Ferran Sunyer i Balaguer, 1912-1967.

TEOREMA [Corominas-Sunyer]: Sigui $f(x)$ una funció indefinidament derivable a l'interval $[a,b]$; si per a tot $x \in [a,b]$ existeix un enter $\nu = \nu(x) \geq 0$ tal que

$$f^{(\nu)}(x) = 0,$$

llavors $f(x)$ és un polinomi.

Aquest resultat va ser anunciat als *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* l'any 1954, en una nota de la qual en reproduïm una de les pàgines. La demostració va aparèixer a l'article *Condiciones para que una función infinitamente derivable sea un polinomio* de la Revista Matemática Hispanoamericana, **4** (14) (1954), 26-43.

R.P. Boas inclou aquest teorema com a exemple d'aplicació del teorema de Baire en el seu llibre *A primer of real functions* (John Wiley and Sons, Nova York, 1960). És més, Boas manifesta que pren el teorema de Corominas-Sunyer com a fil conductor del llibre i l'organitza de manera que conté tot allò que cal per formular i demostrar el teorema.

En l'article de la Revista Matemática Hispanoamericana, Corominas i Sunyer consideren també generalitzacions del teorema en el sentit d'imposar l'anul·lació de les derivades a tots els punts tret d'un conjunt excepcional i estudien com ha de ser aquest conjunt excepcional.

Més tard B. Rodríguez-Salinas, en un article a la *Revista de la Academia de Ciencias de Madrid*, **54** (1960), 301-311, va demostrar el resultat original de Corominas i Sunyer, però substituint $f^{(\nu)}(x)$ per una expressió diferencial general. Així mateix, A. Boghossian i P. Johnson el van estendre a funcions de diverses variables (*Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **151** (1990), 17-19).

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur des conditions pour qu'une fonction infiniment dérivable soit un polymone.* Note de MM. **Ernest Corominas** et **Ferran Sunyer I Balaguer**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

On généralise le théorème de l'Analyse d'après lequel une fonction, dont l'une des dérivées est identiquement nulle, est un polynome.

Les théorèmes dont il est question dans cette Note sont des applications de la théorie topologique des ensembles parfaits d'après Baire.

Nous démontrons d'abord le théorème suivant :

Soit $f(x)$ une fonction infiniment dérivable dans le segment $[a, b]$, si pour tout $x \in [a, b]$, il existe un entier $\nu = \nu(x) \geqq 0$ (d'ailleurs variable) tel que l'on ait

$$f^{(\nu)}(x) = 0, \tag{α_1}$$

$f(x)$ est un polynome.

Dans le cas où l'on prend $\nu(x)$ constant dans $[a, b]$ nous retombons sur un théorème classique de l'Analyse.

Il est aisé de donner des contre-exemples qui montrent que le théorème est faux dans le cas où l'on ne suppose plus l'existence de toutes les dérivées de $f(x)$ dans $[a, b]$. Néanmoins, si $\nu(x)$ est bornée dans $[a, b]$, soit $0 \leqq \nu(x) \leqq N$, et si l'on admet l'existence des dérivées jusqu'à l'ordre N en tout point x de $[a, b]$ [et non pas seulement l'existence jusqu'à l'ordre de $\nu(x)$ en chaque point du segment], $f(x)$ est encore un polynome et, par surcroît, son degré est $\leqq N$.

On comprend vite qu'il n'est pas essentiel de faire l'hypothèse (α_1) dans tous les points de $[a, b]$ pour que $f(x)$ soit un polynome. C'est ainsi que nous avons démontré le théorème qui permet de trancher complètement cette question :

Soit $f(x)$ une fonction infiniment dérivable dans $[a, b]$, si en tout point $x \in L \subset [a, b]$, il existe un entier $\nu = \nu(x) \geqq 0$ tel que

$$f^{(\nu)}(x) = 0,$$

$f(x)$ peut ne pas être un polynome si, et seulement si, l'ensemble complémentaire de L contient un sous-ensemble parfait.

BREU NOTA BIOGRÀFICA

Ferran Sunyer i Balaguer va nèixer a Figueres l'any 1912, amb una discapacitat física molt severa i va ser totalment dependent dels altres al llarg de la seva vida. Autodidacte absolut, va publicar els seus articles més reconeguts sense ser ni llicenciat ni batxiller. Tota la informació li venia dels llibres que tenia al seu abast, del seu amic el professor Ricardo San Juan, de Madrid, i dels matemàtics de l'escola francesa amb els quals va mantenir contacte.

L'any 1938 va comunicar els seus primers resultats al professor Jacques Hadamard de l'Acadèmia de Ciències de París, que va publicar un dels seus treballs als Comptes Rendus. A partir d'aquest moment, Ferran Sunyer va mantenir un intercanvi regular amb els analistes francesos, especialment amb Szolem Mandelbrojt, i començà a publicar regularment. La seva obra matemàtica se situa en la teoria clàssica de les funcions analítiques d'una variable complexa. Els resultats més significatius de Sunyer i Balaguer tenen a veure amb les funcions enteres, les funcions meromorfes i les funcions analítiques definides per sèries de Dirichlet, a més del seu resultat més conegut sobre funcions diferenciables d'una variable real, fruit de la seva col·laboració amb Ernest Corominas.

Malgrat el reconeixement de què foren objecte els seus mèrits, li va ser molt difícil assolir la posició social i professional que li correspondria pel seu treball. No va ser fins divuit dies abans de la seva mort que va obtenir un nomenament com a investigador científic del Consell Superior d'Investigacions Científiques.

Reconeixements més importants

Premi Agell, de l'Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona (1946); Premi Prat de la Riba, de l'Institut d'Estudis Catalans (1948); Premi de l'Acadèmia de Ciències de Saragossa (1950); dos premis, el Torres Quevedo (1952) i el Francisco Franco (1956), del Consell Superior d'Investigacions Científiques; Premi de l'Acadèmia de Ciències de Madrid (1954 i 1957) i el Premi Martí d'Ardenya, de l'Institut d'Estudis Catalans (1966).