

L. A. Santaló, 1911–2001

Teorema [Desigualtat de Blaschke-Santaló]

El volum d'un convex amb centre de simetria multiplicat pel volum del seu polar és un invariant afí i està acotat pel quadrat del volum de la bola unitat.

L'any 1948 Santaló demostra, utilitzant geometria integral, una desigualtat per a certs conjunts convexos del pla, ja coneguda des d'un altre punt de vista, pel seu mestre W. Blaschke.

Concretament troba una cota (π^2) per al producte entre l'àrea d'un convex amb centre de simetria i la mesura centre-afí de rectes que no el tallen. És la desigualtat (6.8) de la reproducció que adjuntem més avall:

$$I_m F \leq \pi^2$$

on F és l'àrea del convex K i

$$I_m = \min_{P \in K} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2}$$

on $h = h(\varphi)$ és la funció suport.

Reproduïm una de les pàgines d'aquest article, publicat justament a la revista que Beppo Levi i el propi Santaló van fundar a Rosario (Argentina).

Un invariante afín para las curvas convexas del plano, *Math. Notae* 8 (1948), 103-111.

— 110 —

y por tanto es en todo punto $\kappa > 0$; por consiguiente la curva (6.1) es convexa. La representaremos, indistintamente a ella y al recinto convexo que limita, por K^0 . Su elemento de arco vale

$$ds^0 = (x'^2 + y'^2)^{1/2} d\varphi = \frac{1}{h^3} d\varphi. \quad (6.3)$$

La longitud afín L_a^0 de K^0 es, por definición⁽⁹⁾,

$$L_a^0 = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{d\varphi}{h^2}} ds^0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2} = 2I_m. \quad (6.4)$$

Por otra parte, el área mixta de Minkowski entre K^0 y K es también

$$F(K^0, K) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h ds^0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2} = I_m. \quad (6.5)$$

Entre el área F^0 y la longitud afín L_a^0 de K^0 vale la siguiente desigualdad de Blaschke⁽¹⁰⁾

$$8\pi^2 F^0 - (L_a^0)^2 \geq 0 \quad (6.6)$$

y entre el área mixta $F(K^0, K)$ y las áreas F^0, F de dos figuras convexas vale la desigualdad de Minkowski

$$(F(K^0, K))^2 - FF^0 \geq 0. \quad (6.7)$$

Teniendo en cuenta (6.4) y (6.5), eliminando F^0 entre (6.6) y (6.7) se obtiene

$$I_m F \leq \pi^2 \quad (6.8)$$

y aplicando la desigualdad general (6.6) a K y teniendo en cuenta (6.8) resulta

(⁹) Ver. BLASCHKE, *Differentialgeometrie II*, pág. 32.
(¹⁰) W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie II*, pág. 61.

L'any 1949 generalitza aquest resultat a dimensions arbitràries obtenint la que avui dia es coneix com a desigualtat de Blaschke Santaló:

$$\text{volum}(K) \cdot \text{volum}(K^*) \leq \kappa_n^2$$

on

$$\kappa_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}$$

i

$$K^* = \{x \in E^n; \langle x, y \rangle \leq 1, \forall y \in K\}$$

Aquesta desigualtat ha donat fruit a nombrosos articles, generalitzacions, aplicacions (a les pròpies matemàtiques, però també a la tomografia, esteoreologia, etc.) i conjectures, i és un dels resultats més citats de Santaló.

Breu nota biogràfica

Lluís Santaló va néixer a Girona, el 9 d'octubre de 1911. Als setze anys marxa a estudiar a Madrid. Participa en el seminari organitzat per Julio Rey Pastor, persona que influirà decisivament en la vida de Santaló, ja que l'ajuda a aconseguir una beca per anar a Hamburg, per treballar amb el gran geometa Wilhelm Blaschke. En aquells moments Blaschke comença a estudiar les probabilitats geomètriques encetant allò que ell mateix anomenaria *Geometria Integral*.

Després de la Guerra Civil Santaló és ingressat al camp de concentració d'Argelers. Després de moltes dificultats, i gràcies a l'ajuda de Rey Pastor, s'embarcà a Bordeus cap Argentina.

Amb el suport de Rey Pastor obté una plaça a Rosario, província de Santa Fe. En aquell moment es crea l'*Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Litoral*, dirigit per Beppo Levi, i Santaló és contractat com a sotsdirector.

El 1945 es casa amb Hilda Rossi. Tenen tres filles: Maria Inés, "Tessi", Alicia i Claudia.

Reconeixements més importants

Santaló va ser investit Doctor Honoris Causa per deu Universitats; va rebre el "Premio Nacional de Cultura" d'Argentina, el 1954; el Premi "Príncipe de Asturias de Investigación Científica", l'any 1983; la Medalla Narcís Monturiol a la Ciència i a la Tecnologia de la Generalitat de Catalunya, el 1984; la Medalla de la Universitat de València, el 1993; la Creu de Sant Jordi de la Generalitat de Catalunya, el 1994. La "Encomienda de Alfonso X (El Sabio)" el 1996, etc.

L'any 2008 el CRM crea la **Lluís Santaló Visiting Position** per enfortir les relacions amb Llatinoamèrica.

