La raó d’or

AGUSTÍ REVENTÓS

13 maig 2005

Biotecnologia

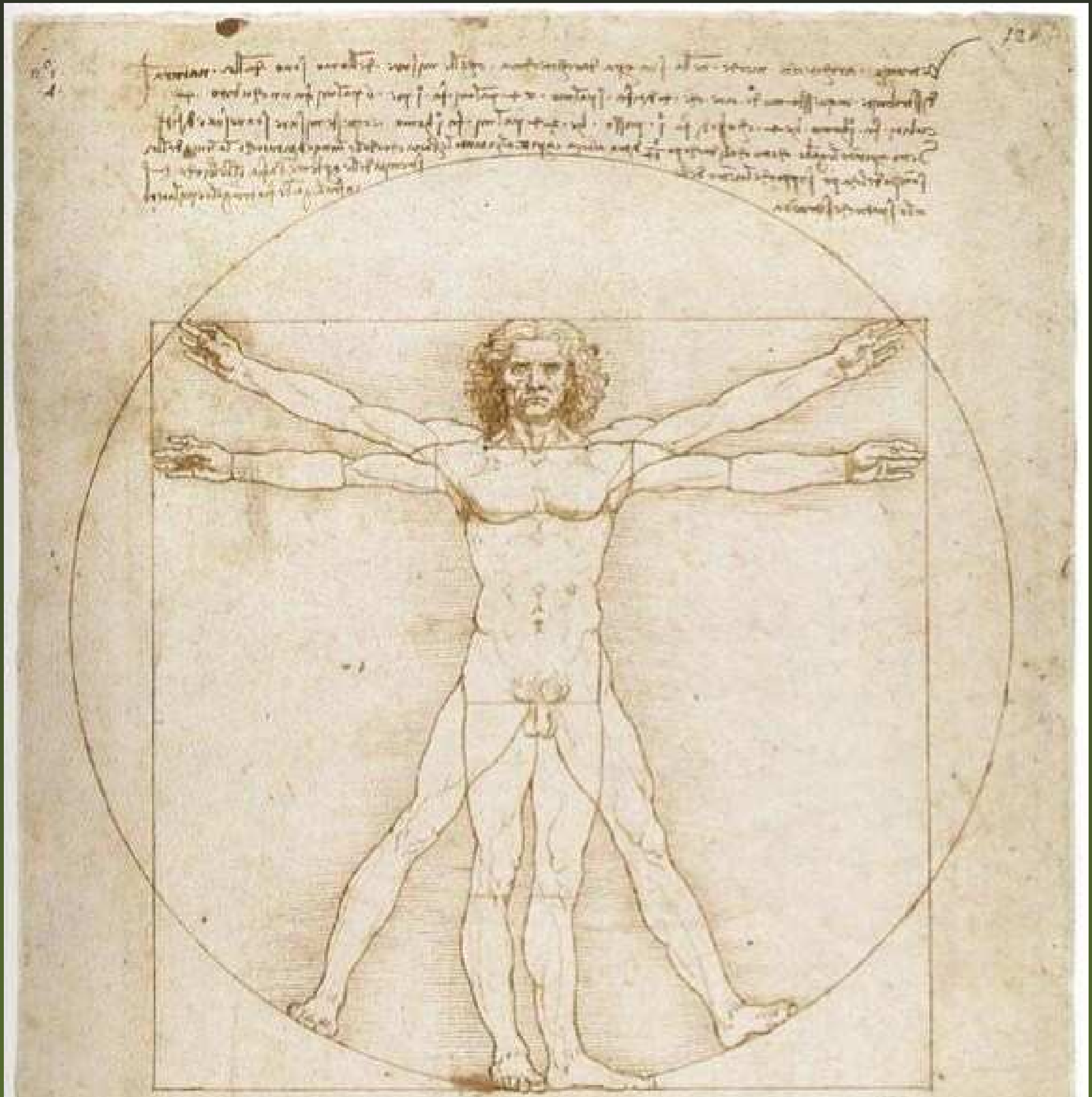
Raó d'or

- Divina Proporció
- $\Phi = 1,628\ldots$ $\qquad\Phi^{-1} = 0,628\ldots$
- $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- $\Phi^2 = \Phi + 1$

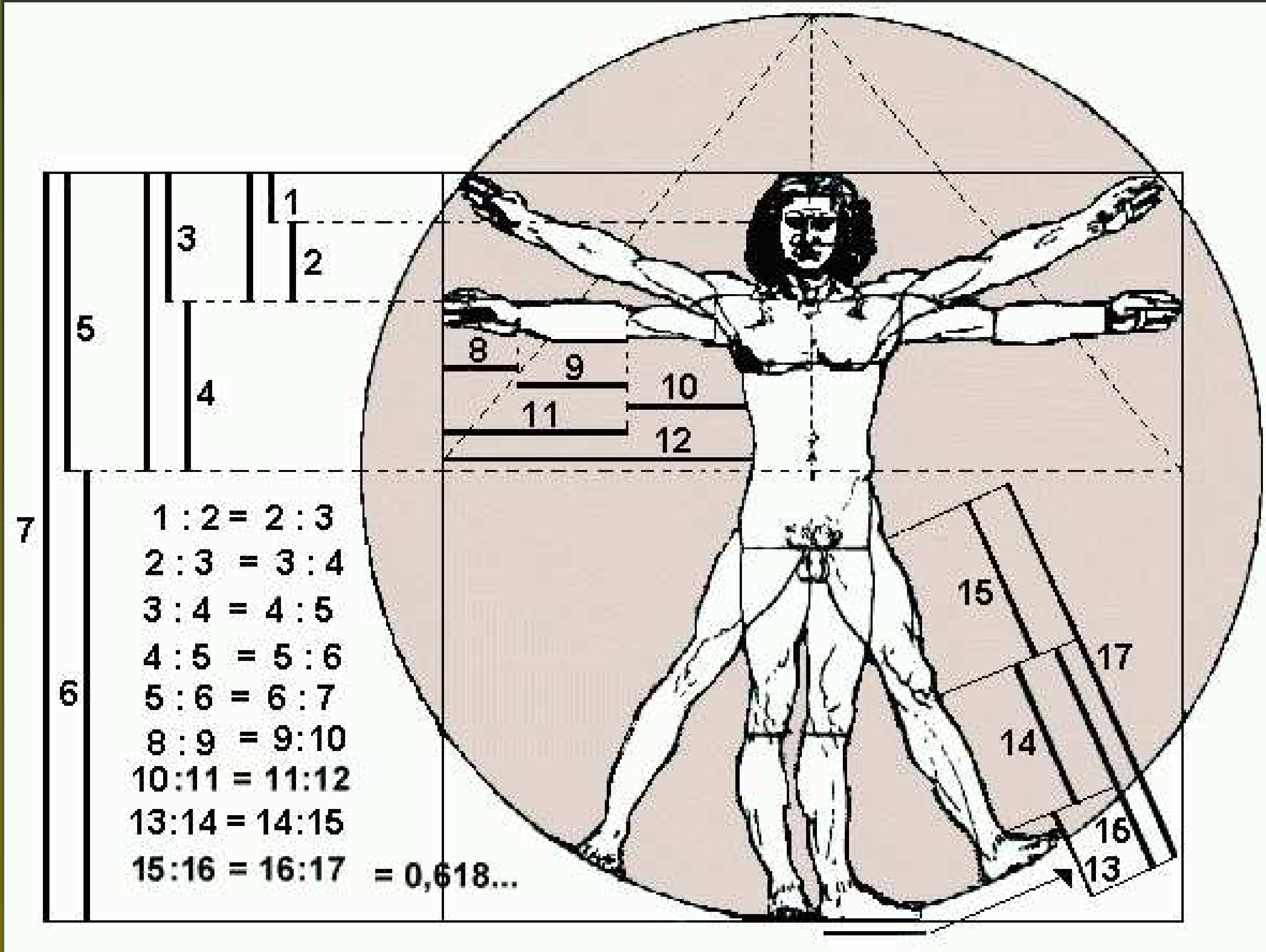
Partenó

Partenó

Home de Vitrubi

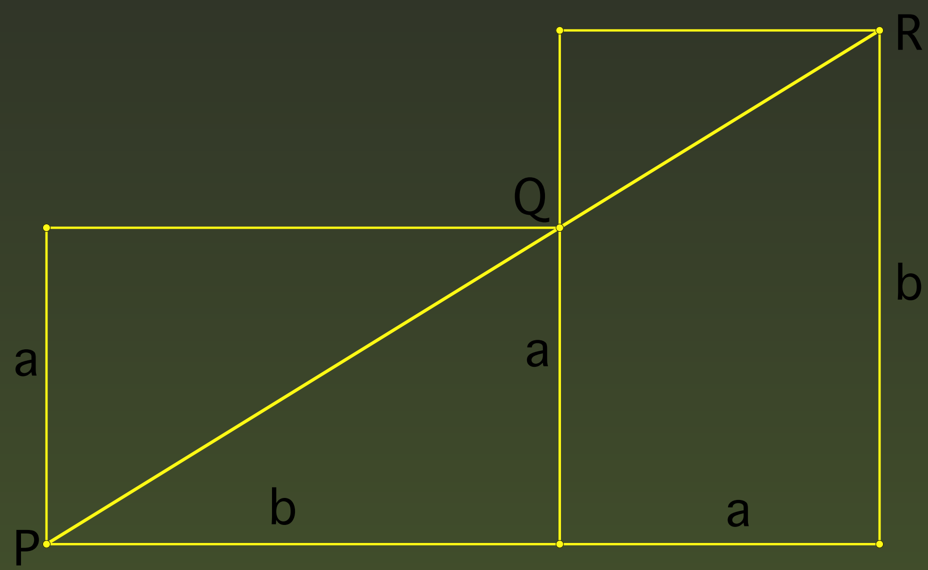


Home de Vitrubi



Marc Vitrubi Pol·lió

Targes de crèdit



$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}$$

Targes de crèdit

- P, Q, R alineats $\Leftrightarrow$

$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}$$

- Equivalentment

$$\Phi = \Phi^{-1} + 1$$

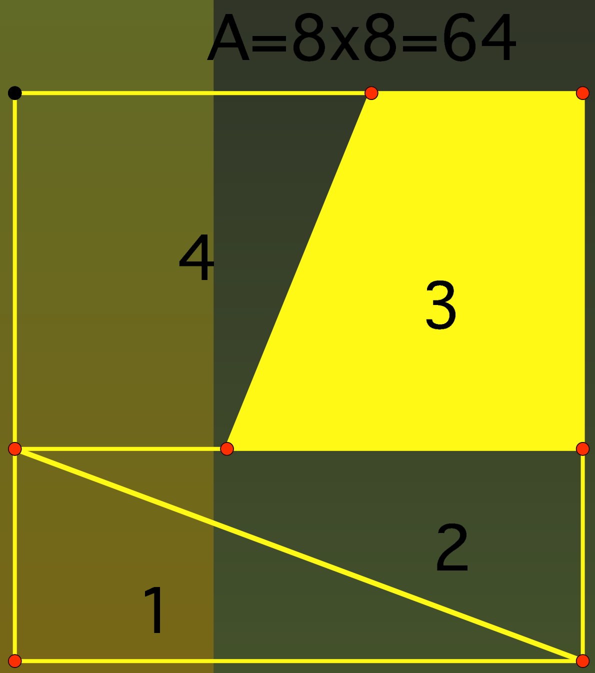
amb $\Phi = b/a$.

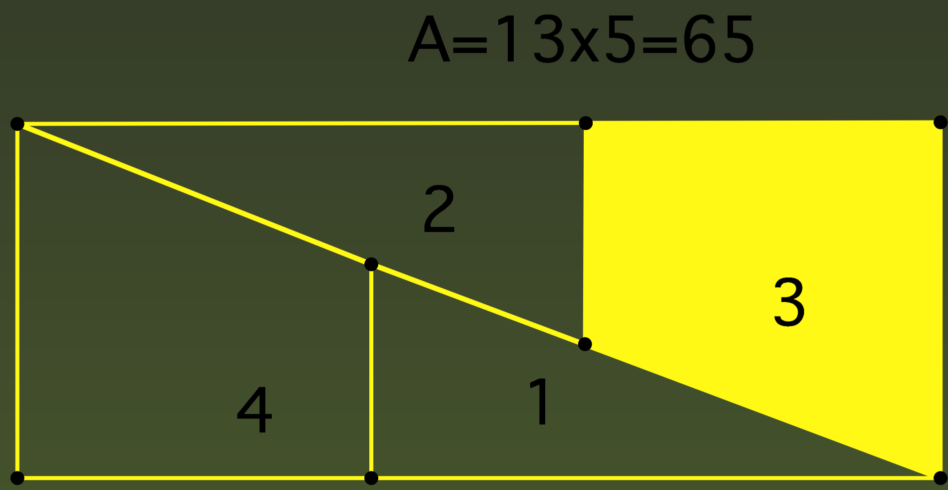
- Per tant Φ és la raó àuria.

Altres maneres d'escriure Φ

- $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}$
- $\Phi = 2\cos\frac{\pi}{5} = 2\cos 36^\circ$
- $\Phi = \frac{13}{8} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}}$
- $\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$

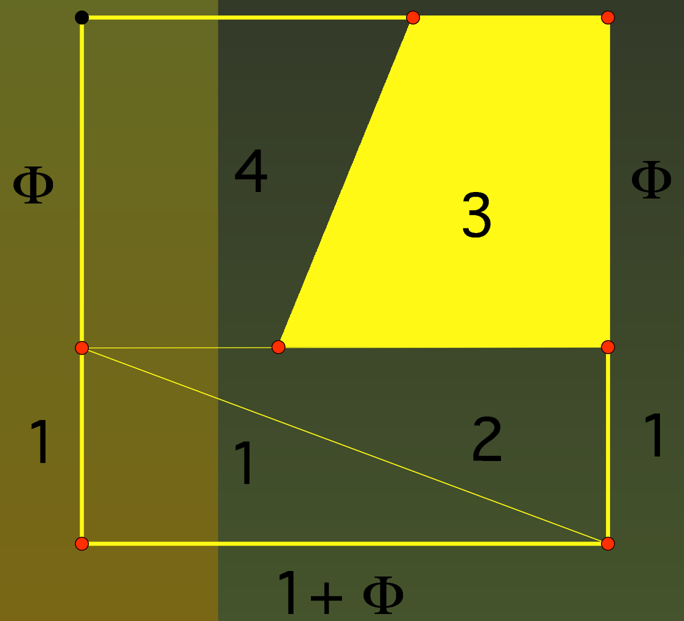
Un joc



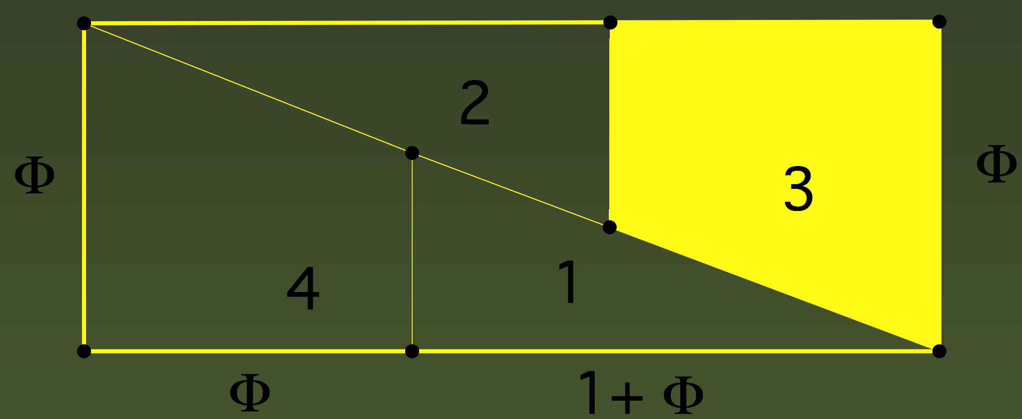


No fem trampes

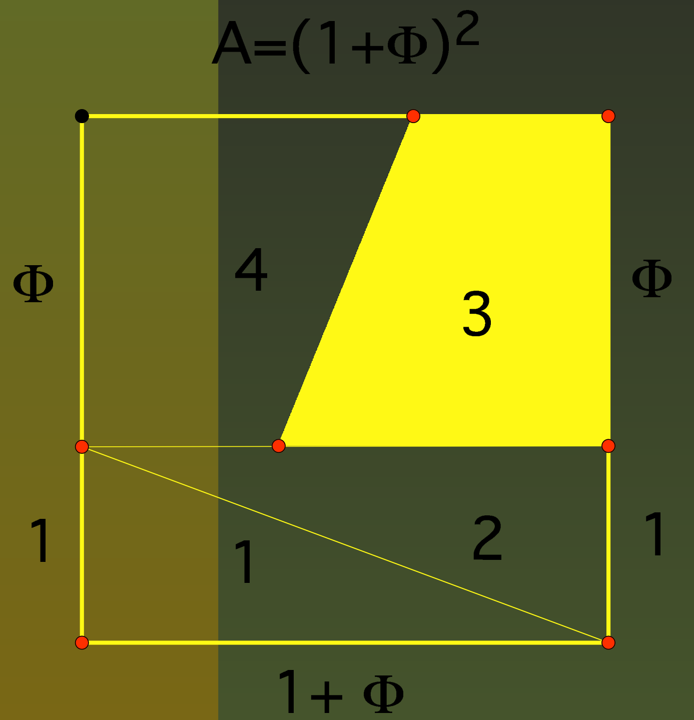
$A=(1+\Phi)^2$

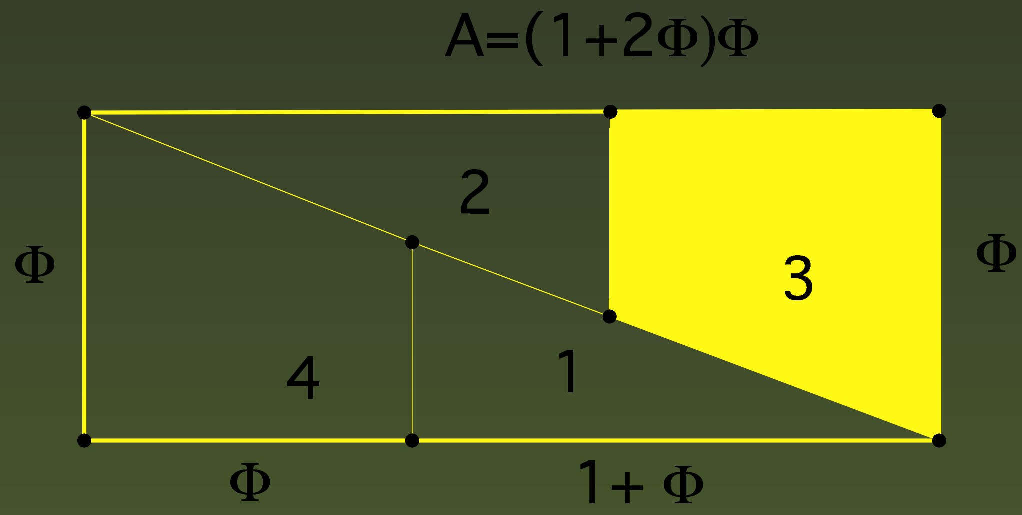


$A=(1+2\Phi)\Phi$



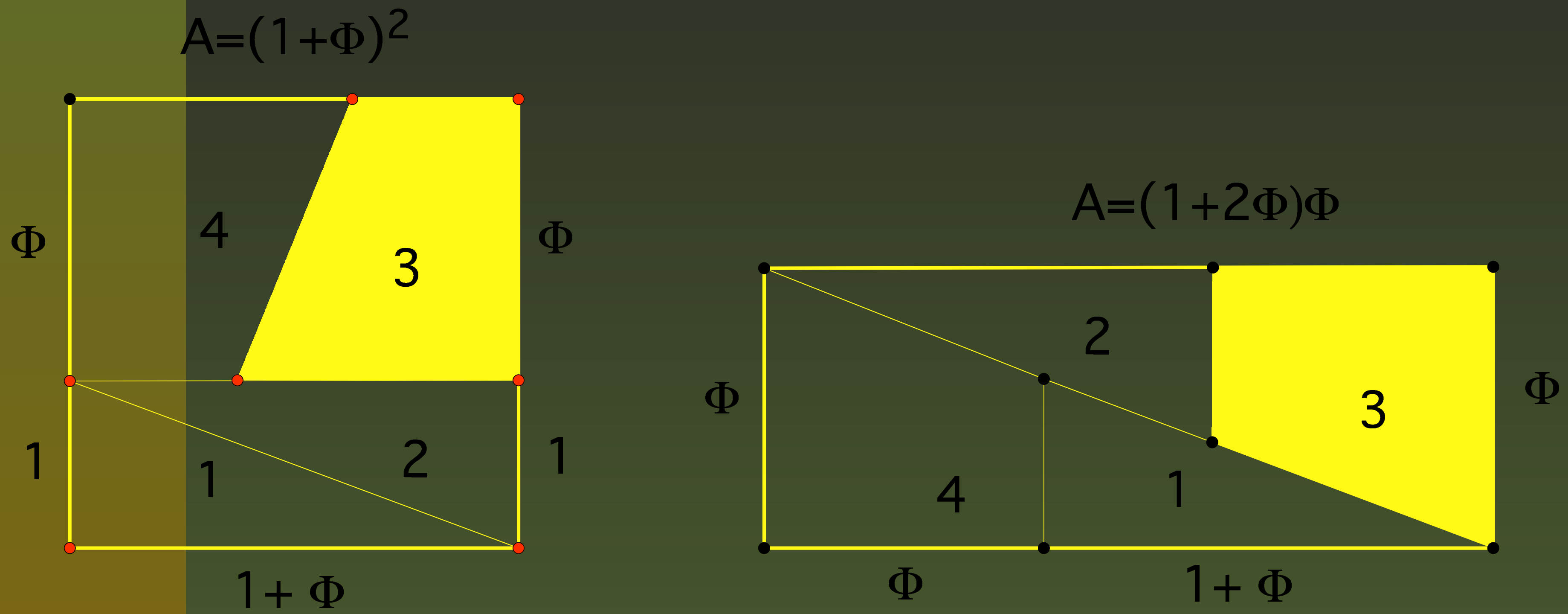
No fem trampes





$$(1+\Phi)^2 = (1+2\Phi)\Phi$$

No fem trampes



$$(1+\Phi)^2 = (1+2\Phi)\Phi \Leftrightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Successió de Fibonacci

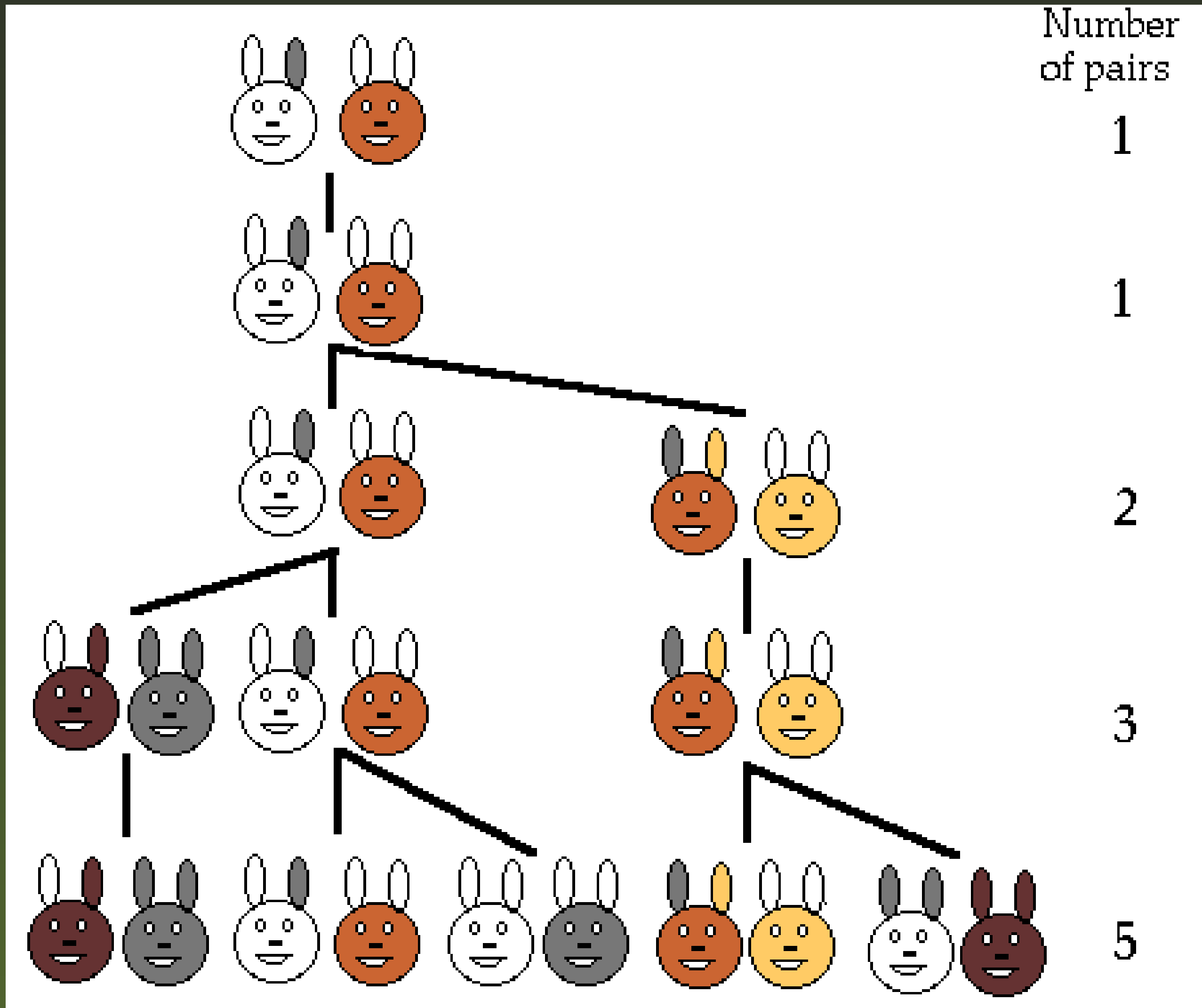
Fibonacci

- Leonardo Pisano (Fibonacci) 1202
- Una parella de conills adults (mascle i femella) produeixen 2 cries cada mes (mascle i femella). Els recent nascuts es fan adults en dos mesos i passen doncs a produir 2 cries cada mes.
- Quantes parelles de conills tindrem cada mes?

Conills

mesos	adultes	joves	total parelles
1	1	1	2
2	1	2	3
3	3	3	5
4	3	5	8
5	5	8	13

Conills



Conills

- $F_n =$ parelles de conills adults el mes n.
- $F_n =$
  $F_{n-1} +$ parelles de conills d'un mes el mes $n - 1$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Fibonacci i raó àuria

- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$

Fibonacci i raó àuria

- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$
- $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, \ldots$

Fibonacci i raó àuria

- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$
- $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, \ldots$
- En el terme general apareix la raó àuria Φ.

Fibonacci i raó àuria

- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$
- $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, \ldots$
- En el terme general apareix la raó àuria Φ.
- $a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Fibonacci i raó àuria

- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$
- $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, \ldots$
- En el terme general apareix la raó àuria Φ.
- $a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- $a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\Phi\right)^{-n} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\Phi\right)^n$

Terme general

- Progressions geomètriques de Fibonacci: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ amb $F_n = ar^n$.
- Implica $r^2 = r + 1$. *La raó d'una progressió geomètrica de Fibonacci és Φ o Φ^{-1}.*
- Per a tot a, b la successió $a\Phi^n + b\Phi^n$ és de Fibonacci.
- Els dos primers termes la determinen: tota Fibonacci és d'aquesta forma.
- Imposem $F_0 = F_1 = 1$ i trobem $a = \Phi/sqrt5$, $b = \Phi^{-1}/\sqrt{5}$ que és la fórmula de Binet.

Fibonacci i raó àuria

- Observem $3/2 = 1.5$, $8/5 = 1.6$, $13/8 = 1.625$, $21/13 = 1,66..$
- Es compleix que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi$$

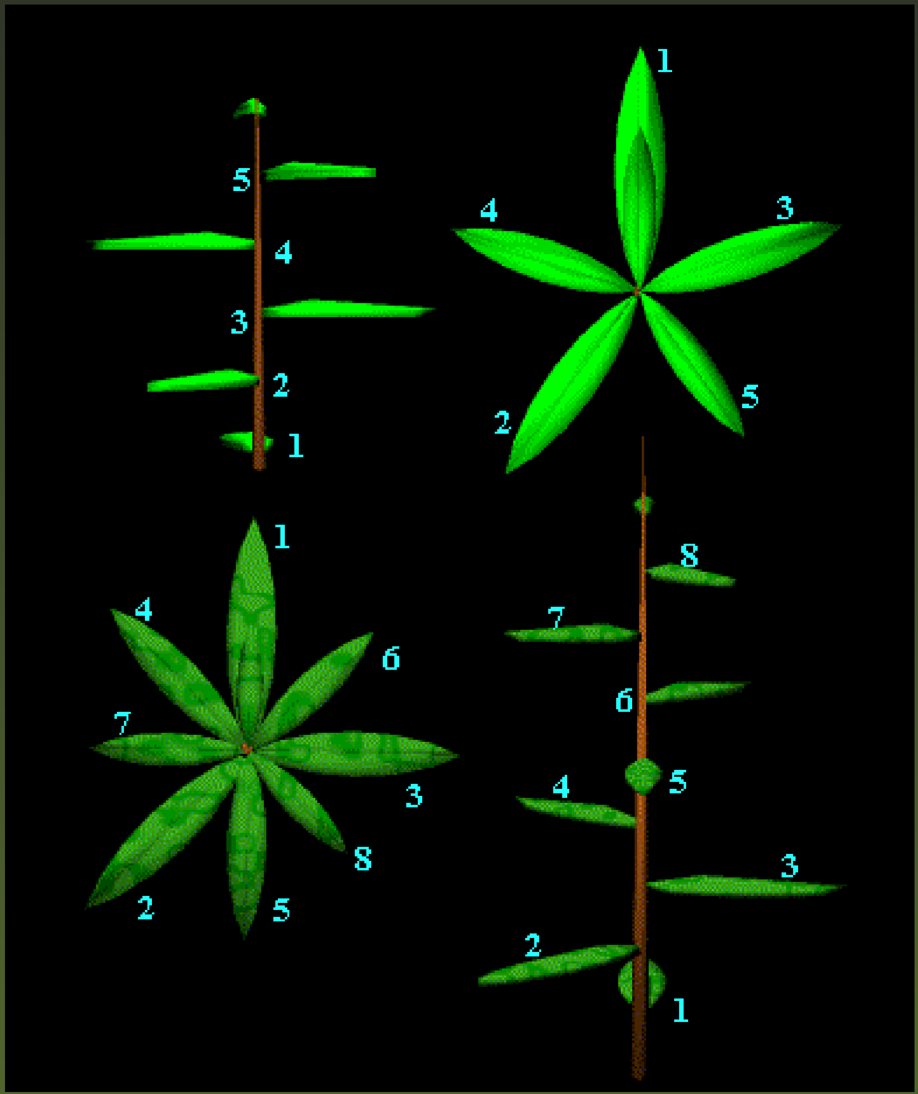
Fibonacci

- De fet, per a cada parella de nombres a_0, a_1, tenim una successió de Fibonacci.
- Si $a_0 = 1$ i $a_1 = \Phi$ la successió de Fibonacci és una progressió geomètrica de raó Φ:

$$1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \ldots$$

Filotaxia

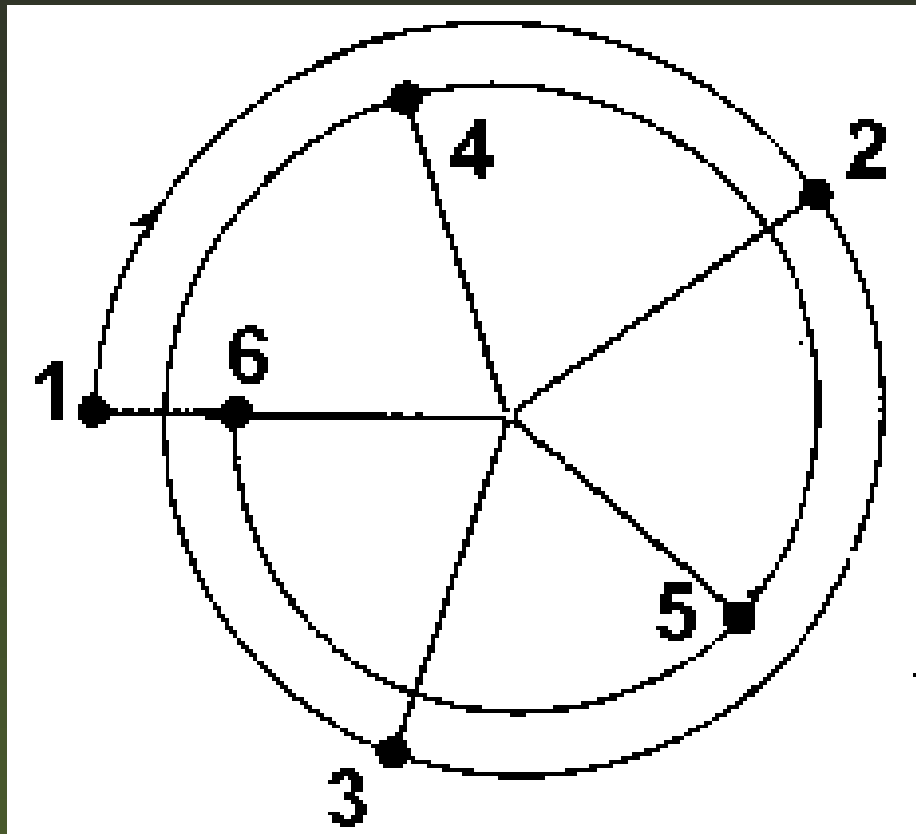
Filotaxia



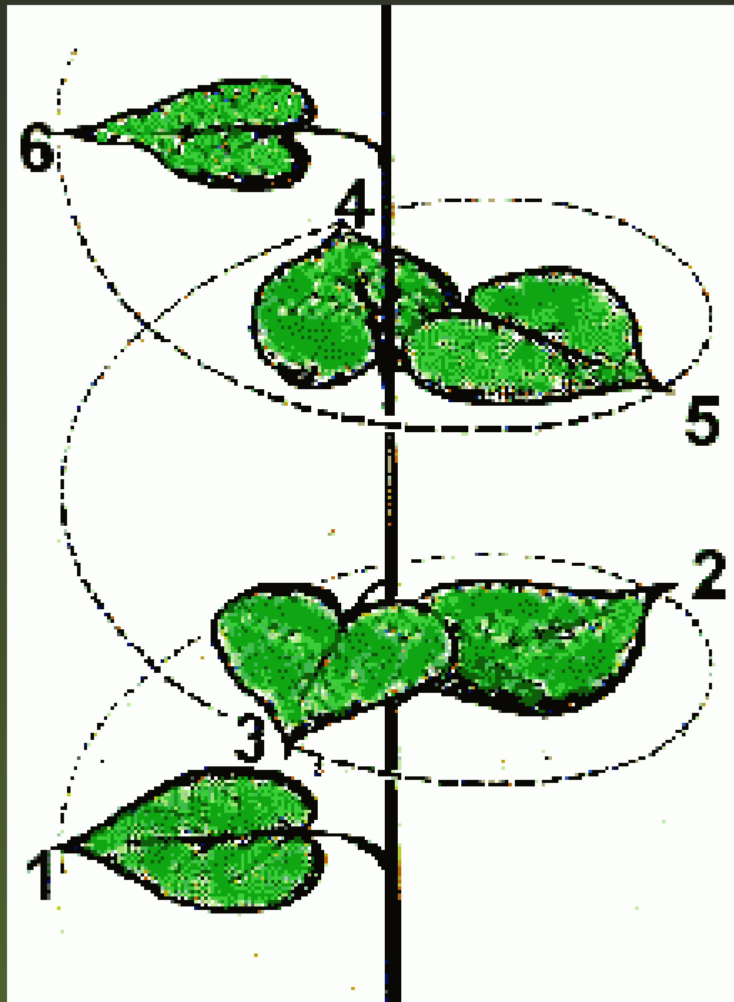
Filotaxia

- Suposem una planta que treu fulles en model helicoidal formant un mateix angle amb l'anterior.
- Quan tenim dues fulles una sobre l'altre diem que tenim un període.
- $m =$ nombre de voltes d'un període. $n =$ nombre de fulles d'un període.
- Si l'angle es $144°$, per arribar a un nombre sencer de voltes ha de ser $144 \times 5 = 720$, que son $m = 2$ voltes i apareixen $n = 5$ fulles.

Filotaxia



Filotaxia

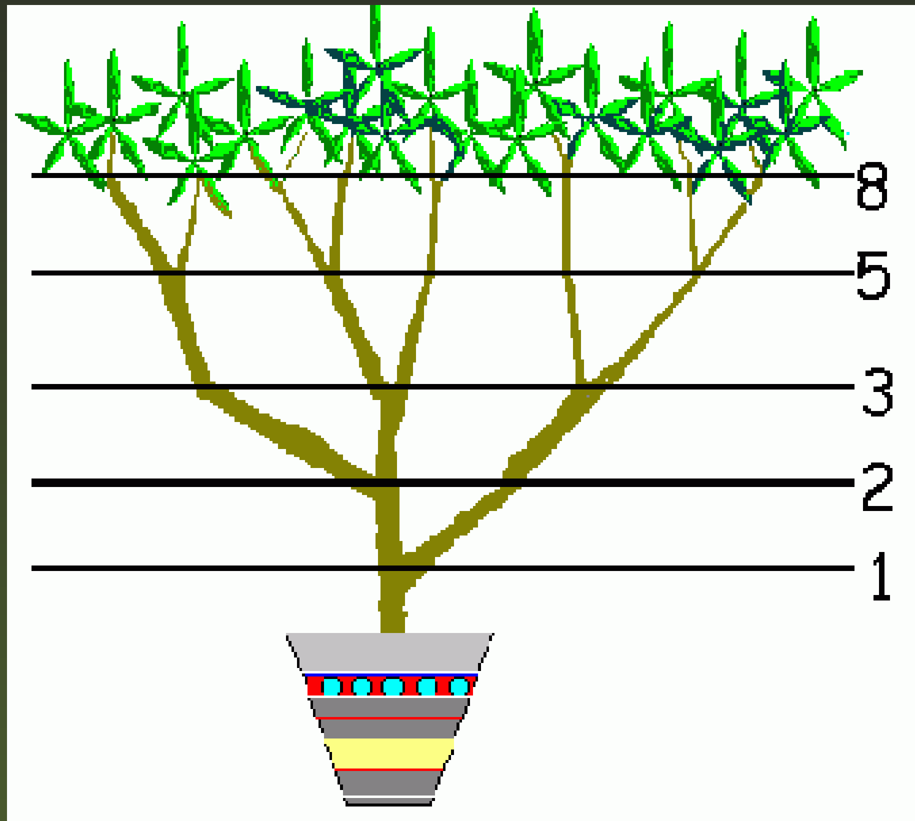


Filotaxia

$m = 1$	$n = 2$	oms i plantes bulboses
$m = 1$	$n = 3$	alisos, abedul, juncies
$m = 2$	$n = 5$	salce, rosers, fruits amb os
$m = 8$	$n = 21$	abets i pins
$m = 13$	$n = 34$	Escames de les pinyes. Pinus Laricio

- No es pot explicar per l'atzar.
- Màxima exposició a la llum de cada fulla sense tapar les altres.

Filotaxia

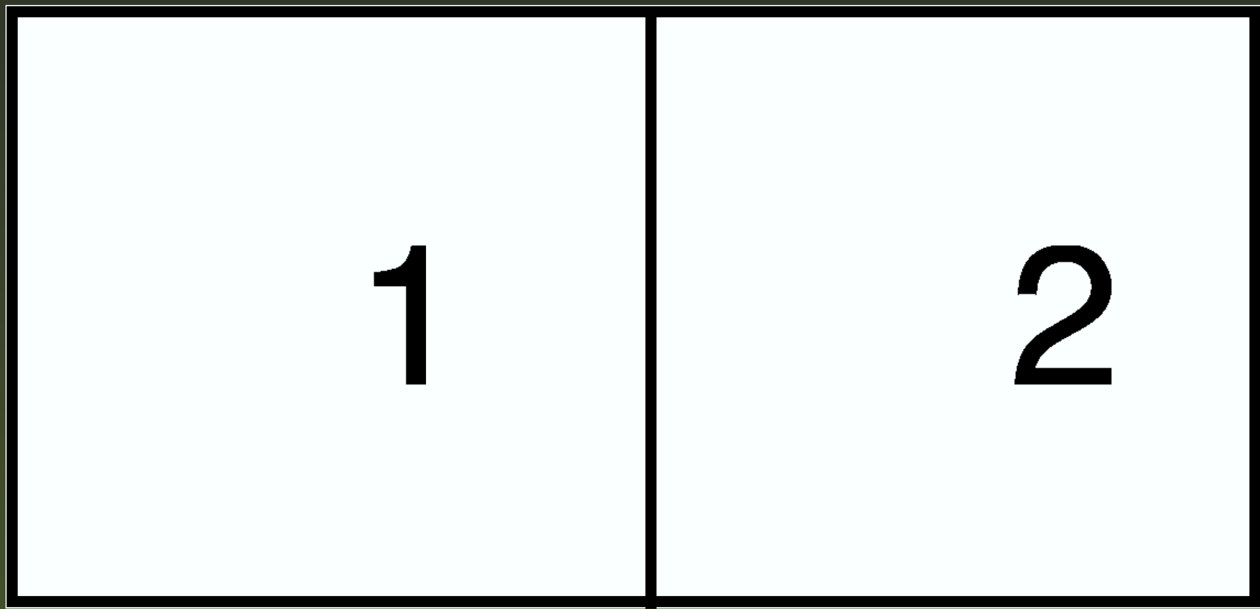


Espiral

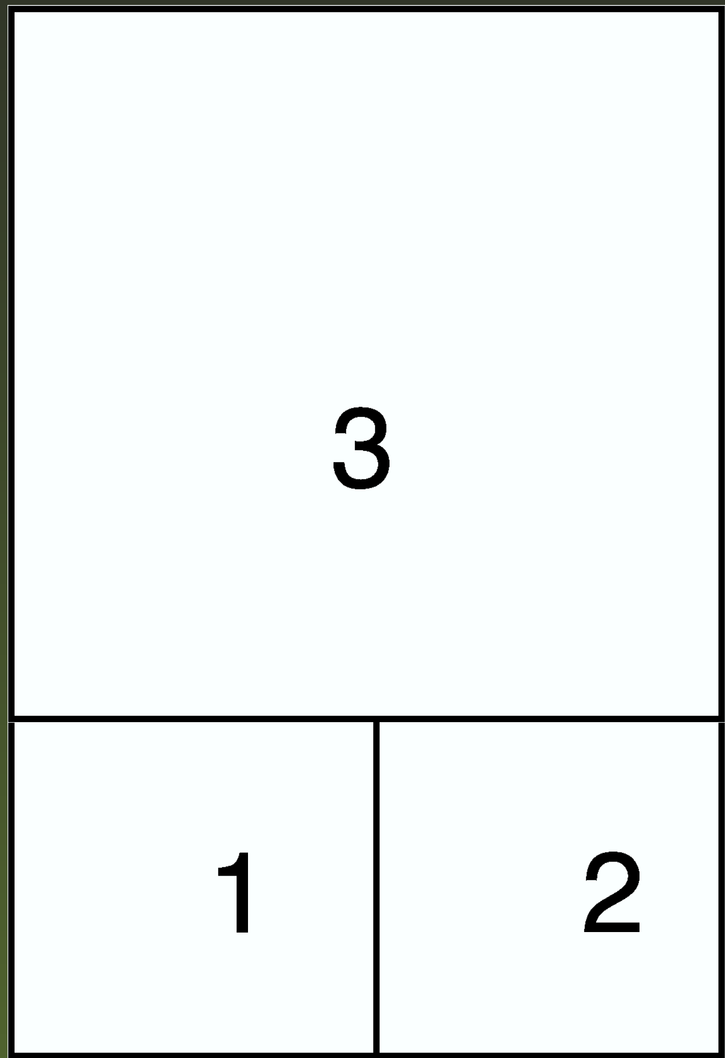
Espiral

- Prenem dos quadrats de costat 1 amb costat comú.
- Prenem un quadrat de costat $2 = 1 + 1$
- Prenem un quadrat de costat $3 = 2 + 1$
- Prenem un quadrat de costat $5 = 3 + 2$

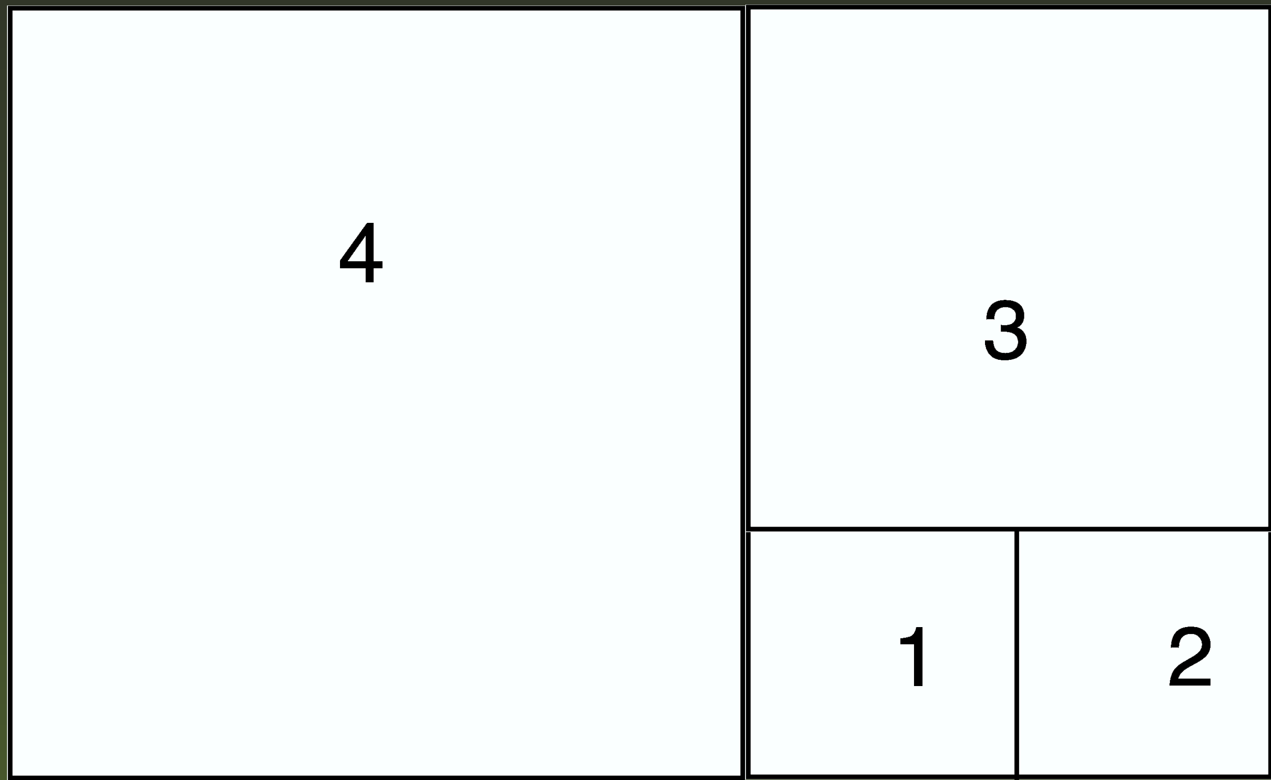
Espiral



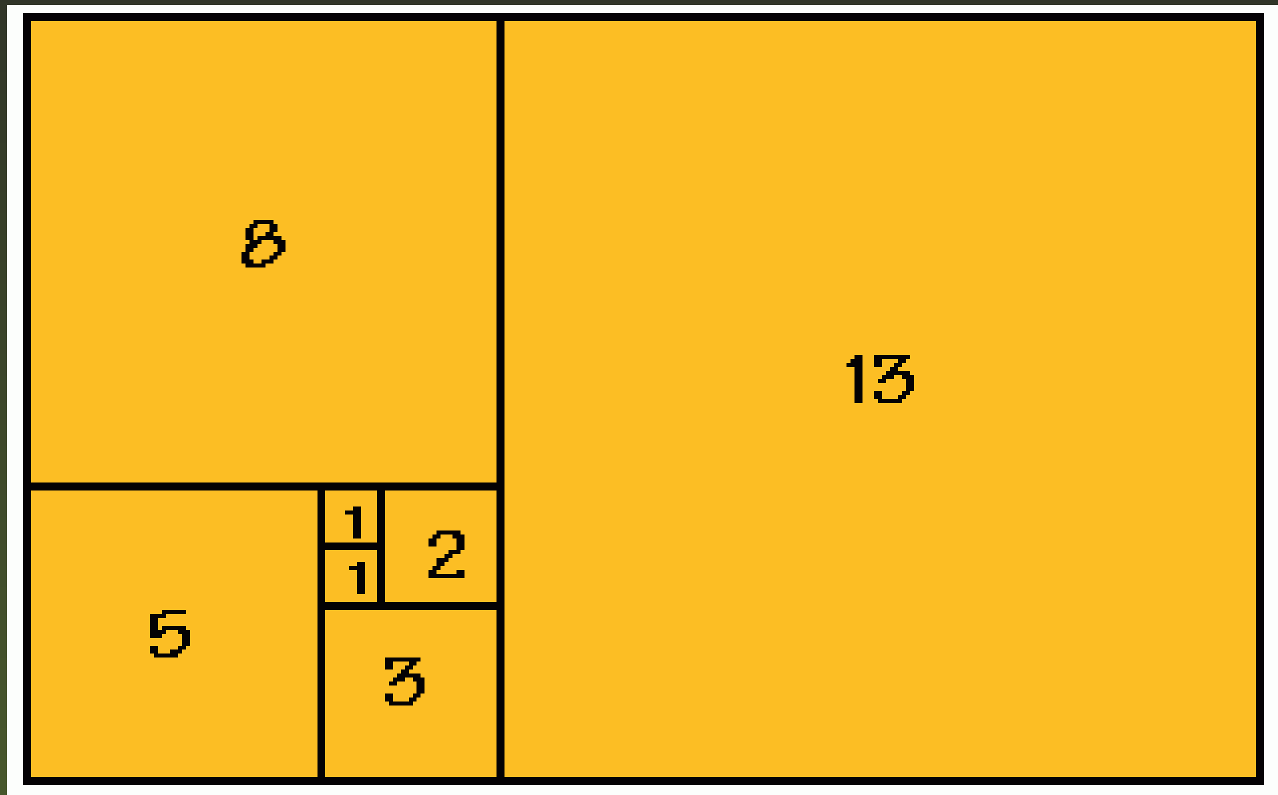
Espiral



Espiral



Espiral



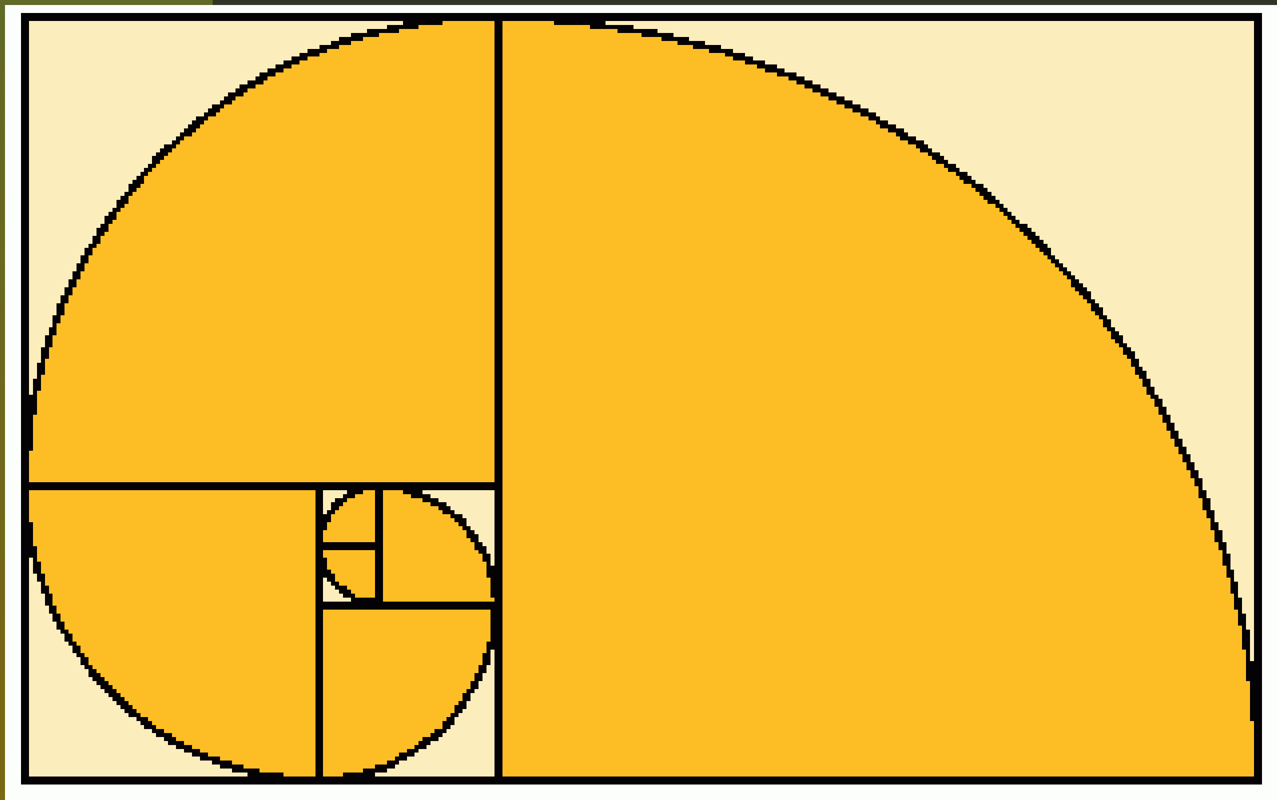
- Longitud dels costats dels quadrats.

Espiral

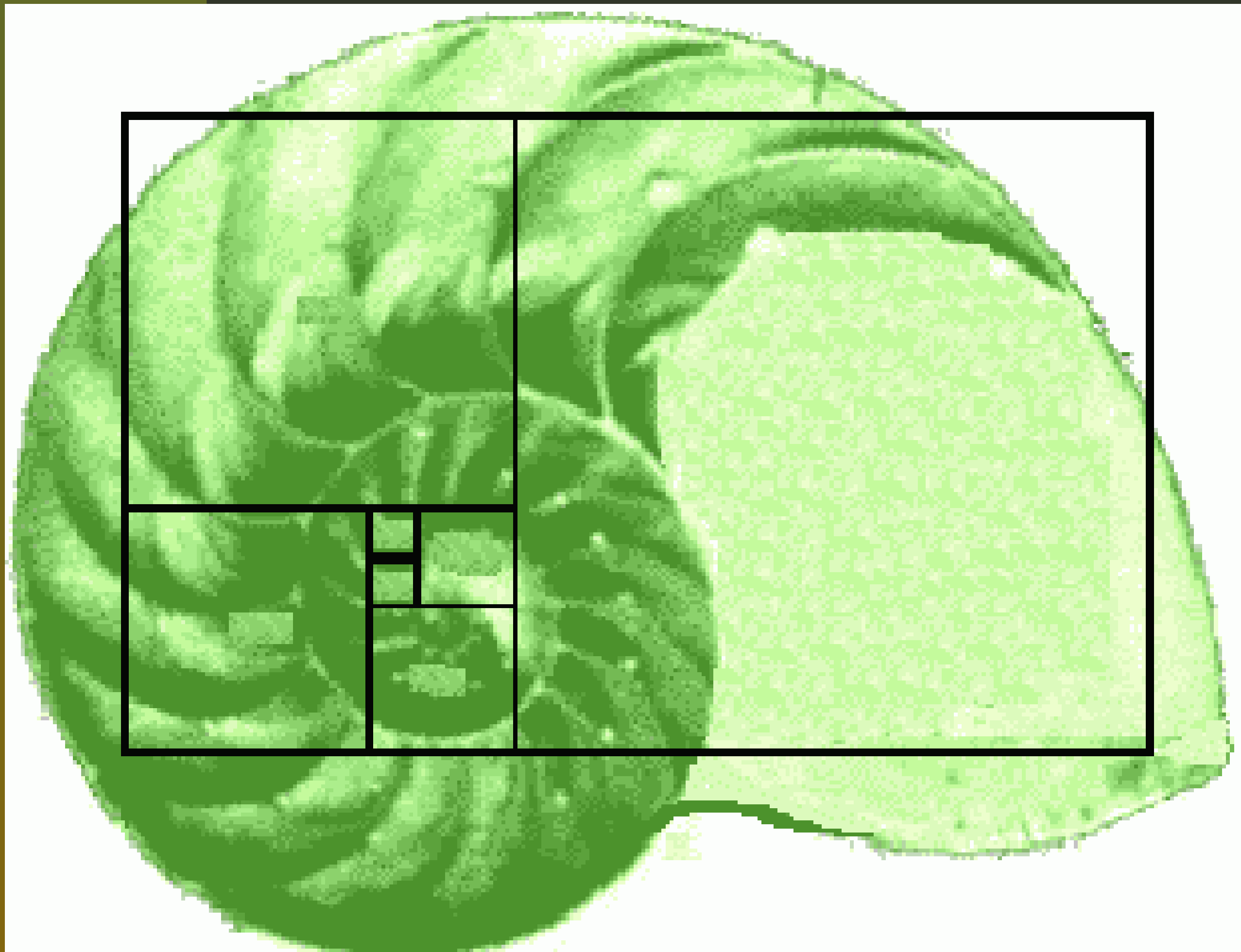
- El procés iteratiu ens acosta a un rectangle d'or.

$$\frac{Llargada}{Amplada} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_{n-1} + F_{n-2}} \rightarrow \frac{\Phi + 1}{1 + \Phi^{-1}} = \Phi$$

Espiral

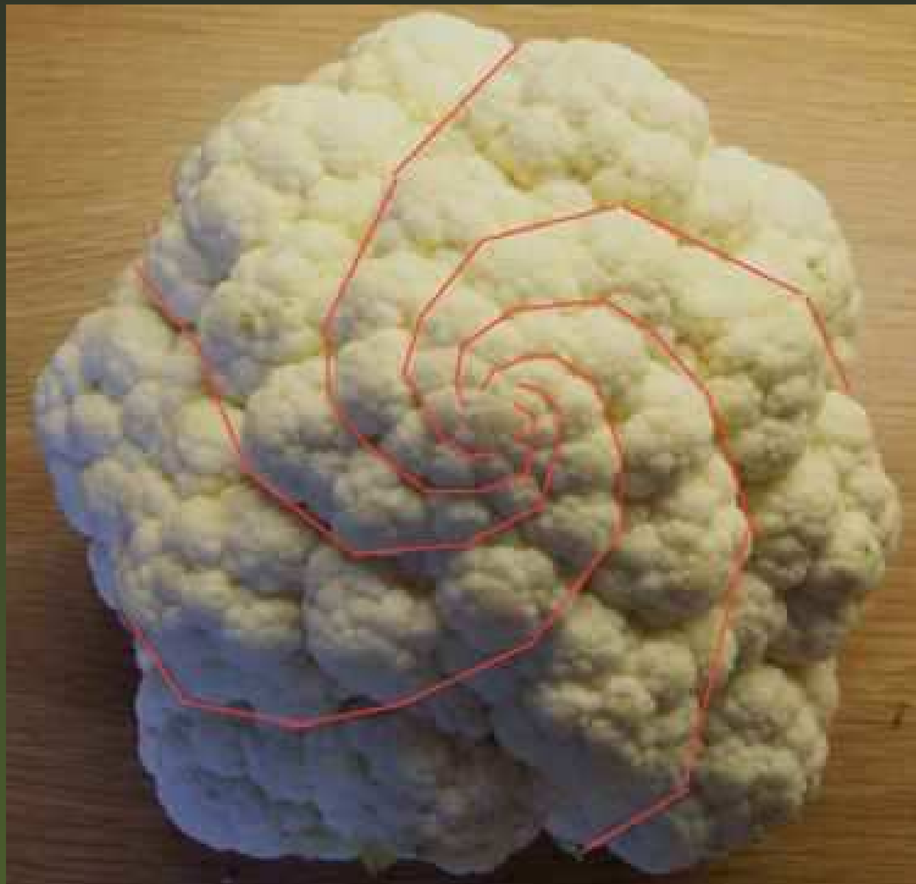


Espiral



Espiral

Espiral

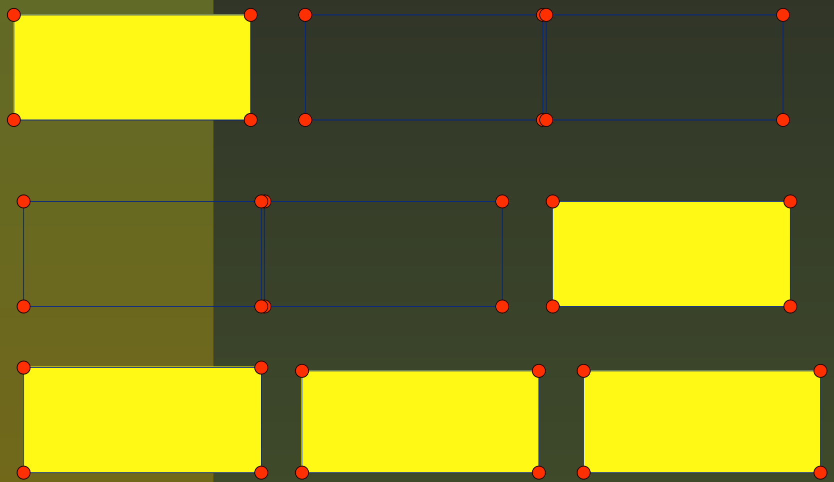


El joc dels gomets

El joc del Gomets

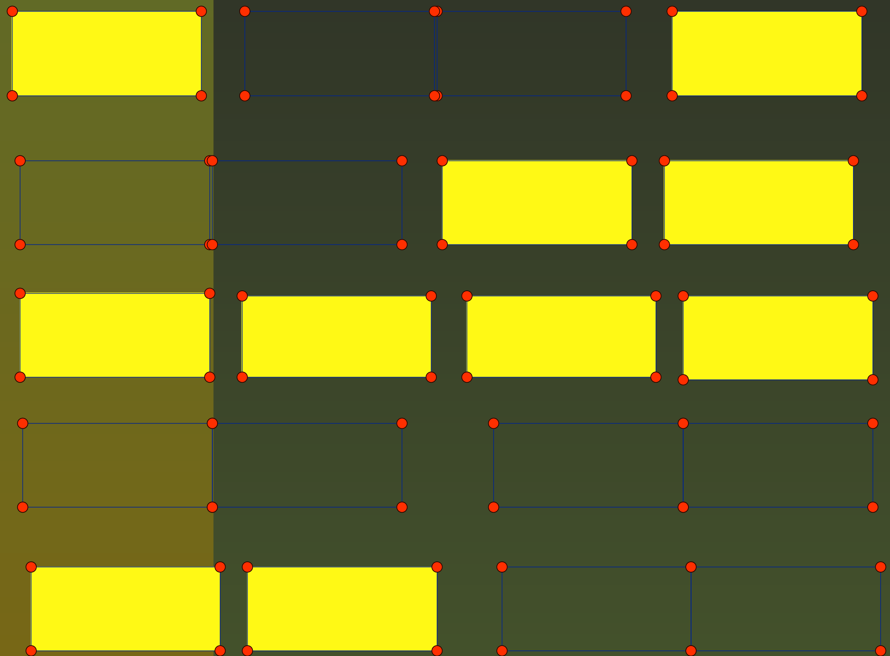
- Tenim gomets quadrats de color groc i gomets rectangulars blancs (equivalents a dos grocs).
- Quantes tires de longitud n podem fer diferents?
- Resposta: $F_n \ \ (F_0 = F_1 = 1)$

El joc del Gomets



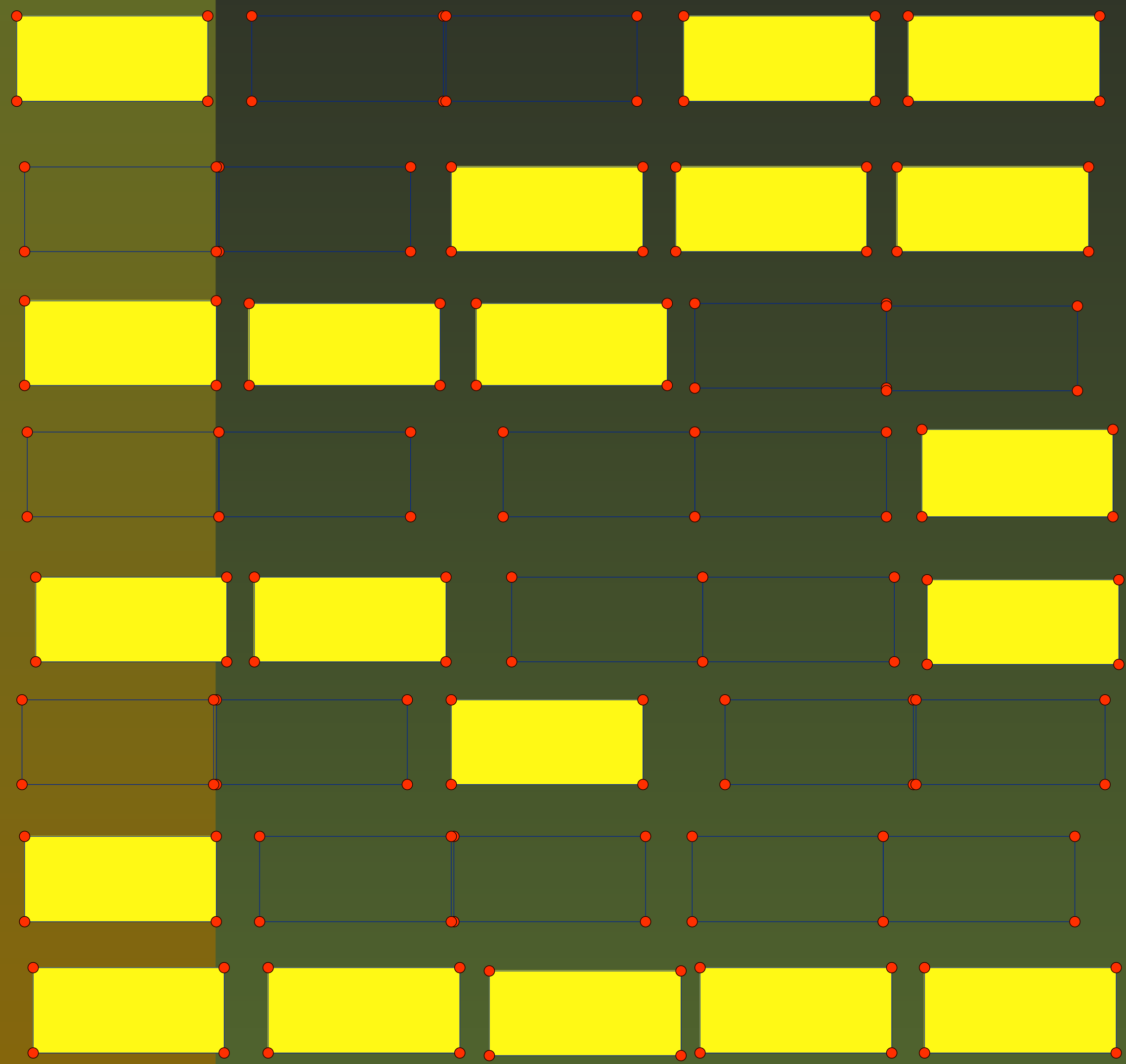
3

El joc del Gomets



5

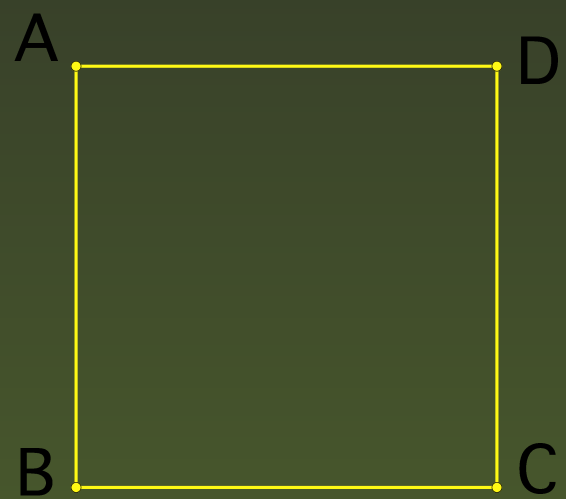
El joc del Gomets



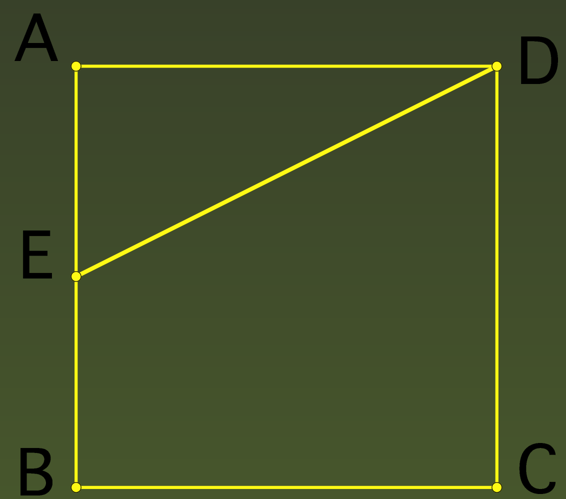
8

Construccions amb regle i compàs.

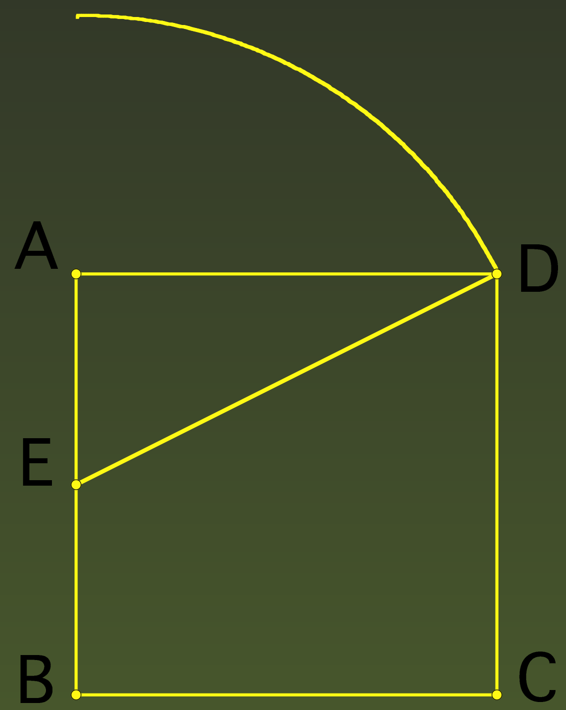
Rectangle auri



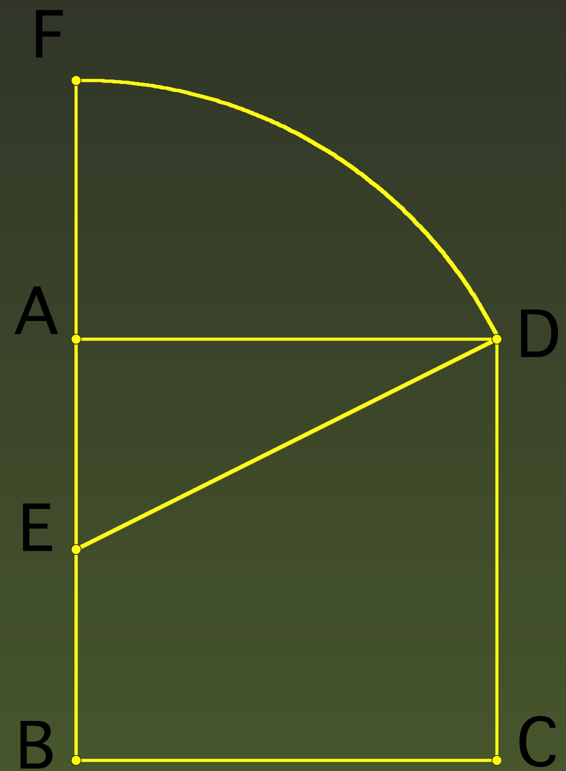
Rectangle auri



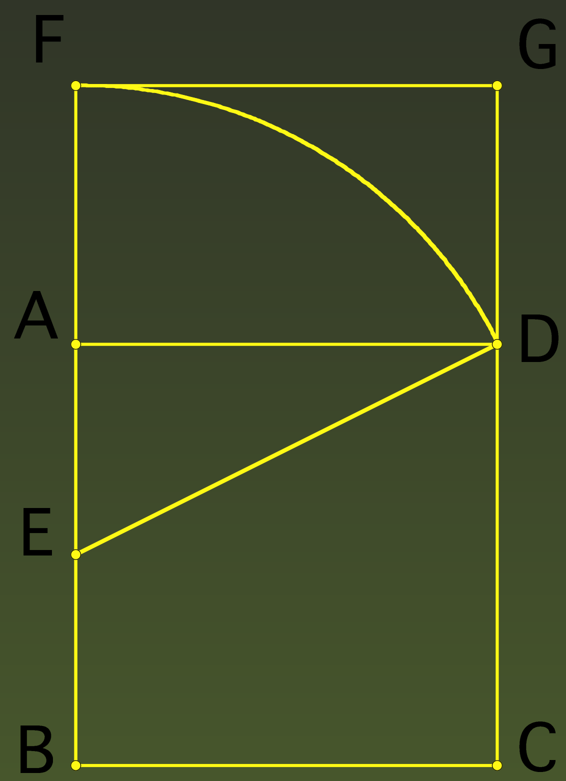
Rectangle auri



Rectangle auri

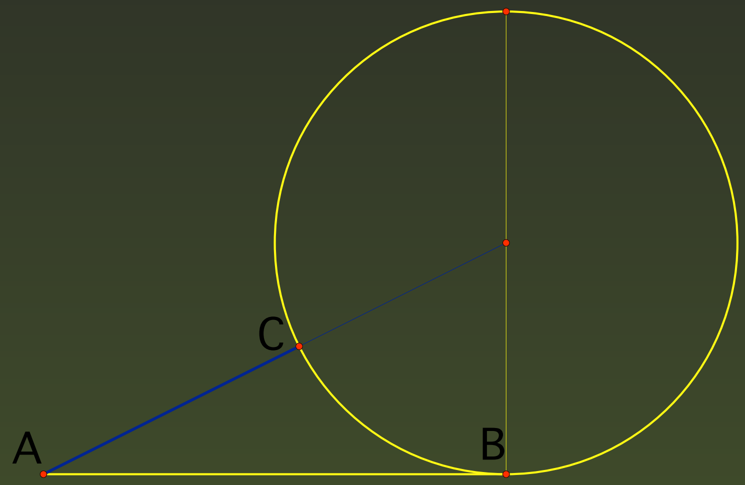


Rectangle auri



- $BF/BC = \Phi$

Construcció de Φ^{-1}



AB=1; AC=Φ^{-1}

Construcció de Φ^{-1}

- Sigui $AB = 1$
- Construïm la circumferència tangent a AB per B
- Unim el centre amb A. Talla en C
- $AC = \Phi^{-1}$

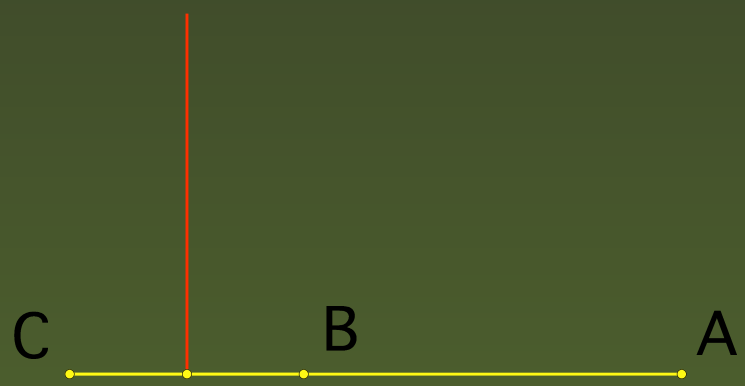
Pentàgon

Mitjana i extrema raó

- El total és a la part gran com la gran és la petita.
- $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{CB} = \Phi$

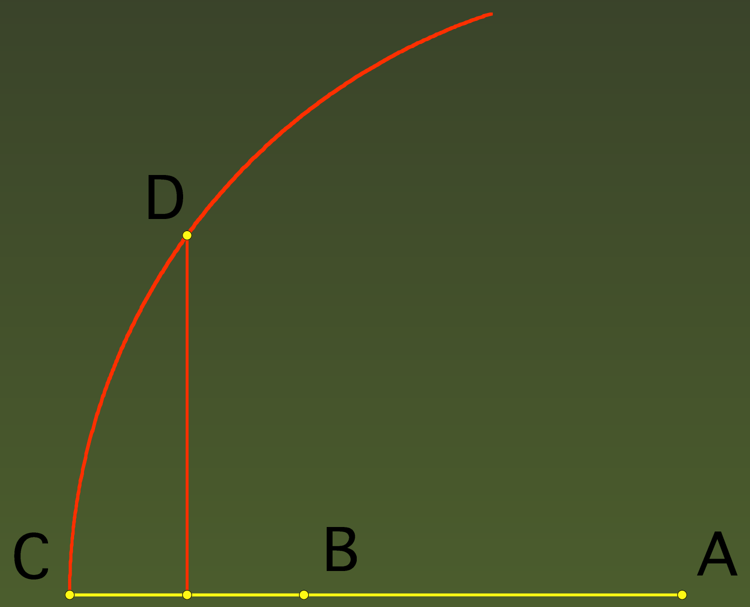
Triangle auri

- $\frac{AC}{AB} = \Phi.$
- Construïm la mediatriu de BC.



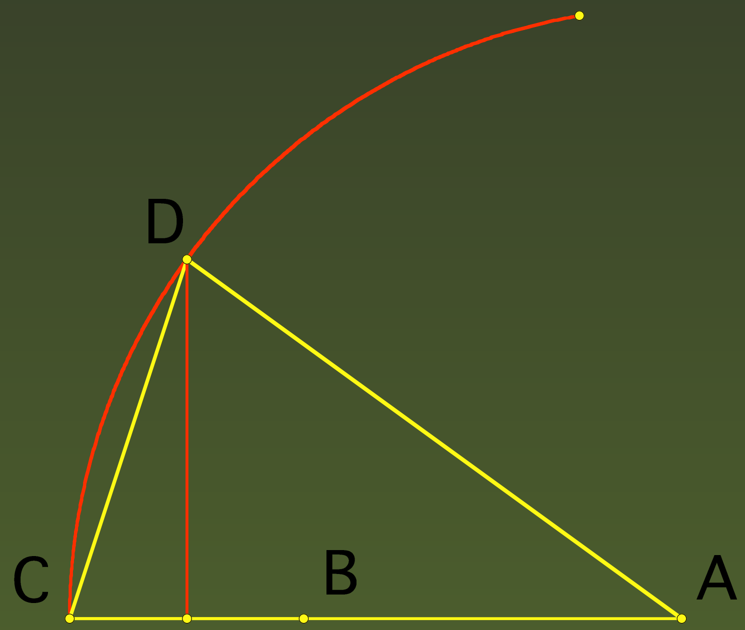
Triangle auri

- $\frac{AC}{AB} = \Phi$.
- Tallem amb la circumferència de centre A i radi AC.



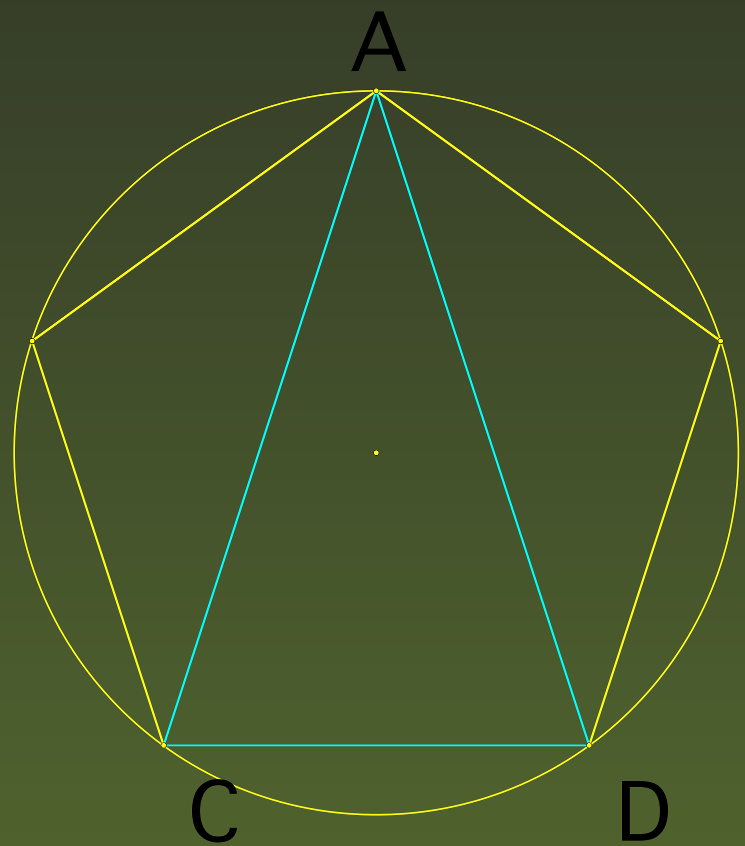
Triangle auri

- El $\triangle ACD$ és auri, ja que $CD = BD = BA$.



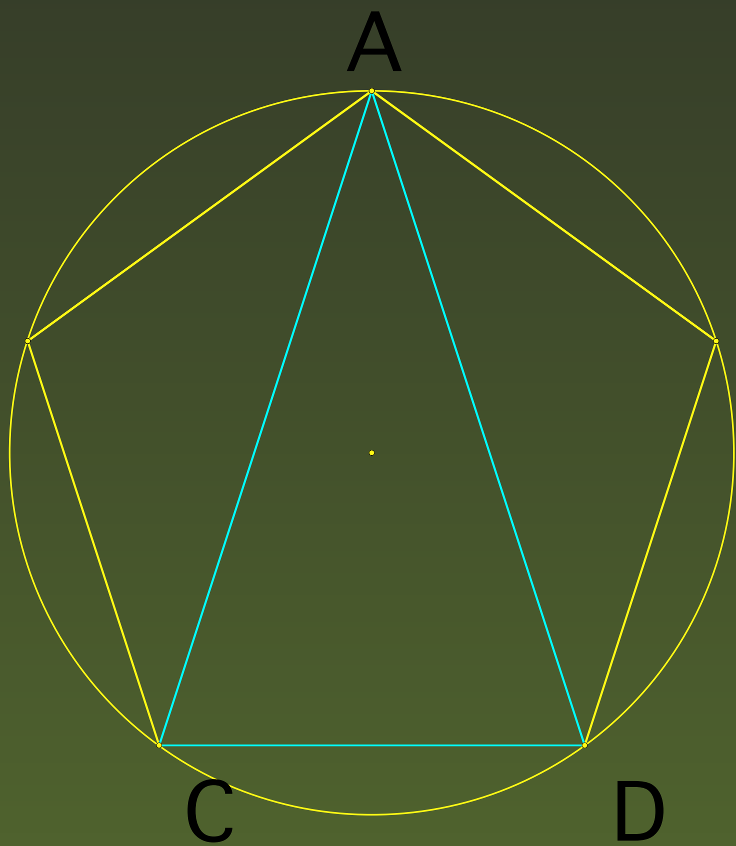
Pentàgon i raó àuria

$$\triangle ACD = 72°, 72°, 36°.$$



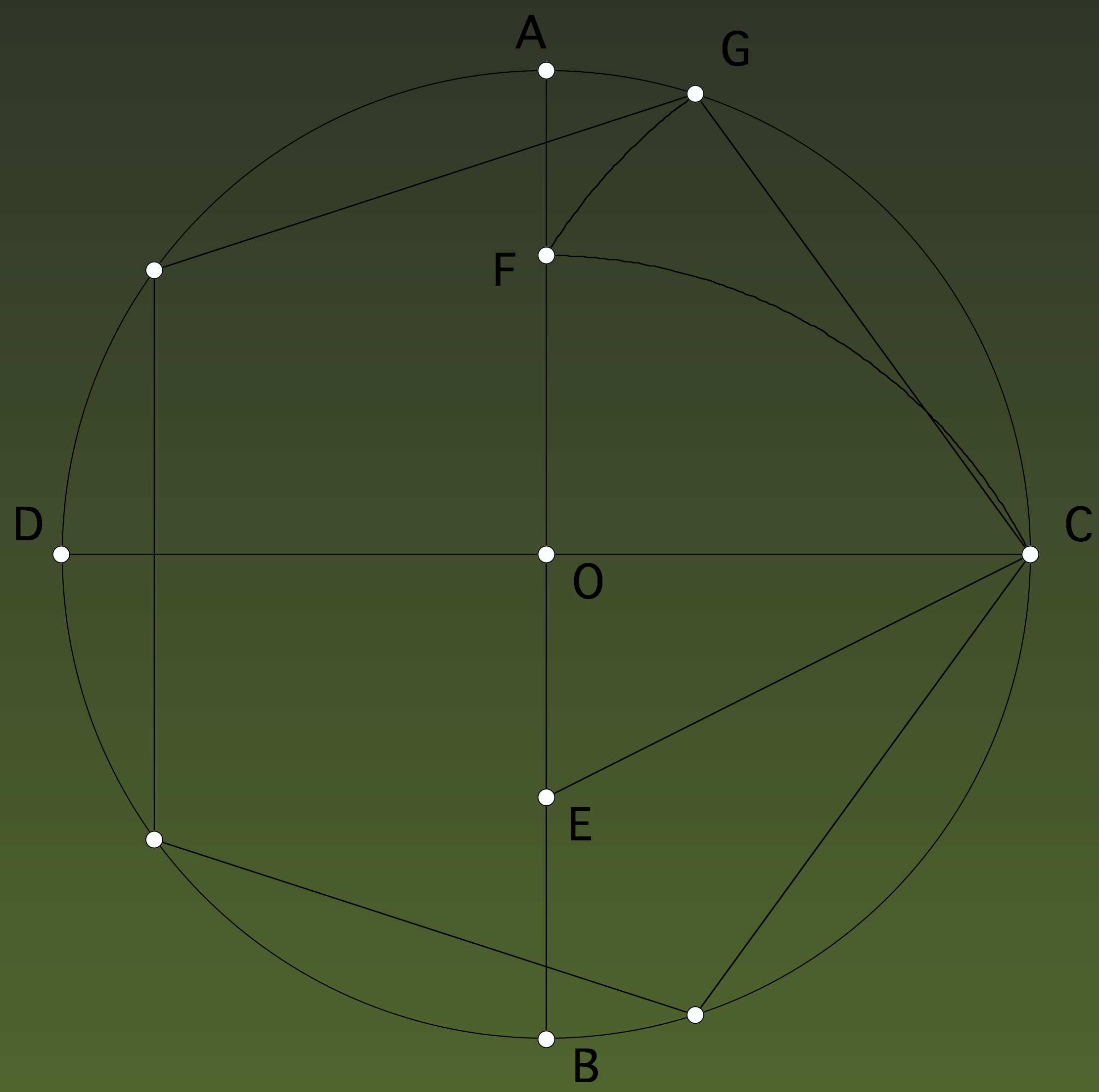
Pentàgon i raó àuria

$$\triangle ACD = 72°, 72°, 36°.$$



$$\frac{AC}{CD} = \Phi$$

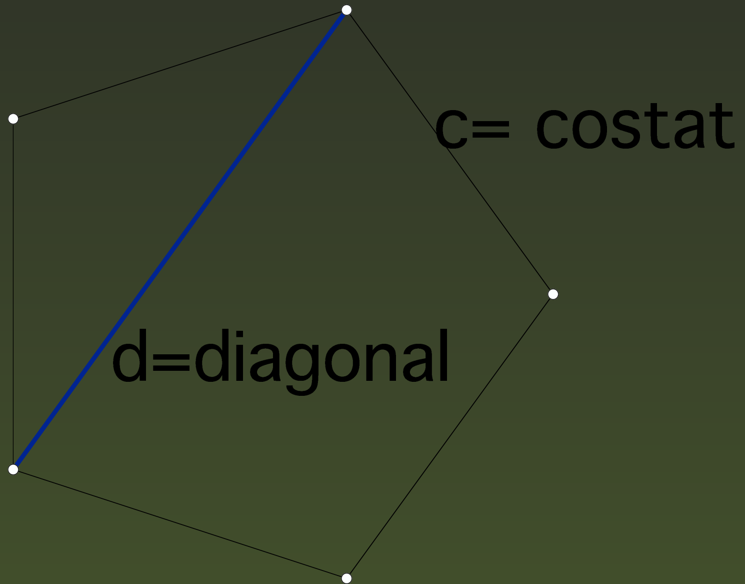
Pentàgon. Segona Construcció



Explicació

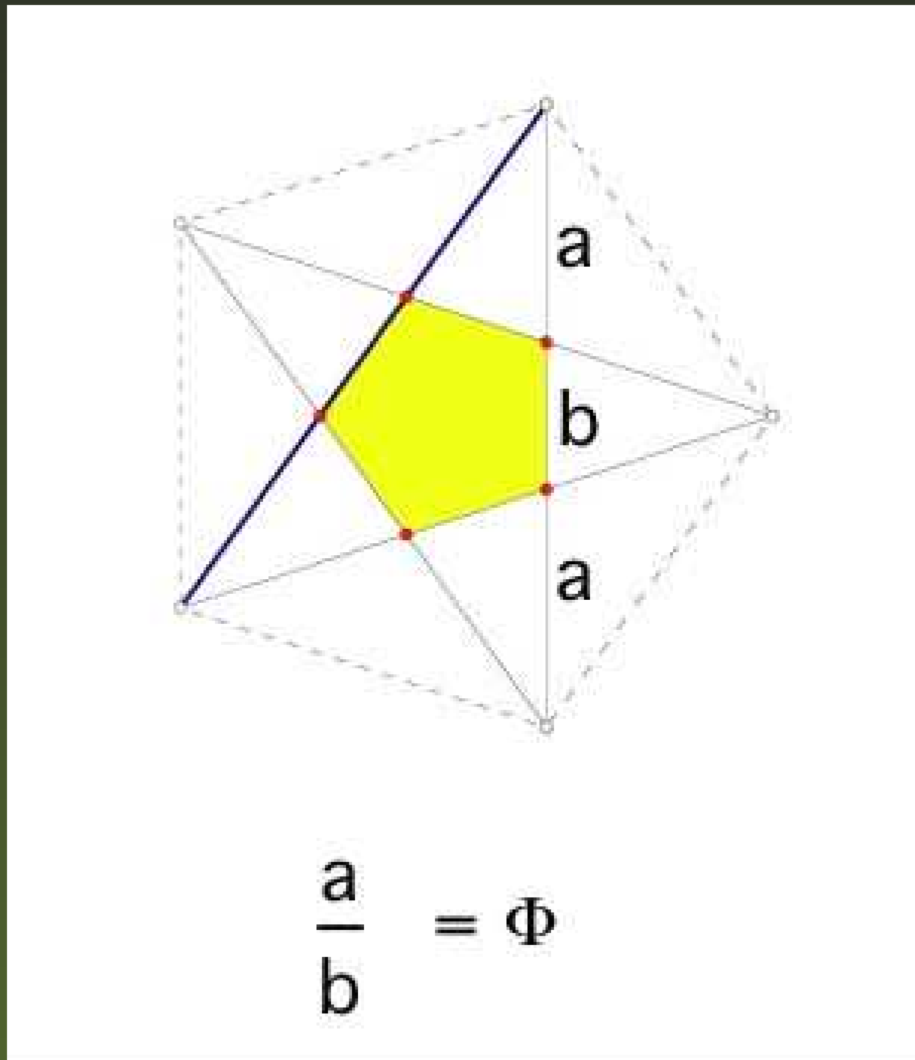
- Prenem el punt mitjà E entre O i B.
- Amb centre E i radi EC tracem la circumferència fins F.
- Amb centre C i radi CF tracem la circumferència fins G.
- CG és el costat del pentàgon.

Pentàgon i raó àuria



$$\frac{d}{c} = \Phi$$

Pentagrama



Pentagrama

- Símbol dels Pitagòrics
- $$\frac{a}{b} = \Phi$$
- $$\frac{a+b}{b} = \Phi^2$$
- $$\frac{2a+b}{b} = \Phi^3$$

Leda Atòmica. Dalí 1949

Leda Atòmica. Dalí 1949

Leda Atòmica. Dalí 1949

Polígons regulars

- Quins polígons regulars es poden dibuixar amb regle i compàs?

- El primer que no es pot dibuixar és l'eptàgon
- Gauss, als disset anys, va construir el de 17 costats
- Es poden construir els de $3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17, \ldots$ costats

Polígons regulars

- TEOREMA(Gauss 1801) *El polígon regular de n costats es pot construir amb regle i compàs si i només si n té una descomposició en factors primers de la forma*

$$n = 2^{\alpha}(2^{2^{\alpha_1}} + 1) \cdot (2^{2^{\alpha_2}} + 1) \cdots (2^{2^{\alpha_k}} + 1)$$

on $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ són enters diferents entre ells.

Polígons regulars

- TEOREMA(Gauss 1801) *El polígon regular de n costats es pot construir amb regle i compàs si i només si* n *té una descomposició en factors primers de la forma*

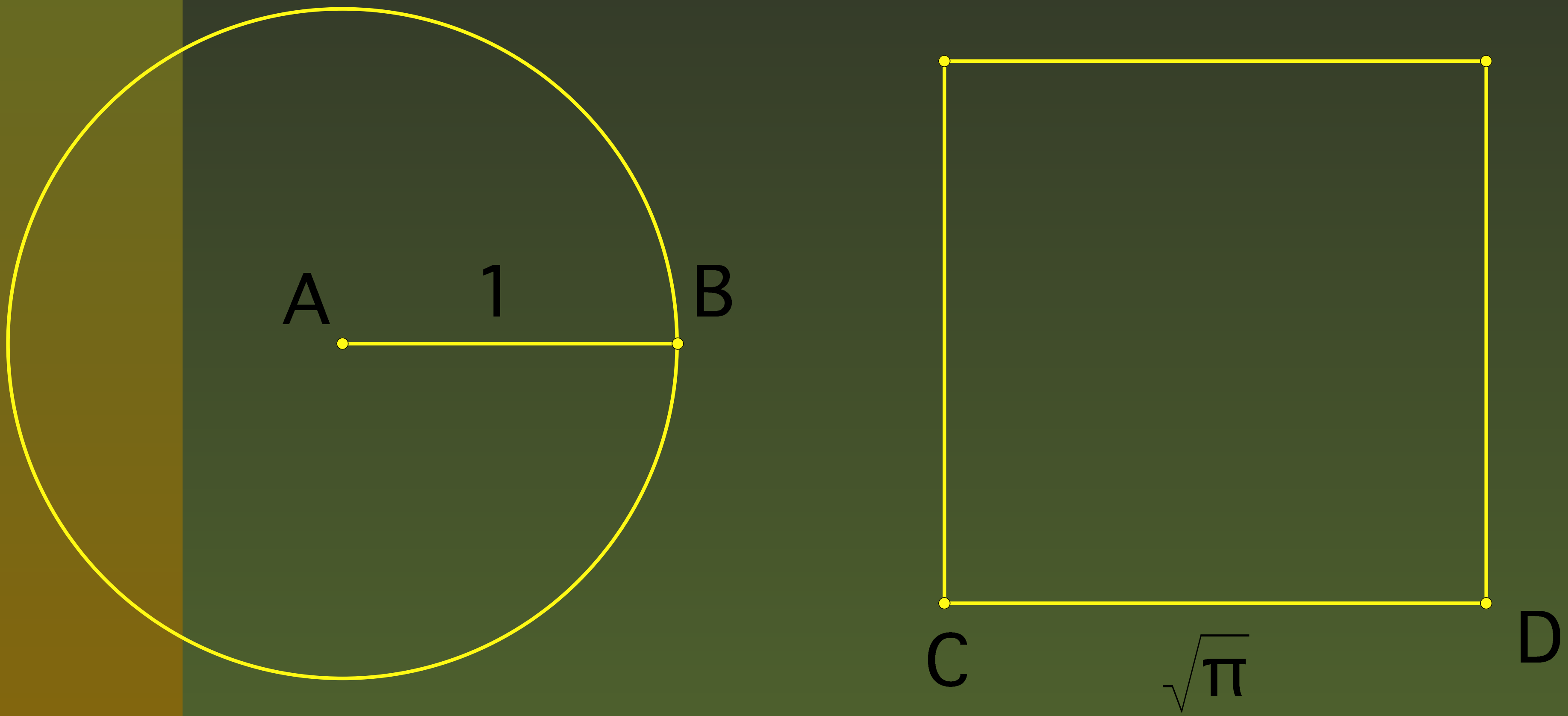
$$n = 2^{\alpha}(2^{2^{\alpha_1}} + 1) \cdot (2^{2^{\alpha_2}} + 1) \cdots (2^{2^{\alpha_k}} + 1)$$

on $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ *són enters diferents entre ells.*

- Primers de Fermat $(2^{2^a} + 1)$: $3, 5, 17, 257, 65537, ..$

Quadratura del cercle

Quadratura del cercle



Quadratura del cercle

- Anaxagoras $499 - 428$ aC.
- Aristofanes en fa burla a *Els ocells*, 414 aC.

Quadratura del cercle

- TEOREMA[P. L. Wantzel, 1837] Els nombres reals construïbles amb regle i compàs són arrels de polinomis que tenen per coeficients nombres racionals.

Quadratura del cercle

- TEOREMA[P. L. Wantzel, 1837] Els nombres reals construïbles amb regle i compàs són arrels de polinomis que tenen per coeficients nombres racionals.

- Exemple: $a = \sqrt{2}, \quad a^2 - 2 = 0.$

Quadratura del cercle

- TEOREMA[F. Lindemann, 1882] El nombre π no és arrel de cap polinomi a coeficients racionals.

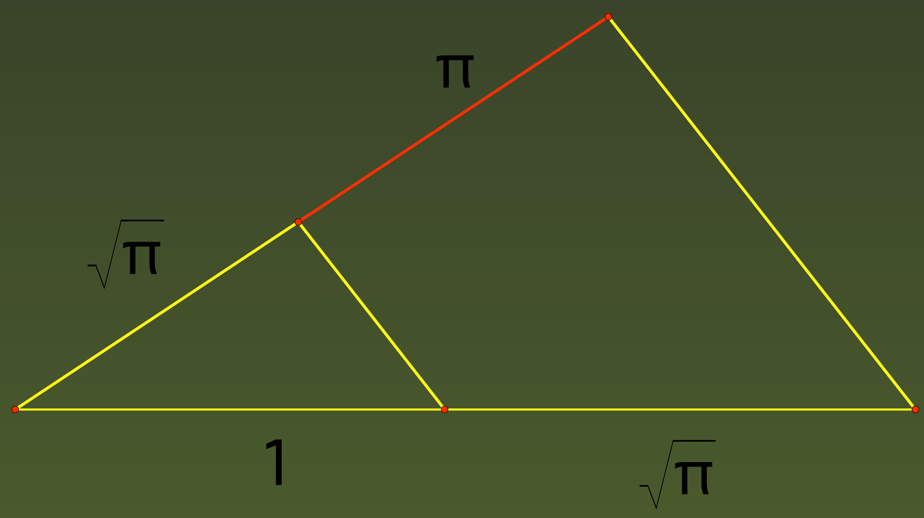
L. F. von Lindemann, $1852 - 1939$

Quadratura del cercle

Si poguéssim construir $\sqrt{\pi}$ (quadrar el cercle), podríem construir π.

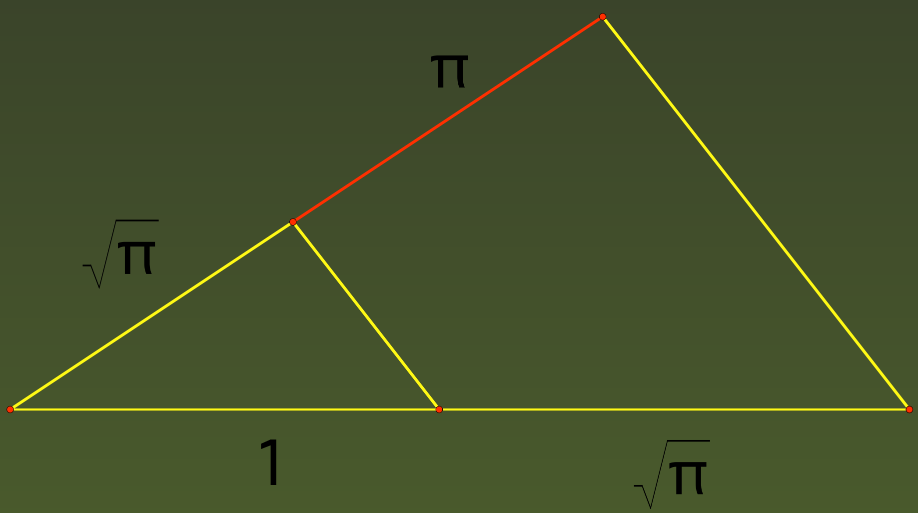
Quadratura del cercle

Si poguéssim construir $\sqrt{\pi}$ (quadrar el cercle), podríem construir π.



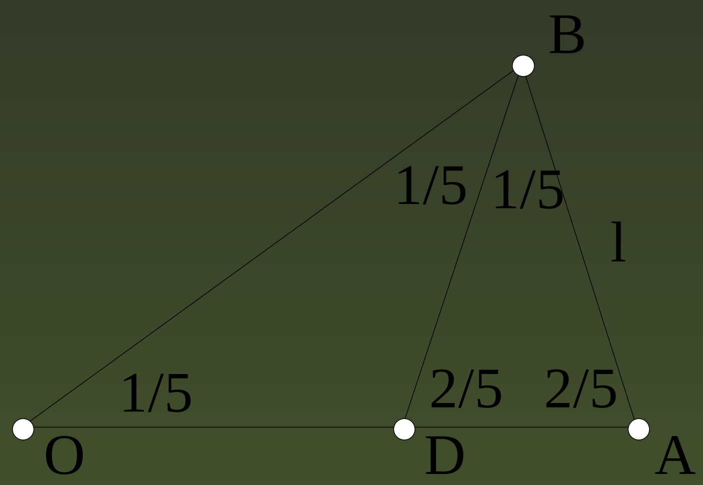
Quadratura del cercle

Si poguéssim construir $\sqrt{\pi}$ (quadrar el cercle), podríem construir π.

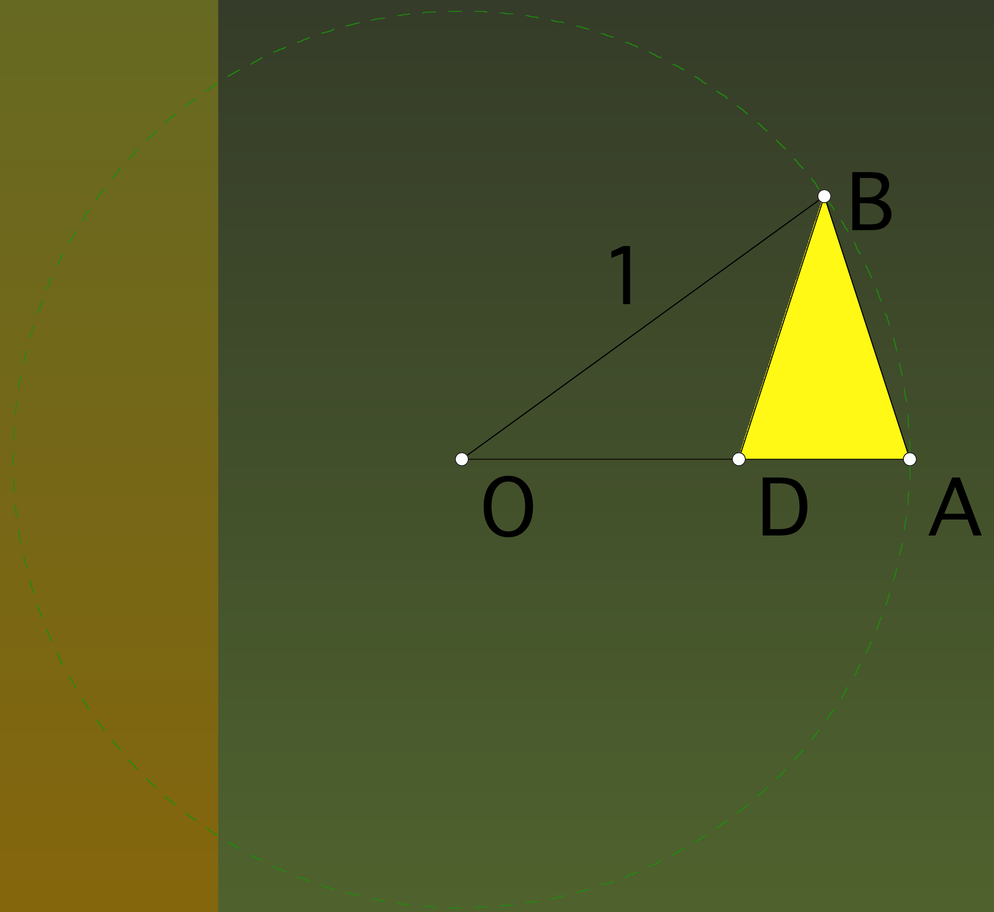


Contradicció

Decàgon



Decàgon

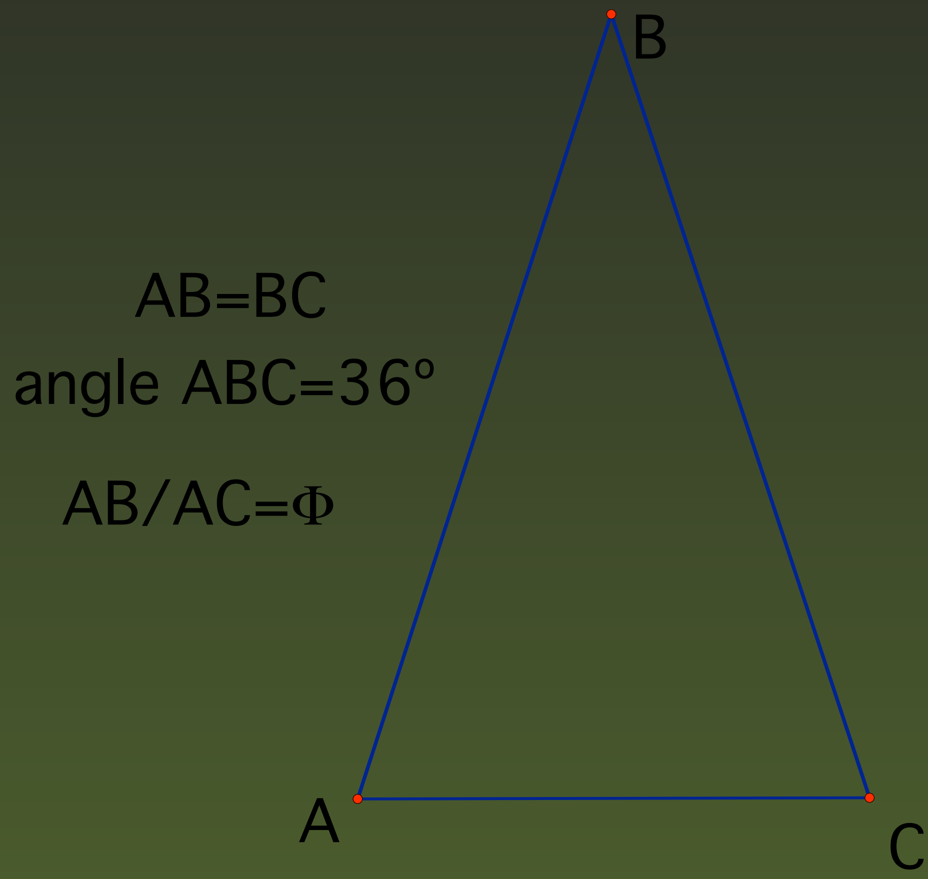


Triangles OAB i BDA semblants

$$\frac{1}{AB} = \frac{AB}{1-AB}$$

$$AB=\Phi^{-1}$$

Triangle d'or



- Triangles centrals dels decàgon.

Fibonacci. Problema Obert

- Hi ha infinits nombres primers a la successió de Fibonacci?
- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$