ta erosió i de l'ateisme i agnosticisme religiosos en els científics i tècnics s'ha de situar en el tercer quart del present segle. A partir de llavors sorgeixen les primeres desvaloracions de la tècnica i de la ciència per part de la societat. No només Einstein i Heisenberg i altres estudiosos de la mecànica quàntica varen ser profundament religiosos, sinó que també la Primera Guerra Mundial va acabar amb el mesianisme tècnic, i la bomba d'Hiroshima desallotja els científics de la seva torre de marfil. No només el llibre de Rañada que menciones, sinó d'altres com *Can Scientists Believe?*, editat pel Premi Nobel C. Mott, o *Le savant et la foi*, editat per Delumeau, ofereixen testimonis profundament religiosos de grans científics, que eren impensables en els anys cinquanta.

Aquesta evolució em va pertorbar més tard, però no em va preocupar ni durant els anys de la Guerra Civil, que vaig passar al front, ni durant els anys següents quan vaig cursar la carrera de camins. En acabar-la (1943), per raons que aleshores en van semblar absolutament convincents, vaig sol·licitar entrar a la Companyia de Jesús i hi vaig ser admès. La meva dedicació a les matemàtiques va sorgir, lògicament, després d'un discerniment amb els meus coreligionaris jesuïtes. No prosseguiré, però per acabar vaig a exposar quelcom que he viscut intensament al llarg dels molts anys que he dedicat exclusivament a la universitat.

El professor que fa apassionadament un curs universitari, ho vulgui o no, en sigui conscient o no, imparteix també una visió del cosmos i de la vida, i els alumnes, ho vulguin o no, ho sàpiguen o no, queden críticament colpits pel curs sigui cap a una acceptació o un rebuig de valors o pseudovalors humans, independentment dels continguts matemàtics o de la disciplina que s'ensenyi.

Personalment, per mi, després de viure un temps en una espècie d'esquizofrènia entre els valors religiosos i els matemàtics, aviat vaig arribar a la conclusió que convergien en un únic humanisme: alguns cops ho he resumit en una frase: «Del púlpit a la tarima no hi ha solució de continuïtat».

Díaz: Conclosa aquesta entrevista, no ens queda més que agrair-te per totes les classes de matemàtiques i de vida que tantes persones hem rebut de tu i desitjar-te que continuïs gaudint durant molts anys aquesta pau i tranquil·litat que es respiren a casa teva, en el teu bell jardí, a Cerdanyola, prop de la Universitat i de tants llocs estimats per a tu.

Jesús Ildefonso Díaz Díaz
UCM

Articles

La revolució de János Bolyai*

L'any 2002 s'ha complert el 200 aniversari del naixement de János Bolyai (15 de desembre de 1802). Per aquest motiu es va organitzar una conferència internacional a Budapest sobre geometria hiperbòlica. Entre altres iniciatives es va encunyar una moneda de 3.000 forints amb gravats de dibuixos hiperbòlics, concretament la figura 10 de l'*Apèndix* i la signatura de Bolyai.

Pareu atenció a les paraules de Farkas a Gauss a la carta del 10 d'abril de 1816.

János Bolyai està considerat la figura més gran de la ciència hongaresa i se'l té pel Copèrnic de la geometria. En el seu treball de 26 pàgines publicat el 1831 i anomenat, generalment, *Apèndix*, ja que és un apèndix al volum I del *Tentamen*, la monumental monografia en dos volums del seu pare, Farkas Bolyai, va fer una troballa revolucionària creant l'anomenada geometria no euclidiana. Amb aquest treball János Bolyai va trencar el monopoli de la geometria euclidiana i va obrir el camí per pensar sobre l'espai des d'un altre aspecte. A través dels seus descobriments en el pensament axiomàtic, Bolyai va estructurar considerable-

*Resum d'un article escrit en hongarès a *Természet Világa*, setembre 2002. Traducció: A. Reventós.

ment la història de les matemàtiques com un tot. Es pot afirmar que el desenvolupament de la matemàtica moderna en els segles XIX i XX pot ser atribuït, en gran manera, al descobriment de János Bolyai. No obstant això, la importància dels seus resultats no va ser reconeguda fins després de la seva mort i fins i tot llavors no sense resistència. Durant la seva vida, les seves brillants idees, que havien estat madurades a l'edat de vint-i-un anys, no van ser enteses. Les va presentar amb la bravesa revolucionària de la joventut, sense por a les crítiques de la classe científica dirigent. Naturalment, en aquesta actitud hi havia realment un grau d'ingenuïtat gran, perquè ell pensava que els grans descobriments, incloent-hi els seus, el portarien al reconeixement i la fama. Però qui sí va entendre les idees de Bolyai, Gauss, «el príncep de les matemàtiques», va ser injust amb János Bolyai quan va formar la seva opinió sobre l'*Apèndix* el 1832. Va dir, en la carta a Farkas Bolyai, que era incapaç d'alabar el treball de János perquè seria com alabar-se ell mateix, ja que els resultats de l'*Apèndix* i el camí que havia portat a aquests resultats coincidien quasi literalment amb les seves pròpies meditacions de trenta o trenta-cinc anys enrere. Després de la mort de Gauss el 1885, el seu llegat va ser recopilat i no es va trobar cap prova escrita de l'afirmació anterior. A més, una conducta posterior de Gauss és també reprensible. Quan va saber que el rus Lobatxevski havia descobert el mateix, en essència, que János Bolyai —va ser el primer membre electe estranger de la Real Societat de Göttingen el 1842— no va informar Lobatxevski que hi havia una altra persona que havia obtingut resultats similars.

S'ha dit moltes vegades que després del seu retir el 1833, János Bolyai va escriure poques coses, això sí, una de molt important sobre la fonamentació dels números complexos, i que la manca de reconeixement el va portar a un estat de depressió i que va renunciar, de fet, a la recerca creativa en matemàtiques. Va ser Elemér Kiss, professor a Marosvásárhely, qui va refutar aquesta opinió: havent consultat els manuscrits que Bolyai ens va deixar al llarg d'una dècada, va trobar-hi significants «gemmes» matemàtiques que es podien considerar completament noves en aquell moment.

Moneda hongaresa del 200 aniversari. Cortesia de Viktor Richter.

La vida de János Bolyai

Farkas Bolyai i el seu fill eren descendents d'una família hongaresa d'antic llinatge. L'origen de la família era Bolya, prop de Nagyszeben. Farkas va néixer allà. El castell fortificat de Bolya havia estat concedit a la família a principis del segle XIV. Els membres de la família van ser valents soldats, però durant la primera meitat del segle XVII un d'ells, un altre János Bolyai, va perdre el castell mentre era captiu a Turquia. Es van anar empobrint més i més i Gáspár Bolyai, pare de Farkas, va heretar tan sols una petita propietat prop de Bolya, la qual pertanyia en aquells temps al comtat Nagy-Küküllő. A aquesta propietat es va afegir un minifundi pròxim a Domáld, herència de Krisztina Pávaia Vajna, esposa de Gáspár Bolyai.

Farkas Bolyai va ser un rellevant matemàtic de la seva època però era també expert en diversos camps. Va ser nomenat professor per explicar matemàtiques, física i química i va mantenir el càrrec fins a la seva jubilació el 1851. A més, estava interessat en la construcció d'estufes per estalviar energia, horticultura, silvicultura i dramatúrgia. També era inventor. El *Tentamen*, publicat el 1832–1833, és el seu treball més important. La seva recerca matemàtica girava al voltant de la demostració del cinquè postulat d'Euclides.

Farkas va passar els anys 1786–1789 a la Universitat de Göttingen, estudiant matemàtiques, i allà va conèixer Gauss. Va néixer una amistat entre aquests dos joves que va durar tota la vida. Personalment, no es van retrobar gaire sovint però van estar en contacte per correspondència.

Després que Farkas tornés a Transsilvània, en aquell temps un gran ducat hongarès governat pels Habsburg, va esdevenir professor a la ciutat de Kolozsvár. Es va casar amb Zsuzsanna Árkosi Benkó i la parella es va traslladar a Domáld.

János Bolyai va néixer el 15 de desembre de 1802 a Kolozsvár, on s'havien traslladat els seus pares perquè allà hi haurien millors condicions per al naixement del nen. La casa on János va néixer pertanyia a la família de la seva mare. Encara hi ha una placa commemorativa. Al cap de dos anys la família es va traslladar a Marosvásárhely, quan Farkas Bolyai va ser contractat com a professor en el College d'allà.

A partir de la recerca de János Bolyai, el seu fill, hem après que el cinquè postulat no es pot demostrar a partir dels altres postulats d'Euclides. Però després de tot, el treball rellevant de Farkas va ser conegut a tot el món com a conseqüència de les formulacions equivalents d'aquest postulat.

El geni de János Bolyai es va manifestar ja durant la seva infantesa. Quan tenia sis anys va aprendre a llegir pràcticament sol. Un any després va aprendre alemany i a tocar el violí. Tenia nou anys quan el seu pare li va començar a explicar matemàtiques; als catorze anys tenia una bona formació en matemàtica superior i treballava amb càlcul diferencial i integral fàcilment i hàbilment. Això està explicat en la carta del seu pare del 16 d'abril de 1816 a Gauss. En aquesta edat va progressar en l'estudi del violí; havia ja tocat difícils peces de concert. Als dotze anys es va convertir en estudiant del College. Va ometre els tres primers graus i es va matricular a quart. Això correspon al vuitè grau de l'escola elemental d'avui dia.[1] Va aprovar l'examen final el juny de 1817.

El problema de la posterior educació de János va aparèixer ben aviat. A Transsilvània, en aquell temps, no hi havia universitats i a la Universitat de Budapest i a la Universitat de Viena no hi havia professors de matemàtiques de prou nivell, dels quals el jove geni hagués pogut aprendre. Es va fer evident que calia enviar János amb Gauss a Göttingen. No sabem si s'havia plantejat una solució semblant a la de Farkas Bolyai, concretament, contractar-se com a tutor del fill d'una família benestant per cobrir les despeses necessàries dels estudis.[2] En aquella època, molts dels estudiants a universitats alemanyes portaven una vida dissoluta. Farkas sabia bé això i potser per aquest motiu buscava resoldre la posterior educació de János a Göttingen enviant-lo a casa de Gauss. Amb més raó ja que János tenia només quinze anys el 1817 i Farkas en tenia vint-i-un quan va anar a Göttingen el 1796. Pensant que els propers estudis del seu fill començarien el 1817 a Göttingen, Farkas va escriure una carta a Gauss el 10 d'abril de 1816 on li demanava que acceptés

[1] A Hongria. (N. del t.)

[2] Era costum que els bons estudiants que necessitaven diners fessin de tutors d'altres estudiants de famílies benestants.

el seu fill a casa seva durant tres anys, i que li tornaria els diners de les despeses. Però després d'aquesta petició ho va destruir tot quan li demana a Gauss que contesti sincerament les següents qüestions: «1. No tens pas una filla que pugui esdevenir (recíprocament) perillosa en aquesta època...? 2. Estàs sa i no ets pobre? Estàs satisfet i no ets reganyaire? I, principalment, és la teva dona excepcional entre totes les dones? No és ella més variable que un penell. És imprevisible com el canvi d'un baròmetre?...» Gauss no va contestar aquesta carta.

Després d'això la possibilitat d'estudiar a l'Acadèmia de Viena d'Enginyers Militars va augmentar. Durant el seu viatge a Göttingen Farkas va visitar l'Acadèmia i se'n va enamorar. Quasi s'hi queda! Així, va poder recomanar-la al seu fill amb tot el seu cor. No obstant això, no va poder reunir els diners immediatament i, per tant, va inscriure János a la Facultat d'Arts en el College de Marosvásárhely el 1817. Posteriorment, els diners per a l'educació a Viena van ser proveïts entre d'altres pel tresorer del College, comte Miklós Kemény (1791–1829), que vivia a Kolozsvár, així que un cop superat l'examen d'entrada el 1818, es va permetre a János que comencés els seus estudis de vuit anys a la Imperial i Reial Acadèmia d'Enginyers Militars. Es podia començar en el quart curs o en un d'inferior. János va ser matriculat al quart curs, de manera que es van preveure quatre anys d'estudi. Malgrat que la totalitat de les despeses de l'educació estaven cobertes, com hem dit, pel comte Miklós Kemény i d'altres, hi havia despeses extres (per exemple, per muntar a cavall), de manera que la contribució econòmica del seu pare també era necessària. Això no era una tasca fàcil, ja que la situació econòmica a Transsilvània també va començar a deteriorar-se a causa de les guerres amb França, que duraven des de 1792. El 1817 la moneda es va devaluar fins a dos cinquens. Sabem que el salari anual de Farkas era de 200 Ft renans[3] de plata el 1820; no obstant això, aquesta quantitat no arribava a temps i, a vegades, no arribava completa. El cost anual de l'educació de János era aproximadament de 900 Ft. D'aquesta quantitat 130 Ft s'havien de pagar en plata. El primer fardell de coses necessàries per a un estudiant costava quasi 220 Ft.

János era un estudiant eminent, considerat el primer d'entre tots els estudiants pels seus professors, però els seus companys de curs el posaven en segon ordre i també estava en aquesta posició a la suma dels rànquings. La raó més important per la qual no era considerat el primer eren els fluixos treballs de dibuix: János s'avorria amb el dibuix. Durant els anys a l'Acadèmia d'Enginyers Militars, des de 1820, havia estat dedicat intensivament a la investigació de les paral·leles. Volia demostrar el cinquè postulat que el seu pare havia tractat de resoldre durant molt temps. Farkas, també, prevenia al seu fill de fer això, a la carta del 4 d'abril de 1820: «Per l'amor de Deu! Deixa les paral·leles tranquil·les, abjura d'elles com d'una xerrada indecent, et prendran (com a mi) el teu temps, la salut, la tranquil·litat i la felicitat de la teva vida. Aquesta foscor sense fons pot devorar un miler d'altes torres de Newton[4] i mai més tornarà a brillar a la terra...»

János Bolyai va acabar els seus estudis a l'Acadèmia d'Enginyers Militars el 1822, però va continuar allà per prosseguir estudis un any més, ja que va ser un dels dos millors estudiants.

Llavors, al principi de setembre de 1823, va ser nomenant sublloctinent, i va ser assignat a la direcció de fortificacions de Temesvár. Des d'aquí va escriure al seu pare la carta del 3 de novembre de 1823, que va esdevenir extensament coneguda a tot el món: «Apreciat pare! Tinc moltes coses per escriure-us sobre els meus nous descobriments però, de moment, no puc sinó evitar-ne la discussió en profunditat aquí i us els escriuré en unes quartilles... Estic determinat a publicar un treball sobre les paral·leles tan aviat com l'hagi arreglat i preparat i hi hagi l'oportunitat de fer-ho; de moment encara no està descobert però el camí que he seguit promet aconseguir la meva meta si d'alguna manera és possible; encara no està llest però he descobert coses tan superbes que jo mateix estic atònit, i significaria una vergonya eterna deixar-ho perdre per sempre; si vostè, apreciat pare, les veu, les reconeixerà; ara no puc dir més: del no-res he creat un món nou i diferent;

[3]Forint, moneda hongaresa (N. del t.).

[4]Les paraules precises de Farkas Bolyai en anglès serien: *tall towers of Newton*, en el sentit de comparar científics amb torres, més altes com més gran és el científic.

totes les altres coses que us he enviat són com un castell de cartes comparat amb una torre».

Com és ben conegut avui dia, aquest «món nou i diferent» és el màgic món de la geometria absoluta i hiperbòlica. Al començament de 1825 János va visitar la seva família a Marosvásárhely. Va tenir un gran èxit allà. La societat aristocràtica estava fascinada per la seva elegància, personalitat i domini del violí. El seu pare es delitava amb tot això i amb el geni matemàtic del seu fill. A la seva carta del 27 de febrer de 1825 a Pál Bodor escriu que János és un tipus guapo de naturalesa gran i forta. A més, János era un excel·lent espadatxí, va esdevenir famós per aquesta habilitat durant els anys acadèmics. Un cop, durant la seva estada a Arad, tretze oficials de cavalleria el varen reptar a duel. Va acceptar el repte amb la condició que entre dues parelles de duels ell pogués tocar el violí i va vèncer en tots tretze casos. Si aquesta història és certa i en els duels es van usar espases de cavalleria, que se sap que són molt pesades —els reptadors eren oficials de cavalleria—, podem concloure que János era un jove de gran força física.

El destí va voler que quan va ser transferit a Arad el 1826 el seu superior fos Johann Wolter von Eckwehr, que havia estat el seu professor de matemàtiques a l'Acadèmia d'Enginyers Militars. János s'havia escrit amb von Eckwehr anteriorment. Aquell any havia enviat al seu primer professor, el seu manuscrit en alemany, en el què recollia les seves investigacions sobre geometria no euclidiana. Lamentablement, aquest manuscrit es va perdre.

El 1831 János va ser traslladat a Lemberg, i el 1832 Olmütz va ser la darrera estació de la seva carrera militar. De camí a Lemberg va visitar el seu pare a Marosvásárhely.

A Arad János, va tenir febres recurrents. Presumiblement, va agafar la malària, ja que hi havia terrenys pantanosos al voltant de la ciutat. Més tard va patir també el còlera; la seva salut es va deteriorar significativament. Això es va agreujar pel fet que en el seu viatge de Lemberg a Olmütz el seu carruatge va fer un tomb i ell va patir una seriosa ferida en el cap. Havia descuidat el seu treball, ja que estava, òbviament, desinteressat en les qüestions rutinàries que havia de fer. De fet, sempre mirava de tenir temps per a la solució de problemes matemàtics. Va tractar de sol·licitar un permís de tres anys per a la seva recerca matemàtica. El 1832 la seva sol·licitud va ser presentada a l'arxiduc János, director general de l'Acadèmia d'Enginyers Militars, que la va rebutjar. Finalment, el 1833 va ser llicenciat amb una pensió com a capità de segona classe. Sobre aquesta pensió hi va exercir un paper el fet que en el seu viatge de Lemberg a Olmütz va tenir una discussió amb oficials duaners a la frontera perquè no va voler obrir el seu bagul i aquests van informar en contra d'ell a les autoritats.

Retornant a l'any 1831, l'esdeveniment més important va ser la publicació de l'*Apèndix* en llatí com a addenda al vol. I del *Tentamen*, escrit també en llatí, que juntament amb l'*Apèndix* de János, va ser publicat el 1832. El volum II es va publicar el 1833. És un fet important que la data d'impressió del *Tentamen* és el 12 d'octubre de 1829.

Farkas Bolyai va enviar a Gauss una còpia de l'*Apèndix*, publicat com a addenda, quasi immediatament, el 20 de juny de 1831, demanant-li la seva opinió. La resposta de Gauss del 6 de març de 1832 és àmpliament coneguda. En una de les parts més devastadores d'aquesta resposta diu: «Ara deixa'm dir una cosa sobre el treball del teu fill. Si començo dient que no el puc alabar, restaràs parat per un moment. No obstant això. no puc fer una altra cosa: si l'alabés, m'alabaria a mi mateix ja que el total contingut del treball, el camí que segueix el teu fill i els resultats a què ha arribat coincideixen quasi completament amb les meves reflexions de fa trenta o trenta-cinc anys». Continua: ell, també, s'ha proposat escriure un treball rellevant però no ha volgut publicar res d'això durant la seva vida. En altres cartes de Gauss, indica una data anterior en la qual ell hauria estat interessat en la geometria no euclidiana. Però en la seva carta a Gerling reconeix que les seves idees de 1798 estaven lluny de la maduresa trobada en el treball, de János Bolyai. Gauss també va pronunciar paraules elogioses sobre János Bolyai i el seu treball però la pena causada per les fuetades de la carta citada anteriorment no van poder ser mitigades pel jove Tità.

János Bolyai va anar amb el seu pare a Marosvásárhely el 1833 però al cap d'un any va anar a Domáld, on va viure fins al 1846. Des de 1834 cohabitava amb Rozália Kibédi Orbán, que procedia de bona família. El casament legal estava fora de les seves possibilitats, ja que eren incapaços de dipositar els «diners de cautela,[5]»ja que János era un funcionari. Tenien dos nens: Dénes (1837–1913) i Amália (1840–1893). Amália no va tenir fills però Dénes en va tenir diversos fruit dels seus tres matrimonis. Un dels seus descendents, János Bolyai, besnét del nostre János Bolyai, encara viu avui dia a Edelény.

L'any 1837 va portar un important esdeveniment a la vida dels dos Bolyai. La Societat Científica Jablonowski de Leipzig va anunciar una competició per a la fonamentació de la teoria dels nombres imaginaris (el text original de la competició era bastant llarg i ens sembla estrany a nosaltres avui dia). Els Bolyai van tenir notícies d'aquesta competició no massa abans del seu termini, el novembre de 1837, però els dos van presentar un assaig a la dita Societat. A part d'ells també hi va prendre part Ferenc Kerekes, professor del College de Debrecen (1784–1850). Els Bolyai no varen guanyar, però a Kerekes se li va concedir la meitat del premi. Aquest treball de János Bolyai, conegut per *Responso*, està basat en principis similars als de Hamilton que va establir la teoria dels nombres complexos. Malgrat que János Bolyai hi va sotmetre el seu assaig el 1837, la teoria pròpiament dita ja havia estat elaborada el 1831, abans que Hamilton sotmetés el seu article a l'Acadèmia de Dublín.

János Bolyai té altres resultats nous de matemàtiques que han estat discutits en un llibre recentment publicat d'Elemér Kiss.

El 1846 János Bolyai es trasllada a Marosvásárhely amb la seva família, ja que el seu pare estava descontent amb la manera en què János administrava la propietat de Domáld i la va arrendar.

L'any 1848 va donar una sorpresa a János. Va tenir a les seves mans el treball de Lobatxevski, publicat en alemany el 1840, el contingut del qual coincidia amb el de l'*Apèndix*, en molts detalls. Primerament, va sospitar que l'hi havien robat, però posteriorment va fer comentaris detallats sobre aquest treball.

Durant el moviment d'alliberació de 1849, aprofitant l'oportunitat que no es demanaven els diners de cautela, es va casar amb Rozália Orbán. Però això va ser invalidat després.

El 1852 János Bolyai es va separar de la seva família; va deixar la casa a la seva dona i va donar una considerable quantitat de diners per al manteniment dels fills. No obstant això, va continuar cuidant-los. Va caure malalt i va ser cuidat per l'assistenta Júlia Szóts.

El 1857, amb el seu germanastre Gergely, que regentava la propietat de Bolya, van vendre Domáld per 1.600 Ft.

El 26 de gener de 1860 Júlia Szóts va escriure una carta a Gergely, demanant-li que hi anés urgentment ja que en János estava malament. Un cop signada la carta, va mirar al seu amo i va continuar-la així: «Mentre jo escric aquesta carta, ha mort, així que no hi ha res a dir: el Sr. capità se n'ha anat».

A part de l'obligada escorta militar hi havia tres civils presents en el funeral i després dels registres formals a la capella calvinista es van afegir les notes següents: «Va ser un famós matemàtic de gran intel·ligència. Va ser el primer entre els primers. És una pena que el seu talent fos desaprofitat.»

No obstant això, en aquella època, gent fins i tot més competent que l'anterior registrador era incapaç de valorar la grandiositat de la personalitat i del treball de János Bolyai.

No ens ha arribat cap retrat de János Bolyai. N'hi havia un on apareixia amb uniforme però una vegada Bolyai, enrabiat, el va tallar a trossets amb la seva espasa. Recentment, s'accepta més i més l'opinió segons la qual un dels relleus de dalt de la façana del Palau de Cultura de Marosvásárhely el representa a ell. En cinc dels sis relleus que hi ha, s'identifica la persona que representa realment i el nom de tots cinc s'hi pot llegir. A sota del sisè es pot veure el nom de János Bolyai i és just al costat del de Farkas Bolyai. Encara hi ha més proves d'això, concretament el testimoni d'aquells que van conèixer János Bolyai personalment quan es construïa el Palau i, a més, la gran semblança que existeix entre aquest relleu i el retrat de György Klapka. És sabut que János Bolyai s'assemblava a György Klapka, general de l'armada revolucionària hongaresa de 1848 a 1849. Basant-se en aquest relleu Kinga Székheyi ha fet la placa commemorativa (fotografia pàg. 19 adjunta) de l'aniversari 2002.

[5] Una mena de fiança que imposava l'exèrcit als seus oficials per tal d'evitar posteriors pagaments de possibles deutes contrets per aquests. Era una quantitat important de diners.

La revolució de János Bolyai

Fa vint anys va aparèixer publicat l'article del prestigiós matemàtic de Princeton John Milnor, *Hyperbolic geometry: the first 150 years*. Diu en aquest article que la geometria no euclidiana havia estat en un estat d'incertesa durant els primers quaranta anys. Més tard, va integrar les branques més establertes de les matemàtiques des de la teoria de Gauss sobre superfícies corbades fins a la de Riemann sobre varietats corbades de dimensió superior. Malgrat ser cert el que Milnor diu, la realitat és més complicada que tot això.

La teoria de la curvatura i geometria de superfícies no va anar més enllà de les matemàtiques, al menys, no essencialment. La interpretació de la curvatura de superfícies i l'estudi de les seves propietats es poden situar dins el sistema existent de matemàtiques. No obstant això, l'estudi de la curvatura i geometria en el cas de les varietats corbades de Riemann és diferent. En aquesta teoria apareix una aproximació general a la geometria, però un quart de centúria després dels descobriments de Bolyai i Lobatxevski. Riemann va presentar la seva teoria en el seu article d'habilitació el 1854. Per aquells temps començava a ser obvi el que no ho era a l'època de la publicació dels articles de Bolyai i Lobatxevski, per exemple, que la geometria i la realitat poden ser diferents. La geometria es pot concebre com una classe de teories abstractes, sense renunciar a intentar aplicar-les, perquè les seves estructures es poden interpretar arbitràriament i poden ser estudiades com ho són les funcions o altres objectes matemàtics. Per cert, l'article va ser publicat després de la mort de Riemann en 1868.

Abans del descobriment de la geometria no euclidiana, se suposava que la ciència de la geometria descrivia el món real que ens envolta. La geometria era una mena de ciència de la natura. El punt, la línia recta i el pla eren el que la nostra imaginació ens imposava fortament. Hauríem de recordar que els axiomes d'Euclides van néixer només per la necessitat d'ordre en el nostre pensament. Varen ser formulats perquè poguéssim trobar el camí en mig del caos de conceptes i afirmacions i clarificar el que és evident i el que ha de ser provat. Les afirmacions òbvies i els axiomes haurien de ser com menys millor. Afirmacions que es poden deduir d'altres no s'han de considerar axiomes.

Abans del descobriment de János Bolyai els matemàtics esperaven l'arribada d'un geni que provés brillantment el cinquè postulat, a partir dels altres axiomes. Els predecessors immediats, Saccheri i Lambert, suposaven que aquest postulat era fals amb la idea d'arribar a contradicció com a prova indirecta, ja que el món és euclidià. Ells no ho deien així però pensaven així. Des del més gran filòsof de l'època, Immanuel Kant fins a l'home del carrer aquesta era la convicció. Avui, se sap que l'ensenyament de la teoria de la relativitat és diferent i que hi ha proves experimentals d'això, però aquest fet, a més, és conegut només pels més erudits. Les nostres vides i activitats de cada dia estan basades en la geometria euclidiana. Quan un nen dibuixa rectes a la seva llibreta, quan un geòmetra mesura la terra, no necessita preocupar-se de si es poden dibuixar més paral·leles a una recta donada per un punt exterior. Bolyai va portar la geometria al món de les teories abstractes. Va demostrar que, lògicament, més d'una geometria era possible. Com va dir a la carta de 3 de novembre de 1823, enviada des de Temesvár al seu pare: «Del no-res he creat un món diferent» —un món abstracte, per descomptat.

Però si el món segueix la geometria euclidiana, quina és la utilitat de tot això? Gauss no va gosar publicar els seus resultats referents a geometria no euclidiana, que eren resultats parcials en comparació als de Bolyai; no va gosar publicar-los per por que el prenguessin per boig. Per contra, Bolyai era un revolucionari; va tenir el coratge de les seves conviccions. Però, per ser objectius, hem de mencionar que Bolyai estava convençut que seria entès i rebria el merescut reconeixement, basat en el seu treball.

Després de la carta de novembre de 1823, Bolyai va escriure els seus resultats en alemany i va donar l'article a Johann Wolter von Eckwehr, que havia estat un cop professor seu a Viena i supervisor a Arad el 1826. El seu pare el va animar a escriure el seu article en llatí també, el qual va ser publicat com a apèndix del *Tentamen*, la monumental obra en dos volums de Farkas Bolyai. El títol complet de l'apèndix és aquest: *Appendix, Scientiam Spatii absolute veram exhibendis; a veritate aut falsitate axiomatis* XI. *Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.* És a dir:

«Apèndix, l'absolutament certa ciència de l'espai exhibida; independentment que l'axioma XI d'Euclides sigui cert o fals (que no es pot mai decidir *a priori*); en el cas en què és fals es dóna la quadratura geomètrica del cercle».

János Bolyai no va intentar publicar el seu treball a cap de les revistes importants de matemàtiques de l'època. L'hagués pogut publicar gràcies a les connexions del seu pare i a l'ajuda de Gauss, però aquest pensament no va aparèixer, potser, afortunadament per a János, perquè, com és sabut, Gauss va escriure una carta a Farkas sobre l'*Apèndix*, que li havia estat enviat el 1831, que va fer deprimir János. Malgrat que Gauss tenia bona opinió sobre els resultats de l'*Apèndix*, també va dir que ell ja havia arribat als mateixos resultats. Ja hem citat algunes parts d'aquesta carta.

L'apèndix es va publicar en hongarès i altres llengües diverses vegades. Va ser traduït a l'anglès per George Bruce Halsted, de Texas, el 1891 i va ser publicat, juntament amb el prefaci del traductor, a la traducció anglesa del llibre de Bonola (1911), escrit originalment en italià. Excloent les pàgines del títol, l'*Apèndix* és un treball de 24 pàgines. Sobre això el professor Halsted diu en el seu prefaci: «Són les més extraordinàries dues dotzenes de pàgines a la història del pensament.» Bé, a part de les nostres alabances a János Bolyai, deixeu-nos familiaritzar amb alguns dels resultats característics del seu treball.

Com s'ha mencionat, Bolyai pensava encara dintre del sistema d'axiomes d'Euclides; el sistema axiomàtic més complet de Hilbert es va publicar el 1899. No obstant això, pel que fa a la seva deducció a l'*Apèndix* i a la seva metodologia en general, Bolyai va utilitzar els grans invents dels segles anteriors, el primer i més important la geometria analítica de Descartes, així com també el càlcul diferencial i integral de Newton i Leibnitz. En certa manera, el primer invent citat va significar un nou i més alt nivell d'exactitud, no només una solució de problemes geomètrics mitjançant l'àlgebra.

El cinquè postulat d'Euclides es pot enunciar així: «donada una recta l i un punt P del pla que no és a la recta l, existeix exactament una recta que passa per P i és paral·lela a l». Aquesta equivalència amb la formulació d'Euclides del cinquè postulat, és deguda a Playfair (1748–1819).

Bolyai, primerament, rebutja el cinquè postulat (que portava el nom d'axioma XI) i defineix paral·lelisme. Considerem una recta l i un punt P fora de l. Si, començant amb P, dibuixem una semirecta que interseca l en una direcció, movem la intersecció cap a l'infinit, hi haurà una posició límit a partir de la qual la semirecta no tallarà més la recta l. Podem fer el mateix en l'altra direcció. Si continuem cadascuna de les dues semirectes en la direcció oposada, obtenim dues rectes paral·leles a l. Si són diferents hi ha una infinitat de rectes entre aquestes que també són paral·leles a l però tenen diferents propietats. La geometria que correspon a aquest cas es diu hiperbòlica.

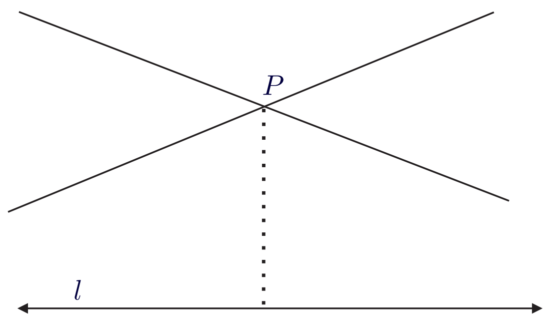

FIGURA 1. Rectes paral·leles

Remarquem ara que les rectes de Bolyai no són rectes en el sentit de cada dia, malgrat que les visualitzem com si ho fossin a la figura 1. Les rectes a la geometria de Bolyai-Lobatxevski poden ser semicercles o altres objectes geomètrics.

Bolyai va desenvolupar la geometria absoluta, que és independent del cinquè postulat. El teorema anterior pertany a la geometria absoluta plana. Si un punt P està a distància d d'una recta l i α és l'angle entre la recta per P ortogonal a l i la recta paral·lela a l en posició límit, llavors la fórmula de Bolyai diu:

$$\cot\frac{\alpha}{2} = e^{\frac{d}{k}}.$$

Aquí k és una constant universal, independent de l'elecció de l i P. Bolyai va desenvolupar la trigonometria hiperbòlica i la va aplicar a calcular àrea i volum. Per exemple, la longitud de la circumferència d'un cercle de radi r en geometria hiperbòlica ve donada per

$$\pi k\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right) = 2\pi k \sinh\frac{r}{k},$$

on k és la ja coneguda constant universal. En treballs matemàtics posteriors aquesta constant s'identifica amb el recíproc de la curvatura de l'espai. Si $k \to \infty$, obtenim com a valor límit $2\pi r$, que és la ben coneguda fórmula de la longitud de la circumferència en geometria euclidiana.

Un del teoremes més bonics de Bolyai és el següent: «els sinus dels angles d'un triangle estan en la mateixa proporció entre si que les longituds de les circumferències de radi igual als costats oposats als angles». Si anomenem els angles A, B i C i anomenem a, b i c els costats oposats i $\odot$r[6] la longitud de la circumferència de radi r, el teorema de Bolyai es pot enunciar dient:

$$\odot a : \odot b : \odot c = \sin A : \sin B : \sin C.$$

En geometria euclidiana

$$\odot r = 2\pi r,$$

i, per tant, l'anterior fórmula esdevé

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C.$$

D'altra banda, en geometria hiperbòlica tenim

$$\odot r = 2\pi k \sinh \frac{r}{k},$$

a partir de la qual obtenim

$$\sinh \frac{a}{k} : \sinh \frac{b}{k} : \sinh \frac{c}{k} = \sin A : \sin B : \sin C.$$

Ara, considerem dues rectes paral·leles a i b i prenem un punt de cadascuna: A i B. Abans hem mencionat que les rectes tenen direccions també, designem-les amb M, i N (vegeu figura 2). Suposem que l'angle $\angle MAB$ és igual a l'angle $\angle NBA$. Llavors els punts A, B es diuen *isogonals corresponents* o, breument, *punts corresponents*, (el terme és degut a Gauss), i aquest fet s'expressa amb la relació $A \simeq B$[6]. Aquesta relació és independent del cinquè postulat, pertany al reialme de la geometria absoluta, i té les propietats reflexiva, simètrica i transitiva: $A \simeq A$[6]; si $A \simeq B$, llavors $B \simeq A$; si $A \simeq B$ i $B \simeq C$, llavors $A \simeq C$. Si una relació té les anteriors propietats, es diu *relació d'equivalència*. És ben conegut que qualsevol relació d'equivalència en un conjunt dóna lloc a una subdivisió del conjunt en subconjunts disjunts. Es diuen *classes d'equivalència*.

[6]Notació de Bolyai. (N. del t.)

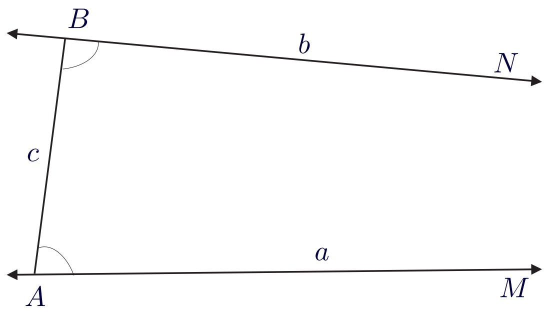

FIGURA 2. Punts corresponents.

Ara, cada classe d'equivalència, obtinguda a partir de la relació de correspondència, és un subconjunt del pla en el qual —com va demostrar Bolyai— la geometria euclidiana és vàlida. Es diuen *horocicles*.

Anàlogament es defineix *horosfera*. En una horosfera també, la geometria euclidiana és vàlida. L'horocicle i l'horosfera es poden considerar, respectivament, com un cercle i una esfera de radi infinit.

Si els angles d'un triangle són α, β, γ, llavors en geometria euclidiana $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, en geometria hiperbòlica, en canvi $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. La diferència $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ es diu *defecte del triangle*. Bolyai va demostrar que l'àrea $\triangle$ del triangle és igual a la quantitat:

$$\triangle = k^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)),$$

on k és la constant universal. Aquesta fórmula era coneguda per Lambert, però Bolyai va donar-ne una prova exacta.

Un darrer teorema interessant de Bolyai és el següent: per als catets a i b i la hipotenusa c d'un triangle rectangle (angle entre dues rectes vol dir l'angle en el punt on es tallen) tenim la fórmula

$$\cosh \frac{c}{k} = \cosh \frac{a}{k} \cosh \frac{b}{k}.$$

Si $k \to \infty$ obtenim com cas límit $c^2 = a^2 + b^2$, que és el teorema de Pitàgores.

Farkas Bolyai, algunes poques pàgines del *Tentamen*, va fer alguns comentaris de l'*Apèndix*. Entre d'altres, va donar una demostració més detallada de l'anterior pas al límit.

Finalment, hauríem de mencionar que, a l'*Apèndix*, Bolyai també s'interessa per construccions en geometria hiperbòlica.

Uns altres estudis matemàtics de János Bolyai són estudiats en profunditat pels autors següents: Pál Stäckel (1914), Lajos Dávid (1979), János Bolyai (Ferenc Kárteszi ed., 1977), Tibor Weszely (1981) i Elemér Kiss (1999). L'impacte de Bolyai sobre el desenvolupament de la geometria es tracta a l'article d'Ottó Varga (1953). L'anteriorment citat article de Milnor (1982) és la darrera recopilació de resultats de geometria hiperbòlica. La publicació comentada d'escrits no matemàtics de János Bolyai està començada i en progrés.

L'altre gran descobridor de la geometria hiperbòlica va ser el rus Lobatxevski (1793–1856). La diferència entre el treball de Bolyai i el de Lobatxevski es podria resumir així: mentre que Bolyai elabora la geometria absoluta, també, Lobatxevski proporciona una formulació més detallada de la trigonometria hiperbòlica. No hi ha motiu per a un debat sobre la prioritat. Perquè veiem alguna cosa en aquesta direcció, podem mencionar el següent.

La primera publicació de Lobatxevski sobre geometria no euclidiana es va publicar en rus a *Kazan Messenger* el 1829–1830. L'*Apèndix* de Bolyai es va publicar com a addenda el 1831, però l'any d'edició de tot el *Tentamen* és 1829. Se sap que Bolyai va elaborar la seva geometria a grans trets el 1823 i el text complet en alemany estava llest el 1826. Com que aquest darrer es va perdre i el primer és tan sols un report del descobriment en una carta, no hi ha documents escrits del descobriment de Bolyai anteriors a l'*Apèndix*. D'altra banda, es pot dir que Lobatxevski va impartir una conferència sobre aquest tema rellevant a la Universitat de Kazan el 1826, però si escrutem el títol, podem veure que el conferenciant intenta en aquell moment demostrar el cinquè postulat (Elemér Kiss, 1999).

Segons alguns autors, la geometria de Bolyai i Lobatxevski és la crítica a la concepció kantiana de l'espai; segons altres és una refutació d'això. La seva argumentació va així: «si en la nostra ment hi ha espai per a la geometria euclidiana i hiperbòlica, no és possible que el nostre concepte d'espai sigui un concepte *a priori* en nosaltres, independent de les nostres experiències amb els objectes».

Indubtablement, l'absolutització de la geometria euclidiana en la filosofia kantiana s'ha demostrat que és un camí sense sortida no tant com a conseqüència de la geometria de Bolyai i Lobatxevski com pels resultats de la física del segle XX. No obstant això, la noció de Kant que l'espai és euclidià es pot separar de les altres nocions referents a l'espai, les quals són més subtils i diferents de la que es pot llegir a l'abans esmentada opinió contrària. Kant no ignorava que es podrien formular també altres teories matemàtiques de l'espai.

Encara a l'època de Gauss, Bolyai i Lobatxevski, la filosofia kantiana es considerava un suport definitiu de la geometria euclidiana. Al contrari que Gauss, que tenia por de publicar els seus resultats pels atacs dels beocis, que eren considerats pels atenencs gent estúpida i que es dedicava al plaer Bolyai i Lobatxevski no van tenir por de fer-ho: els dos eren revolucionaris. Ells van donar a conèixer les seves conviccions científiques al món amb coratge.

Referències

[1] Benkó, S. *The confessions of János Bolyai.* Bucarest: Literary Publisher, 1968. Segona edició, Bucarest: Kriterion Publisher, 1972.

[2] Benkó, S. *Father and son (Bolyai studies).* Budapest: Magvetó Publisher, 1978. [En hongarès].

[3] Bolyai, F. *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris sublimioris, metodo intutiva, evidentiaque huic propria, introducendi.* Cum Appendice triplici I, II, Maros Vásárhely, 1832–1833.

[4] Bolyai, J. *Appendix, Scientiam Spatii absolute veram exhibendis; a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.* Cum Appendice triplici I, II, Maros Vásárhely, 1931.

[5] Bolyai, J. *Bolyai letters.* Bucarest: Kriterion Publisher, 1975 [Selecció, introducció i notes escrites per S. Benkó. En hongarès].

[6] Bolyai, J. *Appendix, The Theory of Space.* (F. Kárteszi, ed.) Amsterdam: North Holland, 1987.

[7] Bonola, R. *Non-Euclidean Geometry.* Nova York: Dover, 1911.

[8] Dávid, L. *The lifes and works of the Bolyais.* Budapest: Gondolat Publisher,

1979. [Segona edició ampliada. En hongarès].

[9] Kiss, E. *Mathematical gems from Bolyai chests*. Budapest: Academic Publ. i Typotex Publ., 1999.

[10] Lobatxevski, N. I. *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.* Berlín, 1840.

[11] Milnor, J. «Hyperbolic geometry: The first 150 years.» *Bull. Amer. Math. Soc.* (New Series), 6, p. 9-24, 1982.

[12] Stäckel, P. *Wolfgang und Johann Bolyais geometrische Untersuchungen, I-II.* Leipzig-Berlín, 1913.

[13] Varga, O. *The impact of the Bolyai-Lobatxevski geometry on the development of geometry.* Dept. Math-Phys. of the HAS, 3, p. 151-171, 1953. [En hongarès].

[14] Weszely, T. *The mathematical works of János Bolyai.* Bucarest: Kriterion Publisher, 1981.

András Prékopa
Membre de l'Acadèmia Hongaresa de Ciències

Premis i concursos

Medalles Fields

El proppassat 20 d'agost, en el decurs del Congrés Internacional de Matemàtiques celebrat a Beijin, els matemàtics Laurent Lafforgue i Vladimir Voevodsky varen rebre de mans del president de la Xina, Jiang Zemin, la Medalla Fields. El premi es coneix per Premi Nobel de Matemàtiques.

Lafforgue va ser reconegut per la seva prova de *la correspondència de Langlands per GLr sobre cossos de funcions*. En el volum de gener de 2003 la revista *Inventiones Mathematicae* dedica 241 pàgines al camp de recerca de Lafforgue.

Voevodsky va ser reconegut per desenvolupar *teories de cohomologia sobre varietats algebraiques.*

A la mateixa sessió es va concedir el Premi Nevanlinna a Madhu Sudan.

Laurent Lafforgue

Laurent Lafforgue, nascut el 6 de novembre de 1966, a Antony dans les Hauts-de-Seine (França), ha treballat en el programa de Langlands des de la seva tesi, finalitzada l'any 1994 i dirigida per Gérard Laumon. Actualment, és investigador a l'Institut d'Alts Estudis Científics (IHES) de París. Abans de rebre la Medalla Fields, Lafforgue havia rebut el premi de recerca Clay de l'any 2000.

El programa de Langlands és compost d'un seguit de conjectures que van ser formulades per Robert Langlands l'any 1967 en una carta adreçada a André Weil. En aquest escrit, Langlands proposava l'existència d'una sèrie de lligams gens evidents entre la teoria de nombres, la teoria de representacions de grups i l'anàlisi, que explicarien i generalitzarien tot de resultats que parteixen de la llei de reciprocitat quadràtica de Carl Friedrich Gauss.

Aquestes conjectures han guiat bona part de la recerca en teoria de nombres dels últims anys. Per exemple, el resultat que va demostrar Andrew Wiles el 1994, que implicava l'últim teorema de Fermat, anomenat *la conjectura de Shimura-Taniyama*, es pot interpretar com una petita part del programa de Langlands. Aquestes conjectures s'apliquen als anomenats *cossos globals*, que són de dos tipus: els *cossos de nombres*, és a dir les extensions finites del cos dels nombres racionals, i els *cossos de funcions*, extensions finites del cos de les funcions racionals sobre un cos finit. El cas dels cossos de nom-