REVISTA DE LA
UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA
Volumen 50, Número 2, 2009, Páginas 227–263

NOTA SOBRE LA VIDA Y OBRA DE L. A. SANTALÓ

A. M. NAVEIRA Y A. REVENTÓS

La vida es un destello entre dos eternidades*

1. Introducción

Despues del fallecimiento del profesor L. A. Santaló, acaecido el 22 de noviembre de 2001, fueron bastantes los matemáticos conocedores de su obra que pensaron en lo muy útil que podria ser para la comunidad matemática internacional una recopilación de sus artículos de investigación, publicados a lo largo de muchos años en revistas muy diversas.

Aprovechando un año sabático del profesor Naveira nos pusimos manos a la obra y al cabo de dos años de trabajo ha aparecido el volumen [S09], que presentado por el medalla Fields S. Donaldson, recoge sus trabajos más relevantes así como un estudio de la repercusión científica de los mismos.

Durante este tiempo hemos podido conocer de primera mano la opinión que tenían de su vida y obra tanto los miembros de la comunidad científica internacional especializados en la materia, como las diversas instituciones científicas con las que él mantuvo relación.

También hemos considerado que podría ser interesante recordar y plasmar en la presente memoria algunas vivencias personales que cada uno de nosotros a lo largo de los años, y desde nuestra perspectiva, hemos tenido del Profesor Santaló y que estaban directamente relacionadas con su labor científica, procurando con ello que su personalidad humana no se pierda con el paso de los años.

El estudio y análisis de la obra de L. A. Santaló nos permitió también comprender por qué a Santaló, según algunos analistas, se le considera uno de los grandes geómetras del siglo XX, detrás de Blaschke, Chern y Hadwiger. Esperamos y deseamos que el lector de esta pequeña memoria comprenda que se pretenden mostrar la excepcional importancia que han tenido su vida y obra en la comunidad científica matemática a aquellos que, por diversas circunstancias, no han tenido la oportunidad de tratarle personalmente. Personas como Santaló son las que contribuyen de verdad al desarrollo científico y humano de la sociedad.

Índice

2000 *Mathematics Subject Classification.* 01XX.

*Frase entresacada del prólogo que Santaló escribió para el libro de su hija Alicia Santaló (con otros autores) *Buenos Aires. San Telmo 1580-1970*, IPU, Inventario de Patrimonio Urbano, ISBN 950-43-4236.1

2. Algunos datos biográficos

Durante los años en que Naveira era estudiante de doctorado en la Universidad de Santiago, su amigo y maestro Vidal-Abascal le hablaba a menudo con un gran respeto, cariño y admiración de un matemático español afincado en Argentina: Luís Antonio Santaló Sors. Vidal-Abascal recurría a él con frecuencia para plantearle cuestiones que se le iban presentando al estudiar algunos de sus artículos. En efecto, según él mismo le manifestó en reiteradas ocasiones, a medida que iba estudiando el libro de Bieberbach, [B32], en los años cuarenta, se iba interesando por problemas de la naciente Geometría Integral; en particular, por la fórmula de Steiner en espacios de curvatura constante, por el estudio de las medidas invariantes en los espacios homogéneos y de los invariantes integrales. En esta dirección, Vidal-Abascal publica diversos artículos, (entre otros, [VA 45, 47.1 y 48.1]).[**]

[**] En las citas bibliográficas hemos usado la notación: Inicial del autor, año, número del artículo en el año. Así por ejemplo, [VA 45], hace referencia al artículo de Vidal-Abascal del año 1945, y [S80.1], hace referencia al primer artículo de Santaló del año 1980.

Cuando Santaló impartió un curso en la Universidad de Barcelona, en el año 1985, durante una de sus primeras conversaciones con Reventós, éste le preguntó sobre la posibilidad de volver a Cataluña. Santaló le contestó que su vida estaba en Argentina, con sus hijos, sus nietos y demás compromisos. Pero un sentimiento de añoranza se adivinaba en sus palabras. Fue por entonces cuando Santaló pregunta a Reventós ¿qué texto de Geometría Proyectiva recomendaría a sus alumnos? Reventós le contesta: el "Santaló", y supuso que pensó que era por quedar bien con él. Sin embargo, la respuesta era verdadera y, aún habiendo pasado mucho tiempo, los autores de esta memoria siguen pensando lo mismo.

Luís A. Santaló nace en Girona, el 9 de octubre de 1911. Concretamente en el número 15 de la plaza de Sant Pere. Es el cuarto hijo de Silvestre Santaló Pavorell y Consol Sors Llach. Por orden de edad sus tres hermanos mayores son: Neus, Marcel y Joan y los tres menores Dolors, Xavier y Maria. Hace poco Maria le explicaba a Reventós que ya de pequeño, y obviamente en plan de broma, le pasaban la mano por la cabeza para que les inspirara su ciencia, pues era reconocida su capacidad para los estudios.

Luís Santaló empieza a estudiar en el "Grupo Escolar", donde su padre era maestro. Pasa después al Instituto del que guardó siempre un profundo recuerdo. Durán, [D99], comenta una conversación con Santaló en la que éste recuerda las prácticas de Meteorología que realizaban en el propio Instituto con el profesor de Física, señor Camps, y en la que también recuerda con agrado a su primer profesor de Matemáticas, Lorenzo González Calzada. Coincide, entre otros, con los futuros grandes historiadores Vicens Vives y Sobrequés Vidal.

A los 16 años marcha a estudiar a Madrid. Parece que influye en la decisión su padre, pensando que para doctorarse o hacer oposiciones tendría que ir a Madrid y que lo mejor era que conociese el entorno. Se aloja en la famosa Residencia de Estudiantes, en la calle del Pinar, en la que ya habían estado anteriormente su tío Miquel y su hermano Marcel, que realizó la carrera de Matemáticas. La idea de Luís Santaló era estudiar Ingeniería de Caminos, pero pronto decide estudiar también Matemáticas. En la Facultad de Matemáticas conoce profesores que influirían decisivamente en él, principalmente Julio Rey Pastor y Esteve Terradas. Dos grandes intelectuales. Dos grandes matemáticos. Los dos han sido profesores en Argentina y esto influiría decisivamente en la vida de Santaló. De hecho Rey Pastor no fue directamente profesor de Santaló, pero nada más llegar Rey Pastor a Madrid fue al Ministerio, acompañado de sus alumnos, para conseguir becas para ellos, cosa que consiguió inmediatamente.

Compaginando los estudios con el servicio militar obtiene la Licenciatura en 1934. Rey Pastor y Terradas le aconsejan ir a Hamburgo hacia donde parte aquel mismo año 1934 con la beca de la Junta de Ampliación de Estudios que Rey Pastor había conseguido para él. Para ello debe renunciar a su trabajo que había encontrado como profesor de Instituto. Allá le recibirá un conocido de Rey Pastor, el geómetra Wilhelm Blaschke.

A los autores de esta memoria les impresiona pensar en aquel reducido grupo de estudiantes de Blaschke, no más de 10, pero entre ellos ¡Santaló, Chern, Wu, Varga y Petkantschin! Por aquel entonces Blaschke empieza a estudiar las probabilidades geométricas, iniciando así lo que él mismo llamaría Geometría Integral. Recoge los resultados en una serie de artículos denominados y numerados todos ellos como Integral Geometrie. Los números 4, 5, 7, 15, 31 y 32 son de Santaló. En 1936, apadrinada por Pedro Pineda, publica su tesis doctoral sobre este tema, [S36.4]. Estando de vacaciones en Madrid empieza la Guerra Civil. Como en tantos otros casos, unas perspectivas largamente deseadas se quedaban rotas para siempre.

Santaló volvió a Girona y de allí fue destinado a aviación, en el ejército republicano, concretamente en Los Alcázares, cerca de Cartagena. De las notas que toma nacerá su primer libro, [S46.1], y un interés por la aviación que se plasma en [S40.2, 42.2 y 45.1]. Pasa otro período de la guerra en la Escuela de Aviación Militar de Barcelona, dirigida por Josep Canudas, ya con el grado de capitán. De allí su unidad se retiraría, pasando brevemente por Girona y Navata, donde estaba el Estado Mayor republicano, y donde se detuvieron algun tiempo, continuando después todos ellos su marcha hacia el exilio.

Una de esas casualidades curiosas de la vida, según explica Durán en su libro, [D99], citando al propio Canudas, es que, siendo Consejero Primero de la Generalitat el tío de Santaló, Miquel Santaló, se crearon por decreto (que el mismo firmó en 1933) los Servicios de Aeronáutica, aunque dicho servicio no disponía de ningún avión. Posteriormente, se compró una avioneta y se encargó al citado Canudas la dirección de la Escuela por la que pasaría posteriormente el sobrino de Miquel, Luís A. Santaló. Miquel fue, además, maestro y geógrafo.

Cofundador de Esquerra Republicana de Catalunya, Alcalde de Gerona, Consejero de la Generalitat, Ministro, Diputado, Vicepresidente de la Cortes, Miquel Santaló no tuvo más remedio que exilarse. Murió en Méjico. No es de extrañar pues que hoy podamos encontrar en Girona la calle Miquel Santaló y la calle Luís Santaló.

Una vez en Francia, Santaló es ingresado en el campo de concentración de Argèles. Según Durán, [D99], Santaló no recuerda cómo escapó de este campo. Desde Colliure escribe a Rey Pastor y a Blaschke pidiendo ayuda ya que sabe por su familia que a Girona no puede volver. A pesar de la acogida que le podía dispensar Blaschke, debido a la situación política en Alemania, no le parece lo más sensato volver a Hamburgo. Pero el propio Blaschke escribe a Élie Cartan, quien invita inmediatamente a Santaló a impartir unas conferencias en el Instituto Henri Poincaré de París. Una vez allí es detenido y es el propio Cartan quien acude a la cárcel de la Santé para liberarlo. Las conferencias se celebran los días 25, 28 y 30 de marzo de 1939, en el Anfiteatro Darboux del Instituto Henri Poincaré, situado en la calle Pierre Curie. El tema era, obviamente, la Geometría Integral y las Probabilidades Geométricas.

Con todo ello también había contestado a su carta Rey Pastor, enviándole dinero para el pasaje hacia Argentina. Pero problemas con el visado le impedían marchar. Según Durán, [D99], fue Terradas quien intercedió con un obispo para que le fuese expedido el correspondiente visado. Finalmente se embarca en Burdeos. El 12 de octubre de 1939 Santaló llega a Buenos Aires. Allí lo recibe, en representación de

Julio Rey Pastor, Manuel Balanzat, quien posteriormente sería coautor e inseparable amigo suyo, [S55.2] y [S79.2]. Rey Pastor se ocupa de la situación de Santaló y le obtiene una plaza en Rosario, provincia de Santa Fe. En aquel momento se crea el Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral, dirigido por Beppo Levi, ver [S62], y Santaló es nombrado subdirector. Ejerció ese cargo hasta 1949, ayudando a crear la revista *Mathematicae Notae*, que actualmente continua apareciendo.

Veamos como recuerda el propio Santaló estas fechas en su discurso en honor a Beppo Levi.[***]

Fue muy útil para mi llegar a Rosario, por varias razones. Primero por Rosario mismo; la amabilidad con que nos recibieron a los dos [se refiere a Beppo Levi y a él]. Pero la gente joven, diríamos, particularmente a mí, me acuerdo siempre de la gente joven que quiso [...] Eduardo Gaspar, Enrique Ferrari ... la gente que había, la amistad con que nos trataron, lo bien que se portaron para hacernos la vida agradable y en el caso mío para restaurar la salud un poco quebrantada y sobre todo la depresión moral de una derrota y de haber tenido que ver cómo el Mundo, en cierto modo, se desinteresaba de problemas tan graves cómo lo que había ocurrido en España. Que ahora me lo explico, pero en aquella época nos sentíamos un poco abandonados de todo el mundo, tirados en un campo de concentración de Francia.

Llegar a la Argentina, poder ir a comprar lo que uno quería con precios irrisorios en aquella época, la Argentina del año 40, fue realmente algo que sirvió mucho para levantar el espíritu para ir restañando las heridas, añadido a esto que conocí allí a mi esposa hizo que efectivamente fue para mí la salvación. Por esto estoy agradecido a Argentina y a Rosario.

Estamos ya en Rosario, ¿qué hace Beppo Levi? Ya lo contó un poco Castagnino también, tenía que poner en marcha el Instituto. Pero el Instituto [...] También una visión muy clara de la gente de aquella época de Rosario de la Universidad. No se trata, se ha dicho muchas veces y Houssay lo ha repetido muchas otras, de decir: "se quiere crear un Instituto, formemos un local, a lo sumo algunos instrumentos y ya vendrá la gente". Sino que si no hay, si es de una materia aplicada instrumentos y si [es de] matemáticas libros o revistas, tener un local sólo y poner un director, por sabio que sea, no sirve de nada.

Me contaban que en otra universidad lejana, que contrató también un profesor italiano, muy distinguido, filósofo, cuando el profesor llegó pidió libros para la Biblioteca y el Decano le decía: "¿pero cómo, usted es una de las primeras personalidades mundiales y todavía tiene que estudiar?"

No fue el caso en Rosario. En Rosario la preparación era mucho mayor, se comprendió que aunque fuera una figura de primer orden necesitaba elementos de trabajo que en matemáticas son los libros y revistas, y efectivamente, antes de la venida de Beppo Levi el grupo de estos tres Carlos Dieulefait, Juan Olguin, Simón Rubenstein principalmente, ayudados en el consejo directivo por Fernando Gaspar

[***]Se conserva la voz original de Santaló en la página web de la Facultad de Ciéncias Exactas Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario. `http://www.fceia.unr.edu.ar/secyt/apuntes/Santalo/Santalo.htm`.

y ayudados por los jóvenes que antes mencionaba, se habían preocupado, a veces con el propio importe particular material y sobre todo obtener de la Universidad recursos para equipar la Biblioteca, de manera que cuando Beppo Levi llegó a Rosario había ya una excelente Biblioteca en libros y en revistas, se podía empezar a trabajar. Y empezó Beppo Levi.

Sus cursos, algunos se han mimiografiado, y enseñó sobre todo, a mí en particular y a todos los que estábamos con él, para mí fue utilísimo Beppo Levi por razones un poco difíciles de explicar. Yo diría es esto, él enseñó, a parte de la matemática que nos enseñaba estrictamente, nos enseñó lo que podríamos llamar el oficio de matemático. Que no basta para ser matemático ser un investigador, es una condición necesaria, es muy interesante, es muy bueno. Pero el matemático profesional, necesita algo más. ¿Y qué es este algo más? Algo más fue lo que nos enseñó Beppo Levi. Que primero dijo, bueno, este Instituto se tiene que poner en contacto con el Mundo. ¿Como es la manera en que los Institutos del Mundo se ponen en contacto? Intercambiando publicaciones. De manera que necesitamos una publicación del Instituto.

Lo planteó a Cortés Pla, Cortés Pla entendió el problema, el consejo directivo lo vota y se crea Mathematicae Notae y las Publicaciones del Instituto.

Ya con esta publicación Beppo Levi nos enseñaba: "La publicación sola no va a andar". Entonces nos tenemos que encargar: escribir cartas a los Institutos del Mundo que se dedican a Matemáticas y que más o menos tengamos relación, notificándoles que se ha creado el Instituto, mandándoles un ejemplar de Mathematicae Notae, pidiendo intercambio. Algunos contestaban, otros no.

Los que no contestaban se les volvía a insistir. Y el Mathematicae Notae no es tampoco tan fácil de decir busco material y a la imprenta, y que ande. No. Lamentablemente, por lo menos en Argentina y creo que en muchos países, sólo no anda nada. De manera que si Beppo Levi se hubiera contentado con esta idea primitiva de decir tengo estos trabajos para publicar a la imprenta de la Universidad Nacional del Litoral que entonces la publicaba, y espero que venga, no habría venido nunca. No. Beppo Levi viajaba a Santa Fe, iba con el compositor y le enseñaba allí el símbolo matemático no se pone tan lejos hay que ponerlo un poco más cerca, es un exponente no es una letra perdida por allí y perdía tiempo enseñando al linotipista como había que imprimir trabajos de matemáticas. Y después cuando llegaba la revista, después de muchas pruebas, hasta que aprendió el linotipista y le agradeció mucho a Beppo Levi las enseñanzas que le había dado de cómo imprimir matemáticas, después llegaba la revista al Instituto y no poníamos allí bueno a pedir al Decano que nombre un empleado para mandar esto. No, no, éramos nosotros, Beppo Levi, yo, y algún colaborador que hacíamos los sobres a máquina, que metíamos esto y aún recuerdo que el correo nos daba todo un cuaderno para certificados y allí mismo en el Instituto llenábamos el recibo de certificado, y después sí, un empleado lo llevaba al correo, allí ponían el sello, nos devolvían la libreta. Es decir, lo hacíamos todo en el Instituto.

Graciela Birman, en [B04], recuerda cómo Santaló se sentía *rosarino*. Cita las palabras de Santaló cuando recibió el Diploma como Académico Emérito de la

Academia Nacional de Educación, en 1997: *Allí, el andar lento y sin pausa de las aguas del Paraná fue un bálsamo para mi cuerpo cansado de luchas.*

Santaló se integra rápidamente en los círculos de exilados y emigrantes, llegando a ser Secretario del Centro Catalán de Rosario. En 1945 se casa con Hilda Rossi, persona que le apoyará durante toda su vida, nacionalizándose argentino posteriormente. En 1947 nace su primera hija Maria Inés, (Tessi). Los años 1948 – 49 los pasa, con Hilda y Tessi en Princeton, con una beca de la fundación Guggenheim. También imparte un curso en Chicago, invitado por M. H. Stone, quien había estado previamente con Santaló en Argentina. Como constató Claudio Alsina muchos años después, Santaló dejó una huella imborrable a su paso por Chicago y en el Institute for Advanced Studies de Princeton, dirigido en aquel momento por Oppenheimer, coincide con Chern, Einstein, Yucawa, Bohr, Morse, etc. Hilda y Alicia recuerdan, en una conversación con Naveira, diversas visitas de matemáticos a Argentina, por ejemplo Blaschke y Chern con sus familias, Pi Calleja, Corominas, Sixto Rios. También remarcan la gran amistad de Santaló con Claudio Alsina, Luis Cruz-Orive y Fernando Affentranger.

De regreso a Argentina, en 1949, se incorpora a la Universidad de La Plata, capital de la provincia de Buenos Aires. Nace su segunda hija Alicia. Dirige su primera tesis doctoral a Leticia Varela sobre: *Propiedades infinitesimales de curvas y superficies en espacios de curvatura constante.* Participa en la Comisión Nacional de Energía Atómica (CNEA), da clases en la Escuela Superior Técnica del Ejército, investiga, viaja,... manteniendo siempre un ritmo de trabajo intenso por no decir frenético. Nace su tercera hija Claudia. En 1997 su esposa le comenta a Naveira que en algún momento para poder sacar la familia adelante, llegó a tener hasta cinco empleos simultáneos (¡y todavía le quedaba tiempo para investigar!). El hecho de pertenecer a la CNEA le permite viajar a París y aprovechar la ocasión para acercarse, por primera vez desde el exilio, a Girona y a Madrid. Debía ser por allá el 1955, ya que perteneció a la CNEA en el período 1952–57. Lamentablemente no volvió a ver a su madre, que ya había muerto en el año 1947.

En 1957 es nombrado profesor Titular de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. En la década de los años cincuenta empiezan los primeros reconocimientos públicos a su trayectoria: Primer Premio Nacional de Cultura, 1954; Premio de la Sociedad Científica Argentina, 1959; Ingreso en la Academia Nacional de Ciencias Exactas y Naturales, 1960.

En Buenos Aires se consolida la fama de Santaló como gran docente e investigador. Dedica muchos esfuerzos en pensar sobre la enseñanza de las Matemáticas. Une un conocimiento profundo del tema con la capacidad de explicar las cosas de manera sencilla y rigurosa. Consigue hacer fácil lo difícil. Tiene un cuidado especial hacia los alumnos. Intenta modificar la manera tradicional de explicar. "Inventa" los tutores, para relacionar la enseñanza de esta ciencia con aspectos de la personalidad del alumno, deseos, vocación, formación, etc.

Fallece en Buenos Aires el 22-11-2001.

3. Reconocimientos más importantes por su trabajo docente e investigador.

Este apartado deberíamos empezarlo con aquellas palabras de que: "*más vale tarde que nunca*".

3.1. En España.

- Académico Correspondiente de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, 1955.
- Académico Correspondiente de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, 1970.
- Miembro del Comité Científico de la revista Stochastica de la UPC, 1975.
- Doctor Honoris Causa por la Universitat Politècnica de Catalunya, 14 de julio de 1977. Presentado por Enric Trillas.
- Miembro Correspondiente de l'Institut d'Estudis Catalans, 21 de diciembre de 1977.
- Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica y Tecnológica. 1983.
- Medalla Narcís Monturiol a la Ciencia y a la Tecnología de la Generalitat de Catalunya. 1984.
- Doctor Honoris Causa por la Universitat Autònoma de Barcelona, 13 de junio de 1986. Presentado por Joan Girbau, celebrándose el acto en el Ayuntamiento de Girona.
- Doctor Honoris Causa por la Universidad de Sevilla, 1990. Presentado por José Luis Vicente. Promovido por Gonzalo Sánchez Vázquez, presidente de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas de España, amigo personal de Santaló.
- Condecorado con la Medalla de la Universidad de Valencia, 23 de setiembre de 1993. Recogida por su hija Tessi.
- Miembro Correspondiente de la Academia Canaria de Ciencias, 1993.
- Creu de Sant Jordi, de la Generalitat de Catalunya, 1994.
- Encomienda de Alfonso X (El Sabio) concedida por el Rey Juan Carlos y entregada por el Embajador de España en Argentina. Dicha encomienda fue una propuesta de Enric Trillas. 1996.
- Socio de honor de la Real Sociedad Matemática Española, 22 de enero de 1999.
- La Universitat de Girona crea el 27 de julio de 2000 la Cátedra Santaló. Dirigida por Carles Barceló i Vidal. Lo hace público el Rector de la Universidad de Girona, Josep Maria Nadal, ante una de las hijas de Santaló, el 21 de setiembre de 2000 en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina), con motivo de la Sesión Conmemorativa del 60 Aniversario del Instituto de Matemática "Beppo Levi".
- Socio de honor de la Societat Catalana de Matemàtiques, 19 diciembre 2000.

3.2. En Argentina.

- Premio Nacional de Cultura, 1954.
- Premio Sociedad Científica Argentina, 1959.

- Académico Titular de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires, 1960. Secretario de la misma (1972–76). Vicepresidente de la misma (1976–80). Presidente de la misma (1980-84).
- Académico correspondiente de la Academia Nacional de Ciencias de Córdoba, 1961.
- Doctor Honoris Causa de la Universidad Nacional del Nordeste, 1977.
- Premio de la Fundación Severo Vaccaro, 1977.
- Profesor Honorario de la Universidad Nacional de la Plata, 1979.
- Doctor Honoris Causa de la Universidad Nacional de Misiones, 1982.
- Doctor Honoris Causa de la Universidad Nacional de Tucumán, 1983.
- Miembro Titular de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires, 1985.
- Premio interamericano de Ciencias, B. A. Houssay, 1986.
- Académico Titular de la Academia Nacional de Educación, 1988.
- Doctor Honoris Causa de la Universidad de San Juan, 1991.
- Premio "Consagración Nacional" de la Secretaría de Cultura, 1992.
- Doctor Honoris Causa de la Universidad CAECE de Buenos Aires, 1992.
- Doctor Honoris Causa de la Universidad de Buenos Aires, 1992.
- Doctor Honoris Causa de la Universidad de Morón, 1992.
- Socio Honorario de la Sociedad Científica Argentina, 1994.
- Premio La Rosa de Oro de la Fundación Tapia por la *trayectoria en beneficio de la Educación de excelencia*, 1994.
- Premio "José Manuel Estrada" por "Maestro de las Ciencias Argentinas", Comisión Arquidiocesana para la Cultura, Buenos Aires, 1995.
- Académico Honorario de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires, 1997.
- Premio Konex de Honor (a título póstumo), 2003.

3.3. En otros países.

- Académico correspondiente de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Lima (Perú), 1945.
- Miembro del International Statistical Institute, Holanda, 1979.
- Miembro Honorario de la Sociedad Matemática Paraguaya, 1982.
- Miembro Honorario de la Academia de Ciencias de América Latina, Venezuela, 1983.
- Miembro Honorario de la "Royal Statistical Society" de Londres, 1984.
- Miembro Honorario de la Sociedad Latino-Americana de Historia de las Ciencias y Tecnología, 1984.
- Miembro Correspondiente de la Academia Chilena de Ciencias, 1986.
- "Honorary Life Member" de la "International Society of Stereology", Alemania, 1994.
- Plaqueta homenaje por *empeño y dedicación a la Educación Matemática*, Blumenau, Brasil, 1994.
- Miembro de la "New York Academy of Sciences", USA, 1997.

4. Algunas consideraciones generales sobre su obra

Santaló era una persona que estaba siempre interesada por los problemas que le rodeaban. Desarrolló su actividad en varios campos científicos; entre ellos, la investigación en Geometría Diferencial, la Geometría Integral y Física Teórica. Sentía un gran interés por la Didáctica de las Matemáticas en todos sus niveles, (en particular, en las Enseñanzas Secundaria y Universitaria), y su gran deseo era acercar las Matemáticas a la sociedad para hacerlas comprensibles a la comunidad científica en general (lo que le convirtió en un gran divulgador científico). Santaló se preocupó en poner de manifiesto las aplicaciones de las Matemáticas a otras ciencias; en particular, a la Teoría de la Probabilidad Geométrica, a la Estadística y a la Física.

Además de la Enciclopedia sobre Geometría Integral a la que nos referiremos posteriormente, Santaló escribió un gran número de artículos de divulgación y educación matemática y veinticinco libros, todos ellos de un excepcional valor formativo, didáctico y pedagógico. Véase la relación bibliográfica que aparece en [Re02]. Sin embargo, por su impacto claridad y belleza se podrían destacar [S51, 53, 61.1, 61.2, 66.2 y 94].

Fueron múltiples y muy diversas las repercusiones que ha tenido su obra, así como las líneas de investigación que se abrieron a la comunidad matemática interesada en la Geometría Integral y en sus aplicaciones. Por limitaciones de extensión de esta publicación, es imposible exponer aquí toda la importancia que ha tenido su trabajo científico, tanto en su faceta de investigador como de docente, escritor y divulgador. Por tanto intentaremos dar una visión panorámica a vista de pájaro de algunas de sus aportaciones más importantes. Sólo su producción científica citada en Zentr. für Math. y Math. Rev. asciende a aproximadamente 2000 páginas. Aparte de los artículos suyos que aparecen en la bibliografía y a los que nos referimos frecuentemente en esta exposición, se puede consultar una relación completa de todos sus artículos, tanto de investigación, como de divulgación y de Didáctica de las Matemáticas en las páginas web http://www.uv.es/~gruv/GRUV/pubSantalo.pdf y http://mat.uab.es/~agusti/Santalo.pdf

5. La Geometría Integral

Revisando la historia del desarrollo de la Geometría Integral, se puede afirmar, sin temor a cometer una equivocación, que el origen de la esta especialidad se encuentra en el llamado *problema de la aguja de Buffon*, planteado en el famoso *Essai d'arithmétique morale*, a finales del siglo XVIII. En la misma línea se pueden destacar las fórmulas de Crofton, de aproximadamente 1868, en el famoso artículo *On the theory of local probability.*

Este tipo de problemas, que en principio parecían un juego o pasatiempo matemático, darían lugar al desarrollo de una teoría matemática con entidad propia, debido fundamentalmente a las obras de Poincaré y de Blaschke y su escuela. Entre los discípulos más prestigiosos de la escuela de Blaschke, como ya se ha indicado, cabe señalar a Chern, Santaló, Wu, Petkanschin y Varga, pero sobre todo los dos primeros. Todos ellos coincidieron durante algún tiempo en Hamburgo. Así, es en el primer tercio del siglo XX cuando aparece la Geometría Integral como una especialidad matemática con un contenido propio.

Blaschke y su escuela y, en particular, Chern y Santaló utilizan en sus trabajos el método de la referencia móvil de Cartan. Éste constituiría la herramienta más potente para desarrollar toda la obra matemática de Santaló y una gran parte de la de Chern. Escritos en este lenguaje, los trabajos de Santaló sobre Geometría Integral constituyen la base de esta disciplina hasta nuestros días y son de estudio obligado por parte de todos aquellos interesados por el tema.

Aunque es imposible describir en unas pocas palabras el campo de la matemática que cautivó a Santaló, vamos a intentar poner de manifiesto la idea central de su trabajo

Es bien sabido que dado un número finito de casos posibles n y, entre ellos, un número finito de casos favorables m, la probabilidad de que elegido al azar uno de los casos posibles resulte favorable, se define como el cociente $p = m/n$.

Cuando el conjunto de casos posibles tiene la potencia del contínuo, el problema se llama de probabilidad geométrica. Ahora la definición es la misma qua se ha dado anteriormente, sustituyendo el número de casos por la *"medida".* Ello obliga a definir la *medida* para cada tipo de conjuntos y, además, variando ésta puede variar la probabilidad.

Simplificando un poco, el problema aparece cuando al intentar escribir

Casos favorables / Casos posibles

nos encontramos con el hecho que hay infinitas posibilidades; por ejemplo, infinitas posiciones de la aguja de Buffon sobre el plano. Éstas se pueden parametrizar e identificar nuevamente como puntos del plano de manera que tenemos tantas posiciones como puntos, y ¿qué más natural que usar el área para medir, o "contar", el número de puntos?

Como dice Santaló en [S76]: *para aplicar la idea de probabilidad a elementos dados al azar que son objetos geométricos (como puntos, líneas, geodésicas, conjuntos congruentes, movimientos o afinidades), es necesario primeramente definir una medida para tales conjuntos de elementos.* Parece como si Santaló tuviese en la cabeza las paradojas de Bertrand, (cual es la probabilidad de que una cuerda trazada al azar sobre el círculo de radio 1 sea mayor que $\sqrt{3}$) que provienen de utilizar, de manera algo escondida, diferentes maneras de medir. Entre las diferentes maneras de interpretar la palabra "azar", Poincaré fue el primero en aclarar explícitamente este punto, [Po12].

El geómetra se siente atraído por el interés geométrico en sí mismo de las preguntas que plantean las probabilidades geométricas, y aborda los problemas olvidando o prescindiendo de si detrás hay o no un concepto de probabilidad.

La discusión de qué medida hay que elegir está relacionada con el grupo que determina la geometría del problema en el sentido del programa de Erlangen de F. Klein. Ésta es la razón matemática por la que en los trabajos de Santaló aparecen de una manera explícita las propiedades de los grupos de Lie.

Dice Santaló que la base de la Geometría Integral está formada por cuatro palabras: *probabilidad, medida, grupo, geometría.* De hecho algunos de los resultados suyos más importantes provienen de medir directamente en el grupo. Hablando de manera imprecisa sería como identificar todas las posiciones de una figura en el plano con los movimientos que llevan una figura inicial fijada a cada una de las posiciones posibles. Las fórmulas que entonces se encuentran se llaman fórmulas cinemáticas, ya que recogen esta idea de movimiento, aunque el grupo no sea específicamente el grupo de movimientos.

Puesto que, en general, las probabilidades geométricas tratan de conjuntos de elementos geométricos, es necesario definir la medida de estos conjuntos. Así, es preciso definir la medida de conjuntos de puntos, rectas, planos y, de una manera más general, de conjuntos de figuras congruentes cualesquiera. El criterio básico para definir correctamente estas medidas es que sean invariantes respecto del grupo con el que se está trabajando.

Históricamente, se estudiaron medidas de conjuntos de puntos y rectas en el plano y conjuntos de puntos, rectas y planos en el espacio. El estudio en dimensiones superiores fue iniciado por Blaschke, quien introdujo el nombre de Geometría Integral. En lo que desde entonces se ha llamado "Geometría Integral" ha resultado fundamental el concepto de medida de conjuntos de figuras congruentes cualesquiera, lo que se conoció como "densidad cinemática". Una exposición muy elemental pero muy interesante sobre el origen y desarrollo de la Geometría Integral puede verse en [S45.2].

6. Un breve análisis de la obra de Santaló

En 1976 Santaló publica el excepcional libro *Integral Geometry and Geometric Probability*, [S76]. Se le puede considerar como una verdadera Enciclopedia de la Geometría Integral ya que en él se recoge toda la información bibliográfica básica existente sobre la especialidad hasta el momento de su publicación. Nos referiremos a él, pues, simplemente como la *Enciclopedia*. Este libro, que está considerado como una obra maestra sobre Geometría Integral Clásica, fue traducido al ruso, al chino y ya apareció también su segunda edición en inglés, [S04]. Su uso es obligado en todos los cursos de doctorado y master específicos dentro de la Geometría Integral.

En la *Enciclopedia* Santaló recopila una inmensa cantidad de resultados conocidos hasta aquel momento sobre Geometría Integral en el sentido de Blaschke. Los autores de esta publicación hemos considerado que el libro podría servirnos de hilo conductor para nuestra exposición. Sin embargo, también haremos referencia a algunas otras publicaciones posteriores a 1976 y también a algunas que, o bien no aparecen en el libro, o bien conviene hacer un análisis un poco más explícito de las mismas.

La *Enciclopedia* está dividida en cuatro partes o apartados. El primero es de carácter elemental. Los tres restantes están encadenados y al mismo tiempo perfectamente diferenciados. Por coherencia, nosotros hemos subdividido el último en dos apartados independientes

6.1. Parte I: Geometría integral en el plano. *Capítulos 1 a 8 de [S76].* La primera parte de la *Enciclopedia* lo constituyen los primeros ocho Capítulos que forman una unidad adecuada para un excepcional curso de Geometría Integral a nivel elemental en el espacio euclídeo 2-dimensional. Está basado fundamentalmente en artículos que Santaló había publicado anteriormente, ([S36.3, 36.4, 40.1 y 53], entre otros).

Como es bien sabido, los conjuntos convexos desempeñan un papel importante en la Geometría Integral. Buenas referencias son los libros de Blaschke, [BL56], y el de Bonnesen y Fenchel, [BF34]. En su libro, Santaló comienza analizando las propiedades básicas de los conjuntos convexos en el plano. Entre otras, ya analiza las medidas promediadas de Minkowski, que generalizará posteriormente al espacio euclídeo R^n. Como curiosidad, cabe señalar que muestra como un ejemplo de los conjuntos convexos el triángulo de Reuleaux que, como es bien conocido desde el punto de vista religioso, aparece incrustado en un gran número de catedrales europeas.

Utilizando un formalismo matemático elemental, Santaló comienza presentando una exposición simple del concepto de la "*medida invariante de un objeto geométrico bajo el grupo de los movimientos del plano*", dando interesantes aplicaciones geométricas del mismo.

Por ejemplo, observa que para fijar la posición de una figura en el plano basta dar las coordenadas (x, y) de un punto P solidario con la figura, respecto de unos ejes fijos, y el ángulo ϕ que forman unos ejes de origen en P, solidarios también con la figura, respecto de los ejes fijos. Hay, pues, tantas posiciones como ternas (x, y, ϕ) e introduce la *densidad cinemática* como la forma diferencial $\mathrm{dK} = \mathrm{dx}\wedge\mathrm{dy}\wedge\mathrm{d}\phi$, demostrando que no depende de la elección de los ejes fijos y móviles involucrados.

Buscando invariantes diferenciales para los grupos de transformaciones de Lie mas bien que pensando sobre problemas de probabilidades geométricas, E. Cartan, [Ca52], fue el primero en justificar el concepto de densidad y generalizarla a conjuntos de rectas y planos en el espacio. Cartan prueba que una densidad debe tener la propiedad que ésta no cambia de valor si todas las rectas o planos considerados están sujetos a un movimiento del espacio; esto es, si respecto a cualquier cambio en las coordenadas cartesianas la figura es llevada a una posición determinada. Evidentemente, la densidad depende del grupo que se utiliza en cada momento. De esta forma Cartan abrió una gran puerta de la teoría de grupos continuos hacia la de las probabilidades geométricas. Obsérvese que la invariancia respecto al grupo de los movimientos equivale a decir que todas las líneas rectas tienen la misma probabilidad.

Es importante señalar que, aún en Hamburgo, Santaló obtuvo en dimensión dos unos primeros resultados que darían lugar a la llamada fórmula cinemática.

Si se suponen dos dominios D_i, i= 0, 1, en el plano acotados por un número finito de curvas diferenciables por arcos sin puntos dobles, si c_i, F_i y L_i representan respectivamente las correspondientes curvaturas totales, áreas y longitudes, entonces la *Fórmula fundamental de la cinemática de Blaschke* nos dice que, para $\mathrm{D}_0 \cap \mathrm{D}_1 \neq \emptyset$

$$\int c_{01} dk_1 = 2\pi(F_0C_1 + F_1C_0 + L_0L_1)$$

donde c_{01} representa la curvatura total del borde del dominio $D_0 \cap D_1$.

La fórmula cinemática se debe a S. S. Chern, [Ch52]. En [S52.2] Santaló atribuye a Blaschke la fórmula cinemática para el caso euclideo en dimensión dos y tres, y a Chern-Yien el caso n-dimensional [ChY40].

Para el plano existen dos fórmulas clásicas en Geometría Integral que se conocen con los nombres de Fórmulas de Poincaré y Blaschke. La fórmula de Poincaré nos dice que si consideramos una curva fija C_0 y una móvil C_1 con densidad cinemàtica dK_1, entonces

$$\int_{c_0 \cap c_1} a\, dK_1 = 4L_0L_1$$

donde L_i representa la longitud de C_i, $i = 0, 1$ y a es el número de intersecciones.

En el Capítulo 7, Santaló da una demostración muy elemental de la Desigualdad Isoperimétrica para superficies, utilizando para ello las Fórmulas de Poincaré y Blaschke. Como es bien sabido, dicha desigualdad también se verifica para subconjuntos acotados de R^n. En una ocasión Naveira le preguntó a Santaló si existía una demostración análoga a la suya para la demostración de la desigualdad isoperimétrica en la dimensión n. La respuesta fue: "*Está por hacer*" y, en efecto, parece un buen problema.

El Capítulo 8 está dedicado a los retículos del plano y es, sin duda, uno de los que más ha influido en el desarrollo de la Estereología por Diseño, aunque los aspectos más fundamentales de la Estereología se introducirán en el Capítulo 16. Basándose en la fórmula fundamental de la cinemática, en la que se considera la intersección de un dominio fijo D_0 con un dominio D_1, sobre el que actúa el grupo de movimientos del plano, Santaló desarrolla una formula que proporciona el mismo resultado pero ahora D_0 se supone *repetido* en todas las regiones fundamentales de un retículo en el plano, y sobre D_1sólo actúan los movimientos del plano sujetos a una de estas regiones fundamentales del retículo. Esta idea sencilla se sigue utilizando en microscopia para realizar muestreos mediante ventanas sistemáticas.

6.2. Parte II. Fundamentos matemáticos de la Geometría Integral en la línea de Blaschke, Chern y Santaló. *Capítulos 9 a 12 de [S76].* La primera parte de la Enciclopedia, considerada por muchos de nosotros como su obra más importante, es asequible a los alumnos universitarios de primer ciclo. Sin embargo, para estudiar la segunda se requiere un conocimiento básico de la teoría de Variedades Diferenciables y Grupos de Lie. La razón es que toda la Geometría Integral en el sentido de Blascke, Chern y Santaló está fundamentada en el análisis de las propiedades invariantes bajo las acciones de grupos que actúan sobre espacios homogéneos. Por la bibliografía especializada es bien sabido que todo espacio homogéneo admite una estructura de variedad diferenciable. Así, los interesados en la comprensión de la Geometría Integral Clásica deben conocer los conceptos básicos de un curso de postgrado sobre "Teoría general de Grupos de Lie con aplicaciones a los Espacios Homogéneos y a la Geometría Integral". En él se debe procurar mostrar a los alumnos la interrelación de la Geometría de Riemann con la de los Grupos de Lie, poniendo de manifiesto las aplicaciones a los Espacios Homogéneos en general y, en particular, a la Estereología. En esta línea se considera básica la interesante conferencia que sobre este tema publicó Santaló en la Real Academia de Ciencias de Madrid, Institución de la que fue "Académico Correspondiente", [S80.4].

En la segunda parte del libro se sientan las bases de la Geometría Integral General, utilizando para ello el resultado fundamental que nosotros denominaremos *Teorema de Blaschke–Chern–Santaló*, que aparece en el Capítulo 10, con la referència 10.3, y que explicitaremos más adelante.

A partir de las propiedades de los grupos de Lie y de los espacios homogéneos, se dan las condiciones para que existan medidas invariantes. Basándose en la estructura infinitesimal del grupo de los movimientos euclídeos, se finaliza esta parte con interesantes resultados sobre densidades invariantes de subespacios lineales respecto al grupo afín, [S50.3, 54 y 67.3].

Capítulo 9 de [S76]. Breve repaso de los conceptos de formas diferenciables y grupos de Lie.

Capítulo 10 de [S76]. Estudia densidades y medidas en espacios homogéneos. Los fundamentos matemáticos son muy simples; en efecto, sean G es un grupo de Lie de dimensión n y H un subgrupo cerrado de dimensión $(n-m)$. Es bien sabido, ver por ejemplo [W71], que el conjunto cociente G/H admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión m. En [Ch42] Chern da una condición necesaria y suficiente para la existencia de una medida invariante sobre el espacio homogéneo G/H en función de las constantes de estructura de G. En éste Capítulo Santaló da las condiciones para la existencia de una m-forma no nula sobre G/H y para que sea invariante bajo G. Tal m-forma la define como una "*densidad*" sobre G/H y, por integración, da lugar a una "*medida invariante*" sobre el espacio homogéneo G/H. Bajo la hipótesis que G actúe transitivamente sobre la variedad homogénea, la densidad invariante (si existe) es única salvo un factor constante.

Por la teoría general de grupos de Lie se sabe que sobre G está definida una foliación cuyas hojas son las clases de H por traslaciones a la izquierda. Ésta está definida por el sistema de Pfaff

$$\omega_1 = 0, \ldots, \omega_m = 0.$$

Las formas ω_i se pueden tomar invariantes y entonces la m-forma diferencial

$$d(G/H) = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m$$

también es invariante bajo la acción de G. Santaló prueba el siguiente resultado fundamental:

Teorema.- *Una condición necesaria y suficiente para que la m-forma $d(G/H)$ sea una densidad para G/H es que se anule su diferencial exterior; esto es, $d(d(G/H)) = 0$.*

Por razones históricas del desarrollo de la teoría de la Geometría Integral, parece razonable denominar a este Teorema, el 10.3 de la *Enciclopedia*, como de "*Chern–Blaschke –Santaló*". Santaló utiliza reiteradamente este resultado para construir medidas invariantes sobre diferentes espacios homogéneos, lo que le permite medir objetos geométricos con una gran generalidad. Este Teorema fue utilizado y generalizado, entre otros, por Vidal-Abascal en una serie de artículos, los cuales se pueden considerar como el germen de la escuela de Geometría Diferencial de Santiago en la década de los años sesenta del siglo pasado.

Capítulo 11 de [S76]. Este Capítulo está dedicado al estudio de la densidad respecto al grupo afín y a algunos de sus subgrupos. Así, obtiene expresiones de las densidades de espacios lineales respecto al grupo especial lineal (afinidades del tipo $x' = ax$, con $\det(a) = 1$) y respecto al grupo especial no homogéneo (afinidades del tipo $x' = ax + b$, con $\det(a) = 1$). Como una aplicación de esta teoría, en [S60] Santaló considera la densidad de conjuntos de pares de hiperplanos paralelos e invariantes respecto del grupo afín unimodular y evalúa la medida de todos los pares de hiperplanos paralelos que contienen un conjunto convexo dado.

En las notas al final del capítulo estudia geometría integral en el espacio proyectivo. Ello fue iniciado por Varga, [V35], y continuado por Santaló (junto con la geometría integral en el espacio afín) en [S50.3].

Capítulo 12 de [S76]. Particularmente interesante es la presentación que hace en este Capítulo de la densidad cinemática del grupo de los desplazamientos del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, lo que le permite determinar, mediante integraciones sencillas y de una manera muy intuitiva, el volumen del grupo ortogonal O(n). Como una consecuencia inmediata, es posible obtener el volumen de las Variedades de Grassmann Reales. Aplicando también el Teorema de Chern—Blaschke—Santaló, ya se está en condiciones de determinar las densidades cinemáticas de subespacios del espacio euclídeo con diversas estructuras geométricas.

A los autores de esta memoria les pareció extremadamente interesante la exposición que se hace, en la Sección 3 de este Capítulo, de una fórmula de Baschke y de su demostración, [BL35], que relaciona densidades de puntos en el espacio euclídeo con densidades de los mismos puntos había obtenido en moviéndose en un subespacio y densidades de subespacios.

También, siguiendo ideas ya iniciadas en su tesis doctoral [S36.4], introduce medidas invariantes para pares de subespacios lineales. Algunas de las fórmulas obtenidas le serán útiles para, en el Capítulo 14, poder obtener interesantes resultados de probabilidades geométricas.

En una nota al pie del Capítulo 12 Santaló nos muestra como su método de la referencia móvil aplicado a la determinación de densidades se puede extender para determinar el volumen de las variedades de Stiefel $\mathrm{S}_{r,n} = \mathrm{O(r+n)/O(n)}$.

En otra nota del mismo Capítulo nos expone los resultados que Petkantschin había obtenido en [P36]. Un somero análisis de los mismos nos hace pensar que quizás estos resultados también puedan tener aplicaciones a las probabilidades geométricas.

6.3. Parte III: Geometría integral en E_n. *Capítulos 13 a 16 de [S76].* En este apartado Santaló recopila algunos resultados de varios artículos suyos sobre la Geometría Integral del espacio euclídeo de dimensión arbitraria y hace una exposición clara y concisa de los principales resultados (entre otros, utiliza los artículos [S52.2, 56.1, 56.2, 67.3, 70 y 75]). Todo este apartado se dedica a analizar las propiedades de las medidas promediadas (o equivalentemente, las integrales de las curvaturas medias normalizadas) de un subconjunto, así como las relaciones que existen entre ellas, buscando siempre aplicaciones a la Probabilidad Geométrica. Son fundamentales las generalizaciones de las fórmulas de Crofton (que aparecen en los fundamentos de la Teoría de la Probabilidad Geométrica, ([G84, p. 135]), la obtención de la Fórmula de Steiner y las diversas expresiones que él obtiene para la *densidad cinemática*. Cabe señalar que Chern también se interesó frecuentemente por problemas relacionados con la densidad cinemática y publicó varios artículos complementarios de los de Santaló, [Ch52, 66]). Entre otros resultados, Chern obtiene una interesante relación entre densidades de ciertos subespacios lineales que resultó ser de gran utilidad por sus aplicaciones posteriores. Por su trascendencia e importancia, estos artículos aparecen también incluidos en la *Enciclopedia*.

Capítulo 13 de [S76]. Siguiendo a Hadwiger, [Ha57] y Bonnesen y Fenchel, [BF34], Santaló nos introduce las quermassintegrales (medidas promediadas) de un conjunto convexo en el espacio euclídeo. Éstas, módulo una constante, son la integral sobre una determinada variedad de Grassmann de las proyecciones de un conjunto convexo sobre todos los subespacios pasando por el origen de una dimensión dada. Por completitud, se supone que la primera quermassintegrale es el volumen del convexo y la última es un múltiplo de su característica de Euler-Poincaré. Es interesante observar que la segunda quermassintegrale es el área de la frontera del convexo. Utilizando el método de inducción, nos presenta en su libro una elegante demostración de la fórmula de Steiner que permite expresar las quermassintegrales del convexo paralelo a uno dado en función de las del convexo primitivo. La Fórmula de Steiner ha sido generalizada en muchas direcciones y a muchos tipos de variedades. Una buena referencia para la misma es el libro "*Tubes*" de A. Gray, [Gy90].

Por otra parte, utilizando únicamente técnicas de Geometría Diferencial, también es posible definir las integrales de las curvaturas medias de un convexo. Mediante una identificación canónica se ve que, módulo una constante, estos dos conceptos coinciden lo que permite dar a las primeras otra interpretación geométrica interesante.

Los volúmenes mixtos de un conjunto convexo se definen a partir del potente teorema de Minkowski que calcula el volumen de una combinación lineal de cuerpos convexos en R^n demostrando que dicho volumen es un polinomio homogéneo de grado n con respecto a los coeficientes. Concretamente,

$$V(\Sigma a_i K_i) = \Sigma \dots \Sigma V(K_{i1}, ...K_{in}) a_{i1} \dots a_{in}$$

Entonces se define la medida promediada como

$$V_m(K) = V(K, ..., K, D, ..., D)$$

donde el convexo compacto K aparece m veces y la bola unidad cerrada D aparece $m - n$ veces. A partir de propiedades elementales de la medida promediada e integrando sobre grassmanianas se demuestra que $V_m(K)$ coincide con el promedio de las integrales sobre todos los subespacios m-dimensionales de $\mathbb{R}^n$ de los volúmenes m-dimensionales de las proyecciones de K sobre ellos; es decir, con las quermassintegrales en el sentido de Blaschke, Hadwiger y Santaló. Ver [BZ].

Capítulo 14 de [S76]. Utilizando resultados conocidos de la probabilidad geométrica, Santaló obtiene la medida de los conjuntos de r-planos que cortan a un conjunto convexo. Esta medida le permite obtener fórmulas interesantes sobre la probabilidad geométrica de subespacios que cortan a un conjunto convexo en función de las integrales de las curvaturas medias. Éstos resultados se encontraban ya en [S52.2, 56.1, y 56.2].

También generaliza en varias direcciones los resultados relativos a la Fórmula de Crofton que se conocían hasta aquel momento, tal como había hecho en [S52.2].

Santaló obtiene una serie de resultados relativos a las medidas de las intersecciones de subespacios lineales que cortan a una subvariedad de R^n. Lo sorprendente es que se verifican también en los espacios modelo de curvatura constante. Aquí sigue los artículos [S52.2 y 52.4]

Capítulo 15 de [S76]. Comienza dando una expresión para la densidad cinemática dK del grupo de los movimientos euclídeos en función de productos exteriores de formas diferenciales bien conocidas. Analiza esta densidad en el caso que tiene una variedad M^q fija y una M^r móvil. Tomando bases adaptadas, prueba que para $r+q=n$, se tiene

$$dK = \Delta d\sigma_q(x) \wedge d\sigma_r(x) \wedge dK_{[x]}$$

donde Δ es una función de las bases adaptadas a la intersección de M^q y $M^r, d\sigma_q(x)$ y $d\sigma_r(x)$ indican las correspondientes formas volumen y $dK_{[x]}$ representa la densidad del grupo ortogonal especial.

Ésta fórmula, debida a Santaló, aparece ya en [S52.2], dónde remarca explícitamente que se trata de una fórmula "*importante*". A continuación aplica dicha fórmula para obtener una interesante generalización de la Fórmula de Poincaré

$$\int \sigma_{r+q-n}(M^q \cap M^r) dK = c\sigma_q(M^q)\sigma_r(M^r)$$

donde $c = \int \Delta dK_{[x]}$ y la integral está extendida a las intersecciones no nulas de las variedades.

En [S50.1], Santaló ya había aplicado ésta fórmula a esferas móviles. Ello le permitió dar un nuevo concepto de medida q-dimensional de un conjunto de puntos, que coincide con la definición elemental en muchos casos sencillos. Puede ser una cuestión interesante analizarla en otros contextos.

A continuación, siguiendo a Chern [Ch52], demuestra la fórmula cinemática fundamental, que expresa la integral de la característica de Euler-Poincaré de la intersección de dos dominios de R^n en función de las características de dichos dominios, sus volúmenes, áreas y sus integrales de curvaturas medias.

Como se ha dicho anteriormente, la densidad cinemática en el espacio euclídeo fue introducida por Poincaré. En terminología moderna, ésta es la medida de Haar del grupo de los movimientos que actúa sobre el espacio. Uno de los problemas básicos en Geometría Integral es poder obtener fórmulas explícitas para las integrales de cantidades geométricas sobre la densidad cinemática en función de invariantes integrales bien conocidos.

Para $n = 3$, la fórmula cinemática se debe a Blaschke y puede establecerse de la manera siguiente: Sea dK la densidad cinemática de $\mathbb{R}^3$, normalizada de manera que la medida de todas las posiciones acerca de un punto sea $8\pi^2$. Sea $D_i,\ i = 1, 2$, un dominio con frontera diferenciable, para el cual V_i, $M_1^{(i)}$, $M_2^{(i)}$, χ_i representan respectivamente el volumen, el área de la frontera, la integral de la curvatura media de la frontera y la característica de Euler-Poincaré. Entonces, si D_1 está fija y D_2 se mueve con densidad cinemática dK, se tiene

$$\int \chi(D_1 \cap gD_2)dK = 8\pi^2(4\pi\chi_1 V_2 + 4\pi\chi_2 V_1 + M_1^{(1)}M_2^{(2)} + M_1^{(2)}M_2^{(1)})$$

donde $\chi(D_1 \cap gD_2)$ representa la característica de Euler-Poincaré de la intersección $D_1 \cap gD_2$.

Finalmente, en el caso de convexos, se relaciona la medida cinemática con las quermassintegrales. En esta línea de generalizaciones, en un interesante artículo, Chern extiende la fórmula cinemática a ciertos invariantes de curvaturas seccionales generalizadas, [Ch66], y, dentro de esta línea de investigación (como no podía ser de otra manera), Santaló extiende este último resultado de Chern a Cilindros, [S75].

Capítulo 16 de [S76]. Éste Capítulo se titula **Aplicaciones geométricas y estadísticas; Estereología**. Quizás la contribución más importante de Santaló a las ciencias aplicadas haya sido sentar las bases para el nacimiento de esta nueva especialidad: la Estereología, cuyo objetivo básico es, como dice el propio Santaló, "*cómo determinar la medida de distribución de partículas convexas distribuidas aleatoriamente en el espacio euclídeo de dimensión tres a partir de la medida de distribución de sus secciones con figuras aleatorias de forma conocida (por ejemplo: un cuerpo convexo, un cilindro, un plano, una banda o una línea). La Estereología es una ciencia interdisciplinaria que relaciona materias aparentemente tan dispares como Biología, Ingeniería, Mineralogía, Metalurgia, Biomedicina, Geometría y Estadística*".

Remarca las múltiples aplicaciones prácticas de esta especialidad. Así, se pueden estimar volúmenes, áreas, longitudes, números de partículas, formas de cuerpos, etc.. Ello hace que la Estereología se aplique con éxito a otras ciencias; en particular, a la Biomedicina. En esta dirección, en España cabe destacar el trabajo que sobre este tema están realizando actualmente Cruz-Orive de la Universidad de Cantabria y Gual-Arnau de la Universidad Jaime I de Castellón. De su extensa producción científica en esta línea cabría resaltar [GA97.1] y [GACO98, 00].

Nos atreveríamos a afirmar que el "germen" de la Estereología se encuentra en [S43.1] cuyo título es bien expresivo: *Sobre la distribución probable de corpúsculos en un cuerpo, deducida de la distribución en sus secciones y problemas análogos.* Por su parte, Elías, en la década de los años sesenta, propuso la siguiente definición: "*La Estereología trata sobre un conjunto de métodos para la exploración del espacio de dimensión tres cuando sólo son conocidas secciones de dimensión dos por conjuntos sólidos o bien sus proyecciones*".

Para hacerse una idea de la evolución de la Estereología desde su inicio recomendamos los libros [BJ04] y [J98]. Remarquemos también que cada dos años, desde 1981, se celebra un *Workshop on Stochastic Geometry, Stereology and Image*

Analysis, al que acudió Santaló en 1987, en Berna. La primera reunión tuvo lugar en Aarhus. En 1961 se fundó la *International Society for Stereology (ISS)* que celebra un congreso internacional cada cuatro años.

6.4. Parte IV: Geometría integral en espacios de curvatura constante no nula. *Capítulos 17 a 19 de [S76].* Los dos primeros Capítulos de la parte IV están dedicados a la Geometría Integral en espacios de curvatura constante; esto es, a la Geometría Integral en espacios no-euclídeos. Santaló escribió muchos e interesantes artículos en esta dirección, pero quizás el básico haya sido el fascículo de la Comisión Nacional de la Energía Atómica de Buenos Aires, [S52.2]. En todos ellos extiende muchas de las propiedades de la Geometría Integral euclídea a estos espacios. En esta dirección cabe señalar la Fórmula de Steiner, sus generalizaciones y propiedades, [S50.2, 63.1], así como las Fórmulas de Cauchy y Kubota, [S42.1, 43.2, 80.1 y 80.2]. Algunos de estos resultados ya fueron extendidos a espacios simétricos, [GAMN02]. Santaló define además nuevos conceptos; por ejemplo, para el caso de curvatura negativa, la convexidad por subconjuntos que se comportan como los conjuntos euclídeos, concretamente introduce los conjuntos horoíclicamente convexos ([S67.2, 68, 69] y [SY72]).

Santaló planteaba a menudo en sus artículos nuevos e interesantes problemas, algunos de los cuales siguen abiertos en la actualidad, (por ejemplo, [S63.1, p. 137]). El estudio de la Geometría Integral en espacios de curvatura constante ha sido extendido en varias direcciones por un gran número de matemáticos españoles, entre los que se podrían señalar: Vidal-Abascal (Santiago), Naveira y Miquel (Valencia), Reventós, Gallego y Solanes (U. A. Barcelona), Gual-Arnau y Masó (Castellón) y Tarrío (A Coruña). Muchos de estos matemáticos han publicado con frecuencia trabajos sobre este tema realizados conjuntamente por miembros de un mismo grupo o de grupos diferentes, (véase por ejemplo: [GR85 y 99], [BM99, 02], [BGR01], [GSo01], [NT97], [So05.1 y 05.2]).

Capítulo 17 de [S76]. Analiza el Teorema de Gauss-Bonnet para hipersuperficies de los espacios no euclídeos de curvatura constante. La fórmula clásica del Teorema de Gauss-Bonnet de la teoría de superficies fue generalizada a variedades de dimensiones superiores por Allendoerfer y Weil, pero una demostración más simple fue dada por Chern. Para el caso particular de hipersuperficies de un espacio de curvatura constante la fórmula generalizada de Gauss-Bonnet está contenida en unos resultados obtenidos casi en la misma fecha por Herglotz. En [S62 y 55.1] Santaló analiza esta fórmula, así como los cuerpos polares en la esfera. Es interesante observar cómo en dicha fórmula aparecen involucradas las integrales de las curvaturas medias. En esta dirección parece interesante el artículo de Solanes [So05.1].

Santaló también define la densidad de subespacios análogamente al caso euclídeo. Por ejemplo, la medida de rectas hiperbólicas, introducida ya en [S43.2], está dada por:

$$dG = \cosh p \, dp \wedge d\theta$$

donde p es la distancia de la geodésica, o recta hiperbólica, a un origen prefijado y θ es el ángulo en el origen entre la perpendicular a la geodésica y una dirección prefijada. La notación dG proviene de "*la diferencial de rectas*" en alemán. Esto es lo que debemos integrar para obtener la medida de dichas rectas. Es un ejercicio interesante demostrar que la anterior expresión es invariante por isometrías hiperbólicas. Por ejemplo, los cálculos anteriores en el modelo de Poincaré son bastante complicados. Pero Santaló no trabaja en este modelo y su astucia siempre le permite salir airoso sin demasiados cálculos. Un día le comentó a Reventós: "*Líbrame del matemático que no calcula*". La razón es que para tener habilidad para esquivar cálculos primeramente se debe haber calculado mucho.

A partir de aquí demuestra que en el caso hiperbólico se tiene la siguiente fórmula, formalmente igual al caso euclideo:

$$\int \sigma dG = \pi F$$

donde σ es la longitud de una cuerda arbitraria de un cuerpo convexo C de área F, y la integral está extendida a las geodésicas que cortan el convexo.

La primera vez que aparece la Fórmula Fundamental Cinemática en espacios no euclídeos fue en [S52.2]. Santaló presenta una comunicación en el Congreso Internacional de Amsterdam [S54.8] y, años más tarde, en [S62.2] retoma el tema explicando que da una demostración más directa y detallada y arreglando algunos errores tipográficos.

Capítulo 18 de [S76]. Empieza obteniendo una generalización de la fórmula de Crofton al caso no eucídeo. A continuación presenta la fórmula cinemática fundamental para espacios no euclideos de dimensión arbitraria. Para mayor facilidad, daremos solamente su expresión en dimensiones 2 y 3 ya que la expresión general es algo distinta según la dimensión sea par o impar, [S76].

Obsérvese la belleza de las fórmulas siguientes:

Para $n = 2$:

$$\int \chi(D_0 \cap D_1) dK_1 = (\epsilon K) F_0 F_1 + 2\pi(F_1 \chi_0 + F_0 \chi_1) + L_0 L_1$$

Para $n = 3$:

$$\int \chi(D_0 \cap D_1) dK_1 = 8\pi^2 (V_1 \chi_0 + V_0 \chi_1) + 2\pi(M_1 F_0 + M_0 F_1)$$

donde D_0, D_1 son dominios con borde regular en el espacio no euclídeo de curvatura ϵK, $\epsilon = 0, 1, -1$; L, F, V, M denotan longitud, área, volumen e integral de la curvatura media respectivamente y χ es la característica de Euler, estando las integrales extendidas a todas las posiciones de K_1. Sorprendentemente, el caso $n = 3$ es el único en que la fórmula cinemática no depende de la curvatura del espacio.

A continuación, siguiendo a Allendoerfer [AL48], calcula el volumen del cuerpo paralelo a uno dado en los espacios ambiente de curvatura constante no nula; es decir, obtiene la fórmula de Steiner en ambiente no euclídeo. Pero, debido a su complejidad, tan sólo la explicita para $n = 2$ y $n = 3$. Por ejemplo, el área A_t del convexo paralelo a uno dado en el espacio hiperbólico de curvatura -1, $\mathbb{H}^3$, a distancia t, es

$$A_r = M_0 \cosh^2(t) + M_1 \cosh(t) \sinh(t) + M_2 \sinh^2(t)$$

con M_0 = área del convexo dado, M_1 = dos veces la integral de la curvatura media del convexo dado, M_2 = integral de su curvatura de Gauss.

Capítulo 19 de [S76]. En este Capítulo se incluyen pequeñas secciones que abren interesantes problemas para el desarrollo futuro de la Geometría Integral, tales como la Geometría Integral de Foliaciones en espacios de Riemann, la Geometría Integral sobre espacios complejos, la Geometría Integral Simpléctica y la Geometría Integral desde el punto de vista de Gelfand y Helgason. Comentemos brevemente estos puntos.

7. Otros capítulos de la Geometría Integral y posibles líneas de investigación

7.1. Geometría Integral en los espacios de Riemann. La Geometría Integral en espacios de Riemann de curvatura no constante no puede basarse en el mismo principio con el que se construyó la Geometría Integral de los espacios de curvatura constante ya que, en general, tales espacios no admiten un grupo transitivo de transformaciones que preservan la métrica ni un grupo transitivo de transformaciones que aplica geodésicas en geodésicas. Así, la densidad para un conjunto de geodésicas no puede ser definida por la propiedad de ser invariante bajo un cierto grupo de transformaciones. Sin embargo, como señala Santaló, se puede proceder desde otro punto de vista y definir una medida para conjuntos de geodésicas y conjuntos de puntos la cual, aún no siendo invariante bajo un grupo, tiene propiedades de invariancia que la hacen interesante desde el punto de vista geométrico. Santaló resuelve el problema para las foliaciones de dimensión uno en una variedad de Riemann, definiendo una medida invariante de geodésicas. Aunque la Geometría Integral de foliaciones está sin estudiar en casi toda su totalidad, hemos de señalar las aportaciones a este tema realizadas por Vidal-Abascal, Hermann y Dedecker, entre otros. Para poner de manifiesto la importancia y trascendencia que han tenido algunos resultados obtenidos por Santaló, se puede citar por ejemplo una fórmula integral suya, la (19. 23) de la *Enciclopedia*, que se refiere a una aplicación de la medida de un conjunto de geodésicas dependiendo de (n-1)-parámetros, siendo n la dimensión de la variedad. Esta fórmula sigue siendo utilizada por un gran número de matemáticos; entre los que cabría destacar a Croke en la Universidad de Pensylvania, [CR80, 84.1 y 84.2].

7.2. Geometría Integral Compleja. La Geometría Integral Compleja, es decir, la Geometría Integral sobre espacios complejos no ha sido suficientemente desarrollada y merecería un estudio más profundo. En un artículo publicado en Amer. J. Math., [S52.3], Santaló define y analiza la densidad cinemática del grupo unitario y determina su volumen. También estudia densidades invariantes de subespacios lineales. En [NG92] y [N93], los autores han analizado propiedades sobre densidades invariantes de subespacios complejos del espacio euclídeo C^n. Evidentemente, el grupo estructural de la Geometría Integral en el espacio euclídeo complejo es el grupo unitario y una gran cantidad de propiedades de la Geometría Integral real se puede trasladar sin grandes dificultades al caso complejo. En esta geometría también es posible definir las medidas promediadas; sin embargo, no parece fácil obtener una fórmula del tipo de la de Steiner para dichas medidas. Si fuese posible dar una explicación analítica natural de las mismas y con una interpretación geométrica adecuada, ésta permitiría, casi con seguridad, desarrollar la teoría de la Geometría Integral Compleja en toda su generalidad.

7.3. Geometría Integral en la línea de Gelfand. El término Geometría Integral también fue usado en la bibliografía matemática en un sentido aparentemente diferente del de la escuela de Blaschke, Santaló y Chern. A comienzos del siglo XX, J. Radon, [R17], probó que una función diferenciable sobre el espacio euclídeo de dimensión tres puede determinarse explícitamente por medio de sus integrales sobre los planos. En torno a esta idea se construye la teoría matemática de la "Transformada de Radon", la cual está relacionada con la transformada de Fourier de una función, [H84, p. 99].

La interpretación clásica de los rayos X se puede ver como un intento de reconstruir propiedades de un cuerpo de dimensión tres utilizando la proyección de estos rayos sobre un plano. La interpretación geométrica moderna de la acción de los rayos X y de muchos otros elementos utilizados en la Medicina actual se puede hacer utilizando la transformada de Radon, [C63, 64], [H84]. Aunque los dos conceptos de Geometría Integral (escuelas de Blaschke, Santaló y Chern por una parte y las de Gelfand y Helgason por otra) parecen no estar relacionados, Guillemin, [G84], en una observación al margen, indica que en efecto sí lo están a través del cálculo de las medidas promediadas. En 1977 se publica en el Bull. Amer. Math. Soc. un artículo excepcional titulado: *Aspectos matemáticos y prácticos del problema de reconstruir objetos a partir de radiografías*, [SSW77]. En él la matemática utilizada es fundamentalmente la teoría de Geometría Integral que aparece en [SK78], [Z80] y [H84]. Así, es posible explicar desde un punto de vista matemático todas las actividades médicas de la Tomografía. Esta rama del Análisis y de la Geometría experimentó un considerable desarrollo durante los últimos años y está fundamentada en la obra matemática de Gelfand, [GG59], [GGSY69], [GGY66] y Helgason, [H63, 64 y 65], [H84], entre otros. En el último apartado de su libro Santaló nos invita a profundizar en el estudio de esta nueva técnica y en este momento ésta parece ser una de las líneas de investigación más interesante en el campo de la Geometría Integral. Durante los últimos años de su vida, y siempre que le era posible, Santaló asistía a todos aquellos congresos que sobre el tema se venían celebrando; en particular, los que patrocinaba la American Mathematical Society.

7.4. Geometría Integral Simpléctica. Santaló sólo indica, muy brevemente, que la Geometría Integral Simpléctica ha sido muy poco estudiada y que merecería un estudio más profundo. En esta dirección, los resultados más recientes se han conseguido en la línea de Gelfand y Helgason.

8. Algunas publicaciones importantes no recogidas en la Enciclopedia

Aunque la *Enciclopedia* recopila una gran parte de la producción matemática del autor hasta la fecha de su publicación, existen algunos artículos muy importantes cuyo contenido no aparece reflejado explícitamente en el libro. Por ejemplo, en *Sobre los sistemas completos de desigualdades entre tres elementos de una figura convexa plana*, [S61.3], Santaló retoma un viejo problema de Blaschke en el que se pretendía determinar una figura geométrica convexa a partir de un grupo de desigualdades entre números que debían tener un significado geométrico. Él plantea un total de 20 casos, de los que resuelve 6 y plantea dos conjeturas. Éstas han sido probadas por un grupo de investigación de las Universidades de Alicante y Murcia del que forman parte, entre otros los profesores Segura-Gómis, Hernández-Cifre, Salinas y Herrero, [HCSG00] y [HC00]. En esta dirección existen aún una gran cantidad de problemas interesantes abiertos.

Sea X^n una variedad diferenciable compacta de dimensión n y sin frontera inmersa en el espacio euclídeo R^{n+N}. En [S67.1 y 70] Santaló dio una definición local de unas ciertas curvaturas, de manera que éstas aparecen como la integral sobre la variedad del valor absoluto de ciertas formas diferenciales definidas en cada punto de la misma. Éstas también le permiten comparar las nuevas curvaturas con otras definidas previamente en la bibliografía especializada; en efecto, muestra como generalizan las curvaturas definidas por Chern y Lashof, [ChL57, 58]. Considera además varios ejemplos, como el caso de superficies X^2 inmersas en R^4. Algunos de estos resultados fueron generalizados a dimensiones superiores, [N94].

Además de la influencia y relación de los resultados de los trabajos de Santaló con la Geometría y la Estereología, cabe destacar también, aunque no aparezca de manera explícita en la Enciclopedia, la relación de algunos resultados de Santaló con la Geometría Estocástica. Esta disciplina también tiene sus raíces en la Geometría Integral y la Probabilidad y considera estructuras geométricas aleatorias. Esta teoría sobre conjuntos aleatorios se desarrolló en los años 70 de manera independiente por varios autores (Kendall, Matheron, Mecke, Stoyan, Miles,...) y sus técnicas se aplican en campos como el análisis de imagen, las redes de telecomunicaciones, la mineralogía, etc. Algunos de los trabajos pioneros en Geometría Estocástica consideran como conjuntos aleatorios rectas en el plano y estudian propiedades de los polígonos resultantes. En este sentido, Santaló y Yañez generalizan en [SY72.3] algunos de estos resultados para el caso hiperbólico.

La producción científica de Santaló continuó todavía durante los años posteriores a su jubilación con la publicación de varios artículos de gran impacto, por ejemplo [S88], si bien cabe señalar que se dedicó con más intensidad a las cuestiones sobre la Didáctica de las Matemáticas, y a impartir un gran número de cursos, cursillos, seminarios y conferencias.

9. Repercusión científica de la obra de Santaló

Aunque haya sido a vista de pájaro, en esta memoria hemos intentado poner de manifiesto los aspectos que consideramos más sobresalientes en la obra del Profesor Santaló. Al analizarla, se destacan algunas características fundamentales, a saber: su gran poder de abstracción, una brillantísima intuición geométrica y una sorprendente claridad expositiva. No es nada extraño, pues, que su obra haya tenido hondas repercusiones en la comunidad científica y en la sociedad. Se puede afirmar con absoluta seguridad que hombres como Santaló, serán siempre necesarios para el desarrollo de las Matemáticas, de sus aplicaciones y de su divulgación. Por las excepcionales y profundas contribuciones que él ha hecho a la comunidad matemática y a la sociedad, deseamos expresarle nuestra más profunda gratitud, respecto, cariño y admiración. En reconocimiento a su extraordinaria personalidad científica y humana, en 1999 y por iniciativa de Naveira, entonces Presidente de la Real Sociedad Matemática Española, fue propuesto como Socio de Honor de la mencionada Institución.

9.1. Importancia internacional de la obra de Santaló. Resultaría muy extenso hacer un resumen de la importancia y repercusión de su obra en la comunidad científica internacional. Aparte de la que ha tenido en España y Argentina, sólo mencionaremos que sus resultados han sido aplicados tanto a la Geometría Integral como a otras líneas de investigación, entre otros, por matemáticos de Estados Unidos (Croke en Pensylvania, Howard en Carolina del Sur, Elías en Chicago, Chern en Berkeley y Zhang en New York), Francia (Langevin en Dijon, Gorse en la teoría de partículas en París y Álvarez-Paiva en Nancy), Alemania (Sulanke y Teufel en Stuttgart, Weyl en Karlsruhe y Schneider en Friburgo), Rumania (Stoka) y China (Ren De Lin).

9.2. Relación de Santaló con la matemática española. Pese al aislamiento científico que vivió la ciencia matemática española hasta las últimas décadas del siglo XX, Santaló siempre mantuvo una interesante relación científica con algunos matemáticos españoles. En particular, cabe destacar sus contactos científicos con Vidal-Abascal, García-Rodeja (Santiago) y Sancho de San Román (Zaragoza). A partir de la década de los años setenta, jóvenes matemáticos españoles comienzan a estudiar su obra y a escribir interesantes artículos de investigación. Así, se podrían citar diversas publicaciones de Gual-Arnau (UJI, Castellón), Segura-Gómis, Salinas y Pastor (U. Alicante), Hernández-Cifre y Herrero (U. Murcia), Reventós, Gallego y Solanes (U. A. Barcelona), Cruz-Orive (U. Santander), Tarrío (U. A Coruña) y Naveira (Valencia E. G.).

Históricamente, el primer español que siguió de una forma directa a Santaló fue Vidal-Abascal, en Santiago de Compostela, en las décadas 50—60. Su trabajo sobre la fórmula de Steiner en espacios de curvatura constante [VA47.1] fue consecuencia de esta relación. Cabe destacar también [VA47.2, 47.3, 48.1, 50.1, 50.2, 53, 59, 60] y [VAGR52]. De hecho, según comenta Naveira, la relación entre Santaló y Vidal-Abascal proviene de los años cuarenta cuando Vidal-Abascal coincide en Madrid con Marcel, hermano de Santaló. Parece que fue a través de él como se relacionaron ambos. Marcel (Marcelo para ellos) desarrolló su actividad como astrónomo en México y sólo volvió a España en los últimos años.

Puesto que todo espacio homogéneo define de una manera natural una foliación, en los años siguientes, Vidal-Abascal se dedica al estudio y análisis de las variedades foliadas en general y, en particular, a la medida de sus hojas (véase por ejemplo, [VA 66, 67.1 y 67.2]). En esta línea, y bajo la dirección de Vidal-Abascal, Naveira presentó su tesis doctoral en Santiago en 1968 sobre "*Variedades foliadas con* *métrica casi-fibrada*" que, como es bien sabido son las foliaciones Riemannianas o de Reinhart. Ésta sería la primera tesis de Matemáticas en dicha Universidad.

Santaló y Vidal-Abascal en la Plaza del Obradoiro, Santiago de Compostela 1967.

En calidad de profesor invitado, en 1967 Santaló asiste al II Coloquio Internacional de Geometría Diferencial de Santiago de Compostela. Naveira tuvo el placer y el honor de conocerle personalmente y apreciar su excepcional personalidad, desde el punto de vista humano y no científico, ya que en aquel momento su formación no le permitía aún comprender y admirar la belleza y riqueza de su conferencia, en la que propuso una definición de las curvaturas totales absolutas de un subconjunto cerrado del espacio euclídeo. Esta definición resultaría fundamental para una gran parte de la obra de Santaló, tanto desde el punto de vista de la propia Geometría Integral como de sus aplicaciones a otras especialidades científicas, en particular a la Estereología.

Con motivo de la jubilación de Vidal-Abascal, en 1978 se organiza en Santiago de Compostela el "IV International Colloquium on Differential Geometry" al que también asiste Santaló, impartiendo la conferencia inaugural. En esta ocasión Naveira sí tuvo la oportunidad de discutir con él varias cuestiones matemáticas. Su posterior visita a la Universidad de Valencia, durante este mismo viaje, resultó de un excepcional valor didáctico y formativo para muchos jóvenes investigadores en Geometría en aquella Universidad. Se aprovechó esta visita a Valencia para discutir con él sobre diversos aspectos de las líneas de investigación que estaban de actualidad en la Geometría Diferencial e Integral en aquel momento; en particular, sobre algunas de sus líneas de investigación.

Volviendo a la década de los 50, y bajo la influencia de Santaló, encontramos también la aportación de Sancho de San Román, quién trabajó en temas de Geometría Integral antes de dedicarse al álgebra, [SSR56, 57, 63, 64 y 67], así como de García-Rodeja [VAGR52], y Yáñez [SY72].

Para hacernos una idea de la importancia de su influencia en España en aquella época, destaquemos la fórmula de Vidal-Abascal que generaliza la fórmula de Steiner:

$$L_\rho = 2\pi(\sin(\rho\sqrt{k})/\sqrt{k} - F\sqrt{k}\sin(\rho\sqrt{k}) + L\cos(\rho\sqrt{k}))$$

donde L y F son respectivamente la longitud y área de una curva sobre una superficie de curvatura constante k, y L_ρ es la longitud de otra curva a distancia ρ de la anterior.

También Naveira, en su etapa en Valencia, continúa estudiando algunos de los problemas de Geometría Integral de Santaló, obteniendo algunos resultados interesantes. Destaquemos por ejemplo [NSG86, 89, 90], [NG92], [N93], ([N94],) o los obtenidos con Tarrío en [NT95, 97 y 00]. Naveira también estudia las densidades de subespacios lineales de C^n y obtiene fórmulas del tipo

$$dP \wedge dP_1 \wedge \cdots \wedge dP_{2r} = \triangle^{n-r} dP(L_r) \wedge dP_1(L_r) \wedge \cdots \wedge dP_{2r}(L_r) \wedge dL_r$$

dónde P, P_1,. . . ,P_{2r} son $2r+1$ puntos del subespacio holomorfo L_r, que generalizan fórmulas de Blaschke al caso de subespacios holomorfos.

A comienzos de los años ochenta, y en colaboración con Segura-Gómis, Naveira comienza a interesarse seriamente por la Geometría Integral al observar que el Problema Isoperimétrico, tan antiguo e interesante, estaba directamente ligado tanto a la Geometría Integral como al Análisis Matemático. Por ejemplo, una demostración elemental del mismo se puede ver en la primera parte de la *Enciclopedia* [S76].

En ésta línea cabe destacar los trabajos de Segura-Gómis, Hernández-Cifre y otros miembros de su escuela sobre conjuntos completos de desigualdades en los que cierran algunas conjeturas planteadas por Santaló en [S59]. Ver por ejemplo [HCSG98.1], [HCSG98.2], [HCST98], [HC00] y la solución a las conjeturas de [S59] en [HCSG00]. Concretamente, si se tiene un cuerpo convexo del espacio y se representa por V su volumen, F el área, y M la curvatura media total, entonces se cumple

$$M^2 \geq 4\pi F, F^2 \geq 3VM$$

El problema que plantea Santaló en [S59], y que llamamos sistemas completos de desigualdades, consiste en saber si dados tres números reales V, F, M cumpliendo las desigualdades anteriores, existe un cuerpo convexo que los admite respectivamente como volumen, área y curvatura media total. De hecho, en este caso falta otra desigualdad y el problema general sigue abierto. En [S59] Santaló estudia este tipo de problemas en el plano. En [HCSG00] Segura-Gómis y Hernández-Cifre demuestran, por ejemplo, que

$$(4R^2 - d^2)d^4 \leq 4\omega^2 R^4$$

y dan un sistema completo de desigualdades que involucran (d, ω, R) (d = diámetro, ω = amplitud, R = circunradio).

También en Valencia cabe destacar la aportación de Miquel quien, junto con Borisenko, y utilizando algún resultado de [NT97] estudia la curvatura total de hipersuperficies convexas en el espacio hiperbólico, [BM99]. Posteriormente, aprovechando una estáncia de Borisenko en Barcelona, éste, Gallego y Reventós, extienden este tipo de resultados a variedades de Hadamard, [BGR01].

La relación de Santaló con los geómetras de Barcelona proviene de la conferencia que imparte en el First International Symposium on Statistics en Noviembre de 1983, [S83]. En dicha ocasión Santaló plantea en una servilleta a Reventós la conjetura sobre los convexos hiperbólicos [GR85]. El hecho de que Santaló asistiese a este Symposium en Barcelona, organizado por Bonet, Martí y Prat, proviene probablemente de la buena relación que mantuvo con la Universitat Politécnica de Catalunya, en la que estaba Pi Calleja, matemático muy relacionado con Rey Pastor, y de la iniciativa demostrada por los también matemáticos Bonet y Trillas, a la postre buenos amigos de Santaló. De hecho, Alsina, Bonet y Trillas, junto con Miguel de Guzmán, también mantuvieron desde los años 70 un contacto permanente con Santaló.

Cabe señalar que en 1977 Santaló ya había estado en Barcelona presidiendo el Comité Científico y como conferenciante en el Primer Congreso Internacional de Matemáticas al servicio del Hombre. Mantiene relación con el grupo Rosa Sensat sobre la enseñanza de las matemáticas, publicando dos artículos en la revista L'Escaire del Departamento de Matemáticas de la escuela de Arquitectura, [S80.5 y 81], en la que se publica también una entrevista (L'Escaire, Vol. 15, 1985).

En Octubre de 1984 se inaugura el Centre de Recerca Matemàtica (CRM) con un curso suyo sobre Geometría Integral en el plano afín, realizado en la Universidad de Barcelona, del que distribuyen una notas, [S84].

Mientras tanto, Gallego y Reventós cierran la conjetura de Santaló y Yáñez, expuesta en [SY72], sobre convexos hiperbólicos [GR85]. Ver también [G84], [BGR01], [GR99]. Recientemente, Solanes ha obtenido también interesantes resultados [GSo01, 05.1, 05.2]. Destaquemos por ejemplo que en contraste con la situación euclídea se demuestra en [GSo01] que el comportamiento asintótico del cociente (diámetro/longitud) para convexos que tienden a llenar el plano hiperbólico toma cualquier valor del intervalo $[0, 1/2]$, (en el caso euclídeo está acotado inferiormente por $1/\pi$).

La relación entre los geómetras integrales de Valéncia y Barcelona cristaliza en un artículo conjunto de Gallego, Naveira y Solanes [GNS04].

En la línea más aplicada de la Estereología destaca el profesor L. M. Cruz-Orive y su escuela de Berna, actualmente en la Universidad de Cantabria (Santander) quien, junto con el alumno de Naveira, Gual-Arnau, continúa trabajando intensamente en aplicaciones de la geometría integral. De Gual-Arnau cabe destacar los artículos [GAN94, 95, 97], [GANT97], [GACO96], [GA97.1, 97.2], [GACO98, 00], [GAN99], algunos de ellos conjuntos con Naveira y Tarrío. Actualmente, desarrolla su labor en la Universidad Jaume I de Castellón. De Cruz-Orive destaquemos también [CO79, 80, 85, 89] y [BCO95].

La relación personal y científica de Santaló con Cruz-Orive merece un comentario especial. Éste cursó la carrera de Ingeniero Agrónomo en la Universidad Politécnica de Madrid. Una vez finalizados sus estudios en 1969, se da cuenta que su verdadera vocación eran las Matemáticas. Realiza su tesis doctoral en la rama de Estadística en la Universidad de Sheffield y comienza a interesarse en el estudio de la Geometría Integral, fundamentalmente en la Estereología. Durante su estancia en Berna, y en la actualidad en la Universidad de Cantabria, fue siempre uno de los grandes impulsores del desarrollo de la Estereología, fundamentalmente en sus aplicaciones biomédicas. Coincidió en muchos congresos de la especialidad con Santaló de quien llegó a ser un gran amigo y admirador. Sin temor a equivocarnos, consideramos que Cruz-Orive es una de las personas que mejor entendió la obra de Santaló desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas.

La relación personal y científica de Santaló con los autores de esta memoria continúa a través de los años. Muy especialmente cuando, en noviembre de 1991, Santaló imparte un curso de dos semanas en la Cátedra Ferrater Mora del Pensamiento Contemporáneo de Girona. Por indicación suya, fuimos invitados a participar en el mismo varios profesores de Universidades españolas y extranjeras. Allí coincidimos con Affentranger y Cruz–Orive, entre otros. Los allí presentes y que nos considerábamos discípulos suyos, le animamos a que preparase una publicación con su contenido. Este excepcional ensayo sobre *La matemática: una filosofía y una técnica,* [S94], fue publicado en catalán en 1993 y en español en 1994. Fue ésta una ocasión única para Naveira, ya que le permitió entablar con el Santaló y su familia una relación de amistad que continúa en la actualidad.

Affentranger fue un alumno de Santaló de origen hispano-alemán, que pasó un tiempo en Barcelona, publicando incluso en la revista *Pub. Mat. UAB.* del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona, [A92], aunque su carrera transcurre en Alemania [A90], [AS92].

Una anécdota curiosa es la siguiente: el primer artículo que dio Santaló a Affentranger fue el [GR85], de manera que en su primer viaje a Barcelona y estando en casa de sus familiares, preguntó como podría conectar con matemáticos de Barcelona. Esto era muy fácil para sus familiares pues un primo suyo que vivía en la casa de al lado, en el mismo jardín, era matemático y se lo podría decir. Éste primo era Reventós. Le fueron a buscar y ¡cual no fue la sorpresa de Affentranger cuando les presentaron!

A este curso en Girona asistió algunos días Gual-Arnau, quien también estaba interesado en la Geometría Integral. Desde entonces, Gual-Arnau y Cruz-Orive han publicado diversos artículos en los que, utilizando las técnicas de la Geometría Integral y de la Estereología, obtienen resultados en Tomografía, con interesantes aplicaciones a la Biomedicina. Actualmente, Gual-Arnau y su grupo de investigación participan en un proyecto de investigación conjunto con el Hospital La Fe de Valencia, aplicando resultados de la Estereología a problemas médicos.

En agosto de 1997 Naveira fue invitado por las Universidades de Buenos Aires, La Plata y Córdoba a pronunciar conferencias en los correspondientes Departamentos de Matemáticas de dichas Universidades. En Buenos Aires, estuvo presente el Profesor Santaló. Fue una ocasión única para poder poner de manifiesto ante una parte de la comunidad matemática argentina la importancia de su extraordinaria personalidad humana, de su excepcional obra científica, y su influencia en numerosos matemáticos españoles durante los últimos sesenta años.

Para cerrar esta sección de relación con matemáticos españoles recordemos también el curso que en febrero de 1982 impartió Santaló en la Universidad Complutense de Madrid sobre Geometría Integral.

9.3. Relación de Santaló con la matemática argentina. En Argentina Santaló dirigió doce tesis doctorales en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires: Leticia Varela (1952), Alberto Ayub (1955), Raúl Luccioni (1963), Carlos Conton (1973), Ricardo Noriega (1976), Guillermo Keilhauer (1980), Graciela Birman (1980), Flora Gutiérrez (1985), Ursula Molter (1985), Liliana Gysin (1987), Fernando Affentranger (1988) y Ana Berenice Guerrero (1988), todas ellas en el área de Geometría y especialmente en Geometría Integral. Ver [B04].

Birman, como especialista en la obra científica del Profesor Santaló, figura como colaboradora de la edición de la **"Selecta"**. También en Argentina, quisiéramos destacar la labor conjunta que él ha desarrollado con los geómetras hispano-argentinos Balanzat, Yáñez y con el argentino Fava. Algunos de los artículos conjuntos con Yáñez resultaron fundamentales para posteriores investigaciones por parte de algunos miembros de los Departamentos de Matemáticas de las Universidades de Valencia y Autónoma de Barcelona, entre otros.

Agradecimientos: Agradecemos a Manuel de León, Profesor Investigador del C. S. I. C. (Madrid), por habernos animado a emprender este trabajo. Agradecemos también la colaboración del Profesor Ximo Gual-Arnau que nos ha ayudado en diversos aspectos de la misma. También nuestro agradecimiento a los profesores Eduardo Gallego y Vicente Miquel que han tenido la amabilidad de haber hecho una revisión detallada de la versión preliminar.

Referencias

[A90] Affentranger, F., Random spheres in a convex body, *Arch. Math. Basel*, **55** (1990), 74–81.

[A92] Affentranger, F., Random approximation of convex bodies, *Pub. Mat. UAB.* **36** (1992), 85–109.

[AS92] Affentranger, F. y Schneider, R., Random projections of regular simplices, *Discret Comput. Geometry* **7** (1992), 219–226.

[AL48] Allendoerfer, C. B., Steiner's formulae on a general S^{n+1}, *Bull. Amer. Mat. Soc.* **54** (1948), 128–135.

[AS02] Alsina, C., Luís A. Santaló: la lección de su vida, un recuerdo para siempre, *Acto homenaje a la memória de D. Luís A. Santaló, celebrado en la Real Academia de Ciencias,* Madrid 30 de Mayo de 2002.

[BJ04] Baddley, A. J., Jensen, E. B. V. *Stereology for Staticians.* Chapman & Hall/ CRC (2004).

[BCO95] Baddley, A. J. y Cruz-Orive, L. M., The Rao-Blackwell theorem in stereology and some counterexamples, *Adv. in Appl. Probab.* **27** (1995), 2–19.

[B32] Bieberbach, L., *Differentialgeometre.* B. G. Teubner, Leipzig–Berlín, 1932.

[B04] Birman, G. S., Luis A. Santaló en Argentina, *La Gaceta de la RSME,* 7 (2004) 567–578.

[BL35] Blaschke, W., Integralgeometrie 2: Zu ergebnissen von M. W. Crofton, *Bull. Math. Soc. Roumaine Sci.* **37** (1935), 3–11.

[BL56] Blaschke, W., *Kreis und Kugel,* 2^a Ed., W de Gruyter, Berlín, 1956.

[BF34] Bonnesen, T. y Fenchel, W., *Theorie der konvexen Körper.* Ergeb. Math., Springer, Berlín, 1934.

[BM99] Borisenko, A. A. y Miquel V., Total curvatures of convex hypersurfaces in hyperbolic space, *Illinois J. Math.* **43** (1999), 61–78.

[BGR01] Borisenko, A. A., Gallego, E. y Reventós, A., Relation between area and volume for λ - convex sets in Hadamard manifold, *Differential Geom. Appl.* **14** (2001), 267–280.

[BM02] Borisenko, A. A. y Miquel, V., Comparison Theorems on Convex Hypersurfaces in Hadamard Manifolds, *Ann. Global Anal. Geom.* **21** (2002), 191–202.

[BZ] Burago, Yu. D. y Zalgaller, V. A., *Geometric Inequalities,* A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, 285, Springer Verlag (1988). Edición original en ruso: Nauka, Leningrad, 1980.

[Ca52] Cartan, E., Le principe de dualité et certaines integrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace reglé, *Bull Soc. Math. France* **24** (1896), 140–177. (Oeuvres complètes, P. II, I, 265–302, Gauthier-Villars, Paris, 1952).

[Ch42] Chern, S. S., On integral geometry in Klein spaces, *Ann. of Math.* **43** (1942), 178–189.

[Ch52] Chern, S. S., On the kinematic formula in the Euclidean space of n dimensions, *Amer. J. Math.* **74** (1952), 227–236.

[Ch66] Chern, S. S., On the kinematic formula in integral geometry, *J. Math. and Mech.* **16** (1966), 77–94.

[ChL57] Chern, S. S., Lashof, R. K., On the total curvature of immersed manifolds, I, *Amer. J. Math.* **79** (1957), 306–318.

[ChL58] Chern, S. S., Lashof, R. K., On the total curvature of immersed manifolds, II, *Michigan Math. J.* **5** (1958), 5–12.

[ChY40] Chern, S. S. y Yien, C. T., Sulla formula principale cinematica dello spazio ad n dimensioni, *Bolletino della Unione Matematica Italiana* **2** (1940), 432–437.

[C63] Cormack, A. M., Representation of a function by its line with some radiological application, I. *J. Apl. Phys.* **34** (1963), 2722–2727.

[C64] Cormack, A. M., Representation of a function by its line with some radiological application, II. *J. Apl. Phys.* **35** (1964), 2908–2912.

[CR80] Croke, C. B., Some isoperimetric inequalities and eigenvalues estimates, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **13** (1980), 419–435.

[CR84.1] Croke, C. B., A sharp four dimensional isoperimetric inequality, *Comment. Math. Helv.* **59** (1984), 187–192.

[CR84.2] Croke, C. B., Curvature free volume estimates, *Invent. Math.* **76** (1984), 515–521.

[CO79] Cruz-Orive, L. M., Distortion of certain Voronoi tessellations when one particle moves, *J. Appl. Probab.* **16** (1979), 95–103.

[CO80] Cruz-Orive, L. M., Best linear unbiased estimators for stereology, *Biometrics* **36** (1980), 595–605.

[CO85] Cruz-Orive, L. M., Estimating volumes from systematic hyperplane sections, *J. Appl. Probab.* **22** (1985), 518–530.

[CO89] Cruz-Orive, L. M., Precision of systematic sampling on a step functions, *Geobild'89, Math. Res., Akademie-Verlag, Berlin* **51** (1989), 185-193.

[D99] Duran, X., *Lluís Santaló*, Col.lecció de Biografies de la Fundació Catalana per a la Recerca **7**, 1999.

[FS@] Fava, N. y Segovia, C., Luís Santaló, http://www.rincon http://www.rincon *matematico.com/biografias/santalo.htm.*

[GR85] Gallego, E. y Reventós, A., Asymtotic behavior of convex sets in the hyperbolic plane, *J. Diff. Geometry* **21** (1985), 63–72.

[GR99] Gallego, E. y Reventós, A., Asymptotic behavior of λ - convex sets in the hyperbolic plane, *Geom. Dedicata* **76** (1999), 275–289.

[GSo01] Gallego, E. y Solanes, G., Perimeter, diameter and area of convex sets in the hyperbolic plane, *J. London Math. Soc.* **64** (2001), 161–178.

[GSo05] Gallego, E. y Solanes, G., Integral geometry and geometric inequalities in hiperbolic sapce, *Diff. Geom. and Appl.* 22 (2005) 315-325.

[GNS04] Gallego, E., Naveira, A. M. y Solanes G., Horospheres and convex bodies in n-dimensional hyperbolic space. *Geom. Dedicata* **103** (2004), 103-114.

[GG59] Gelfand, I. M. y Graev, M. I., The geometry of homogeneous spaces, group representations in homogeneous spaces and questions in integral geometry related to them, 1, *Trans. Moscow Math. Soc.* **8** (1959), 321–390.

[GGSY69] Gelfand, I. M., Graev, M. I. y Shapiro, Z. Y., Differential forms and integral geometry, *Funct. Anal. and Appl.* **3** (1969), 101–114, (Translation).

[GGY66] Gelfand, I. M., Graev, M. I. y Vilenkin, N. Y., Generalized Functions, V. 5: Integral Geometry and Representation Theory, *Academic Press*, N. Y., 1966.

[Gy90] Gray, A., *Tubes*, Addison-Wesley Publ. C., 1990.

[GA97.1] Gual-Arnau, X., Stereological implications of the geometry of cones, *Biom. J.* **39** (1997), 627–635.

[GA97.2] Gual-Arnau, X., On the definition of total absolute curvatures in integral geometry, *Acta Math. Hungar.* **76** (1997), 249–256.

[GACO96] Gual-Arnau, X. y Cruz-Orive, L., Consistency in systematic sampling, *Adv. in Appl. Probab.* **28** (1996), 982–992.

[GACO98] Gual-Arnau, X. y Cruz-Orive, L., Variance prediction under systematic sampling with geometric proves, *Adv. in Appl. Probab. (Section: Stoch. Geom.)* **30** (1998), 889–903.

[GACO00] Gual-Arnau, X. y Cruz-Orive, L., Systematical sampling on the circle and on the sphere, *Adv. in Appl. Probab. (Section: Stoch. Geom.)* **32** (2000), 628–647.

[GAMN02] X. Gual-Arnau, X., R. Masó y Naveira, A. M. Variational properties of the integrated mean curvatures of tubes in symmetric spaces, *Chin. Ann. of Math.* 23B (2002), 53–62

[GAN94] Gual-Arnau, X. y Naveira, A. M., The volume of geodesic balls and tubes about totally geodesic submanifolds in $\mathrm{S}^n(1)$\times $\mathrm{S}^m(1)$, *Proc. of 23 conference on Geometry and Topology, Cluj-Napoca,* 1994, 71–79.

[GAN95] Gual-Arnau, X. y Naveira, A. M., Total curvatures of compact complex submanifolds in CP^n, *Ann. Global Anal. Geom.* **13** (1995), 9–18.

[GAN97] Gual-Arnau, X. y Naveira, A. M., The volume of geodesic balls and tubes about totally geodesic submanifolds in compact symmmetric spaces, *Diff. Geom. and Appl.* **7** (1997), 101–113.

[GANT97] Gual-Arnau, X., Naveira, A. M. y Tarrío, A., An introduction to integral geometry in the n-dimensional quaternionic space, *Proceedings 3^{rd} International Workshop on Differential Geometry and its Applications. Sibiu,* **5** (1997), 175–181.

[GAN99] Gual-Arnau, X. y Naveira, A. M., Volume of tubes in noncompact symmmetric spaces, *Publ. Math. Debreecen* **54** (1999), 313–320.

[G84] Guillemin, V., Perspectives in integral geometry, *Contemp. Math.* **63** (1984), 135–150.

[Ha57] Hadwiger, H., *Vorlesungen über inhalt, Oberfläche und isoperimetrie,* Spriger Berlin, 1957.

[H63] Helgason, S., Duality and Radon transform for symmetric spaces, *Amer. J. Math.* **85** (1963), 887–692.

[H64] Helgason, S., A duality in integral geometry: some generalizations of the Radon transform, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* **70** (1964), 435–446.

[H65] Helgason, S., The Radon transform on euclidean spaces, compact two point homogeneous spaces and Grassmann manifolds, *Acta Math.* **113** (1965), 153–180.

[H84] Helgason, S., *Groups and Geometrical Analysis: Integral geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions*, Academic Press, N. Y., 1984.

[HCSG98.1] Hernández-Cifre, M. A. y Segura-Gómis, S., Some inequalities for planar convex sets containing one lattice point, *Bull. Austral. Math. Soc.* **58** (1998), 159–166.

[HCSG98.2] Hernández-Cifre, M. A. y Segura-Gómis, S., Some area-diameter inequalities for two-dimensional lattices, *Geom. Dedicata* **72** (1998), 325–330.

[HCSG00] Hernández-Cifre, M. A. y Segura-Gómis, S., The Missing Boundaries of the Santaló diagrams for the cases (d, w, R) and (w, R, r), *Discrete. Comput. Geometry* **23** (2000), 381–388.

[HC00] Hernández-Cifre, M. A., Is there a planar convex set with given width, diameter and inradius? *Amer. Math. Monthly* **107** (2000), 893–900.

[HCST98] Hernández-Cifre, M. A. y Scott, P. R., A isodiametric problem with lattice point constraints, *Bull. Austral. Math. Soc.* **57** (1998), 289–294.

[J98] Jensen, E. B. V. *Local Stereology.* World Scientific (1998).

[NG92] Naveira, A. M. y García, F., Some results of integral geometry for density of linear subspaces of C^n. *Rend. di Mathematica di Roma* **12** (1992), 921–935.

[N93] Naveira, A. M., Some remarks about integral geometry in the complex space C^n, *Rend. di Mathematica di Roma* **13** (1993), 331–346.

[N94] Naveira, A. M., On the total (non-absolute) curvature of an even-dimensional submanifold X^n immersed in R^{n+2}, *Rev. Mat. Univ. Complutense de Madrid* **7** (1994), 279–287.

[N01] Naveira, A. M., Sobre la labor investigadora en Geometría Integral de Luis Antonio Santaló Sors, *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat. (España)* **95** (2001), 177–186.

[NSG86] Naveira, A. M., Segura-Gómis, S., The isoperimetric inequality and the geodesic spheres. Some geometrical consequences, *Differential geometry, Peñiscola, Lecture Notes in Math.* **1209** (1986), 235–242.

[NSG89] Naveira, A. M. y Segura, S., Some remarks about the isoperimetric problem, *Proc. Intern. Meeting on Diff. Geometry and its Appl.* Dubrovnik (1989), 243–252.

[NSG90] Naveira, A. M. y Segura-Gómis, S., Some isoperimetric inequalities for the space forms, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* **35** (1990), 249–259.

[NT95] Naveira, A. M. y Tarrío, A. Some results about integral geometry in 3 and 4 dimensional spaces, *An. Stiint. Univ. Ovidius Constança, Ser. Mat.* **3** (1995), 71–81.

[NT97] Naveira, A. M. y Tarrío, A., Two problems on h-convex sets in the hyperbolic space, *Arch. Math.* (Basel) **68** (1997), 514–519.

[NT00] Naveira, A. M. y Tarrío, A., Some properties of integral geometry of generalized flag manifolds, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **65** (2000), 233–246.

[NT07] Naveira, A. M. y Tarrío, A., A method for the resolution of the Jacobi equation Y" + RY = 0 on the manifold Sp(2) / SU(2), Preprint. 2007.

[P36] Petkantschin, B., *Zusammenhänge zwischen den Dichten der linearen Unterrräume im n-dimensionalen Raume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. **11** (1936), 249–310.

[Po12] Poincaré, H., *Calcul des probabilités*, 2nd Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1912.

[R17] Radon, J., Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ver. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math. Nat.* **69** (1917), 262–277.

[Re02] Reventós, A., Lluis Antoni Santaló i Sors, *La Gaceta de la RSME*, **5** (2002), 73–106.

[SSR56] Sancho de San Román, J., Twisted curves with constant affine width, *Collectanea Math.* **8** (1956), 85–98.

[SSR57] Sancho de San Román, J., A new concep of affine breadth of oval bodies, *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. (España)* **51** (1957), 229–244.

[SSR63] Sancho de San Román, J., On an affine width of closed convex sets, *Col. Intern. de Geometría Diferencial, Santiago de Compostela* (1963), 53–62.

[SSR64] Sancho de San Román, J., Relatively invariant measures on homogeneous spaces and applications to integral geometry, *RAME, Valencia* (1964), 103–108.

[SSR67] Sancho de San Román, J., On the existence of relatively invariant measures in a Klein space, *Acta. Ci. Compostelana* **4** (1967), 159–164.

[S36.3] Santaló, L. A., Geometría Integral 4: Sobre la medida cinemática en el plano, *Hamburg Abhandlungen* **11** (1936), 222–236.

[S36.4] Santaló L. A., Integral Geometrie 7: Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano y en el espacio, *Rev. R. Acad. Cienc. Ex. Fís. Nat. (España)* **33** (1936), 3–50.

[S40.1] Santaló, L. A., Sur quelques problèmes de probabilités géométriques, *Tohôku Math. J.* **47** (1940), 159–171.

[S40.2] Santaló, L. A., Algunos problemas geométricos que plantea la navegación aérea, *Bol. Matemático, Buenos Aires* **13**, (1940).

[S41.1] Santaló, L. A., Algunos valores medios y desigualdades referentes a curvas situadas sobre la superficie esférica. *Rev. Un. Mat. Argenntina,* **8** (1942), 113–125.

[S41.2] Santaló, L. A., A theorem and an inequality referring to rectifiable curves, *Amer. J. of Math.* **63** (1941), 635–644.

[S42.1] Santaló, L. A., Integral Formulas in Crofton's Style on the Sphere and some Inequalities Referring to Spherical curves, *Duke Math. J.* **9** (1942), 707–722.

[S42.2] Santaló, L. A., Posibilidades del vuelo interplanetario, *Rev. de Ingeniería y Arquitectura, Rosario,* 1942.

[S43.1] Santaló, L. A., Sobre la distribución probable de corpúsculos en un cuerpo deducida de la distribución en sus secciones, *Rev. Un. Mat. Argentina* **9** (1943), 145–164.

[S43.2] Santaló, L. A., Integral geometry on surfaces of constant negative curvature, *Duke Math. J.* **10** (1943), 687–704.

[S45.1] Santaló, L. A., Sobre el problema del radio de acción de los aviones, *Rev. Centro de Estudiantes, Fac. Ciencias Matemáticas, Rosario* 1945.

[S45.2] Santaló, L. A., Las probabilidades geométricas y la geometría integral, *Bol. de la Fac. de Ingeniería*, Montevideo **3**, 1945.

[S46.1] Santaló, L. A., *Historia de la Aeronáutica*, Espasa-Calpe Argentina, 1946.

[S50.1] Santaló, L. A., Unas fórmulas integrales y una definición del área q-dimensional de un conjunto de puntos, *Rev. de Mat. y Fís. Teór. de la Universidad de Tucumán* **7** (1950), 271–282.

[S50.2] Santaló, L. A., On Parallel Hypersurfaces in the Elliptic and Hyperbolic n-Dimensional Space, *Proc. Amer. Math. Soc.* **1** (1950), 325–330.

[S50.3] Santaló, L. A., Geometry on Projective and Affine Spaces, *Ann. of Math.* **51** (1950), 739–755.

[S51] Santaló, L. A., Geometría Integral, (con J. Rey Pastor.) *Espasa-Calpe Argentina*, 1951.

[S52.1] Santaló, L. A., Measure of sets of geodesics in a Riemannian Space and Applications to Integral formulas in Elliptic and Hyperbolic Spaces, *Summa Brasiliensis Mathematicae* **3** (1952), 1–11.

[S52.2] Santaló, L. A., *Geometría Integral en espacios de curvatura constante*, Publ. de la Comisión Nacional de Energía Atómica (Buenos Aires), Ser. Matemática **1** (1952), 1–68.

[S52.3] Santaló, L. A., Integral Geometry in Hermitian Spaces, *Amer. J. Math.* **74** (1952), 423–434.

[S52.4] Santaló, L. A., Integral Geometry in General Spaces *Proc. Intern. Congress of Math., Cambridge* **1** (1950), 483–489.

[S53] Santaló, L. A., *Introduction to Integral Geometry,* Hermann, París, 1953.

[S54] Santaló, L. A., On the Kinematic Formula in Spaces of Constant Curvature, *Proc. Int. Congress of Math.*, Amsterdam 1954. North-Holland Publ. Co. Amsterdam **2** (1957), 251–252.

[S55.1] Santaló, L. A., Cuestiones de geometría diferencial e integral en espacios de curvatura constante, *Rendiconti del Seminario Mat. di Torino* **14** (1955), 277–295.

[S55.2] Santaló, L. A., Rey Pastor, J. y M. Balanzat*, Geometría Analítica*, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 1955.

[S56.1] Santaló, L. A., On the mean curvatures of a Flattened Convex Body, *Revue du AFC. des Sciences, Univ. Estambul* **21** (1956), 189–194.

[S56.2] Santaló, L. A., Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe et problèmes qui s'y ratachent, *Colloq. sur les questions de réalité en géométrie,* Liège, 1955. Masson, París (1956), 177–190.

[S59] Santaló, L. A., Sobre los sistemas completos de desigualdades entre los elementos de una figura convexa plana, *Math. Notae* **17** (1961), 82–104.

[S60] Santaló, L. A., Two Applications of the Integral Geometry in Affin and Projective Spaces, *Publ. Math. Debreecen* **7** (1960), 226–237.

[S61.1] Santaló, L. A., *Geometrías no euclidianas*, Eudeba, Buenos Aires, (1961).

[S61.2] Santaló, L. A., *Vectores y tensores*, Eudeba, Buenos Aires, 1961.

[S61.3] Santaló, L. A., Sobre sistemas completos de desigualdades entre elementos de una figura convexa plana. *Math. Notae* **17** (1959 / 61), 82–104.

[S62] Santaló, L. A., La obra científica de Beppo Levi, *Math. Notae* **18**, (1962), 23–38.

[S63.1] Santaló, L. A., Una relación entre las curvaturas medias de cuerpos convexos paralelos en espacios de curvatura constante, *Rev. Un. Mat. Argentina* **21** (1963), 121–137.

[S63.2] Santaló, L. A., Sobre la fórmula fundamental cinemática de la Geometría Integral en espacios de curvatura constante, *Math. Notae* **18** (1963), 79 –94.

[S66.1] Santaló, L. A., Valores medios para polígonos formados por rectas al azar, *Revista de Mat. y Fís. Teór. de la Universidad de Tucumán* **16** (1966), 29–44.

[S66.2] Santaló, L. A., *Geometría proyectiva*, Eudeba, Buenos Aires, 1966.

[S67.1] Santaló, L. A., Curvaturas totales absolutas de variedades contenidas en el espacio euclídeo. *Acta Ci. Compostelana* 4 (1967), 149–158.

[S67.2] Santaló, L. A., Horocycles and Convex Sets in the Hyperbolic Plan, *Arch. Math.* (Basel) **28** (1967), 83–89.

[S67.3] Santaló, L. A., *Integral Geometry*, Studies in Global Analysis and Geometry, Ed. por S. S. Chern, Math. Assoc. Amer., Washington, D. C. 1967.

[S68] Santaló, L. A., Horospheres and Convex Bodies in Hyperbolic Space, *Proc. Amer. Math. Soc.* **19** (1968), 390–395.

[S69] Santaló, L. A., Convexidad en el plano hiperbólico, *Rev. Mat. Fís. Teórica Univ. Tucumán* **19** (1969), 174–183.

[S70] Santaló, L. A., Mean values and curvatures, *Izv. Akad. Nauk. Armejan, SSR, Ser. Math.* **5** (1970), 286–295.

[SY72.3] Santaló, L. A., Yáñez, Y., Averages for Polygons Formed by Random Lines in Euclidean and Hyperbolic Planes, *Journal of Applied Probability*, **9** (1972), 140–157.

[S74] Santaló, L. A., Total curvatures of Compact Manifolds immersed in Euclidean Space, *Inst. Naz. di Alta Matemática, Roma, Academic Press* **14** (1974), 363–390.

[S75] Santaló, L. A., The Kinematic Formula in Integral Geometry for Cilinders, *Ann. Mat. Pura Appl.* **103** (1975), 71–79.

[S76] Santaló, L. A., *Integral geometry and geometric probability*, Enciclopedia of Mathematics and its Applications, Massachussets, Addison-Wesley, Reading, 1976.

[S79.1] Santaló, L., A., Integral Geometry, History and Perspectives, *Proc. IV Intern. Congress on Diff. Geometry, Santiago de Compostela,* (1979), 1–48.

[S79.2] Santaló, L. A., Julio Rey Pastor, matemático (con S. Rios y M. Balanzat,) *Madrid: Instituto de España*, 1979.

[S80.1] Santaló, L. A., Notes on the Integral Geometry in the Hyperbolic Plane, *Portugal. Math.* **39** (1980), 239–249.

[S80.2] Santaló, L. A., Cauchy and Kubota Formulas for Convex Bodies in Elliptic n–Space, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **38** (1980), 51–58.

[S80.3] Santaló, L. A., Random Lines and Tesselations in a Plane, *Stochastica* 4, (1980), 3–13.

[S80.4] Santaló, L. A., Probabilidades Geométricas. Geometría Integral y Geometría Estocástica*, An. Acad. Nac. de Ci. Exactas, Físicas y Naturales*, Buenos Aires 32 (1980), 65–93.

[S80.5] Santaló, L. A., Aplicaciones de la Matemática en la Escuela elemental y media (1^a parte), *L'Escaire,* Dep. Mat. Arquitectura, UPC, Barcelona 5 (1980) 48—58.

[S81] Santaló, L. A., Aplicaciones de la Matemática en la Escuela elemental y media (2^a parte), *L'Escaire,* Dep. Mat. Arquitectura, UPC, Barcelona **6** (1981), 29–44.

[S83] Santaló, L. A., Algunos problemas actuales de la Geometria Estocástica, Notas del *First International Symposium* de Barcelona, 1983.

[S84] Santaló, L. A., Geometría Integral del Plano Afín, *Publicación CRM* **2**, 1984.

[S88] Santaló, L. A., Affine Integral Geometry and Convex Bodies, *J. of Microscopy* **152** (1988), 229–233.

[S84.2] Santaló, L. A., Mixed random mosaics. *Math. Nachr.* **117** (1984), 129–133.

[S94] Santaló, L. A., *La matemàtica: una filosofia i una tècnica*, Vic: Eumo editorial, 1993. Versión castellana, Barcelona: Ariel, 1994.

[S04] Santaló, L. A., *Integral Geometry and Geometric Probability.* Second Edition, with a fareword by Marc Kac. Cambridge Univ. Press, 2004.

[SRP51] Santaló, L. A. y Rey Pastor J., *Geometría Integral*, Espasa-Calpe, Argentina, 1951).

[SY72] Santaló, L. A. y Yáñez I., Averages for polygons formed by random lines in euclidean and hyperbolic planes, *J. Appl. Probab.* **9** (1972), 140–157.

[S09] Santaló, L. A., Santaló Selected Works, edited by Naveira, A. M., and Reventós, A. *Springer-Verlag* (2009), pp. 854.

[SK78] Sherpp, K. T. y Kruskal, J. B., Computerized Tomography: the new Medical X-ray Technology, *Amer. Math. Montly* **85** (1978), 420–439.

[SSW77] Smith, K. T. Solmon D. C. y Wagner S. L., Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), 1227–1270.

[So05.1] Solanes, G., Integral Geometry and the Gauss-Bonnet Theorem in constant curvature spaces, *Transations Amer. Math. Soc.* **358** (2005), 1105–1115.

[So05.2] Solanes, G., Integral Geometry of equidistants in hyperbolic space. *Israel J. Math.* 145 (2005) 271–284.

[V35] Varga, O., Ueber Masse Paaren linearer Mannigfaltigkeiten im projektiven Raum P^n, *Rev. Mat. Hispano-Americana* 10 (1935), 241–264.

[VA45] Vidal-Abascal, E., On a theorem of Liouville and generalization of Steiner's formulas, *Rev. Mat. Hispano-Americana* **6** (1946), 254–259.

[VA47.1] Vidal-Abascal, E. A generalization of Steiner's formulae, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 841–844.

[VA47.2] Vidal-Abascal, E., Extensión del concepto de curvas paralelas sobre una superficie. Longitud y área de una curva así deducida de otra dada, *Rev. Mat. Hispano-Americana* **7**, (1947).

[VA47.3] Vidal-Abascal, E. Área engendrada sobre una superficie por un arco de geodésica cuando uno de sus extremos recorre una curva fija y longitud de la curva descrita por el otro extremo, *Rev. Mat. Hispano-Americana* **8** (1947).

[VA48.1] Vidal-Abascal, E., Curvas paralelas sobre superficies de curvatura constante, *Rev. Un. Mat. Argentina* **13** (1948), 135–138.

[VA50.1] Vidal-Abascal, E., Sobre fórmulas de Steiner para el área de una elipse, *Rev. de Geofísica, Madrid* **2** (1947), 425–431.

[VA50.2] Vidal-Abascal, E., *Geometría integral sobre las superficies curvas,* Publ. Observatorio de Santiago 7, Santiago de Compostela, 1950. 63 pp.

[VA53] Vidal-Abascal, E., *Sobre fundamentos de la geometría Integral*, Mem. Real Acad. Ciencias Exactas Físicas y Naturales, 1953.

[VA59] Vidal-Abascal, E., A generalization of integral invariants, *Proceedings A.M.S.* **10** (1959), 721–727.

[VA60] Vidal-Abascal, E., Generalización de los invariantes integrales y aplicación a la geometría integral en los espacios de Klein y de Riemann, *Collectanea Math.* **12** (1960), 71–102.

[VA66] Vidal-Abascal, E., Mesures définies sur les espaces des feuilles d'un feuilletage, *Rend. Circ. Math. Palermo* **15** (1966), 247–256.

[VA67.1] Vidal Abascal, E., On regular foliations, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **17** (1967), 129–133.

[VA67.2] Vidal-Abascal, E., Cuestiones en relación con las medidas en espacios foliados, *Actas 2°. Coloquio de Geometría Diferencial. Santiago de Compostela* (1967), 59–63.

[VAGR52] Vidal-Abascal, E. y Garcia-Rodeja, E., Nota sobre curvas en superficies de curvatura constante, *Collectanea Math.* **5**, (1952), 331-337.

[W71] Warner, F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups*, Glenview, Scott, Foresman Cop. 1971.

[Z80] Zalcman L., Offbeat Integral Geometry, *Amer. Math. Montly* **87** (1980), 161–175.

A. M. Naveira
Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas
Universitat de Valencia
Avenida Andrés Estellés, 1,
46100 Burjassot , Valencia, Spain
naveira@uv.es

A. Reventós
Departament de Matemàtiques
Facultat de Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona
Campus de Bellaterra
08193 Cerdanyola del Vallès, Barcelona, Spain
agusti@mat.uab.cat

Recibido: 21 de octubre de 2009
Aceptado: 16 de noviembre de 2009