EL PROBLEMA DE L'ONCLE GABRIEL

EL SEU NEBOT

RESUM. En aquesta nota es comenta el perquè d'un dels problemes preferits de Gabriel Costa. Escrivia el número 12345679 i et preguntava a continuació: quin número et fa més ràbia (de 1 al 9). Si deies 3 et feia multiplicar l'anterior número per 27, si deies 5 per 45 (el número que tu deies multiplicat per 9, però això ell no t'ho deia!!). Al fer aquesta multiplicació tenies que anar escrivint com resultat el número que et feia més ràbia. Per exemple $12345679 \times 27 = 333333333$, $12345679 \times 45 = 555555555$.

1. Introducció

El fet matemàtic que hi ha darrera el problema del Gabriel és el següent resultat. Recordem abans que un número es diu divisible per 9 si el reste de dividir aquest número per 9 és zero. Per exemple 18, 27, 45, 999, són divisibles per 9 però 13, 47, 70 no ho són.

Teorema 1.1. *Un número és divisible per* 9 *si i només si la suma de les seves xifres és múltiple de* 9.

Demostració. Quan escrivim per exemple el número 4865, com que escrivim en base 10, ens referim al número

$$4 \times 1000 + 8 \times 100 + 6 \times 10 + 5.$$

Llavors

$$\frac{4865}{9} = 4 \times \frac{1000}{9} + 8 \times \frac{100}{9} + 6 \times \frac{10}{9} + 5 \times \frac{1}{9}$$

Escriurem $\dot{9}$ per denotar un múltiple qualsevol de 9. Així $\dot{9}$ tant pot denotar 9×2, 9×3, 9×0 com 9×456.

Com que

$$\begin{aligned} \frac{1000}{9} &= \dot{9} + 1 \\ \frac{100}{9} &= \dot{9} + 1 \\ \frac{10}{9} &= \dot{9} + 1 \\ \frac{1}{9} &= \dot{9} + 1 \end{aligned}$$

l'anterior fórmula s'escriu

$$\frac{4865}{9} = 4(\dot{9}+1) + 8(\dot{9}+1) + 6(\dot{9}+1) + 5(\dot{9}+1)$$

Però la suma de múltiples de 9 és múltiple de 9 de manera que tenim

$$\frac{4865}{9} = \dot{9} + (4+8+6+5)$$

I per tant 4865 és divisible per 9 si la suma de les seves xifres $(4+8+6+5)$ és múltiple de 9.

L'argument fet per al numero 4865 es totalment general i el teorema queda demostrat.

□

Corol·lari 1.2. *El número més petit, format només per uns, divisible per 9 és* 111.111.111.

Demostració. Si comencem per 11 veiem que no es divisible per 9 perquè $1+1=2$ que no és múltiple de 9. Anàlogament 111 no es divisible per 9 perquè $1+1+1=3$ que no és múltiple de 9. Tampoc 1111 es divisible per 9 perquè $1+1+1+1=4$ que no és múltiple de 9. Així ja es veu que hem d'arribar a tenir nou uns.

□

Corol·lari 1.3. *En dividir* 111.111.111 *per* 9 *dóna 12345679 com quocient i reste zero.*

Demostració. Es fa la divisió a mà o amb qualsevol calculadora.

□

Dit d'una altra manera,

$$12345679 \times 9 = 111111111$$

i clarament si ara multipliquem 111111111 per 5 obtenim nou cincs, si multipliquem per 7 obtenim nou sets etc.

Per tant

$$12345679 \times 9 \times 5 = 555555555$$

de manera que si volem obtenir *cincs* hem de multiplicar 12345679 per 9 i per 5. Això acaba l'explicació que buscàvem.

2. Variacions proposades per Oriol Reventós

Vist que el que necessitem per jugar al joc anterior és un numero format per només *uns* podem fer el següent:

Com que $37 \times 3 = 111$ si volem obtenir només *cincs* hem de fer

$$37 \times 3 \times 5 = 111 \times 5 = 555$$

Per tant si volem obtenir només *cincs* fixem a la calculadora el número " màgic" 37 i multipliquem per 15 (5×3), si volem *sets* multipliquem el número " màgic" 37 per 21 (7×3). És a dir, pel numero que vulguem obtenir multiplicat per 3.