.

[24] La relació entre les coordenades hipercícliques (x, y) i les paracícliques (u, v) està donada per $x = u + \ln\sqrt{1 + v^2e^{-2u}}$; $\sinh y = ve^{-u}$. Però per a demostrar la fórmula (D.7) tan sols cal observar que u és paràmetre geodèsic, que les corbes $u = constant$, $v = constant$ són ortogonals (no apareix el terme $du\,dv$), i tenir en compte la relació (D.8).

Però, des del punt de vista de la lògica, el problema de la consistència vol dir *absència de contradiccions internes.* És a dir, demostrar que un sistema d'axiomes és consistent vol dir demostrar que no podem deduir-ne dos resultats contradictoris. Com que no tenim una llista finita de tots els resultats que es poden deduir d'un sistema d'axiomes donat, el problema de la consistència no és fàcil, en general.

El que es fa és construir models matemàtics que compleixin els axiomes del nostre sistema, amb la qual cosa es pot dir que el sistema és *tan consistent com* el model construït. Es parla de *consistència relativa.*

J. Bolyai no s'adona que la seva geometria és la geometria que tindria una superfície de $\mathbb{R}^3$ amb element de longitud en coordenades rectangulars $ds^2 = \cosh^2 \frac{y}{R} dx^2 + dy^2$. Si existís una tal superfície quedaria provada la consistència relativa de la geometria hiperbòlica: seria tan consistent com la geometria euclidiana de $\mathbb{R}^3$.

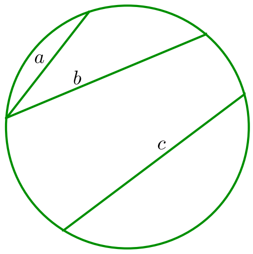
De fet, aquesta superfície existeix localment, s'anomena *pseudoesfera*, i l'estudiem a la secció H.2. Però no existeix globalment, com va demostrar Hilbert a [Hil01].

El problema de la consistència el va tancar Beltrami trenta-sis anys després del treball de J. Bolyai. Però el treball de Beltrami està inspirat en el de Battaglini.[25]

El que va fer Battaglini[26] va ser donar el que avui dia es coneix com a *model projectiu* de la geometria hiperbòlica. Sense entrar en detalls diguem que agafa com a punts del pla no euclidià els punts interiors d'un disc, i com a rectes la intersecció de rectes euclidianes amb el disc (les cordes). Pensa la vora del disc com l'infinit (els punts de la vora no pertanyen al pla hiperbòlic). Llavors, es diu que dues rectes són paral·leles quan es tallen a l'infinit, i és clar que per un punt exterior a una d'aquestes rectes passen infinites rectes que no la tallen.

[25] Battaglini va ser fundador i editor del *Giornale di Matematica*, revista que es va transformar, a partir de 1867, en l'òrgan reconegut de la geometria no euclidiana. El 1867 hi va publicar la traducció a l'italià de la *Pangeometria* de Lobatxevski, i el 1868 la traducció a l'italià de l'*Apèndix* de J. Bolyai.

[26] Vegeu [Bat67].



Les rectes a i b de la figura són paral·leles i les rectes a i c ni es tallen ni són paral·leles (es diuen ultraparal·leles).

La senzillesa d'aquest model, davant la dificultat del treball de J. BOLYAI, explica per què, a partir de llavors, la geometria hiperbòlica s'accepta fàcilment. Responem, així, a la pregunta 4 de la pàgina 21.

Per a poder parlar de circumferències s'ha d'introduir una distància. Això es fa declarant isometries les projectivitats del pla que preserven el cercle.[27]

Potser pel fet de ser anterior a l'obra de HILBERT, el treball de BATTAGLINI encara no és prou rigorós. La identificació del model projectiu amb la geometria hiperbòlica es deu a KLEIN, que va saber interpretar els treballs previs de Cayley sobre geometria mètrica projectiva (vegeu [Bon55], pàg. 164).

Hom considera BELTRAMI el vertader artífex de la prova de la consistència de la geometria hiperbòlica. No obstant això, hi ha dubtes de fins a quin punt va ser conscient BELTRAMI d'aquest fet. Més aviat va ser BONOLA a [Bon55], pàg. 175, qui, comentant el *Saggio*, demostrà la consistència (vegeu [Gra87], pàg. 29).

Inspirat, com dèiem, en BATTAGLINI,[28] BELTRAMI[29] introdueix una mètrica (una manera de mesurar longituds) en el disc $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+$

[27] Un lloc on està molt ben explicat és en el llibre de SANTALÓ [San61].

[28] Aquest tema està molt ben recollit en el treball de MONTESINOS [Mon94].

[29] Vegeu [Bel68]. Aquest article de Beltrami, conegut com el *Saggio*, apareix publicat en el volum següent de la mateixa revista on va publicar BATTAGLINI, *Giornale di Matematica*. A la nota *I* d'aquest article BELTRAMI explica que va arribar aquesta expressió del ds^2 usant l'*analogia*.

En efecte, l'expressió (D.9) de la mètrica de Beltrami que donem prové de la que havia obtingut el mateix BELTRAMI el 1866, dos anys abans del *Saggio*, a l'article [Bel66], però allà per a curvatura constant positiva.

El problema que preocupava BELTRAMI, i que tracta en aquest article, era si es podien posar coordenades sobre una superfície de manera que les geodèsiques tinguessin equacions lineals. La resposta és que una tal superfície és de curvatura constant.

Concretament demostra que l'element de longitud és

$y^2 < a^2\}$, concretament

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - y^2)dx^2 + 2xydxdy + (a^2 - x^2)dy^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^2}. \tag{D.9}$$

Així, la distància entre els punts $(0,0)$ i (x,y) està donada per

$$\rho = \frac{R}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}, \qquad (r^2 = x^2 + y^2).$$

Aquest valor és diferent de la distància euclidiana entre aquests dos punts, que seria r. És a dir, que el coneixement de les coordenades d'un parell de punts no ens diu de manera immediata quina és la distància entre ells. Tenim, això sí, una fórmula que ens permet calcular-la. Això és un grau d'abstracció difícil d'assolir.

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 + v^2)du^2 - 2uv\,du\,dv + (a^2 + v^2)dv^2}{(a^2 + u^2 + v^2)^2}.$$

Sembla que en aquell moment, 1866, no va relacionar encara la geometria hiperbòlica amb la geometria de les superfícies de curvatura constant; no havia aparegut encara el treball de BATTAGLINI, que és de 1867. Però és remarcable aquesta mena de casualitat que el porta d'un problema aparentment menor o tècnic (existència d'unes certes coordenades) a la resolució d'un problema cabdal, com és el de la consistència de la geometria hiperbòlica.

En el *Saggio*, motivat per la lectura de BATTAGLINI, reescriu aquesta fórmula i diu: ≪Però com que els valors de les constants R i a són realment arbitraris, és permès de suposar-los imaginaris, si es considera oportú. En efecte, si canviem aquestes constants per $R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, l'element lineal resultant correspon a una superfície de curvatura constant negativa $-\frac{1}{R^2}$≫. Novament l'analogia! En fer això s'obté la fórmula (D.9).

Menciona GAUSS i LOBATXEVSKI com a precursors de la geometria no euclidiana, però curiosament no menciona J. BOLYAI, malgrat que, com hem comentat, a la mateixa revista es publicava una traducció de l'*Apèndix*.

Sembla, no obstant això, que BELTRAMI no va reconèixer l'existència de varietats de Riemann de dimensió dos, ja que sempre parla del disc hiperbòlic com d'una carta que *representa* la totalitat de la superfície, però no és directament la superfície. Per exemple, diu: ≪[...] dintre del cercle límit $(u^2 + v^2 = a^2)$ es representa tota la regió real de la nostra superfície.≫ Sembla que pensa que tenim una certa superfície de l'espai euclidià de la qual coneix el ds^2.

GRAY, a [Gra87] pàg. 26, comenta: ≪No és clar [...] què pensava exactament BELTRAMI sobre les superfícies de curvatura constant.≫ i més endavant: ≪Qualsevol sentiment d'inquietud [...] que un podria tenir sobre l'article de BELTRAMI [...] .≫ Això explicaria per què BELTRAMI acaba aquest article dient que li sembla impossible fer el mateix en dimensió tres. Error que repara després de la lectura de la memòria de Riemann, publicada el 1867 (llegida el 1854). Tornem a recomanar el treball de MONTESINOS [Mon94].

Amb el model de Beltrami, és a dir, el disc D amb la mètrica anterior, la geometria hiperbòlica quedava absolutament reconeguda com una més de les geometries riemannianes i es tancava definitivament el problema de la seva consistència.

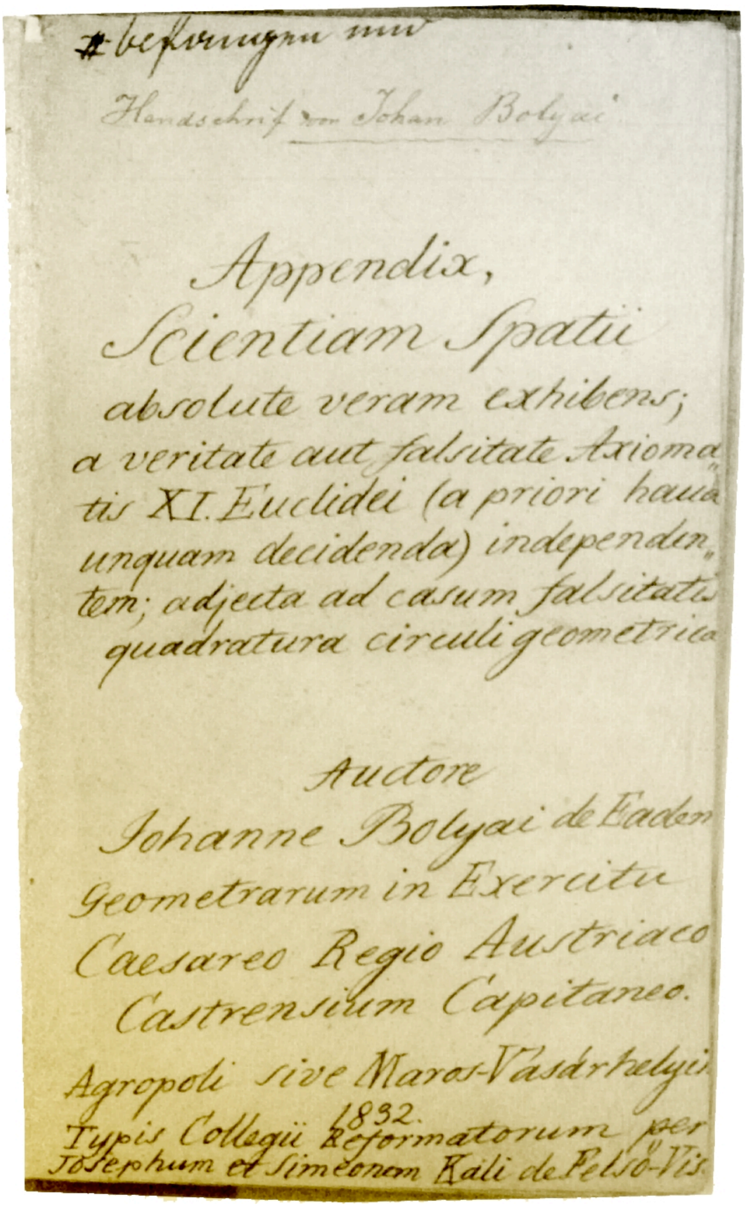
El 1901, Hilbert[30] va demostrar que no hi havia cap superfície analítica de $\mathbb{R}^3$ de curvatura constant negativa que representés globalment el pla hiperbòlic.[31] Això vol dir que no hi ha cap isometria entre una superfície de $\mathbb{R}^3$ (amb la mètrica heretada de l'euclidiana de $\mathbb{R}^3$) i el model de Beltrami. En particular, això ens diu que les singularitats que apareixen a la base de la pseudoesfera són absolutament inevitables.

Aquest resultat de Hilbert, molts anys posterior a l'època de Gauss i J. Bolyai, explica per què la geometria hiperbòlica va ser tan difícil de descobrir: estava ben amagada.

---

[30] Vegeu [Hil01].

[31] Kuiper, a [Kui55], construeix una superfície de l'espai euclidià derivable només una vegada, isomètrica al pla hiperbòlic.



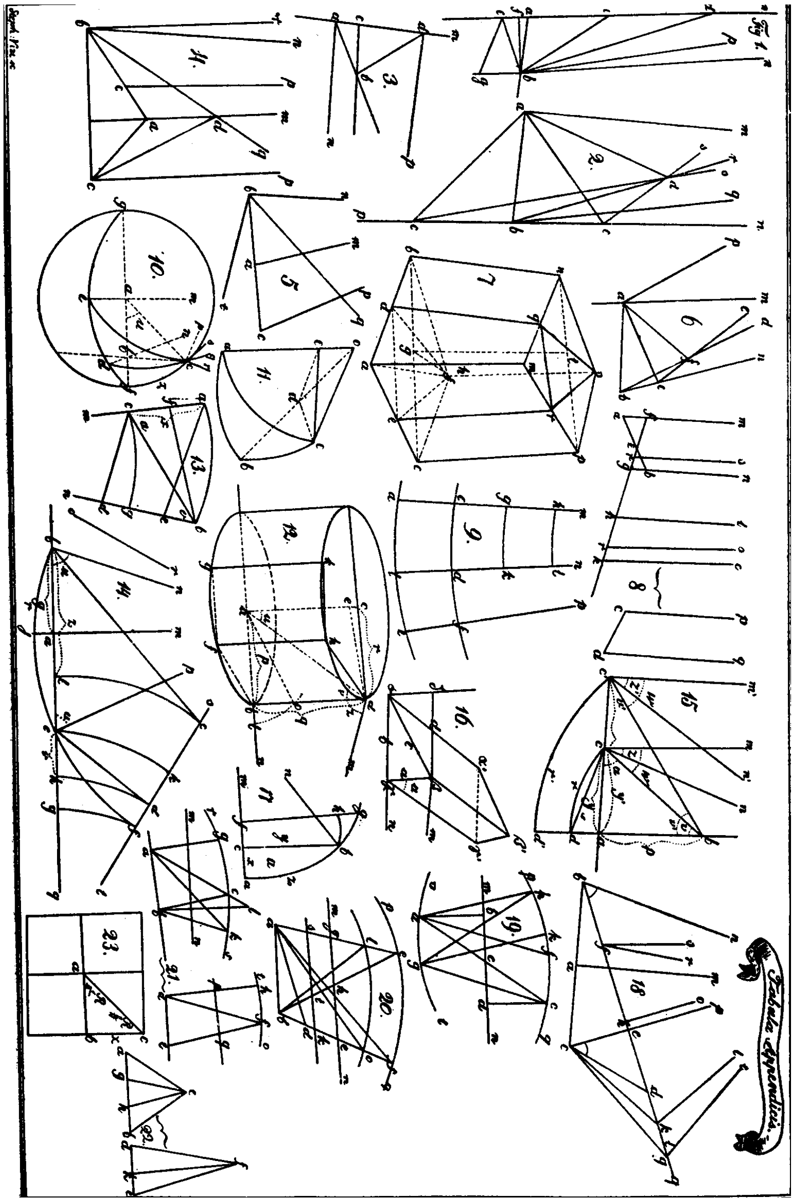
Handschrift von Johan Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma-
tis XI. Euclidei (a priori haud
unquam decidenda) independen-
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Agropoli sive Maros-Vasarhelyini.
1832.
Typis Collegii Reformatorum per
Josephum et Simeonem Kali de Felső-Vis.

La primera pàgina de l'*Apèndix* es va perdre i va ser substituïda per aquesta, escrita pel mateix János Bolyai.



Els dibuixos originals de l'*Apèndix*

Apèndix E

Geometria esfèrica

Per a poder parlar de geometria sobre una superfície corba serà necessari definir el concepte de *línia recta* (que serà una corba sobre la superfície) i el concepte d'*angle* entre dues d'aquestes noves rectes. També ens caldrà el concepte de *distància* entre dos punts, que serà la longitud del *segment rectilini* que aquests dos punts determinin. La primera figura a tractar serà la del triangle rectilini, és a dir, la figura formada per la unió de tres segments rectilinis dos a dos no alineats.

La primera superfície corba amb la qual ens topem és la superfície d'una esfera de radi R a l'espai euclidià, i la seva geometria (la *geometria esfèrica*) és tant o més antiga que la mateixa geometria plana, per la seva importància en l'astronomia.

En una esfera els conceptes de línia recta i angle entre línies rectes són fàcils de definir, però el tractament dels triangles esfèrics ens porta a un problema fonamental: calcular cadascun dels elements d'un triangle esfèric en funció dels altres. És a dir, hem de desenvolupar una *trigonometria esfèrica*.

Gauss coneixia molt bé la trigonometria esfèrica de la seva època, que coincideix pràcticament amb la que coneixem avui en dia. De fet, Euler havia escrit un parell de textos pràcticament definitius de la matèria: *Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grans et plus petits*, 1755 (vegeu [Eul56], vol. 27, pàg. 277-308) i *Trigonometria sphaerica universa ex primis principiis breviter et lucide derivata*, 1782 (vegeu [Eul56], vol. 26, pàg. 224-236).

Si es volia desenvolupar el programa analític de Lambert, era natural desenvolupar primer aquest mateix programa per a la geometria esfèrica, i fer-ho de tal manera que les tècniques fossin posteriorment útils per a estudiar una superfície qualsevol.

En aquest capítol ens proposem una reconstrucció completament analítica, sense recolzar-nos en cap figura o imatge material geomètrica, de la geometria de l'esfera.

Comencem amb un breu recordatori de la geometria analítica de l'espai, secció E.1, i, a partir d'aquí, reconstruïm la geometria analítica de l'esfera, secció E.2.

A la secció E.3 calculem l'àrea de l'esfera i a la secció E.4 calculem l'àrea del triangle esfèric.

A la secció E.5 retrobem el teorema *VI* de l'article 2 del *Disquisicions*, sense usar, contràriament al que va fer Gauss, la trigonometria esfèrica. De fet, d'aquest teorema *VI* es dedueixen les fórmules fonamentals de la trigonometria esfèrica.

A la secció E.6 estudiem la variació de l'angle sobre un triangle esfèric, i ho fem de tal manera que el mètode és generalitzable al posterior estudi de la variació d'aquest angle en una superfície qualsevol.

E.1 Geometria analítica de l'espai

Sigui $\mathbb{R}^3$ el conjunt de ternes (x, y, z) de nombres reals. $\mathbb{R}^3$ amb la suma $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ i la multiplicació $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ és un espai vectorial tridimensional; el conjunt ordenat de vectors $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$ és la base canònica positiva de $\mathbb{R}^3$; qualsevol reordenació obtinguda per un nombre imparell de transposicions serà, per definició, una base negativa. Al punt $O(0, 0, 0)$ li direm origen.

Identificarem el conjunt de punts de l'espai $\mathbb{R}^3$ amb l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$. Cada terna (x, y, z) podrà pensar-se, doncs, com un punt $P(x, y, z)$ o com un vector $\overrightarrow{P}(x, y, z)$. Quan vulguem emfasitzar la distinció entre punt i vector usarem P per als punts i $\overrightarrow{P}$ per als vectors. Direm que (x, y, z) són les *components* del *punt* $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Observem que els components de P són les coordenades de $\overrightarrow{P}$ en la base canònica. Usarem les abreviaciones $-\overrightarrow{P}$ per $-1\overrightarrow{P}$ i $\overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P}$ per a $\overrightarrow{Q} + (-\overrightarrow{P})$. El vector $\overrightarrow{PQ}$, d'origen P i extrem a Q, és el vector $\overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P}$.

Una *línia recta* és el conjunt de punts $P(x, y, z)$ tals que les seves components compleixen les equacions següents:

$$\begin{aligned} x &= a + lt \\ y &= b + mt \\ z &= c + nt\,, \end{aligned}$$

amb a, b, c, l, m, n fixats i t variable. Direm que són les *equacions paramètriques* de la recta que passa pel punt $A(a, b, c)$ en la *direcció* del vector $\overrightarrow{D}(l, m, n)$. La recta que passa per A i té direcció $-\overrightarrow{D}$ és la mateixa recta anterior, però direm que té direcció oposada. Si $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, $\overrightarrow{D}$ serà el *vector director unitari*. Totes les rectes que considerem estan *dirigides*, és a dir, dels dos vectors directors unitaris que una recta pot tenir, un ha estat triat, que defineix a la recta la seva direcció o orientació.

El nombre $\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + yy' + zz'$ és el producte escalar dels vectors (x, y, z) i (x', y', z'). Amb la noció de producte escalar podem formular els conceptes fonamentals de la geometria euclidiana: la distància entre dos punts i l'angle entre dues rectes.

La *distància* de $P(x, y, z)$ a $O(0, 0, 0)$, anomenada *norma* de $\overrightarrow{P}$, és el nombre

$$\|\overrightarrow{P}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{P} \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

La *distància* de $P(x, y, z)$ a $Q(x', y', z')$ és la norma de $\overrightarrow{PQ}$. És a dir,

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|\,.$$

L'*angle no orientat* $\theta = \angle(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}) = \angle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ entre els vectors $\overrightarrow{P}(x, y, z)$ i $\overrightarrow{Q}(x', y', z')$ està donat per la fórmula:

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q} \rangle}{\|\overrightarrow{P}\| \cdot \|\overrightarrow{Q}\|}\,.$$

El vector $(x, y, z) \times (x', y', z') = (yz' - zy', -(xz' - zx'), xy' - yx')$ és el producte vectorial dels vectors (x, y, z) i (x', y', z').

Es compleix el

Teorema E.1.1 *Siguin $P, Q \in \mathbb{R}^3$. Llavors,*

$$\langle \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q} \rangle = \langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{P} \rangle \langle \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{Q} \rangle - \langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q} \rangle^2$$

Demostració. Un càlcul directe. □

Si $\langle \overrightarrow{P}, \overrightarrow{P} \rangle = 1$ i $\langle \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{Q} \rangle = 1$, aquest teorema ens diu que

$$\|\overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q}\| = \|\sin \angle(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q})\| \,.$$

Inspirats en la definició clàssica d'àrea d'un paral·lelogram (base per altura), definim

Definició E.1.2 *L'àrea del paral·lelogram generat per* $\overrightarrow{P}$ *i* $\overrightarrow{Q}$ *és* $\|\overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q}\|$.

Però també un altre càlcul directe ens ensenya que:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{P} \rangle &= 0 \\ \langle \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{Q} \rangle &= 0 \,. \end{aligned}$$

És a dir, que el vector $\overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q}$ és perpendicular a $\overrightarrow{P}$ i a $\overrightarrow{Q}$.

També és fàcil veure que

$$\langle \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle = \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} ,$$

on $P(x, y, z), Q(x', y', z')$ i $R(x'', y'', z'')$.

Inspirats en la definició clàssica de volum d'un paral·lelepípede (base per altura), definim

Definició E.1.3 *El nombre* $\langle \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R} \rangle$ *és el volum orientat del paral·lelepípede generat pels vectors* $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}$.

Si el volum és positiu, direm que el conjunt ordenat $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}$ és una base positiva de $\mathbb{R}^3$.

Un pla de $\mathbb{R}^3$ és un conjunt de punts $P(x, y, z)$ les components dels quals satisfan una equació del tipus:

$$ax + by + cz + d = 0 \,, \quad \text{amb} \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \,.$$

El vector $\overrightarrow{N}(a, b, c)$, que és no nul, es diu vector normal del pla. Aquest vector normal defineix una orientació del pla i el vector $-\overrightarrow{N}$ defineix l'orientació contrària. Si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, es tracta del vector normal unitari.

Ara podem definir el concepte d'angle orientat. Si els punts P, Q, R estan en el pla *orientat* donat per l'equació anterior, llavors l'angle $\angle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ és positiu únicament si $\langle \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}, N \rangle > 0$. Observem que si es canvia l'orientació del pla, la qual cosa equival a canviar $\overrightarrow{N}$ per $-\overrightarrow{N}$, l'angle canvia de signe.

Sigui $\mathbb{S}(1)$ l'esfera de radi 1 amb centre en l'origen $O(0,0,0)$; és a dir, el conjunt de punts $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tals que la seva distància a $O(0,0,0)$ és 1.

Tota recta orientada de l'espai determina un punt de $\mathbb{S}(1)$: el vector director unitari de la recta donada. De la mateixa manera, tot pla orientat determina un punt en $\mathbb{S}(1)$: el vector normal unitari del pla donat.

Sempre suposarem les rectes, els plans i els angles d'un pla, orientats. L'angle entre dues rectes d'un pla és l'angle, en el pla, entre els seus vectors directors; si aquest angle és igual a 0 o a π radians, les rectes són paral·leles (poden coincidir).

Donats dos plans de vectors normals $\overrightarrow{N}_1$ i $\overrightarrow{N}_2$, el vector $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{N}_1 \times \overrightarrow{N}_2$, quan és diferent de zero, és un vector director de la recta d'intersecció dels dos plans; si $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{0}$ els plans són paral·lels o coincidents. Així, una parella ordenada de plans orientats que es tallen determinen una recta orientada. L'angle entre els dos plans de vectors normals $\overrightarrow{N}_1$ i $\overrightarrow{N}_2$ és justament l'angle entre aquests vectors normals, i aquest angle sempre serà positiu si orientem el pla que els conté amb el vector normal $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{N}_1 \times \overrightarrow{N}_2$.

El problema de l'orientació en geometria es un assumpte delicat. Gauss fou conscient d'això, fins al punt que l'única raó de ser de l'article 2 del *Disquisicions* és poder donar, en el seu apartat *VII*, una prova (massa complicada, tal com diu Spivak), d'un fet que li permet decidir quan una base de $\mathbb{R}^3$ és positiva o no. Ja Gauss sabia el paper dels determinants, del producte escalar i del producte vectorial en aquesta qüestió. El problema es torna més complicat en la geometria esfèrica, ja que els punts de la recta esfèrica no es poden ordenar com els punts de la recta euclidiana. Malgrat les dificultats, les precisions de Gauss en els seus dos primers articles són suficients per a manejar la qüestió localment.

El problema de l'orientació apareix posteriorment com a fonamental en la definició de curvatura total, un concepte global (vegeu l'article 5 del *Disquisicions* i el comentari de [Dom79], pàg. 103).

E.2 Geometria analítica de l'esfera

Amb les definicions anteriors de punt, recta, pla i angle es pot desenvolupar tota la geometria euclidiana del pla i de l'espai. És la geometria reduïda al que és algebraic.

Geometria esfèrica.

Un *punt* de la geometria esfèrica de radi R és un punt $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. El conjunt d'aquests punts (que juga, doncs, el paper de *pla* d'aquest geometria) és una esfera de radi R que denotarem $\mathbb{S}(\mathrm{R})$.

Les *rectes* són les circumferències màximes d'aquesta esfera; és a dir, la intersecció d'un pla per l'origen $O(0, 0, 0)$ amb l'esfera de radi R. Així doncs, les rectes estan donades analíticament pel sistema

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= R^2. \end{aligned}$$

Suposarem que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Si $N(a, b, c)$ orienta el pla, direm que el punt de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$, $N(Ra, Rb, Rc)$, és el pol nord de la recta, i direm que $-N(Ra, Rb, Rc)$ és el pol sud de la mateixa recta. L'orientació de la *recta* serà la del seu pla i, si A i B són punts de la *recta*, la direcció de A cap a B serà positiva només si $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{N}$ és una base positiva de $\mathbb{R}^3$.

L'*angle* entre dues *rectes* orientades és l'angle entre els seus pols nord. És a dir, l'angle $\widehat{NON'}$, amb $N(Ra, Rb, Rc)$ i $N'(Ra', Rb', Rc')$. La distància $d(A, B)$ entre dos punts A i B és

$$d(A, B) = R \cdot \mid \arccos(R^{-2} \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \rangle \mid,$$

on $-\pi < \arccos x \leq \pi$; és a dir, $\cos(R^{-1} d(A, B)) = \pm R^{-2} \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \rangle$. No és més que la longitud de l'arc de cercle màxim que uneix A i B. Si A i B no són diametralment oposats, aquest arc és el més petit dels dos arcs que uneixen A i B; és a dir, el que té longitud $d(A, B) < \pi R$. Direm que aquest arc és el *segment esfèric* AB.

Observem finalment que, si $A \neq \pm B$, hi ha una única recta que va de A a B. Concretament, aquesta recta està donada per les equacions següents:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \end{aligned}$$

on $\overrightarrow{N}(a, b, c) = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} / |\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}|$.

Un *triangle esfèric* $\triangle ABC$ és el conjunt de tres punts A, B, C de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$, de manera que no estiguin continguts en un mateix cercle màxim i de manera que dos a dos no siguin diametralment oposats, juntament amb els segments esfèrics AB, BC i CA que determinen. Aquests tres punts s'anomenen *vèrtexs* del triangle i els tres arcs de cercle màxim AB, BC i CA s'anomenen *costats* del triangle.

Orientem la recta AB de manera que el seu pol nord N_{AB} i C estiguin en el mateix subespai respecte del pla OAB. Anàlogament per a les rectes BC i CA. Equivalentment, orientem els costats del triangle de manera que $\langle N_{AB}, C\rangle > 0$, $\langle N_{BC}, A\rangle > 0$, $\langle N_{CA}, B\rangle > 0$.

Denominarem *angle en* A l'angle format pels vectors N_{AB} i N_{AC}. Anàlogament, l'*angle en* B és l'angle format pels vectors N_{BC} i N_{BA} i l'*angle en* C és l'angle format pels vectors N_{CA} i N_{CB}.

Vegem alguns resultats de la geometria esfèrica.

1. *Les rectes de $\mathbb{S}(R)$ tenen longitud finita. La seva longitud és $2\pi R$. En particular, existeix una unitat absoluta per a la mesura de longituds.*

2. *Totes les rectes es tallen. No hi ha paral·leles!*

3. *La suma dels angles α, β, γ de qualsevol triangle $\triangle ABC$ és major que π; la diferència $(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$ es diu que és l'*excés angular* del triangle.*

4. *El pla esfèric $\mathbb{S}(R)$ té àrea finita igual a $4\pi R^2$.*

5. *L'àrea d'un triangle esfèric $\triangle ABC$ és proporcional al seu excés angular; més precisament, igual a $R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$.*

6. *No hi ha triangles esfèrics semblants, és a dir, si dos triangles esfèrics tenen angles iguals, els seus costats són també iguals.*

Les proves d'aquests resultats ja eren conegudes a l'època de Gauss.

1. i **2.** Les demostracions analítiques de 1 i 2 són immediates.

3. L'excés angular del triangle $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ és $\pi/2$. Però hi ha una proposició, descoberta per Saccheri i demostrada també per Lambert, que diu que, si hi ha un triangle amb excés positiu, llavors tots els triangles tenen excés positiu. Queda així provada 3.

4. Vegeu la secció E.3.

5. Vegeu la secció E.4.

6. Vegeu l'observació E.5.6 de la secció E.5.

E.3 Càlcul de l'àrea de l'esfera

La demostració analítica del punt 4 de l'apartat anterior E.2 és una aplicació del càlcul diferencial i integral a la geometria. Això, que es pot considerar com el naixement de la geometria diferencial, ho havia iniciat Euler el 1760 amb la publicació del seu teorema sobre les curvatures principals d'una superfície, [Eul60].

De fet, aquest punt 4 és una conseqüència immediata que l'element d'àrea d'una superfície es pot escriure a partir del coneixement, respecte de la seva representació paramètrica, del diferencial de longitud ds d'aquesta; a l'article 17 del *Disquisicions* s'hi troba aquesta expressió.

Però també es dedueix de treballs previs del mateix Euler de 1770 (vegeu [Eul56], vol 17, pàg. 289-315), un tractat complet sobre integrals iterades; o de Lagrange de 1773 (vegeu [Lag92], vol. 3), on va provar que l'element de volum de l'espai en coordenades esfèriques és $dV = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$; i de Laplace, qui el 1772 (vegeu [Lap12], pàg. 369-477), va estudiar el canvi a coordenades esfèriques. Gauss podria haver calculat l'àrea de l'esfera a partir d'aquests coneixements.

Parametritzem $\mathbb{S}(\mathrm{R})$ així:

$$\begin{aligned} x(u,v) &= R\cos u \sin v \\ y(u,v) &= R\sin u \sin v \\ z(u,v) &= R\cos v\,, \end{aligned}$$

on $0 < u < 2\pi$ i $0 < v < \pi$. Si tenim una corba en el pla u, v, donada per $u = u(t), v = v(t)$, amb $a \le t \le b$, la longitud de la corba sobre $\mathbb{S}(\mathrm{R})$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, donada per

$$\begin{aligned} x(t) &= x(u(t), v(t)) \\ y(t) &= y(u(t), v(t)) \\ z(t) &= z(u(t), v(t)), \end{aligned}$$

és igual a la integral de la norma del vector tangent,

$$s = \int_a^b R\sqrt{v'^2(t) + \sin^2 v(t)\, u'^2(t)}\; dt\,.$$

Per tant,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = R^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + R^2\sin^2 v\left(\frac{du}{dt}\right)^2.$$

És a dir, «simplificant» el dt,

$$ds^2 = R^2 dv^2 + R^2 \sin^2 v\, du^2.$$

I per tant, usant ara l'expressió de l'element d'àrea a partir dels coeficients E, F i G de l'element de longitud ($E = R^2$, $F = 0$, $G = R^2 \sin^2 v$, en el nostre cas), tenim

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du\, dv = R^2 \sin v\, du\, dv\,.$$

La lluna $L(\alpha)$ d'angle α és qualsevol regió de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$ *congruent* amb la regió de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$ descrita en coordenades esfèriques per $0 < u < \alpha$, $0 < v < \pi$. Que dues figures siguin congruents vol dir que es poden sobreposar per un moviment rígid de l'esfera.

Observem que la lluna $L(\alpha)$ es pot considerar com un triangle esfèric degenerat, format per dos segments esfèrics de longitud π que uneixen dos punts simètrics A i $A' = -A$, que formen un angle α en A (i, per tant, també en A').

L'àrea $A(\alpha)$ de $L(\alpha)$ és, doncs,

$$A(\alpha) = \int_0^\alpha \left(\int_0^\pi R^2 \sin v dv \right) du = 2\alpha R^2\,.$$

En particular, quan $\alpha = 2\pi$ obtenim l'àrea A de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$. Concretament

$$A = 4\pi R^2.$$

Utilitzant aquest resultat, el matemàtic flamenc GIRARD va demostrar, l'any 1629, que l'àrea d'un triangle esfèric és proporcional al defecte. Però va usar també fórmules de la trigonometria esfèrica i delicats arguments geomètrics que reduïen el problema a una proposició demostrada per ARQUIMEDES en el seu llibre *Sobre l'esfera i el cilindre* (vegeu [Kár87], pàg. 27).

EULER va publicar el 1781 una bella i senzilla prova, atribuïda a Harriot, del 1603, que utilitza només l'àrea de la lluna esfèrica (vegeu [Eul56], vol. 26, pàg. 204-223). Aquesta prova es pot reproduir així.

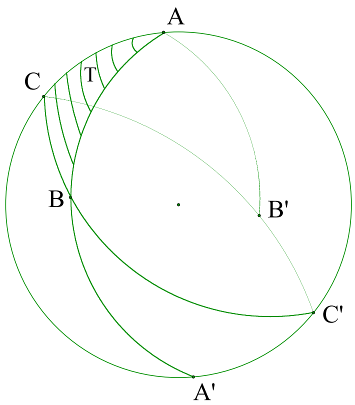
E.4 Àrea del triangle: una prova meravellosa

Sigui[1] $\triangle ABC$ un triangle esfèric, d'angles respectius α, β, γ. Considerant els punts simètrics A', B' i C', tota l'esfera es descompon en vuit triangles

[1] És molt possible que aquesta prova fos coneguda per LAMBERT a través d'EULER. És fàcil adonar-se que aquesta prova és absoluta: val quasi paraula per paraula a l'espai hiperbòlic! Tota la geometria esfèrica es pot deduir d'aquesta fórmula. Un dels mèrits de les primeres vint-i-sis seccions de l'*Apèndix* de J. BOLYAI és que estan desenvolupades sense cap menció al delicat concepte d'àrea hiperbòlica d'una figura.

esfèrics que podem organitzar de la manera següent:

	Triangle	*Triangle*	*Àrea*
1	ABC	$A'B'C'$	T
2	ABC'	$A'B'C$	$2R^2\gamma - T$
3	$AB'C$	$A'BC'$	$2R^2\beta - T$
4	$A'BC$	$AB'C'$	$2R^2\alpha - T$



Com que la transformació $X \to X' = -X$ conserva les longituds dels segments esfèrics, conserva també l'àrea, i, per tant, els triangles de cada fila de l'estructura anterior tenen la mateixa àrea.

Sigui T l'àrea del triangle $\triangle ABC$. La suma de les àrees dels triangles de la primera fila és $2T$.

D'altra banda, la unió dels triangles $\triangle ABC' \cup \triangle ABC$ és la lluna d'angle C, i hem provat anteriorment que l'àrea d'aquesta lluna és $2R^2\gamma$. O sigui, que l'àrea del triangle ABC' és $2R^2\gamma - T$; i l'àrea de la unió dels dos triangles de la segona fila és $4R^2\gamma - 2T$.

De manera semblant, tenim que l'àrea de la unió dels dos triangles de la tercera i quarta fila és $4R^2\beta - 2T$ i $4R^2\alpha - 2T$ respectivament. Sumant les àrees així obtingudes ens ha de donar l'àrea de l'esfera. És a dir,

$$2T + (4R^2\gamma - 2T) + (4R^2\beta - 2T) + (4R^2\alpha - 2T) = 4R^2\pi\,.$$

per tant,

$$T = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi). \quad \square$$

E.5 Trigonometria esfèrica

Tots els resultats de geometria esfèrica que hem estudiat mostren grans diferències amb la geometria euclidiana. Però la geometria esfèrica té bases similars a les de la geometria euclidiana, i es pot desenvolupar paral·lelament a l'euclidiana. El primer estudi sistemàtic de geometria esfèrica és l'*Esfèrica* de Teodosi, que va ser redactat tenint com a model els *Elements* d'Euclides i conté les proposicions de geometria esfèrica intrínseca (no estereomètrics)[2] (vegeu [Ros88], pàg. 2-3).

Per la seva importància en l'astronomia, és raonable pensar que la geometria esfèrica devia estar molt desenvolupada des dels primers temps de la geometria a Grècia, només que va ser primer la geometria plana la que va ser sistematitzada en els *Elements.* No per atzar el primer text matemàtic grec que va arribar fins a la nostra època és un text d'Autòlic anomenat *Sobre l'esfera rotant*[3] que tracta de l'esfera celeste.

La geometria grega va ser una geometria profundament visual. Les proves dels seus teoremes no eren, primer, més que descripcions de bons dibuixos, i després, bones descripcions de com construir bons dibuixos (això explica la importància del regle i del compàs en els orígens de la geometria a Grècia).

Ara bé, la geometria de l'esfera és, en essència, estereomètrica i devia ser molt difícil seguir les discussions estereomètriques dels geòmetres grecs, segurament ja hàbils dibuixants. Havien descobert la manera de dibuixar les tres dimensions sobre un pla, i la geometria esfèrica, com la plana, també estava basada en curosos dibuixos estereomètrics. Avui dia aquesta geometria visual de l'espai és poc coneguda i la que es coneix és la seva versió analítica, desproveïda quasi de qualsevol dibuix. El producte vectorial a $\mathbb{R}^3$ és una eina estupenda per a l'algebrització de la geometria de l'espai.

Teorema E.5.1 *Per a cada quatre punts $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ es compleix la igualtat*

$$\langle \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D} \rangle \;=\; \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{C} \rangle \langle \overrightarrow{B}, \overrightarrow{D} \rangle - \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{D} \rangle \langle \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \rangle\,. \tag{E.1}$$

Demostració. La linealitat dels productes escalar i vectorial redueix la demostració de la fórmula (E.1) al cas en què $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ i $\overrightarrow{D}$ són vectors de la

[2] Estereometria: part de la geometria que tracta de la mesura de sòlids. Però nosaltres interpretem aquesta paraula en el sentit de geometria de l'espai.

[3] *Peri kinoumenés sphairas*, també traduït en alguns llocs com *L'esfera en moviment.*

base canònica; en aquest cas, el càlcul directe demostra que la identitat es compleix.

Però també es pot deduir aquesta igualtat directament del teorema E.1.1, per polaritat. □

Tenim, en conseqüència, que

Corol·lari E.5.2 *La norma del producte vectorial de dos vectors A i B a $\mathbb{R}^3$ està donada per*

$$|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}| = |\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}| \sin \angle(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})\,.$$

Demostració. Apliquem la fórmula (E.1) amb $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A}$ i $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{B}$. □

És sorprenent, però tota la trigonometria esfèrica està comprimida en la fórmula (E.1). Vegem-ho.

Teorema E.5.3 (teorema *VI*, article 2 del *Disquisicions*) *L'angle orientat ω entre els dos segments esfèrics orientats $\overset{\frown}{AB}$ i $\overset{\frown}{CD}$ està determinat per la identitat següent*

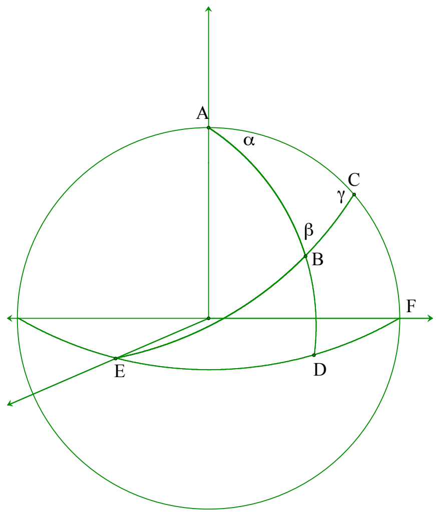
$$\sin \frac{\overset{\frown}{AB}}{R} \sin \frac{\overset{\frown}{CD}}{R} \cos \omega = \cos \frac{\overset{\frown}{AC}}{R} \cos \frac{\overset{\frown}{BD}}{R} - \cos \frac{\overset{\frown}{AD}}{R} \cos \frac{\overset{\frown}{BC}}{R}\,. \tag{E.2}$$

Demostració. La prova és immediata a partir de la fórmula (E.1). Només cal aplicar-la al cas en què $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ i $\overrightarrow{D}$ són vectors unitaris i recordar que $\omega = \angle(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D})$. □

Vegem ara que aplicant la fórmula (E.2) a la configuració de Menelau obtenim les fórmules bàsiques de la trigonometria esfèrica.

Recordem primerament que la *configuració de Menelau* $(E-D-F, E-B-C; A)$ està definida per:[4]

[4] Aquesta configuració apareix a la seva obra *Sphaerica*. És justament la configuració que tenim quan pensem en la trajectòria aparent del Sol al voltant de la Terra, en el pla de l'eclíptica. El Sol representaria el punt B del nostre triangle i l'arc BD la seva altitud.



a) Dos segments esfèrics $\overset{\frown}{EF}$ i $\overset{\frown}{EC}$ de longitud $R \cdot \pi/2$ tals que l'angle $\angle(\overset{\frown}{EF}, \overset{\frown}{FC}) = \pi/2$.

b) Dos punts D i B respectivament en els segments esfèrics $\overset{\frown}{EF}$ i $\overset{\frown}{EC}$.

c) El punt d'intersecció A de $\overset{\frown}{FC}$ i $\overset{\frown}{BD}$.

Denotem, en el triangle esfèric $\triangle ABC$, les longituds dels costats per $a = \overset{\frown}{BC}$, $b = \overset{\frown}{AC}$, $c = \overset{\frown}{AB}$, i la mesura dels angles per $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$ i $\gamma = \angle C$.

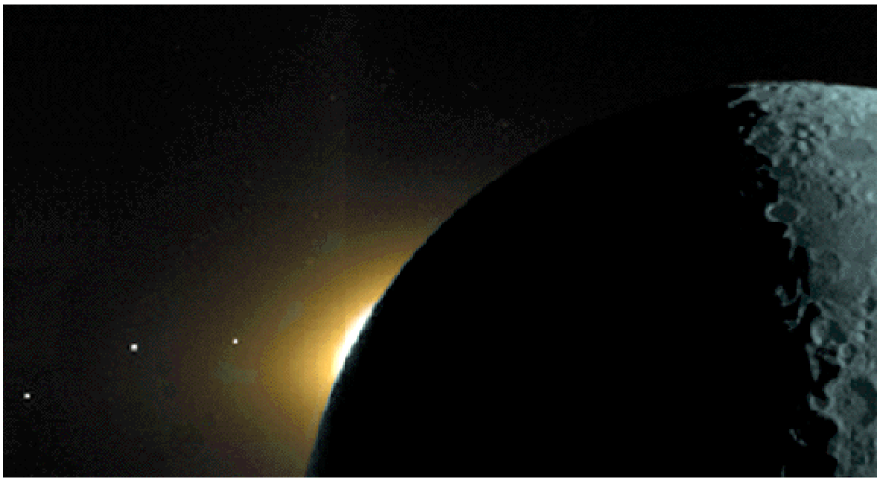
És fàcil veure llavors que, a la configuració de Menelau, es compleixen les relacions següents:

1. $\overset{\frown}{ED} + \overset{\frown}{DF} = R \cdot \pi/2\,,$ $\qquad \overset{\frown}{EB} + \overset{\frown}{BC} = R \cdot \pi/2\,.$

2. $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BD} = R \cdot \pi/2\,,$ $\qquad \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CF} = R \cdot \pi/2\,.$

3. $\beta = \angle(\overset{\frown}{EC}, \overset{\frown}{AD}),$ $\qquad \alpha = \angle(\overset{\frown}{BD}, \overset{\frown}{CF}).$

4. $\gamma = \pi/2$.



Saturn, Mart i Mercuri. Foto de l'any 1994 feta per la sonda lunar Clementine.

Apliquem ara la fórmula (E.2), però canviant les lletres A, B, C, D que apareixen allà, respectivament, per C, E, A, D. Obtenim

$$\sin\frac{\overset{\frown}{CE}}{R}\sin\frac{\overset{\frown}{AD}}{R}\cos\omega = \cos\frac{\overset{\frown}{CA}}{R}\cos\frac{\overset{\frown}{ED}}{R} - \cos\frac{\overset{\frown}{CD}}{R}\cos\frac{\overset{\frown}{EA}}{R}\,. \tag{E.3}$$

Però com que estem en el cas de la configuració de Menelau, aquesta fórmula es redueix a

$$\cos\beta = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{\overset{\frown}{ED}}{R} = \cos\frac{b}{R}\sin\alpha\,.$$

Permutant el paper jugat per α i β obtenim:

$$\cos\alpha = \cos\frac{a}{R}\sin\beta\,. \tag{E.4}$$

Apliquem la fórmula (E.4) al triangle esfèric $\triangle EBD$ (que és rectangle en D, i està, doncs, en les hipòtesis anteriors) i obtenim $\cos\widehat{E} = \cos\frac{\overset{\frown}{BD}}{R}\sin\beta$, que equival (canviant el cosinus d'un angle pel sinus del seu complementari) a:

$$\sin\frac{b}{R} = \sin\frac{c}{R}\sin\beta\,.$$

Permutant el paper jugat per α i β obtenim:

$$\sin\frac{a}{R} = \sin\frac{c}{R}\,\sin\alpha\,. \tag{E.5}$$

Finalment apliquem la fórmula (E.2), canviant les lletres A, B, C, D que apareixen allà, respectivament, per, C, A, C, B. Com que, llavors, l'angle $\omega = \angle(\overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{CB}) = \pi/2$, obtenim:

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\,\cos\frac{b}{R}\,. \tag{E.6}$$

Les identitats (E.4), (E.5) i (E.6) són les fórmules de la trigonometria esfèrica per a triangles esfèrics rectangles de catets menors a $\pi/2$.

Per a extendre-les a triangles rectangles amb catets més grans que $\pi/2$, és suficient considerar per a un d'aquests triangles $\triangle ABC$, un dels triangles complementaris $\triangle ABC'$, $\triangle AB'C$ o $\triangle A'BC$, on $A' = -A, B' = -B, C' = -C$; n'hi ha un que té els seus catets menors que $\pi/2$ i les fórmules trigonomètriques vàlides per a aquest impliquen les fórmules trigonomètriques per al triangle original.

Per a trobar i demostrar fórmules generals a les obtingudes per a un triangle esfèric general, no necessàriament rectangle, se'l descompon en dos triangles rectangles esfèrics.

En definitiva, les fórmules generals de la trigonometria esfèrica per a un triangle $\triangle ABC$ de costats de longituds a, b, c i angles respectius α, β, γ, sobre una esfera de radi R, són les següents:

$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\alpha} = \frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin\gamma} \tag{E.7}$$

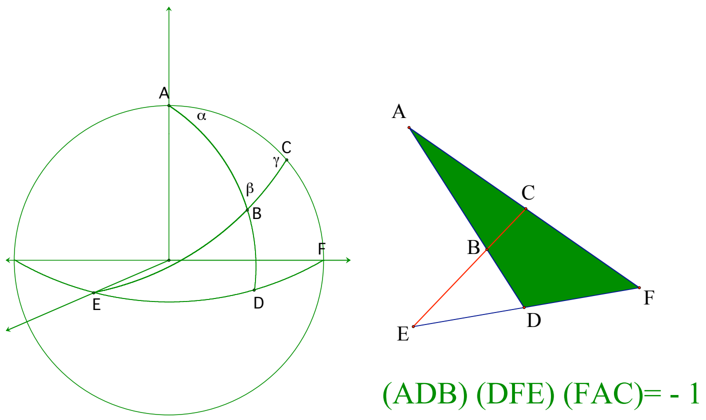
$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha \tag{E.8}$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{R}\,. \tag{E.9}$$

La primera és el teorema del sinus, la segona és el teorema del cosinus i la tercera és la polar de la segona, com veurem a l'observació E.5.5.

Vegeu-ne una demostració directa a l'apèndix I.

Observació E.5.4 (teorema de Menelau esfèric) Considerem la configuració de Menelau.



Observem que si fem una representació plana del triangle esfèric $\triangle ADF$, i dels cercles màxims BC, DF, obtenim un triangle euclidià $\triangle ADF$ tallat per una recta EBC. Es compleix, doncs, la relació entre raons simples, anomenada teorema de Menelau,

$$(A, D, B) \cdot (D, F, E) \cdot (F, A, C) = -1\,,$$

que ja era coneguda a l'època de Menelau, però que porta el seu nom perquè ell la va aplicar, convenientment modificada, al triangle esfèric $\triangle ADF$ tallat pel cercle màxim EBC.

Observem que, si prescindim del signe, que prové de la definició de raó simple, i controla que el punt E estigui o no entre D i F, el teorema de Menelau s'escriu

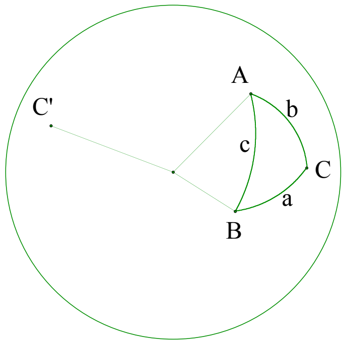
$$\frac{AB}{DB} \cdot \frac{DE}{FE} \cdot \frac{FC}{AC} = 1\,.$$

Menelau va demostrar que sobre el triangle esfèric es compleix la mateixa relació, però amb «sinus». Concretament, va demostrar que

$$\frac{\sin AB}{\sin DB} \cdot \frac{\sin DE}{\sin FE} \cdot \frac{\sin FC}{\sin AC} = 1\,.$$

Aquesta és la relació que hem anomenat teorema de Menelau esfèric.

Observació E.5.5 (triangle polar) Observem que la fórmula (E.9) correspon a la fórmula (E.8) aplicada al triangle polar esfèric corresponent.

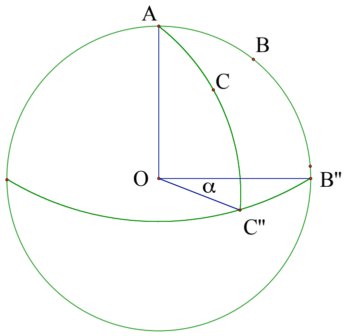


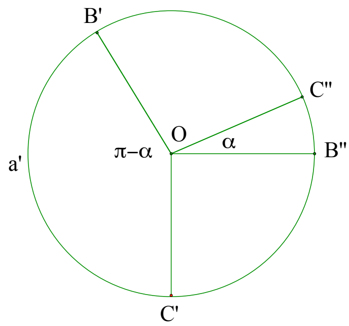
El triangle polar $\triangle A'B'C'$ del triangle esfèric $\triangle ABC$ és el triangle esfèric determinat pels normals unitaris (pols) dels plans OBC, OAC, OAB, on O és el centre de l'esfera. En cada cas s'agafa la normal que deixa el triangle a l'altre costat del pla. Es compleix

$$\begin{aligned} \frac{a'}{R} &= \pi - \alpha\,, \quad \alpha' = \pi - \frac{a}{R}\,, \\ \frac{b'}{R} &= \pi - \beta\,, \quad \beta' = \pi - \frac{b}{R}\,, \\ \frac{c'}{R} &= \pi - \gamma\,, \quad \gamma' = \pi - \frac{c}{R}\,, \end{aligned}$$

i per tant, aplicant (E.8) al triangle $\triangle A'B'C'$, obtenim (E.9).

Les igualtats anteriors són fàcils de verificar, ja que, per definició, $\alpha = \angle BAC$ és l'angle entre els plans OAB i OAC.





Però l'angle entre plans és l'angle entre les seves normals, i, per tal com s'elegeixen aquestes, tenim $\angle B'OC' = \pi - \alpha$, i per tant $\dfrac{a'}{R} = \pi - \alpha$, com volíem. El mateix argument en els altres angles.

La primera figura representa el triangle sobre l'esfera i l'equador corresponent al punt A (l'equador de l'esfera si suposem que A és el pol nord). Hem representat els punts B'' i C'' que són la intersecció amb aquest equador dels cercles màxims AB i AC respectivament.

La segona figura representa aquest equador i, a sobre, els pols B' i C' (OB' és perpendicular al pla OAC).

De fet, aquestes fórmules es poden verificar analíticament.

Observació E.5.6 (no hi ha triangles semblants) De la fórmula (E.9) es dedueix l'afirmació 6 de la pàgina 135. En efecte, aquesta fórmula ens diu que els costats estan determinats pels angles; i, en conseqüència, la congruència i la semblança coincideixen: sobre l'esfera no hi ha triangles amb els angles respectius iguals i de diferent grandària.

La no existència de triangles semblants es dedueix també dels comentaris que hem fet sobre el triangle polar d'un triangle donat. Això és, de fet, el que va fer Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī el segle *XIII*, tot i que no disposava d'aquest concepte explícitament (vegeu [Ros88], pàg. 21).

Concretament, si dos triangles esfèrics tenen els angles corresponents iguals, llavors els triangles polars corresponents tenen els mateixos costats, i per tant, pel criteri costat-costat-costat, també tenen els mateixos angles. Així, els seus triangles polars respectius, *que són els dos triangles donats al principi*, tenen els costats respectivament iguals, i per tant són congruents.

Observació E.5.7 (teorema de Pitàgores) Aplicant la fórmula (E.8) al triangle rectangle d'hipotenusa a i catets b, c, obtenim

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}\,,$$

que es coneix com a teorema de Pitàgores esfèric.

Si fem tendir R a infinit, obtenim

$$1-\frac{a^2}{2R^2}\sim(1-\frac{b^2}{2R^2})\cdot(1-\frac{c^2}{2R^2}),$$

que, negligint els termes de quart grau, ens dóna

$$a^2=b^2+c^2$$

i recuperem el teorema de Pitàgores per a triangles del pla.

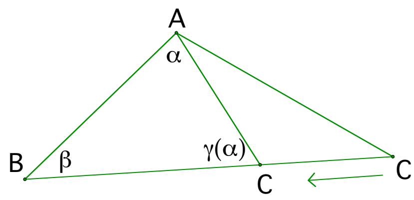
E.6 Angle d'inclinació a l'esfera

Mirem primer què vol dir i quan val la derivada de l'angle d'inclinació en el pla.

Variació de l'angle en el pla

Considerem un triangle $\triangle ABC$ i fem moure el punt C sobre el costat BC en direcció a B. El triangle inicial es transforma en un triangle $\triangle ABC'$, i podem pensar que l'*angle d'inclinació* $\gamma = \angle AC'B$ és funció de l'angle $\alpha = \angle BAC'$.

Observem que $\gamma(\alpha)$ mesura la inclinació de la recta BC respecte de les rectes que surten de A formant un angle α respecte a una recta inicial fixada. Per això es parla d'*angle d'inclinació*.



$\alpha+\beta+\gamma=\pi$; $1+\gamma'=0$

Derivant la fórmula

$$\alpha + \beta + \gamma(\alpha) = \pi$$

respecte a α, obtenim

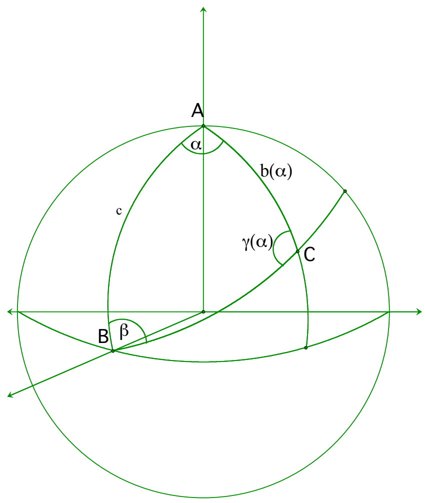
$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha} = -1} \tag{E.10}$$

Observem $\gamma(0) = \pi - \beta$, amb $\beta = \angle ABC$.

Variació de l'angle a l'esfera

Repetim, per a l'esfera, els mateixos càlculs que acabem de fer sobre el pla.

Considerem el triangle esfèric $\triangle ABC$ i suposem que el punt C es mou sobre el costat BC en direcció a B. El triangle inicial es transforma en un triangle ABC', i podem pensar que l'angle d'inclinació, $\gamma = \angle AC'B$, és funció de l'angle $\alpha = \angle BAC'$.



Càlcul de $\dfrac{d\gamma}{d\alpha}$. *Primer mètode.*

Apliquem la fórmula (E.9) al triangle $\triangle ABC$ de la figura, i obtenim

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\sin\alpha\,\cos\frac{c}{R}\,.$$

Derivant respecte a α, i tenint en compte que $\gamma = \gamma(\alpha)$, β = constant, i c = constant, tenim

$$-\sin\gamma\cdot\frac{d\gamma}{d\alpha} = \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha\,\cos\frac{c}{R}\,.$$

Aïllant $\dfrac{d\gamma}{d\alpha}$, i usant la llei del sinus (E.7),

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\frac{\sin\dfrac{a}{R}}{\sin\dfrac{c}{R}}\cos\beta - \frac{\sin\dfrac{r}{R}}{\sin\dfrac{c}{R}}\cos\alpha\,\cos\frac{c}{R}\,.$$

Substituïm els productes $\sin\dfrac{a}{R}\cos\beta$ i $\sin\dfrac{r}{R}\cos\alpha$ pel valor que deduïm de (E.8) i obtenim

$$
\begin{aligned}
\frac{d\gamma}{d\alpha} &= \frac{1}{\sin\frac{c}{R}}\left(\frac{\cos\frac{c}{R}\cos\frac{r}{R}-\cos\frac{a}{R}}{\sin\frac{c}{R}}\cos\frac{c}{R}-\frac{-\cos\frac{c}{R}\cos\frac{a}{R}+\cos\frac{r}{R}}{\sin\frac{c}{R}}\right)\\
&= \frac{1}{\sin^2\frac{c}{R}}\left(\cos\frac{r}{R}\left(\cos^2\frac{c}{R}-1\right)\right)\\
&= -\cos\frac{r}{R}.
\end{aligned}
$$

És a dir

$$
\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\cos\frac{r(\alpha)}{R}} \tag{E.11}
$$

Càlcul de $\frac{d\gamma}{d\alpha}$. *Segon mètode.*

Suposem conegut que l'àrea d'un triangle esfèric és proporcional a l'excés, tal com hem vist a E.4, i calculem aquesta àrea per un altre mètode, concretament integrant l'element d'àrea sobre el triangle.

Per a fer aquesta integral és còmode usar coordenades polars sobre l'esfera. Una anàlisi geomètrica senzilla mostra que aquestes coordenades són (r, θ) amb $r = R\phi$ (on (ϕ, θ) són, respectivament, la colatitud i la longitud sobre $\mathbb{S}(\mathrm{R})$). Són les coordenades anàlogues a les coordenades polars en el pla: r mesura la distància del punt al pol i θ l'angle polar.

Els coeficients de la primera forma fonamental de l'esfera en aquestes coordenades, segons hem vist a la pàgina 136, són $E = R^2$, $F = 0$ i $G = R^2 \sin^2\frac{r}{R}$. Calculem l'àrea S d'un triangle esfèric $\triangle ABC$, donat, en coordenades polars esfèriques, per: $A(0,0)$, $B(r_0, 0)$ i $C(r, \alpha)$. Observem que el vèrtex $A(0,0)$ coincideix amb el pol nord $(0,0,1)$, el vèrtex $B(r_0, 0)$ és un punt sobre el meridià polar (l'anàleg de l'eix polar en les coordenades polars del pla) i el vèrtex $C(r, \alpha)$ és un punt arbitràri.

L'element d'àrea de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$ està donat, en coordenades polars esfèriques, per

$$
dS = \sqrt{EG - F^2}\, dr\, d\theta = R \sin\frac{r}{R}\, dr\, d\theta
$$

i per tant, dient $r(\theta)$ a la longitud del meridià entre A i el costat BC, tenim:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha \int_0^{r(\theta)} R\sin\frac{r}{R}\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^\alpha \left(R^2 - R^2\cos\frac{r(\theta)}{R}\right) d\theta \\ &= R^2\alpha - \int_0^\alpha R^2\cos\frac{r(\theta)}{R}\,d\theta\,. \end{aligned} \tag{E.12}$$

Com que no coneixem explícitament $r(\theta)$ no podem avaluar aquesta integral. Però sabem, pel resultat ja conegut de la proporcionalitat de l'àrea i l'excés angular (vegeu la secció E.4), que

$$S = R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi). \tag{E.13}$$

Igualant (E.12) i (E.13) obtenim

$$R^2\alpha - \int_0^\alpha R^2\cos\frac{r(\theta)}{R}\,d\theta = R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi). \tag{E.14}$$

Derivant (E.14) respecte de α obtenim que:

$$R^2 - R^2\cos\frac{r(\alpha)}{R} = R^2\left(1+\frac{d\gamma}{d\alpha}\right).$$

I per tant

$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\cos\frac{r(\alpha)}{R}} \tag{E.15}$$

Observem que aquesta fórmula coincideix amb la fórmula (E.11), que havíem obtingut prèviament usant trigonometria esfèrica.[5]

Però la deducció que n'hem fet aquí, usant el segon mètode, la podem generalitzar a qualsevol superfície. Això és el que fa Gauss a l'article 19 del *Disquisicions*. Recordem que, a la versió no publicada del *Disquisicions* de 1825, el càlcul d'aquesta derivada ocupava un lloc central.

En aquest segon mètode per a calcular $\frac{d\gamma}{d\alpha}$ hem usat la proporcionalitat entre l'àrea i l'excés angular. Però ara veiem que, recíprocament, el coneixement d'aquesta fórmula (E.15) ens hauria permès resoldre la integral de (E.12), i obtenir, per tant, una fórmula explícita per a l'àrea d'un triangle esfèric.

[5] De fet, tota la geometria esfèrica es pot deduir d'aquesta fórmula!

Resumint, si tinguéssim una prova analítica de (E.15), tindríem un altra prova de la proporcionalitat de l'àrea i l'excés angular, però aquesta prova, a diferència de la de Harriot, es podria estendre a una superfície qualsevol.

Sembla que Gauss s'hauria pogut plantejar aquest fet. La feina és, doncs, trobar una prova analítica de la fórmula (E.15), que es pugui estendre a superfícies corbes generals.

Apèndix F

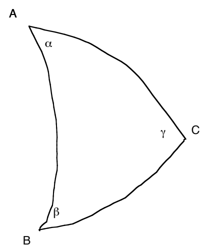
La derivada de l'angle d'inclinació

En aquest capítol refem, suposant conegudes les fórmules d'Euler-Lagrange, els càlculs dels articles 18 i 19 del *Disquisicions* pel que fa a l'angle d'inclinació.

Tal com acabem de dir a la secció anterior E.6, Gauss s'hauria pogut plantejar el problema següent.

> *Donada una superfície Σ i un triangle geodèsic $\triangle ABC$, amb A i B punts fixats d'aquesta superfície, i C variable, trobar la derivada de l'angle $\gamma = \widehat{C}$, quan C es mou sobre una geodèsica fixada que surt de B.*

L'angle $\gamma = \widehat{C}$ és l'angle entre el vector tangent, en el punt C, a la geodèsica que surt de C i arriba a A, i el vector tangent, en el punt C, a la geodèsica que surt de C i arriba a B.



Escriurem $\gamma = \gamma(\alpha)$ ja que l'angle γ depèn de l'angle $\alpha = \widehat{A}$. La derivada que busquem és la derivada de $\gamma(\alpha)$ respecte a α. Observem també que $\beta = \widehat{B}$ és constant.

D'aquest angle $\gamma = \gamma(\alpha)$ en diem *angle d'inclinació* ja que mesura la inclinació de la geodèsica BC respecte de les geodèsiques que surten de A formant un angle α respecte a una recta inicial fixada, en quest cas la geodèsica AB.

Ja sabem que $\dfrac{d\gamma}{d\alpha} = -1$ sobre el pla, fórmula (E.10), i que $\dfrac{d\gamma}{d\alpha} = -\cos\dfrac{r}{R}$ sobre l'esfera de radi R, fórmula (E.11). Aquí r és la longitud de la geodèsica sobre l'esfera que va de A a C.

Estudiem el problema sobre una superfície corba general Σ.

Suposem que podem construir sobre Σ un sistema de coordenades polars (r, α) tal que $A(0,0)$, $B(r_0, 0)$ i $C(r(\alpha), \alpha)$; r denota el paràmetre arc de la geodèsica que neix en el punt A, fixat com a origen de coordenades, i que forma un angle α amb una geodèsica fixada (concretament la geodèsica que va de A a B).

Pel lema de Gauss, tenim que

$$ds^2 = dr^2 + G(r, \alpha)d\alpha^2.$$

Observem que, en el cas del pla, $G(r, \alpha) = r^2$, i en el cas de l'esfera de radi R, $G(r, \alpha) = R^2 \sin^2 \dfrac{r}{R}$. En aquests casos, doncs, G no depèn de α.

En coordenades polars, l'equació de la geodèsica BC serà del tipus $f(t) = (r(t), \alpha(t))$, i l'angle que busquem és

$$\gamma = \angle\left(\frac{\partial}{\partial r}, f'\right),$$

o més precisament

$$\gamma(\alpha(t)) = \angle\left(\frac{\partial}{\partial r}_{|f(t)}, f'(t)\right).$$

Però no podem continuar sense conèixer aquestes funcions.

Afortunadament, per al càlcul de geodèsiques disposem de la teoria que Lagrange havia desenvolupat en el seu treball *Càlcul variacional* (vegeu [Lag92], vol. 1). Les equacions de les geodèsiques són simplement les equacions d'Euler-Lagrange del funcional de longitud (de fet, del seu quadrat).

Les equacions d'Euler-Lagrange de les geodèsiques associades a la mètrica

$$g = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

són

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial g}{\partial x^i}\,, \qquad \text{i} = 1{,}2\,.$$

En el nostre cas el funcional g és $(x^1 = r, x^2 = \alpha)$

$$g = \dot{r}^2 + G(r,\alpha)\dot{\alpha}^2.$$

Per tant, les equacions d'Euler-Lagrange són

$$\frac{d}{dt}(2\,\dot{r}) = G_r\,\dot{\alpha}^2$$
$$\frac{d}{dt}(2\,G\,\dot{\alpha}) = G_\alpha\,\dot{\alpha}^2\,.$$

Usant la regla de la cadena obtenim $G_t = \dfrac{d}{dt}G(r(t),\alpha(t)) = G_r\,\dot{r} + G_\alpha\,\dot{\alpha}$ i les anteriors equacions s'escriuen com

$$\begin{aligned} 2\,\ddot{r} &= G_r\,\dot{\alpha}^2 \\ 2\,\ddot{\alpha}\,G + 2\,\dot{\alpha}\,\dot{r}\,G_r + \dot{\alpha}^2\,G_\alpha &= 0\,. \end{aligned}$$

Com que $\gamma = \angle\left(\dfrac{\partial}{\partial r}, f'\right)$, on $f(t) = (r(t),\alpha(t))$ és la geodèsica BC, tenim:

$$\cos\gamma = \frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + G\dot{\alpha}^2}}\,.$$

Derivant respecte de t i simplificant obtenim:

$$-\dot{\gamma}\sin\gamma = \frac{\dot{\alpha}^2\,G_r}{2\sqrt{\dot{r}^2 + G\dot{\alpha}^2}}\,.$$

Però, com que

$$\sin\gamma = \frac{\dot{\alpha}\,\sqrt{G}}{\sqrt{\dot{r}^2 + G\dot{\alpha}^2}}\,,$$

tenim que

$$\dot{\gamma} = -\dot{\alpha}\cdot\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\,.$$

Així
$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = -\dot{\alpha} \cdot \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}$$
i, per tant,
$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}} \tag{F.1}$$

Aquesta fórmula apareix en el paràgraf 19 del *Disquisicions* i es pot considerar com la versió infinitesimal del teorema del defecte. De fet, GAUSS dedica tot el seu paràgraf 18 a fer exactament aquests mateixos càlculs, redemostrant les fórmules d'Euler-Lagrange.

Ja hem dit que en el pla $G = r^2$, i per tant
$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\frac{d\sqrt{r^2}}{dr} = -1,$$
d'acord amb (E.10), i a l'esfera, $G = R^2 \sin^2 \frac{r}{R}$, i per tant
$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\frac{d}{dr}\sqrt{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} = -\cos\frac{r}{R},$$
d'acord amb (E.11).

Apèndix G

Angle d'inclinació, teorema egregi i teorema del defecte

En aquesta capítol, procedint com a la versió no publicada del *Disquisicions* de 1825, obtindrem el teorema egregi a partir de l'estudi que hem fet de la derivada de l'angle d'inclinació i del teorema del defecte.

Concretament, obtindrem la fórmula de la curvatura en funció dels coeficients de la mètrica en polars (i les seves derivades), i, per tant, el teorema egregi. Suposarem conegut, com Gauss, que el defecte d'un triangle és l'àrea de la seva imatge esfèrica, i. e., el teorema de Gauss-Bonnet per a triangles geodèsics.

Considerem un triangle $T = \triangle ABC$ sobre una superfície. Siguin α, β, γ els angles respectius.

Suposem que el vèrtex A d'aquest triangle és l'origen de les coordenades polars (r, θ), i que el costat AB és la geodèsica inicial. Denotem $r(\theta)$ la longitud del segment geodèsic que surt de A formant un angle θ amb AB fins al punt en què aquesta geodèsica talla el costat BC. Si $C = (r(\alpha), \alpha)$, llavors

$$T = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \alpha;\ 0 \leq r \leq r(\theta)\}\,.$$

D'altra banda, recordem que de la definició de *curvatura* en un punt P de la superfície donada a l'article 6 del *Disquisicions* es dedueix que

$$k(P) = \lim_{T \to P} \frac{a(T')}{a(T)}\,, \tag{G.1}$$

on T és qualsevol triangle que conté P, $a(T')$ és l'àrea de la imatge T' del triangle T per l'aplicació de Gauss, i $a(T)$ és l'àrea de T.

Aquesta definició, juntament amb la fórmula (F.1) de l'angle d'inclinació, permet fer els següents càlculs en coordenades polars r, θ:

Usant infinitèsims, la fórmula (G.1) es pot llegir com

$$dA' = k \cdot dA = k \cdot \sqrt{G}\, dr\, d\theta\,, \tag{G.2}$$

on dA' és el diferencial d'àrea a l'esfera i dA és el diferencial d'àrea a la superfície, i

$$ds^2 = dr^2 + G(r, \theta) d\theta^2.$$

Integrant (G.2) obtenim[1]

$$\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G} dr\ d\theta = a(T')\,. \tag{G.3}$$

D'altra banda, integrant la derivada de l'angle d'inclinació (F.1), que ara s'escriu com

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}_{|r=r(\theta)} \sqrt{G(r, \theta)}, \tag{G.4}$$

i recordant que $\gamma(0) = \pi - \beta$, obtenim

$$\int_0^{\alpha} \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}\, d\theta = [\gamma(\theta)]_0^{\alpha} = \gamma(\alpha) - \gamma(0) = \gamma - \pi + \beta\,.$$

Canviant de signe i sumant α als dos costats obtenim

$$\alpha - \int_0^{\alpha} \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}\, d\theta = \delta(T), \tag{G.5}$$

on $\delta(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$. Ara bé, Gauss sabia[2] que

$$\delta(T) = a(T')\,. \tag{G.6}$$

Això és el que hem anomenat teorema del defecte.

[1] Observem que la fórmula (G.3) és una aplicació directa del teorema del canvi de variable, recordant que la curvatura és el Jacobià de l'aplicació de Gauss.

[2] Vegeu l'article 15 del *Disquisicions* de 1825, comentat a l'apèndix B, pàgina 97.

Per tant, els termes de l'esquerra de les igualtats (G.3) i (G.5) són iguals. És a dir,

$$\int_0^\alpha \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}\, dr\, d\theta = \alpha - \int_0^\alpha \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}\, d\theta\,. \tag{G.7}$$

Ara suposem que en el triangle donat al començament, $\triangle ABC$, el vèrtex C es mou en direcció a B sobre el costat BC. Les fórmules anteriors G.7 són vàlides per a cada α. Podem, doncs, derivar respecte a α, i obtenim

$$\int_0^{r(\alpha)} k\sqrt{G}\, dr = 1 - \frac{\partial}{\partial r}_{|r=r(\alpha)}\sqrt{G}\,, \tag{G.8}$$

on ara és $G = G(r,\alpha)$ i $k = k(r,\alpha)$.

Com que el punt $C = (r(\alpha),\alpha)$, en el qual hem calculat la curvatura, és arbitrari, també la funció $r = r(\alpha)$ és arbitraria, de manera que (G.8) s'escriu

$$\int_0^t k(r,\alpha)\sqrt{G(r,\alpha)}\, dr = 1 - \frac{\partial}{\partial r}_{|r=t}\sqrt{G(r,\alpha)},$$

que, derivant respecte a t dóna

$$k(t,\alpha)\sqrt{G(t,\alpha)} = -\frac{\partial^2}{\partial r^2}_{|r=t}\sqrt{G(r,\alpha)},$$

que escriurem simplement com

$$k\sqrt{G} = -\frac{\partial^2}{\partial r^2}\sqrt{G}\,,$$

és a dir,

$$\boxed{k = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}} \tag{G.9}$$

Aquesta fórmula ens diu que la curvatura es pot calcular a partir de la mètrica, i implica, per tant, el teorema egregi.

Tal com ja hem comentat (vegeu la pàgina 48), Gauss fou conscient que la fórmula anterior depenia de la demostració rigorosa (analítica) de l'existència de les coordenades polars sobre una superfície arbitrària. Ell tan sols tenia l'evidència geomètrica de l'existència d'aquestes coordenades.

Amb aquesta fórmula acaba el *Disquisicions* de 1825 i comença la feina de trobar una fórmula anàloga a l'anterior però en funció del sistema de coordenades en el qual està donada la superfície. GAUSS tenia ja l'enunciat del teorema egregi.

És clar que integrant dos cops la fórmula (G.9) i usant la fórmula (G.4) s'obté el teorema del defecte (vegeu els comentaris a l'article 20 del *Disquisicions* que fem a la pàgina 158). Això és el que fa GAUSS el 1827, i obté, doncs, una demostració rigorosa d'aquest teorema, que no tenia el 1825. Per això l'ordre de la versió de 1825 és diferent de l'ordre de la versió de 1827.

Apèndix H

Geometria hiperbòlica

H.1 Geometria hiperbòlica analítica

Lambert va descobrir l'*analogia* molt probablement després d'adonar-se que l'àrea d'un triangle de la geometria de l'angle agut era proporcional al seu defecte angular (vegeu [ES95], art. 82, pàg. 201). Més precisament, si $\triangle ABC$ és un triangle de la geometria de l'angle agut, amb angles respectius α, β, γ, tenim que:

$$S = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma), \tag{H.1}$$

on S és l'àrea del triangle $\triangle ABC$ i R una constant.

Si es compara aquesta fórmula amb la fórmula de l'àrea d'un triangle sobre l'esfera $\mathbb{S}(\mathrm{R})$:

$$S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi), \tag{H.2}$$

es veu clarament, tal com va observar Lambert, que (H.1) s'obté de (H.2) canviant *formalment* R per iR.

Ara bé, una esfera de radi imaginari iR seria, formalment, el conjunt de punts de $\mathbb{R}^3$ tals que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (iR)^2. \tag{H.3}$$

Però aquest conjunt és buit.

Curiosament no hi ha indicis que Lambert hagués desenvolupat l'*analogia*, malgrat que ell mateix havia redescobert les funcions hiperbòliques,[1] l'única

[1] Riccati fou el primer a estudiar les funcions hiperbòliques. Les va usar per a obtenir solucions de les *cúbiques*. Va trobar les fórmules d'addició per a aquestes funcions, les seves derivades i la seva relació amb la funció exponencial. Per a ampliar aquesta informació

cosa que es necesitava per a descobrir la trigonometria de la geometria de l'angle agut.

Qui sí que ho va fer va ser TAURINUS (vegeu [ES95], pàg. 266-283, o [Rod05]). Va suposar l'existència de l'esfera imaginària i va demostrar que, per als punts i rectes d'aquest hipotètic pla $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$, valen resultats anàlegs però en cert sentit contraris, als que valen per als punts i rectes de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$.

Trigonometria hiperbòlica

Si en les fórmules (E.7), (E.8) i (E.9) de la pàgina 143 es canvia formalment R per iR s'obtenen les fórmules:

$$\frac{\sin\dfrac{a}{iR}}{\sin\alpha} = \frac{\sin\dfrac{b}{iR}}{\sin\beta} = \frac{\sin\dfrac{c}{iR}}{\sin\gamma} \tag{H.4}$$

$$\cos\frac{a}{iR} = \cos\frac{b}{iR}\cos\frac{c}{iR} + \sin\frac{b}{iR}\sin\frac{c}{iR}\cos\alpha \tag{H.5}$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{iR}\,, \tag{H.6}$$

que, amb la definició de les funcions hiperbòliques

$$\cos\left(\frac{x}{iR}\right) = \cosh\left(\frac{x}{R}\right) = \frac{\exp\left(\frac{x}{R}\right) + \exp\left(-\frac{x}{R}\right)}{2}$$

$$\sin\left(\frac{x}{iR}\right) = -i\sinh\left(\frac{x}{R}\right) = -i\,\frac{\exp\left(\frac{x}{R}\right) - \exp\left(-\frac{x}{R}\right)}{2}$$

i, eliminant la unitat imaginària en les fórmules (H.4), (H.5) i (H.6), s'escriuen com,

$$\frac{\sinh\dfrac{a}{R}}{\sin\alpha} = \frac{\sinh\dfrac{b}{R}}{\sin\beta} = \frac{\sinh\dfrac{c}{R}}{\sin\gamma} \tag{H.7}$$

$$\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cosh\frac{c}{R} - \sinh\frac{b}{R}\sinh\frac{c}{R}\cos\alpha \tag{H.8}$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh\frac{a}{R}\,. \tag{H.9}$$

podeu connectar-vos a un interessant lloc de la web sobre història de les matemàtiques, http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians, i consulteu Riccati.

Aquestes són, efectivament, les fórmules de la trigonometria de la geometria de l'angle agut. La primera és el teorema del sinus, la segona és el teorema del cosinus i la tercera és la polar de la segona.[2] Per aquestes fórmules, seguirem anomenant aquesta geometria *geometria hiperbòlica*. Vegeu l'apèndix I.

Però, quins són els triangles hiperbòlics $\triangle ABC$ de costats a, b, c i angles α, β i γ als quals les fórmules (H.7), (H.8) i (H.9) s'apliquen?

Si es pogués donar sentit a una esfera de radi imaginari, és a dir, si existís una superfície $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$ que fes el paper d'aquesta esfera imaginària, quins serien els triangles d'aquesta superfície?

Taurinus no contesta aquestes preguntes, però obté propietats molt interessants que complirien aquests hipotètics triangles.

Vegem alguns d'aquests resultats, que es deduixen de les fórmules (H.7), (H.8) i (H.9).

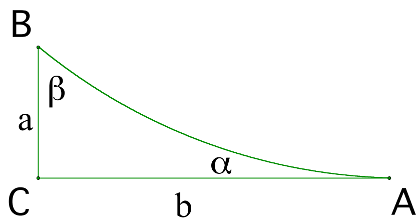
Teorema de Pitàgores

Observem que quan apliquem la fórmula (H.8) amb $\alpha = \pi/2$, és a dir, a un triangle rectangle d'hipotenusa a i catets b, c, obtenim el *teorema de Pitàgores hiperbòlic*:

$$\cosh \frac{a}{R} = \cosh \frac{b}{R} \cdot \cosh \frac{c}{R} \,.$$

Angle de paral·lelisme

Apliquem la fórmula (H.9) al triangle rectangle $\triangle ABC$, amb $\widehat{C} = \gamma = \pi/2$, i obtenim



[2]El concepte de triangle *polar* que hem estudiat detalladament per als triangles esfèrics (vegeu l'observació E.5.5), té un anàleg hiperbòlic, que no desenvolupem aquí.

$$\cos\alpha = \sin\beta \cosh\frac{a}{R}\,. \tag{H.10}$$

Aquesta fórmula continua essent vàlida si canviem α per β i β per α. Obtenim:

$$\cos\beta = \sin\alpha \cosh\frac{b}{R}\,. \tag{H.11}$$

Fixant B i C (que implica a constant) i fent variar A cap a infinit ($b \to \infty$), tenim $\alpha \to 0$, i per tant, en el límit, la fórmula H.10 implica que $\beta \to \beta(a)$ i

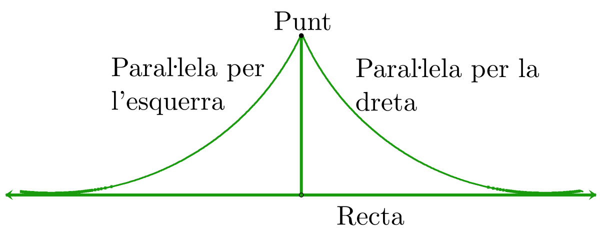
$$1 = \sin\beta(a) \cosh\frac{a}{R}\,. \tag{H.12}$$

L'angle $\beta(a)$, que depèn, doncs, de la distància a del punt B a la recta AC, es diu *angle de paral·lelisme* corresponent a la distància a, i s'acostuma a denotar, seguint Lobatchevski, per $\Pi(a)$. L'expressió (H.12) és equivalent a

$$\boxed{\Pi(a) = 2\arctan e^{-a/R}}$$

Tota recta BD que passa per B i forma un angle agut $\widehat{CBD}$ entre 0 i $\beta(a)$ talla la recta CA del mateix costat que A. Tota recta BD que passa per B i forma un angle agut $\widehat{CBD}$ entre $\beta(a)$ i $\pi/2$ no talla la recta CA. Hi ha infinites rectes per B que no tallen CA. *Aquesta és la forma que adopta el postulat V en aquesta hipotètica geometria hiperbòlica!*

D'aquesta anàlisi podem deduir la figura fonamental de la geometria hiperbòlica:



Sobre aquesta figura, que captura l'essència de les rectes hiperbòliques, J. Bolyai a [Bol31], i Lobatxevski, a [Lob55], van erigir deductivament l'edifici de *la nova geometria*. Vegeu també [Bol02].

Més conseqüències

Vegem ara els resultats anàlegs als de la geometria esfèrica que hem recopilat a la pàgina 135.

1. *Les rectes de $\mathbb{S}(iR)$ tenen longitud infinita.*
2. *Per un punt exterior a una recta passen infinites paral·leles*
3. *La suma dels angles de qualsevol triangle $\triangle ABC$ és menor que π; la diferència $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ és el* defecte angular *del triangle.*
4. *El pla hiperbòlic $\mathbb{S}(iR)$ té àrea infinita.*
5. *L'àrea d'un triangle hiperbòlic $\triangle ABC$ és proporcional al seu defecte angular; més precisament, igual a $R^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$.*
6. *No hi ha triangles hiperbòlics semblants; si dos triangles hiperbòlics tenen angles congruents, els seus costats també són congruents.*

Vegem com alguns d'aquests resultats són immediats a partir de les fórmules de la trigonometria hiperbòlica.

1. [Rectes infinites.] Si escrivim la fórmula (H.11) com

$$\cosh \frac{b}{R} = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \,, \tag{H.13}$$

i recordem que, quan $\alpha \to 0$, β tendeix a l'angle de paral·lelisme $\beta(a)$, tenim que

$$\lim_{\alpha \to 0} \cosh \frac{b(\alpha)}{R} = \frac{\cos \beta(a)}{\sin 0} = \infty \,,$$

de manera que $b \to \infty$, i per tant les rectes hiperbòliques tenen longitud infinita!

2. [Infinites paral·leles.] Conseqüència de l'angle de paral·lelisme.

3. [Suma d'angles menor que π.] Si apliquem la fórmula (H.9) a un triangle equilàter d'angle α i costat a, obtenim

$$\cos \alpha = \frac{\cosh \dfrac{a}{R}}{1 + \cosh \dfrac{a}{R}} \,.$$

Això implica $\cos\alpha > \frac{1}{2}$, i per tant $\alpha < \pi/3$. En particular,

$$\alpha + \alpha + \alpha < \pi\,,$$

és a dir, en aquesta geometria hi ha un triangle amb defecte positiu. Per tant, tots els triangles tenen defecte positiu.

4. [El pla té àrea infinita.] Aquesta afirmació no és una conseqüència immediata de les fórmules de la trigonometria hiperbòlica.

Però l'*analogia* ens permet trobar un camí per a demostrar-la.

Recordem la parametrització de l'esfera $\mathbb{S}(\mathrm{R})$:

$$\begin{aligned} x(\varphi,\theta) &= R\cos\theta\sin\varphi \\ y(\varphi,\theta) &= R\sin\theta\sin\varphi \\ z(\varphi,\theta) &= R\cos\varphi\,, \end{aligned}$$

on $0 < \theta < 2\pi$ i $0 < \varphi < \pi$ representen la longitud i la colatitud respectivament. Si diem r a la longitud del meridià entre el punt de coordenades (θ,φ) i el pol nord $(0,0,1)$, tenim que $r = R\varphi$, i per tant l'equació de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$ en coordenades polars θ, r és

$$\begin{aligned} x(r,\theta) &= R\cos\theta\sin\frac{r}{R} \\ y(r,\theta) &= R\sin\theta\sin\frac{r}{R} \\ z(r,\theta) &= R\cos\frac{r}{R}\,, \end{aligned}$$

on $0 < \theta < 2\pi$ i $0 < r < R\pi$.

Apliquem ara estrictament l'*analogia* de Lambert, canviant formalment R per iR, i obtenim:

$$\begin{aligned} x(r,\theta) &= R\cos\theta\sinh\frac{r}{R} \\ y(r,\theta) &= R\sin\theta\sinh\frac{r}{R} \\ z(r,\theta) &= iR\cosh\frac{r}{R}\,. \end{aligned} \tag{H.14}$$

Llavors es compleix

$$x^2 + y^2 + z^2 = -R^2 = (iR)^2,$$

i podem pensar, doncs, que (H.14) és una parametrització de $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$. A les expressions de x i y apareix R, i no iR, ja que hem canviat un sinus per un sinus hiperbòlic, i recordem que $\sin ix = i \sinh x$; en canvi, a l'expressió de z apareix iR, ja que $\cos ix = \cosh x$.

Però l'analogia no és total, ja que, així com a l'esfera $\mathbb{S}(\mathrm{R})$ teníem $0 < r < R\pi$, ara tenim $0 < r < \infty$, perquè ja hem vist que les rectes de $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$ tenen longitud infinita.

Si tenim una corba en el pla r, θ, donada per $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, amb $a \leq t \leq b$, la longitud de la corba sobre $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, donada per

$$\begin{aligned} x(t) &= x(r(t), \theta(t)) \\ y(t) &= y(r(t), \theta(t)) \\ z(t) &= z(r(t), \theta(t))\,, \end{aligned}$$

és igual a la integral de la norma[3] del vector tangent,

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Per tant,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

És a dir, «simplificant» el dt,

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R}\, d\theta^2}$$

Aquesta expressió és fonamental perquè representa l'element de longitud en polars de l'esfera imaginària.

Per tant, l'element d'àrea val

$$dA = \sqrt{EG - F^2} dr\, d\theta = R \sinh \frac{r}{R}\, dr\, d\theta\,.$$

En particular, l'àrea de $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$ és infinita, ja que

$$A(\mathbf{S}_{iR}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} R \sinh \frac{r}{R}\, dr\, d\theta = \infty\,.$$

[3] Aquesta norma la calculem formalment com $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, però observem que la nostra coordenada z és un imaginari pur; això ens porta, de manera sorprenent, a l'espai de Minkowski (vegeu H.3).

5. [Àrea proporcional al defecte.] L'àrea d'un triangle geodèsic en aquesta hipotètica superfície es calcularia així.

Suposarem el triangle donat per

$$T = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \alpha;\ 0 \leq r \leq r(\theta)\}\,,$$

per a una certa funció $r(\theta)$. Tindrem, llavors,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha \int_0^{r(\theta)} R \sinh \frac{r}{R} dr\, d\theta \\ &= \int_0^\alpha \left(R^2 \cosh \frac{r(\theta)}{R} - R^2 \right) d\theta \\ &= \int_0^\alpha R^2 \cosh \frac{r(\theta)}{R} d\theta - R^2 \alpha\,, \end{aligned}$$

però, usant (F.1), tenim

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\cosh \frac{r(\theta)}{R}\,,$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha R^2 \cosh \frac{r(\theta)}{R} d\theta - R^2 \alpha \\ &= -R^2 \int_0^\alpha \frac{d\gamma}{d\theta}\, d\theta - R^2 \alpha \\ &= -R^2 (\gamma(\alpha) - \gamma(0)) - R^2 \alpha \\ &= R^2 (\pi - (\alpha + \beta + \gamma)) \end{aligned}$$

ja que $\gamma(0) = \pi - \beta$.

Per tant, en una superfície amb un diferencial de longitud donat per

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R}\, d\theta^2$$

l'àrea dels triangles geodèsics és proporcional al seu defecte.

6. [No hi ha triangles semblants.] La prova del punt 6 de la pàgina 165 és immediata a partir de la fórmula (H.9), ja que aquesta fórmula diu que els angles determinen els costats.

H.2 La pseudoesfera

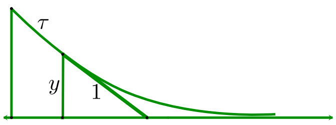
Ara estem a punt per a proposar una superfície candidata a $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$. Concretament, una superfície amb un diferencial de longitud donat, en unes certes coordenades, per

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\theta^2.$$

És ara completament clar que per a resoldre aquest problema hem d'estudiar el problema general de com canvia el ds^2 d'una superfície de $\mathbb{R}^3$ quan canviem de coordenades. Entrem de ple, així, en els temes fonamentals del *Disquisicions*.

Gauss no va trobar aquesta superfície, però l'any 1839 Minding va construir la superfície anomenada pseudoesfera, que té, localment, aquest element de longitud.[4]

La construcció comença a partir d'una corba anomenada *tractriu*, que la podem pensar com la trajectòria que descriu un cos situat en el punt $(0, 1)$ en ser arrossegat des del punt $(0, 0)$ sobre l'eix de les $x > 0$.



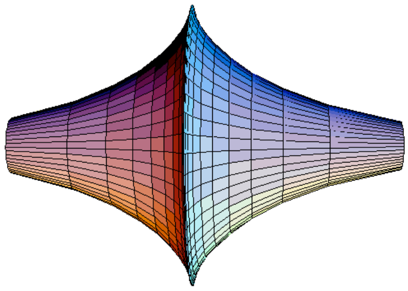
L'estudi d'aquesta corba fou proposat per Perrault, el segle *XVII*, i va ser resolt per Huygens.

És molt fàcil escriure l'equació diferencial de la tractriu, observant que és una corba amb subtangent 1. Per tant,

$$z' = -\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}\,.$$

La pseudoesfera és la superfície de revolució descrita quan la tractriu gira al voltant de l'eix de les x.

[4]Minding fou el primer estudiós del *Disquisicions* i fundador de l'escola de geometria diferencial russa. Va introduir el concepte de curvatura geodèsica d'una corba sobre una superfície el 1830. La pseudoesfera la va introduir el 1839 a l'article [Min39]. No obstant això, el lligam entre la pseudoesfera i el pla hiperbòlic (és a dir, entre les superfícies de curvatura constant negativa i la geometria hiperbòlica) no es va fer, malgrat que l'any 1837, i a la mateixa revista on va publicar Minding, va aparèixer publicat el treball de Lobatxevski [Lob37]. Aquest lligam el va fer Beltrami, gràcies, precisament, al coneixement dels treballs de Lobatxevski, el 1868 (vegeu pàgina 124).



En aquest dibuix es veu clarament que la pseudoesfera té tota una corba de singularitats, i és que ja hem comentat (pàgina 123) que no hi ha cap superfície de $\mathbb{R}^3$ completa amb curvatura constant negativa. La pseudoesfera és només un model local de superfície de $\mathbb{R}^3$ amb curvatura constant negativa.

És natural agafar sobre la pseudoesfera coordenades α, y, amb $\alpha =$ angle de rotació i $y = e^\tau$, on $\tau =$ distància sobre la tractiu. En aquestes coordenades, l'element de longitud de la pseudoesfera s'escriu com

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(d\alpha^2 + dy^2)\,. \tag{H.15}$$

En aquesta expressió reconeixem, avui dia, la mètrica del semiplà de Poincaré,

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)\,, \tag{H.16}$$

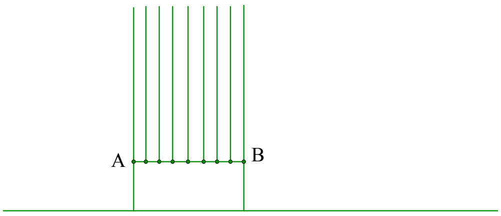
introduïda aproximadament l'any 1881. Però aquí tenim $-\infty < x < \infty$, i $y > 0$, mentre que a l'expressió (H.15) teníem $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $y > 1$.

És una mètrica de Riemann[5] sobre el semiplà, de curvatura constant -1.

La pseudoesfera (menys un meridià) es veuria aquí així:

[5] A la seva famosa memòria *Sobre les hipòtesis que estan a la base de la geometria*, [Rie67], defensada el 10 de juny de 1854 davant d'un tribunal en què hi havia Gauss, Riemann va estendre el *Disquisicions* a dimensions més grans, concretament al que ell va anomenar *varietat multiplement estesa*. El concepte de varietat n-dimensional que avui dia utilitzem va ser definit per Veblen i Whitehead el 1932 (vegeu [VW67]). Però ja el 1913, a [Wey51], apareix la definició actual de varietat bidimensional.

És curiós que Riemann no relacionés les varietats de curvatura constant negativa amb les geometries no euclidianes, malgrat que va donar explícitament la mètrica de les primeres i que segurament coneixia els treballs de Lobatxevski, ja que se sap que uns mesos abans de l'habilitació va consultar el volum del *Crelle* on apareixen els treballs de Lobatxevski. Ens referim al *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, revista fundada per



Observem que AB és un arc d'horocicle. La pseudoesfera és el cilindre no euclidià que s'obté en identificar a la figura els punts de la recta vertical per A amb els punts de la recta vertical per B, que tenen la mateixa ordenada.

Quina relació hi ha, però, entre

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) \tag{H.17}$$

i

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\theta^2 \quad ? \tag{H.18}$$

Pensem la primera expressió en el semiplà $y > 0$, i recordem que el disc és imatge estereogràfica del semiplà.

L'aplicació bijectiva entre el disc i el semiplà, que prové de la projecció estereogràfica, s'anomena aplicació de Cayley. Si D denota el disc de radi R i $\mathbb{H}$ el semiplà $y > 0$, l'aplicació de Cayley està donada per

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ z & \longmapsto & i\,\dfrac{R+z}{R-z}\,. \end{array}$$

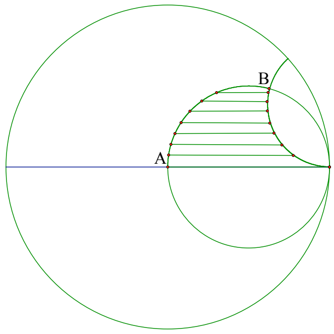
Aquest z és un nombre complex de mòdul $\rho < R$ i argument θ, és a dir, $z = \rho\, e^{i\theta}$.

La pseudoesfera es veuria en el disc així:

August Leopold Crelle el 1826. També és lògic pensar que coneixia els treballs de Gauss i els de Minding sobre superfícies de curvatura constant, aquest últim publicat també en el *Crelle*. L'única fórmula d'aquest treball de Riemann

$$ds^2 = \frac{1}{(1 + \frac{1}{4}\alpha \sum x_i^2)^2} \sum dx_i^2\,,$$

generalitza les fórmules de Minding.



Observem que AB és un arc d'horocicle.

Fem el canvi de variable $x = x(\rho, \theta)$, $y = y(\rho, \theta)$ donat per la part real i la part imaginària de l'aplicació de Cayley,

$$\begin{aligned} x &= Re\,\left(i\,\frac{R+z}{R-z}\right) \\ y &= Im\,\left(i\,\frac{R+z}{R-z}\right), \end{aligned}$$

que equival a transportar la mètrica del semiplà a una mètrica en el disc.

Calculem ara dx i dy i substituïm els seus valors a (H.15). Obtenim

$$ds^2 = \frac{4R^2}{(R^2-\rho^2)^2}(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2)\,,$$

on ρ, θ són coordenades polars euclidianes en el disc.

Fem ara el canvi

$$\rho = R\tanh\frac{r}{2}\,,$$

i obtenim

$$ds^2 = dr^2 + R^2\sinh^2\frac{r}{R}d\theta^2\,,$$

on ara r, θ juguen el paper de coordenades polars geodèsiques.

Hem vist, doncs, que, llevat d'un canvi de coordenades (certament sofisticat), l'element de longitud de la pseudoesfera (H.17) coincideix amb l'element de longitud (H.18), que, guiats per l'*analogia* de Lambert, estàvem buscant.

H.3 Espai de Minkowski

Situem-nos a $\mathbb{R}^3$ i definim un producte escalar per la fórmula

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = xx' + yy' - zz'.$$

Obtenim així una aplicació bilineal i simètrica de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Certament que no és definida positiva. També es diu que aquest producte escalar és una mètrica de Lorentz a R^3.

Es defineix la norma d'un vector per

$$||(x, y, z)||^2 = x^2 + y^2 - z^2.$$

Hi ha, doncs, vectors no nuls de norma zero. Es diuen vectors tipus llum.

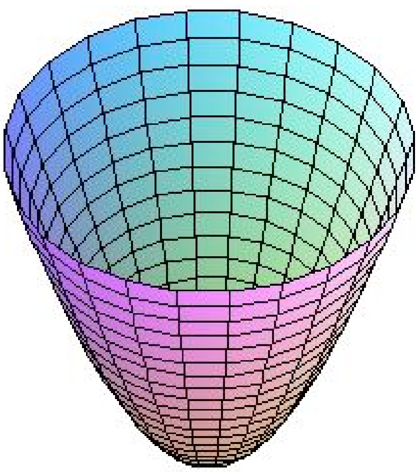
Com que la norma és l'arrel quadrada d'un nombre real, positiu o negatiu, i això donaria lloc a dues solucions, se suposa sempre que la norma d'un vector és zero, real positiu, o imaginari pur positiu (λ i, amb $\lambda > 0$).

En particular, no hi ha cap inconvenient a considerar l'esfera de radi iR:

$$\mathbb{S}(\mathrm{iR}) \ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ||(x, y, z)|| = iR\}.$$

Com a conjunt, aquesta esfera és l'hiperboloide

$$x^2 + y^2 - z^2 = -R^2.$$



La parametrització que hem donat a (H.14) ens suggereix parametritzar $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$ així:

$$
\begin{aligned}
x &= R\cos\theta\sinh\frac{r}{R}\\
y &= R\sin\theta\sinh\frac{r}{R}\\
z &= R\cosh\frac{r}{R}\,.
\end{aligned}
$$

Per tant,

$$x^2 + y^2 - z^2 = R^2(\sinh^2\frac{r}{R} - \cosh^2\frac{r}{R}) = -R^2 = (iR)^2.$$

La coordenada z és real, a diferència del que passava a (H.14), però el preu a pagar ha estat submergir-se en un espai de Minkowski. La consideració d'aquests tipus d'objectes matemàtics estava lluny de la manera de pensar de Gauss, en el *Disquisicions*, on treballava sempre dins de $\mathbb{R}^3$.

La mètrica de Lorentz $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$ restringeix a una mètrica definida positiva sobre $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$, i, amb aquesta mètrica, $\mathbb{S}(\mathrm{iR})$ és una varietat de Riemann de curvatura constant $1/(iR)^2 = -1/R^2$. Les geodèsiques són, convenientment parametritzades, les interseccions amb l'hiperboloide dels plans per l'origen. Aquest conjunt de punts i rectes, amb els moviments donats per les isometries d'aquest espai, forma un model de la geometria hiperbòlica, i podem dir amb força propietat que és una vertadera esfera de radi imaginari.

Apèndix I

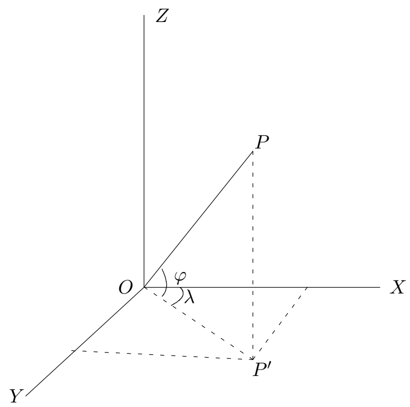
Trigonometria esfèrica i hiperbòlica, *(per Joan Girbau)*

L'objectiu d'aquest apèndix és establir de forma curta i elegant les fórmules fonamentals de la trigonometria esfèrica i de la trigonometria hiperbòlica. La redacció consta, doncs, de dues seccions independents, una dedicada a la trigonometria esfèrica i l'altra, a la hiperbòlica. La primera és elemental, però la segona requereix del lector coneixements rudimentaris de varietats de Riemann.

I.1 Trigonometria esfèrica

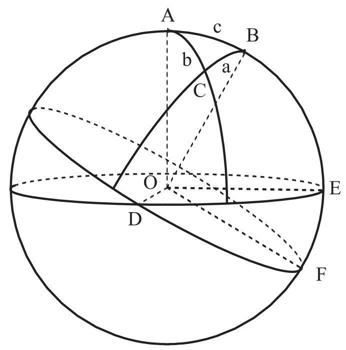
Primer de tot veurem com l'esfera unitat $\mathbb{S}(1)$ es pot parametritzar per la latitud i longitud geogràfiques.

Designem per O l'origen de $\mathbb{R}^3$. Donat un punt P de $\mathbb{S}(1)$ (que no sigui cap dels dos pols $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$), l'angle φ que forma OP amb el pla $z=0$ es denomina *latitud* de P. L'angle φ es considera positiu quan la tercera coordenada de P és positiva, i negatiu, quan és negativa. Així, doncs, φ varia entre $-\pi/2$ i $\pi/2$. Sigui P' la projecció ortogonal de P sobre el pla $z=0$. L'angle λ que forma l'eix de les x amb el segment OP', comptat en el sentit de les agulles del rellotge des del semieix de les x positives, s'anomena *longitud* del punt P.



La longitud del segment OP és 1 perquè P és de l'esfera unitat. La longitud del segment OP' és $\cos\varphi$. La x del punt P' (que també és la x del punt P) serà, doncs, $\cos\varphi\cos\lambda$. La y de P' (que també és la y de P) serà $\cos\varphi\sin\lambda$. Finalment, la z de P serà $\sin\varphi$. Per tant, el punt P serà el punt $P = (\cos\varphi\cos\lambda, \cos\varphi\sin\lambda, \sin\varphi)$.

Anem ara a establir les fórmules fonamentals de la trigonometria esfèrica. Considerem un triangle esfèric qualsevol $\triangle ABC$ d'angles respectius α, β, γ. Anomenem c, a, b les longituds respectives dels tres arcs AB, BC i CA. Agafem els eixos X, Y, Z de manera que el semieix de les z positives vagi des del centre O de l'esfera al punt A (amb la qual cosa A passa a tenir coordenades $(0, 0, 1)$). Agafem llavors els eixos X i Y de manera que B estigui en el pla $y = 0$, tingui x positiva, i de manera que C tingui la coordenada y positiva. A la figura següent, el semieix de les x positives és OE, i el de les y positives és OD.



Les coordenades de C en aquests eixos són, doncs,

$$\begin{aligned} C &= (\cos(\pi/2 - b)\cos\alpha, \cos(\pi/2 - b)\sin\alpha, \sin(\pi/2 - b)) \\ &= (\sin b \cos\alpha, \sin b \sin\alpha, \cos b)\,. \end{aligned}$$

Prenguem ara uns nous eixos X', Y' Z' de la manera següent: El semieix Z' de les z' positives va des del centre O al punt B, els semieixos X' i Y' els prenem de tal manera que A estigui en el pla $y' = 0$, tingui x' negativa, i de manera que C tingui la coordenada y' positiva. A la figura anterior el semieix X' és OF, el semieix Y' és OD (i coincideix amb el semieix Y d'abans) i el semieix Z' és OB. Les coordenades del punt C respecte als eixos X', Y', Z' són, doncs,

$$\begin{aligned} C &= (\cos(\pi/2 - a)\cos(\pi - \beta), \cos(\pi/2 - a)\sin(\pi - \beta), \sin(\pi/2 - a)) \\ &= (-\sin a \cos\beta, \sin a \sin\beta, \cos a)\,. \end{aligned}$$

És obvi que es passa dels eixos X, Y, Z als eixos X', Y', Z' fent un gir d'angle $-c$ entorn de l'eix $Y = Y'$. En llenguatge matricial:

$$\begin{pmatrix} -\sin a \cos\beta \\ \sin a \sin\beta \\ \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos c & 0 & -\sin c \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin c & 0 & \cos c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin b \cos\alpha \\ \sin b \sin\alpha \\ \cos b \end{pmatrix}.$$

Obtenim d'aquí, sorprenentment, les tres fórmules següents:

$$-\sin a \cos\beta = \cos c \sin b \cos\alpha - \sin c \cos b \tag{I.1}$$

$$\sin a \sin\beta = \sin b \sin\alpha \tag{I.2}$$

$$\cos a = \sin c \sin b \cos\alpha + \cos c \cos b\,. \tag{I.3}$$

La segona i la tercera constitueixen les fórmules fonamentals de la trigonometria esfèrica en una esfera de radi 1. Són el teorema del sinus i el teorema del cosinus.

Observació

Aquestes tres fórmules no són independents. Però, en funció de cada situació, ens pot ser més útil l'una que l'altra.

A la pàgina 143 apareixen també tres fórmules generals de la trigonometria esfèrica; les dues primeres, (E.7) i (E.8), coincideixen, per a $R = 1$, amb (I.2) i (I.3). En canvi, la tercera, (E.9), no apareix explícitament aquí. Però es dedueix de (I.3). En efecte, per permutació circular de a, b, c i α, β, γ, tenim que

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\\ \cos\beta &= \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a}\\ \cos\gamma &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\,.\end{aligned}$$

D'aquí deduïm

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{\sqrt{M}}{\sin b \sin c}\\ \sin\beta &= \frac{\sqrt{M}}{\sin c \sin a}\\ \sin\gamma &= \frac{\sqrt{M}}{\sin a \sin b}\,,\end{aligned}$$

amb

$$M = \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + 2\cos a \cos b \cos c - 2\,.$$

A partir d'aquestes expressions és fàcil veure, per càlcul directe, que

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a\,,$$

que és la fórmula (E.9) de la pàgina 143, amb $R = 1$.

Aquests mateixos càlculs permeten demostrar les dues primeres fórmules, (I.1) i (I.2), com a conseqüència immediata de la tercera (I.3).

Observem finalment que també es pot deduir (E.9) observant que és la polar de (I.3) (vegeu l'observació E.5.5).

Trigonometria a $\mathbb{S}$(R)

Sobre l'esfera $\mathbb{S}$(R) de $\mathbb{R}^3$ de centre l'origen O i de radi R, considerem un triangle esfèric qualsevol $\triangle ABC$ d'angles respectius α, β, γ. Anomenem (com sempre) c, a, b les longituds respectives dels tres arcs AB, BC i CA.

Per a cada punt P de l'esfera $\mathbb{S}$(R) de radi R, considerem la intersecció del segment OP amb l'esfera $\mathbb{S}(1)$ de radi 1. Si el punt de partida era P, designarem aquesta intersecció per P'. D'aquesta manera, als tres punts A, B, C de $\mathbb{S}$(R) corresponen tres punts A', B', C' de $\mathbb{S}(1)$, i al triangle esfèric de $\mathbb{S}(\mathrm{R})$, $\triangle ABC$, correspon el triangle esfèric de $\mathbb{S}(1)$, $\triangle A'B'C'$. Òbviament els angles α i α' dels dos triangles són iguals. Anàlogament els angles β i β', i els angles γ i γ'. Quant als costats dels dos triangles, es té $a' = a/R$, $b' = b/R$, $c' = c/R$.

Aplicant les fórmules (I.1), (I.2), (I.3) al triangle $\triangle A'B'C'$ tindrem:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\sin\dfrac{a}{R}\cos\beta & = & \cos\dfrac{c}{R}\sin\dfrac{b}{R}\cos\alpha - \sin\dfrac{c}{R}\cos\dfrac{b}{R} \\[2ex] \sin\dfrac{a}{R}\sin\beta & = & \sin\dfrac{b}{R}\sin\alpha \\[2ex] \cos\dfrac{a}{R} & = & \sin\dfrac{c}{R}\sin\dfrac{b}{R}\cos\alpha + \cos\dfrac{c}{R}\cos\dfrac{b}{R}\,. \end{array}\right.$$

La segona i la tercera constitueixen les fórmules fonamentals de la trigonometria esfèrica en una esfera de radi R. Són el teorema del sinus i el teorema del cosinus, i coincideixen amb les fórmules (E.7) i (E.8) de la pàgina 143.

També, com a l'observació anterior, pàgina 177, deduïm d'aquestes fórmules que

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{R}\,, \tag{I.4}$$

que és la fórmula (E.9) de la pàgina 143.

La trigonometria plana com a límit de l'esfèrica

Suposem ara que sobre l'esfera $\mathbb{S}(\mathrm{R})$ de $\mathbb{R}^3$ de centre l'origen O i de radi R, tenim un triangle esfèric $\triangle ABC$, de manera que les longituds dels arcs AB, BC i CA siguin molt petites en comparació del radi R. Pensem, per exemple, en un triangle sobre l'esfera de la Terra, les longituds dels costats del qual siguin de pocs metres.

Recordem que, per la fórmula de Taylor, es té

$$\begin{array}{l} \sin x = x - (\cos\xi)x^3/3! \\ \cos x = 1 - x^2/2 + (\cos\eta/4!)x^4\ , \end{array}$$

on ξ i η són nombres entre 0 i x. Quan x és molt petit, x^3 i x^4 són pràcticament negligibles, i podem posar $\sin x = x$ i $\cos x = 1 - x^2/2$. En les fórmules anteriors, com que a/R, b/R i c/R són molt petits, podem fer aquestes substitucions. Llavors les fórmules anteriors ens donen:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\dfrac{a}{R}\cos\beta & = & \left(1-\dfrac{c^2}{2R^2}\right)\dfrac{b}{R}\cos\alpha - \dfrac{c}{R}\left(1-\dfrac{b^2}{2R^2}\right) \\ \dfrac{a}{R}\sin\beta & = & \dfrac{b}{R}\sin\alpha \\ \left(1-\dfrac{a^2}{2R^2}\right) & = & \dfrac{cb}{R^2}\cos\alpha + \left(1-\dfrac{c^2}{2R^2}\right)\left(1-\dfrac{b^2}{2R^2}\right). \end{array}\right.$$

Quan fem aquests càlculs, seguint el criteri anterior haurem d'eliminar els termes d'ordre > 2 en a/R, b/R i c/R. Fent això i operant, les tres igualtats anteriors esdevenen

$$\left\{\begin{array}{rcl} c & = & a\cos\beta + b\cos\alpha \\ a\sin\beta & = & b\sin\alpha \\ a^2 & = & b^2+c^2-2cb\cos\alpha\,. \end{array}\right. \tag{I.5}$$

Reconeixem en la segona igualtat de (I.5) el teorema del sinus de la trigonometria plana. En la tercera igualtat hi reconeixem el teorema del cosinus. La primera igualtat ens dóna la longitud d'un costat d'un triangle com a suma de les projeccions sobre aquest costat dels altres dos.

Anàlogament, la fórmula (I.4) s'escriu, quan R tendeix a infinit, com

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\,,$$

que és la fórmula del cosinus de la suma, ja que en aquest cas tenim $\cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha) = \cos(\beta+\gamma)$.

En resum, les fórmules de la trigonometria plana s'obtenen per una aproximació quadràtica (fins a l'ordre 2) de les fórmules de la trigonometria esfèrica, aplicades a una esfera de radi R gran respecte a les longituds a, b, c dels costats.

I.2 Trigonometria hiperbòlica

Pla hiperbòlic: model de l'hiperboloide

El pla hiperbòlic, $\mathbb{H}_2$, és l'única varietat de Riemann de dimensió 2, completa, simplement connexa i de curvatura constant -1. Hi ha diversos models

—tots equivalents— per a introduir aquesta varietat. El model més adient per a donar les fórmules de la trigonometria hiperbòlica és el model de l'hiperboloide, del qual recordarem aquí els trets fonamentals.

Considerem $\mathbb{R}^3$ dotat del producte escalar η que definim a continuació. Si $u = (u_x, u_y, u_z)$, $v = (v_x, v_y, v_z)$ són dos vectors,

$$\eta(u, v) = u_x v_x + u_y v_y - u_z v_z \ .$$

En el cas de $\mathbb{R}^4$, aquest producte escalar és el de Minkowski (de la relativitat especial). Recordem que u s'anomena temporal si $\eta(u, u) < 0$, que u s'anomena espacial si $\eta(u, u) > 0$, i que u s'anomena lluminós si $\eta(u, u) = 0$. Es pot demostrar que si u i v són perpendiculars (pel producte escalar η), llavors si l'un és temporal, l'altre és espacial.

Considerem la superfície $\mathbb{H}$ de $\mathbb{R}^3$ definida per

$$\mathbb{H} = \{p \in \mathbb{R}^3,\ \ p = (p_x, p_y, p_z),\ \text{tals que } \eta(p, p) = -1 \text{ i } p_z > 0\} \ .$$

$\mathbb{H}$ és una component connexa de l'hiperboloide de dos fulls d'equació $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. Per tal de parametritzar $\mathbb{H}$, cosiderem en el pla de coordenades (r, z) la branca d'hipèrbola donada per

$$\begin{cases} r = \sinh\varphi \\ z = \cosh\varphi \,. \end{cases}$$

Considerem ara, a $\mathbb{R}^3$, una semirecta s que surti de l'origen i estigui continguda en el pla determinat pels eixos X, Y. Sigui π el pla de $\mathbb{R}^3$ engendrat per l'eix Z i la semirecta s. En aquest pla considerem la branca d'hipèrbola anterior. Fem ara girar el pla π entorn de l'eix Z i la branca d'hipèrbola de π engendra la superfície de revolució $\mathbb{H}$, que es parametritza, doncs, així:

$$\begin{cases} x = & r\cos\lambda = & \sinh\varphi\cos\lambda \\ y = & r\sin\lambda = & \sinh\varphi\sin\lambda \\ z = & & \cosh\varphi \,. \end{cases}$$

Fixem-nos que en aquesta parametrització λ representa l'angle entre la semirecta s que gira i l'eix de les x.

Si $p \in \mathbb{H}$, l'espai tangent $T_p(\mathbb{H})$ es pot identificar amb $< p >^{\perp}$ (ortogonal del subespai $< p >$ pel producte escalar η, dintre de $\mathbb{R}^3$). Si $u \in T_p(\mathbb{H}) =< p >^{\perp}$, com que p és temporal, u és espacial. Per tant, $\eta(u, u) > 0$. Això prova que la restricció de η a l'espai tangent $T_p(\mathbb{H})$ és definida positiva. La restricció de η a cada espai tangent dóna, doncs, un producte escalar definit positiu i converteix $\mathbb{H}$ en una varietat de Riemann (que és l'espai hiperbòlic de dimensió 2).

És ben conegut —i no gaire difícil de demostrar— que si $p \in \mathbb{H}$ i $u \in T_p(\mathbb{H})$, u unitari, llavors la geodèsica que surt de p amb vector tangent u ve donada pel vector de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{x}(t) = \cosh t \ \vec{p} + \sinh t \ \vec{u} \ .$$

Observem que

$$\eta(\vec{x}(t), \vec{x}(t)) = \eta(\cosh t \ \vec{p} + \sinh t \ \vec{u} \ , \ \cosh t \ \vec{p} + \sinh t \ \vec{u}) =$$

$$= \cosh^2 t \ \eta(p,p) + \sinh^2 t \ \eta(u,u)$$

(ja que p i u són ortogonals). Per tant,

$$\eta(x(t), x(t)) = -\cosh^2 t + \sinh^2 t = -1 \ .$$

Per tant, $x(t) \in \mathbb{H}$, $\forall \ t$.

El punt $(0,0,1)$ pertany a $\mathbb{H}$. Igual que fèiem en el cas esfèric, denominarem pol nord aquest punt i el designarem per N. L'espai tangent $T_N(\mathbb{H}) =< (0,0,1) >^{\perp}$ és el subespai de vectors $u = (u_x, u_y, 0)$ amb tercera coordenada nul·la. Un vector unitari de $T_N(\mathbb{H})$ serà, doncs, de la forma $u = (\cos\lambda, \sin\lambda, 0)$. La geodèsica que surt de N amb vector tangent u és

$$x(\varphi) = \cosh\varphi \ \vec{N} + \sinh\varphi \ \vec{u} = (\sinh\varphi\cos\lambda, \sinh\varphi\sin\lambda, \cosh\varphi) \ .$$

Veiem, doncs, que els meridians de $\mathbb{H}$ d'equació $\lambda =$ constant són geodèsiques. Però, el que és important, també, és que sobre cada un d'aquests meridians φ és la distància geodèsica al pol nord (que correspon a $\varphi = 0$).

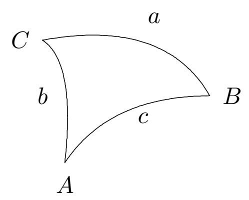
Si f és una isometria de $\mathbb{R}^3$ respecte al producte escalar η, llavors f preserva l'hiperboloide de dos fulls $S = \{p \in \mathbb{R}^3$ tals que $\eta(p,p) = -1\}$. En efecte, si $\eta(p,p) = -1$, també $\eta(f(p), f(p)) = -1$. Sigui $\mathcal{I}$ el conjunt d'isometries de $\mathbb{R}^3$ respecte al producte η tals que preserven el component connex $\mathbb{H}$ de S. Llavors tot $f \in \mathcal{I}$ induirà una isometria de la varietat de Riemann $\mathbb{H}$. Es pot demostrar (però ara no ens cal) que aquestes són totes les isometries de $\mathbb{H}$. En particular, les aplicacions lineals de $\mathbb{R}^3$ que tenen una matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ 0 & \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donen lloc a isometries de $\mathbb{H}$. Les dues primeres matrius corresponen a girs hiperbòlics entorn de l'eix X i de l'eix Y, mentre que la tercera correspon a un gir euclidià entorn de l'eix Z.

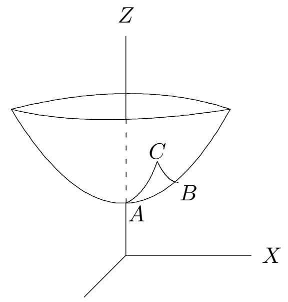
Fórmules de la trigonometria hiperbòlica

Considerem un triangle geodèsic $\triangle ABC$ del pla hiperbòlic $\mathbb{H}$, d'angles respectius α, β, γ.

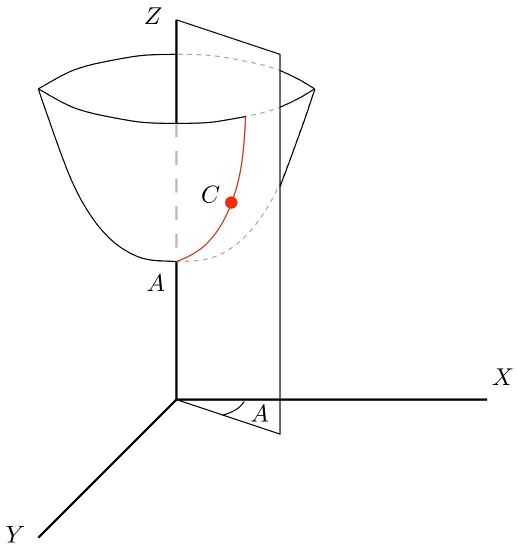


Designarem per a, b i c, tant els arcs geodèsics BC, CA i AB respectivament, com les seves longituds.

Com que les fórmules que volem obtenir relacionen costats i angles d'un tal triangle, les mateixes fórmules seran vàlides per a qualsevol transformat d'aquest triangle per una isometria. Tenint present això, utilitzant un gir euclidià convenient entorn de l'eix Z podem portar el vèrtex A sobre un punt A' del meridià intersecció de $\mathbb{H}$ amb el pla $y = 0$. Després, per un gir hiperbòlic entorn de l'eix Y podem transformar A' en el pol nord $N = (0, 0, 1)$. Per tant, sense pèrdua de la generalitat, podem suposar que el vèrtex A inicial que ens han donat és el pol nord N. Amb un gir euclidià entorn de l'eix Z (que preservarà A), podem portar B sobre el pla $y = 0$ de manera que tingui, a més, coordenada x positiva. Fem-ho i suposem que el B inicial ja compleix això. Ens queda un triangle com el representat a la figura següent.



Per veure com es mesura l'angle en A del triangle geodèsic, observem que C està sobre el meridià obtingut per intersecció de $\mathbb{H}$ i d'un pla π que passa per l'eix de les Z (de fet l'arc b del triangle és un arc d'aquest meridià).



En aquesta figura es veu bé que l'angle en A coincideix amb l'angle que forma la intersecció de π amb el pla $z = 0$ i l'eix X. Aquest angle és el que denominàvem λ en la parametrització de $\mathbb{H}$. Per tant, queda clar que les coordenades del vèrtex C són

$$C = (\sinh b \cos \alpha, \sinh b \sin \alpha, \cosh b)\ .$$

Igual que fèiem en el cas de la trigonometria esfèrica, prenem uns nous eixos, X', Y', Z', obtinguts dels eixos X, Y, Z, fent un gir hiperbólic (en el cas esfèric era un gir euclidià) d'angle $-c$ entorn de l'eix Y (que passa a coincidir amb Y'). Les coordenades de C en aquests nous eixos (com passava en el cas esfèric) seran

$$C = (\sinh a \cos(\pi - \beta), \sinh a \sin(\pi - \beta), \cosh a)\ .$$

Per tant, tindrem

$$\begin{pmatrix} -\sinh a \cos \beta \\ \sinh a \sin \beta \\ \cosh a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh c & 0 & -\sinh c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh c & 0 & \cosh c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh b \cos \alpha \\ \sinh b \sin \alpha \\ \cosh b \end{pmatrix}.$$

Això ens dóna:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\sinh a \cos\beta & = & \cosh c \sinh b \cos\alpha - \sinh c \cosh b \\ \sinh a \sin\beta & = & \sinh b \sin\alpha \\ \cosh a & = & -\sinh c \sinh b \cos\alpha + \cosh c \cosh b\,. \end{array}\right.$$

La segona i la tercera constitueixen les fórmules fonamentals de la trigonometria hiperbòlica quan la curvatura és -1. Són el teorema del sinus i el teorema del cosinus.

Si la curvatura és $-1/R^2$ el mateix procediment anterior ens porta a

$$-\sinh\frac{a}{R}\cos\beta = \cosh\frac{c}{R}\sinh\frac{b}{R}\cos\alpha - \sinh\frac{c}{R}\cosh\frac{b}{R} \tag{I.6}$$

$$\sinh\frac{a}{R}\sin\beta = \sinh\frac{b}{R}\sin\alpha \tag{I.7}$$

$$\cosh\frac{a}{R} = -\sinh\frac{c}{R}\sinh\frac{b}{R}\cos\alpha + \cosh\frac{c}{R}\cosh\frac{b}{R}\,. \tag{I.8}$$

La segona i la tercera constitueixen les fórmules fonamentals de la trigonometria hiperbòlica quan la curvatura és $-1/R^2$. Són el teorema del sinus i el teorema del cosinus, i coincideixen amb les fórmules (H.7) i (H.8) de la pàgina 162.

En canvi, l'equació (H.9) de la pàgina 162,

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh\frac{a}{R}\,,$$

no apareix explícitament aquí. Però es dedueix de (I.8) per un càlcul anàleg al que hem fet a l'observació de la pàgina 177.

Bibliografia

[AZ67] Aleksandr D. Aleksandrov and Viktor A. Zalgaller, *Intrinsic geometry of surfaces*, vol. 15, Translations of Mathematical Monographs, AMS, 1967, traduït del rus per J. M. Danskin. 63

[Bat67] Giuseppe Battaglini, *Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky*, Giornale di Matematica, Napoli **5** (1867), 217–231. 123

[Bel66] Eugenio Beltrami, *Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette*, Ann. di Mat. **VII** (1866), 185–204. 124

[Bel68] ———, *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, Giornale di Matematica, **6** (1868), 248–312, traduït al francès el 1869 en els Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, t. 6, 215-286, Gauthier-Villars, París. 9, 50, 124

[Ber67] Johanes Bernouilli, *Opera Omnia*, vol. 1, Lausane, 1767. 95

[Boi91] Luciano Boi, *Le probleme mathematique de l'espace. Une quête de l'intelligible*, Springer, 1991. 110

[Bol31] János Bolyai, *The science of absolute space*, suplement a [Bon55], traduït per George Bruce Halsted, el treball de Bolyai és de 1831. 56, 109, 164

[Bol02] ———, *Scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica*, Polygon, Szeged, 2002, conté una traducció a l'hongarès de Rados Ignàcz, 1897, i una a l'anglès de George Bruce Halsted, 1897. 109, 164

[Bon55] Roberto Bonola, *Non euclidean geometry. A Critical and Historical Study of its Development*, Dover, 1955, primera edició de 1912. Conté la traducció de l'*Apèndix* de J. Bolyai, i de *La teoria de les paral·leles* de N. I. Lobatxevski. 9, 16, 101, 124, 187, 191, 193

[Bre84] Ernst Breitenberger, *Gauss's geodesy and the axiom of parallels*, Arch. Hist. Exact Sci., **31** (1984), 273–289. 93

[dC76] Manfredo P. do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y supefícies*, vol. AUT/135, Alianza Editorial, 1976. 50

[DLt03] Jaume Domenech Larraz (traductor), *Els Elements d'Euclides*, ¡http://www.xtec.es/ jdomen28/indexeuclides.htm¿, 2003, la versió original de la pàgina és a: ¡http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/elements/elements.html¿, D. E. Joyce, Clark University. 9

[Dom79] Peter Dombrowski, 150 *years after Gauss'"Disquisitiones generales circa superficies curvas"*, Astérisque, **62** (1979), 97–153, conté la versió original de Gauss en llatí: *Disquisitiones generales circa superficies curvas.* 18, 20, 22, 28, 88, 98, 133

[Dou70] Alberto Dou, *Logical and historical remarks on Saccheri's Geometry*, Notre Dame Journal of Formal Logic, **XI** (1970), no. 4, 385–415. 13, 16, 17

[Dun04] Waldo G. Dunnington, *Carl Friederich Gauss. Titan of Science*, The Mathematical Association of America, 2004, amb material addicional de J. Gray i Fritz-Egbert Dohse. 17, 22

[ES95] Friedrich Engels and Paul Stäckel, *Die Theorie der Pallellinien von Euklid bis auf Gauss*, Teubner, Leipzig, 1895, referència 168 de [Ros88]. 14, 15, 16, 17, 20, 61, 161, 162, 191

[Euc56] Euclides, *The thirteen books of Euclid's Elements*, vol. 1, Dover, 1956, traducció comentada per Sir Thomas L. Heath. 9

[Eul28] Leonhard Euler, *De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente*, Comentarii Academiae Scientiarum Imperials Petropolitanae Sant Petersburg **3** (1728), 110–123. 51, 95

[Eul60] ———, *Recherches sur la courbure des surfaces*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences Berlín **16** (1760), 119–143, *Opera Omnia* I, 28. 84, 95, 136

[Eul72] ———, *De Solidis quorum superficiem in planum explicare licet*, Novi Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, **XVI** (1772), 3–34, *Opera Omnia* I, 28. 49, 95

[Eul56] ———, *Opera omnia(1). Opera mathematica*, vol. 1–29, Leipzig, Berlín, Zürich, 1911–1956. 49, 53, 129, 136, 137

[Gau01] Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Lipsiae, Gerh. Fleischer, 1801, vegeu la traducció al català feta i prologada per *Griselda Pascual*, editada per la Societat Catalana de Matemàtiques, 1966. 91

[Gau28] ———, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Commentationes Societatis Regiae Scientarum Gottingensis Recentiores Classis Mathematicae, **VI** (1828), 99–146, presentat el 8 d'octubre de 1827. Vegeu també [Gau27], vol *IV*, p. 217-258. 25

[Gau70] ———, *Recherches générales sur les surfaces courbes*, segona ed., Imprimerie de Prudhome, rue Lafayette, 14, Grenoble, 1870, traduïda, anotada i comentada per *M. E. Roger*. 22, 49

[Gau27] ———, *Werke*, vol. 1-12, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, B. G. Teubner, Leipzig, 1870-1927, es poden consultar també a ¡http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache/toc/D38910.html¿. 18, 19, 20, 28, 86, 93, 98, 100, 101, 106, 107, 119, 189

[Gau68] ———, *General investigations of curved sufaces of 1827 and 1825*, Nova York, Readex Micropint, 1968, traduït, amb notes i bibliografia, per James Caddall Morehead i Adam Miller Hiltebeitel. Microforma. 95

[Gir73] Joan Girbau, *Memoria sobre el concepto, método y fuentes de la geometría diferencial*, Barcelona, [s. n.], 1973. 95

[Gir84] ———, *La geometria diferencial, de Gauss a Riemann*, El desenvolupament de les matemàtiques al segle XIX (1984), 40–53, Arxius de la secció de Ciències LXXV, Institut d'Estudis Catalans. Edició a cura de *Manuel Castellet*. 95

[Gra79a] Jeremy Gray, *Ideas of Space. Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic*, Clarendon Press, Oxford, 1979. 17

[Gra79b] ———, *Non-Euclidean Geometry, a reinterpretation*, Hist. Math., **6** (1979), 236–258. 17

[Gra87] ———, *Non-Euclidean Geometry*, The Open University, Unit 13, 1987, reeditat el 1990 i 1995. 124, 125

[Gra04] ———, *János Bolyai. Non-Euclidean Geometry and the Nature of Space*, Burndy Library Publications, New Series, núm. I, 2004. 23, 109

[Hil01] David Hilbert, *Über Flächen von konstanter Gausscher Krümung*, Trans. Amer. Math. Soc., **2** (1901), 87–99. 123, 126

[Hil91] ———, *Fundamentos de la geometría*, séptima ed., Textos Universitarios, vol. 5, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1991, primera edició: *Grundlagen der Geometrie*, 1899. 17

[Ita84] Jean Itard, *Essais d'histoire des mathématiques*, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, París, 1984. 77

[Kli72] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972. 18, 57

[Kli78] Wilhelm Klingenberg, *Curso de geometría diferencial*, Alhambra, 1978, edició original: *Eine vorlesung über differentialgeometrie*, 1973. 50

[Klü63] Georg Simon Klügel, *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio*, Göttingen, 1763, tesi dirigida per Abraham Kaestner. 18

[Kui55] Nicolas H. Kuiper, *On C^1-isometric imbeddings, I, II*, Indag. Math., **17** (1955), 545–556, 683–689. 126

[KY96] Andrei Niolaevich Kolmogorov and Andre P. Yushkevich, *Mathematics of the 19th Century. Geometry. Analytic Function Theory*, Birkhäuser Verlag, 1996. 51, 84

[Kár87] Ferenc Kárteszi, *Bolyai, János. Appendix. The theory of space*, vol. 138, North-Holland Mathematics Studies, 1987, amb un suplement a càrrec de Barna Szénássy. 109, 115, 116, 118, 137

[Lag92] Joseph Louis Lagrange, *Oeuvres de Lagrange*, Gauthier-Villars, París, 1867-1892. 95, 136, 154

[Lam86] Johann Heinrich Lambert, *Theorie der Parallellinien*, Mag. Reine Angew. Math. (1786), 137–164, 325–358, vegeu [ES95], pag. 152-207. El treball fou escrit el 1766 i publicat pòstumament per J. Bernouilli i C. F. Hindenburg. 12, 13

[Lap12] Pierre Laplace, *Oeuvres completes*, vol. 8, Academy of Sciences of Paris, Gauthier-Villars, 1878-1912. 136

[Lau99] Detlef Laugwitz, *Bernhard Riemann 1826–1866. Turning Points in the Conception of Mathematics*, Birhäuser, 1999. 17, 104

[Leg87] Adrien-Marie Legendre, *Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre*, Mémoires de l'Academie des Sciences de Paris (1787), 352. 77, 92

[Lob37] Nicolaï Ivanovitch Lobatxevski, *Géométrie imaginaire*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **17** (1837), 295–320. 110, 169

[Lob55] ———, *Geometrical researches on the theory of parallels*, Dover, 1955, suplement II de [Bon55], traduït per George B. Halsted. Versió original en alemany de 1840. 110, 164

[Lüt90] Jespers Lützen, *Joseph Liouville 1809-1882. Master of Pure and Applied Mathematics*, Springer Verlag, 1990. 86

[Meu85] Jean-Baptiste Marie Meusnier, *Mémoire sur la courbure des surfaces*, Mémoires de Mathématiques et de Phsique. Mémoires des Savants Étrangers. París **10** (1785), 477–510. 40, 95

[Mil72] Arthur Miller, *The Myth of Gauss'Experiment on the Euclidean Nature of Physical Space*, Isis, **63** (1972), 345–348. 93

[Min39] Ferdinand Minding, *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind, oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaasse*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **19** (1839), 370–387, «Com decidir si dues superfícies són mútuament desenvolupables; incloent remarques sobre superfícies de curvatura constant negativa». 50, 169

[Mon80] Gaspard Monge, *Mémoire sur les propiétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulèrement sur celles des surfaces* *développables, avec une applicaction à la théorie des ombres et des pénombres*, Mémoires de Mathématiques et de Phsique. Mémoires des Savants Étrangers. París **9** (1780), 382–440. 49, 95, 98

[Mon94] José María Montesinos, *La cuestión de la consistencia de la geometría hiperbólica*, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid (1994), 213–232. 124, 125

[Nol06] Ramon Nolla, *Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica*, Publicacions de la Societat Catalana de Matemàtiques, vol. 2, 2006. 13

[Oss90] Robert Osserman, *Curvature in the Eighties*, The American Mathematical Monthly **97, No.** 8 (1990), 731–756. 40, 84

[Rev02] Agustí Reventós, *Geometria Integral Hiperbòlica*, Diversitas. Universitat de Girona **34** (2002), 113–130, homenatge al professor Lluís Santaló i Sors. 122

[Rev04] ———, *Un nou món creat del no-res, un món on es pot quadrar el cercle!*, Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques **19** (2004), 47–83, també: Conferència de Sant Albert, Facultat de Ciències de la UAB, 17 de novembre de 2004. Dipòsit legal B.44.926-2004. 10, 117

[Rie67] Georg Friedrich Bernhard Riemann, *Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen,* (habilitationsvortrag), Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **13** (1867), 133–152, el treball va ser exposat el 10 de juny de 1854; podeu trobar la versió anglesa comentada al volum II de [Spi79]. 170

[Rod15a] Olinde Rodrigues, *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une class d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie*, Correspondance sur l'Ecole Polytechnique **3** (1815), 162–182. 40, 84, 97

[Rod15b] ———, *Sur quelques propriétés des intégrals doubles et des rayons de courbure des surfaces*, Bull. Soc. Philomatique **2** (1815), 34–36. 84

[Rod05] Carlos J. Rodriguez, *La esfera imaginaria*, Publicacions del Departament de Matemàtiques, UAB (2005), 1–33. 20, 104, 109, 162

[Ros88] Boris A. Rosenfeld, *A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space*, Springer-Verlag, 1988. 12, 15, 16, 53, 106, 139, 146, 188

[Sac20] Giovanni Girolano Saccheri, *Euclides ab omni naevo vindicatus*, G. B. Halsted, Chicago, Londres, 1920. 12, 14

[San61] Lluís Antoni Santaló, *Geometrías no euclidianas*, Eudeba, Buenos Aires, 1961. 124

[Spi79] Michael Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Inc. Berkeley, 1979, 2a ed., 5 v. 46, 48, 60, 192

[Str70] Dirk J. Struik, *Geometría Diferencial clásica*, Aguilar, 1970. 50, 60

[Stä01] Paul Stäckel, *Friedrich Ludwig Wachter, ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie*, Math. Ann. **LIV** (1901), 49–85, en aquest article estan reimpreses cartes de Wachter sobre el tema, i el seu tractat *Demostratio axiomatis geometrici in Euclideis undecimi*, de 1817, vegeu [Bon55], pag. 62-63. 16

[VW67] Oswald Veblen and John Henry Whitehead, *The foundations of differential geometry*, Cambridge University Press, 1967, primera edició el 1932. 170

[Wey51] Hermannn Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Chelsea, 1951, reimprès de l'obra publicada a Leipzig el 1923, primera edició de 1913. 170

Índex terminològic

Índex onomàstic