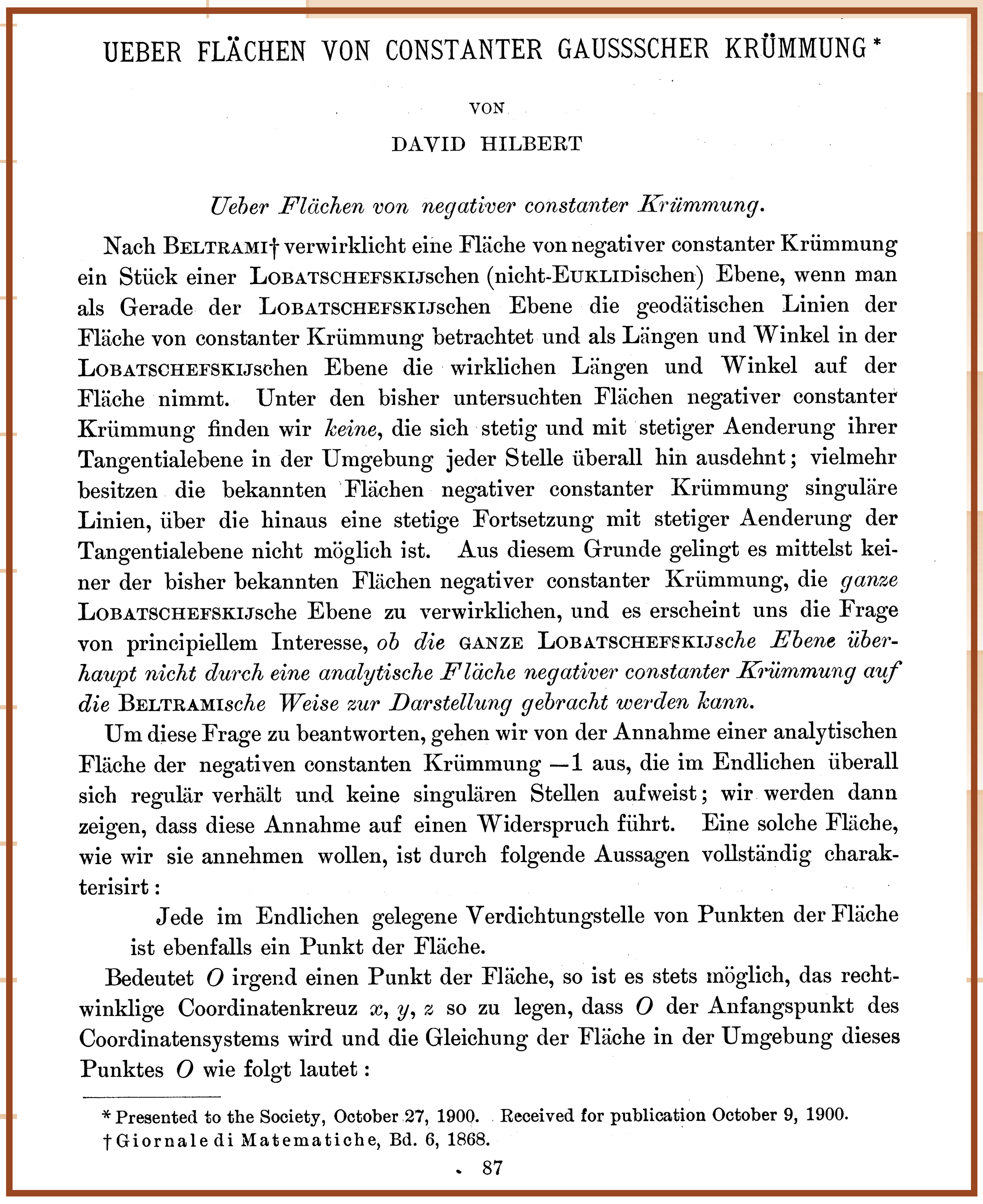
David Hilbert, 1862–1943

Teorema

No hi ha cap superfície analítica uniformement regular de curvatura constant negativa, sense singularitats.

Aquest resultat fou publicat per D. Hilbert a l'article **Ueber Flächen von constanter Gaussscher Krümmung** [Sobre superfícies amb curvatura de Gauss constant] *Trans. Amer. Math. Soc.* **2** (1901), no. 1, 87–99. del qual reproduïm la primera pàgina (http://www.jstor.org/stable/1986308).



UEBER FLÄCHEN VON CONSTANTER GAUSSSCHER KRÜMMUNG*

VON

DAVID HILBERT

Ueber Flächen von negativer constanter Krümmung.

Nach Beltrami† verwirklicht eine Fläche von negativer constanter Krümmung ein Stück einer Lobatschefskijschen (nicht-Euklidischen) Ebene, wenn man als Gerade der Lobatschefskijschen Ebene die geodätischen Linien der Fläche von constanter Krümmung betrachtet und als Längen und Winkel in der Lobatschefskijschen Ebene die wirklichen Längen und Winkel auf der Fläche nimmt. Unter den bisher untersuchten Flächen negativer constanter Krümmung finden wir *keine*, die sich stetig und mit stetiger Aenderung ihrer Tangentialebene in der Umgebung jeder Stelle überall hin ausdehnt; vielmehr besitzen die bekannten Flächen negativer constanter Krümmung singuläre Linien, über die hinaus eine stetige Fortsetzung mit stetiger Aenderung der Tangentialebene nicht möglich ist. Aus diesem Grunde gelingt es mittelst keiner der bisher bekannten Flächen negativer constanter Krümmung, die *ganze* Lobatschefskijsche Ebene zu verwirklichen, und es erscheint uns die Frage von principiellem Interesse, *ob die ganze Lobatschefskijsche Ebene überhaupt nicht durch eine analytische Fläche negativer constanter Krümmung auf die Beltramische Weise zur Darstellung gebracht werden kann.*

Um diese Frage zu beantworten, gehen wir von der Annahme einer analytischen Fläche der negativen constanten Krümmung -1 aus, die im Endlichen überall sich regulär verhält und keine singulären Stellen aufweist; wir werden dann zeigen, dass diese Annahme auf einen Widerspruch führt. Eine solche Fläche, wie wir sie annehmen wollen, ist durch folgende Aussagen vollständig charakterisirt:

Jede im Endlichen gelegene Verdichtungsstelle von Punkten der Fläche ist ebenfalls ein Punkt der Fläche.

Bedeutet O irgend einen Punkt der Fläche, so ist es stets möglich, das rechtwinklige Coordinatenkreuz x, y, z so zu legen, dass O der Anfangspunkt des Coordinatensystems wird und die Gleichung der Fläche in der Umgebung dieses Punktes O wie folgt lautet:

* Presented to the Society, October 27, 1900. Received for publication October 9, 1900.

† Giornale di Matematiche, Bd. 6, 1868.

87

Beltrami havia provat que una porció del pla de Lobatxevski (que se n'hauria de dir pla de Bolyai) es podia realitzar mitjançant una superfície de curvatura constant negativa. Però, ¿es podia fer això globalment? Com hem vist a l'enunciat del teorema anterior, la resposta fou negativa.

Això vol dir que no hi ha cap isometria entre una superfície de $\mathbf{R}^3$ (amb la mètrica heretada de l'euclidiana de $\mathbf{R}^3$) i el model de Beltrami. En particular, això ens diu que les singularitats que apareixen a la base de la pseudoesfera (superfície de curvatura constant negativa) són absolutament inevitables.

Tot i que parla de superfícies analítiques, el propi Hilbert remarca que el teorema és cert si tenim prou derivades.

Nicolas Kuiper, als articles **On C^1-isometric imbeddings, I, II**, *Indag. Math.*,**17**, (1955), 545–556, 683–689, construeix una superfície de l'espai euclidià derivable només una vegada, isomètrica al pla hiperbòlic.

Aquest resultat de Hilbert, molts anys posterior a l'època dels fundadors de la geometria hiperbòlica Lobatxevski i J. Bolyai (a l'ombra de Gauss), explica perquè aquesta geometria va ser tan difícil de descobrir: estava ben amagada.

Breu nota biogràfica

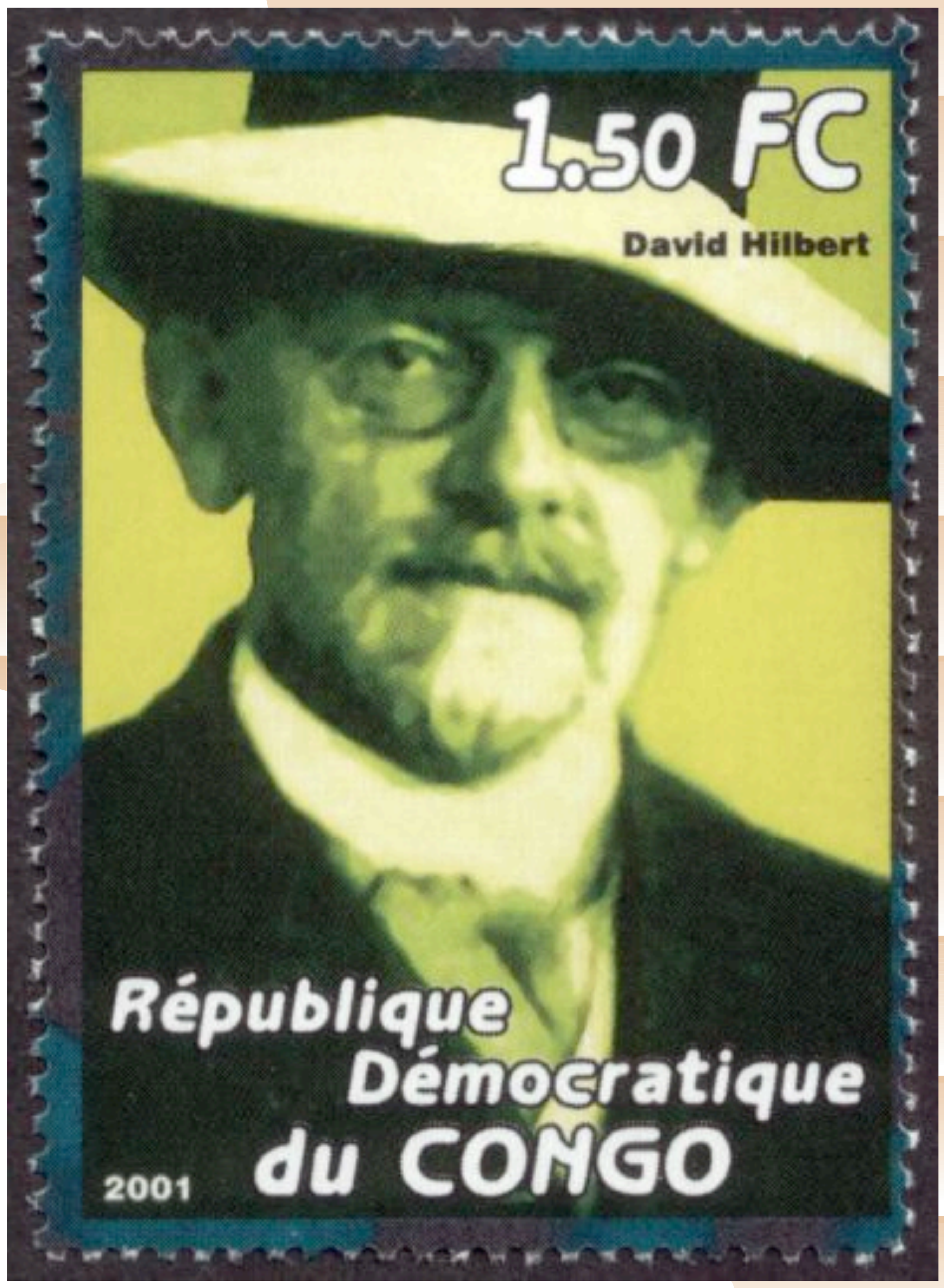
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Indexes/H.html

David Hilbert va néixer el 23 gener de 1862 a Königsberg, Prusia (avui Kaliningrad, Rússia) i va morir el 14 de febrer de 1943 a Göttingen, Alemanya.

El treball de Hilbert en geometria va ser el que més va influir en aquesta àrea després dels *Elements* d'Euclides. Un estudi sistemàtic dels axiomes d'Euclides porten Hilbert a proposar 21 nous axiomes i a analitzar el seu significat. Ho fa a l'obra *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig: B. G. Teubner. 92 S. gr. 8°. (Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen.) (1899).

Aquesta obra és la culminació del treball de molts matemàtics, especialment de M. Pasch. La principal novetat respecte de l'obra d'Euclides consisteix essencialment a considerar que, d'entrada, tan sols es tenen un parell de conjunts (en el cas de la geometria plana), els elements dels quals *no es defineixen* però que s'anomenen respectivament *punts* i *rectes*. Se suposa llavors que entre els elements d'aquests conjunts hi ha unes certes *relacions*, que *no es defineixen*, però que han de complir uns axiomes o propietats: incidència, ordre, continuïtat i congruència. Va deduint d'aquí els resultats clàssics de la geometria.

També va fer grans contribucions en moltes àrees de la matemàtica i la física.



Universitat Autònoma de Barcelona